

Міністерство науки і освіти України  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Козбур Галина Володимирівна**

УДК 539.3:539.4.01

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**ПРОГНОЗУВАННЯ ГРАНИЧНОГО СТАНУ**  
**ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ**  
**ДВОВІСНИМ РОЗТЯГОМ**

01.02.04 Механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ Г.В. Козбур

Науковий керівник –  
Шкодзінський Олег Ксаверович,  
кандидат технічних наук, доцент

***Ідентичність всіх примірників дисертації  
ЗАСВІДЧУЮ:***

***Вчений секретар спеціалізованої вченої ради  
/Б.Г.Шелестовський/***

Тернопіль – 2021

## АНОТАЦІЯ

**Козбур Г.В. Прогнозування граничного стану елементів конструкцій за пластичного деформування двовісним розтягом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Міністерство освіти і науки України, м. Тернопіль, 2021.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної наукової задачі удосконалення аналітико-розрахункового підходу до прогнозування граничних станів елементів конструкцій за пластичного деформування двовісним розтягом. При допустимості виникнення пластичних деформацій особливо важливою є коректна оцінка граничного навантаження, що передуює моменту втрати стійкості процесу пластичного деформування (ППД) з виникненням області локального деформування та наступним в'язким руйнуванням елемента конструкції. Аналітичний огляд літературних джерел за тематикою дисертації показав, що питання прогнозування дійсних напружень у навантажених елементах конструкцій в момент локалізації пластичних деформацій вивчене недостатньо. Існуючі моделі та методи не враховують властивостей матеріалу, виду напруженого стану та зміну фактичних розмірів навантажених елементів конструкцій у комплексі, що обмежує поле їх застосування. Водночас постійне підвищення запитів на економічність, ефективність конструкцій та їх безпеку в експлуатації робить актуальним завдання удосконалення аналітично-розрахункового підходу до прогнозування граничних станів металевих конструкційних матеріалів за складного напруженого стану (СНС).

Об'єктом дослідження є поведінка матеріалів при пружно-пластичному деформуванні за складного напруженого стану. Предметом дослідження є умови досягнення граничного стану елементів конструкцій за пластичного деформування двовісним розтягом (граничні дійсні напруження втрати стійкості процесу пластичного деформування).

У першому розділі здійснено огляд існуючих критеріїв міцності пластичних матеріалів за СНС. Найчастіше в інженерній практиці використовують класичні підходи Мізеса та Треска. Критерії, які є їх узагальненням, показують краще узгодження з даними експерименту. Побудова узагальненої кривої деформування для відслідковування напружено-деформованого стану матеріалу впродовж усього процесу навантаження значно звужує довірчу зону експериментальних точок, отриманих за різних видів СНС. Точне прогнозування границі міцності вимагає врахування фактичних розмірів навантаженого елемента та побудови дійсної узагальненої кривої деформування. Розрахунок граничних значень дійсних напружень в момент втрати стійкості ППД за одновісного розтягу, який ґрунтується на використанні критерію Свіфта-Марціньяка та аналітичного співвідношення  $\tilde{\sigma} = d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$  між дійсними напруженнями та дотичним модулем в дійсних напруженнях, відомий як схема Консідера. Для прогнозування граничного тиску в тонкостінних трубах використовують співвідношення  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$ , що містить коригувальний множник  $\frac{1}{2}$  біля дотичного модуля. У даній роботі ставилось завдання розробити методикку визначення граничних значень дійсних напружень та реальних навантажень в елементах конструкцій типових форм за різних видів плоского напруженого стану, яка би враховувала як фізико-механічні властивості матеріалу, так і зміни фактичних розмірів при рівномірному пластичному деформуванні.

У другому розділі розроблено систему еквівалентних координат для аналітичного опису узагальненої діаграми деформування, яка узгоджується з класичними підходами та враховує результати експериментів. Запропонована феноменологічна модель узагальненої кривої деформування інтегрально враховує фізико-механічні властивості матеріалу через введення параметра  $p$ . У часткових випадках еквівалентні напруження і деформації зводяться до класичних: при  $p=1$  отримуються формули для визначення найбільших дотичних напружень та кутових деформацій  $\tau_{\max}$ ,  $\gamma_{\max}$ , при  $p=2$  – інтенсивності напружень і деформацій  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ . На основі дослідних даних, запозичених з

відкритих джерел для серії конструкційних матеріалів встановлено, що існує таке розрахункове значення параметра  $p$ , для якого можна побудувати криву деформування з найменшим показником розсіювання точок. Отримано оптимальні значення параметра  $p$ , рівняння регресії для узагальнених кривих деформування та відповідні показники якості за результатами кількох дослідів на двовісний розтяг.

У третьому розділі на основі принципу максимуму навантаження сформульовано аналітичні умови досягнення дійсної границі міцності для конструкційних елементів типових геометричних форм (смуги, пластини, тонкостінного циліндра та тонкостінної осесиметричної оболонки) за найпростіших типів навантажень. Принцип максимуму навантаження використано для отримання двох видів залежностей: граничних умов, графіками яких є січні дійсних діаграм деформування, та дотичних модулів. Граничні умови, отримані для тонкостінних осесиметричних оболонок, застосовні до напружених станів, близьких до внутрішнього тиску або осьового розтягу. Дотичні модулі використано при конструюванні узагальненої умови втрати стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної труби за комбінованого навантаження внутрішнім тиском та розтягом. Проаналізовано вплив виду напруженого стану та геометричних параметрів конструкційних елементів на граничні значення дійсних напружень в момент утворення місцевих деформацій. Аналітично підтверджено, що ресурс міцності тонкостінного циліндра є найменшим за навантаження лише внутрішнім тиском. Незначне довантаження осьовим розтягом збільшує граничні значення дійсних розрахункових колових напружень для труби, але зменшує їх для осесиметричної оболонки додатної гаусівської кривизни.

У четвертому розділі розроблено методику прогнозування граничних станів тонкостінних оболонок, навантажених внутрішнім тиском та осьовим розтягом, із врахуванням їх геометрії. Встановлено аналітичну залежність для знаходження дійсних напружень на початку локалізації деформацій, що містить коригувальний множник, який враховує фізико-механічні властивості матеріалу,

вид напруженого стану та геометрію елемента в комплексі. Розрахункові значення коригувального множника для випадку комбінованого навантаження тонкостінного циліндра внутрішнім тиском та осьовим розтягом, отримані для сталей чотирьох марок (сталь 45, 10ГН2МФА, 15Х2НМФА, Х16Н6), лежать в інтервалі (0,2; 0,9). Розмах значень коригувального множника для кожної з чотирьох марок сталей становив 0,4–0,45.

У п'ятому розділі методику реалізовано для тонкостінних циліндричних труб, виготовлених з різних типів пластичних конструкційних матеріалів. Для двох марок сталей (вуглецевої сталі 45 та легованої сталі 10ГН2МФА) показане збільшення розрахункового порогу міцності за незначного додаткового навантаження труби, навантаженої тиском, осьовим розтягом ( $\sigma_z/\sigma_\theta = 0,6..0,8$ ). Зі збільшенням показника тонкостінності удвічі (від 0,08 до 0,16) максимальні розрахункові граничні колові напруження (при  $\sigma_z/\sigma_\theta = 0,6$ ) зменшуються на 2-5%, що підтверджує недоцільність покращення міцнісних характеристик елементів конструкцій лише за рахунок збільшення їх масивності. Збільшення показника  $h/R$  від 0,08 до 0,11 дозволяє збільшити внутрішній тиск в 1,5 рази та силу розтягу в 3,5..4 рази при  $\sigma_z/\sigma_\theta \approx 2$  для обох матеріалів. Наступне збільшення відношення  $h/R$  (від 0,11 до 0,16) збільшує допустимий внутрішній тиск в 1,3..1,5 рази, проте зменшує максимально допустимий розтяг в  $\approx 1,5$  рази.

Аналіз результатів роботи показав, що можливе встановлення балансу між фактичною геометрією елемента та навантаженням, яке дозволяє вирішити задачу пошуку оптимального співвідношення «вага-міцність», важливого для практичних застосувань в авіа-, ракето- та машинобудуванні.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що в роботі вперше розроблено аналітичну методику отримання узагальненої кривої деформування, який узгоджує її з експериментальними даними через підбір єдиного параметра шляхом оптимізації; розроблено алгоритм отримання параметра як константи фізико-механічних властивостей матеріалу; встановлено залежності для знаходження дійсної границі міцності в умовах пластичного деформування для типових конструкційних елементів (смуги, пластини, тонкостінної циліндричної

оболонки та осесиметричної оболонки) за плоского напруженого стану; розроблено та теоретично обґрунтовано методику прогнозування граничних станів тонкостінних оболонок за плоского напруженого стану із врахуванням їх геометрії; створено та реалізовано інженерну методику розрахунку граничних навантажень для тонкостінних труб, виконаних з різних типів металевих пластичних матеріалів.

Запропонована в роботі методика прогнозування граничних станів елементів конструкцій дає можливість: встановлювати допустимі рівні навантажень у конструкційних елементах оболонкового типу (газопроводи, газові балони, колектори парогенераторів, резервуари, тощо, в машино-, авіабудуванні, хімічній, харчовій, енергетичній та інших галузях промисловості); обґрунтовувати вибір коефіцієнта запасу та приймати оптимальні інженерно-конструкторські рішення на етапах проектування та експлуатації елементів конструкцій; підвищити ефективність та безпеку використання трубопровідних та зберігаючих систем оболонкового типу; знизити матеріалоємність конструкцій, що зазнають пластичного деформування під навантаженням, забезпечуючи при цьому їх необхідну міцність, що важливо для практичних застосувань в авіа-, ракето- та машинобудуванні. Перспективним є використання методики для оцінювання поведінки матеріалу у вершині тріщини для прогнозування її росту.

Розроблена методика дозволяє удосконалити алгоритми комп'ютерних розрахунків та візуалізації дійсних напружень та деформацій, що відповідають граничним станам елементів конструкцій

**Ключові слова:** границя міцності, дійсна границя міцності, граничне напруження, втрата стійкості процесу пластичного деформування, локалізація деформацій, узагальнена крива деформування, еквівалентні напруження.

## SUMMARY

Kozbur H.V. **Predicting of limiting state of structural elements during plastic deformation by biaxial tension.** – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the Scientific Degree of Candidate of Technical Sciences (specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids). – Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Ternopil, 2021.

Thesis is devoted to solving the current scientific problem of improving the analytical and computational approach to predicting limit states of structural elements by plastic deformation by biaxial tension. If plastic deformation is allowed to occur, it is especially important to correctly estimate the ultimate load, which precedes the moment of uniform plastic stability loss with the emergence of a local plastic deformation zone and subsequent viscous destruction of the structural element. An analytical review of the literature on the topic of the dissertation showed that the issue of predicting the true stresses in the loaded structural elements at the moment of strain localization is insufficiently studied. Existing models and methods do not take into account material properties, type of stress state and the change in the actual dimensions of the loaded structural elements in the complex, which limits their field of application. At the same time, the constant increase in demand for lightness, structures efficiency and safety in operation makes it urgent to improve the analytical and computational approach to forecasting the limit states of metallic structural materials under complex stress state (CSS).

The object of research is behavior of materials during elastic-plastic deformation under a complex stress state. The subject of the study is the conditions for achieving the limiting state of structural elements under plastic deformation by biaxial tension (ultimate actual stresses of uniform plastic stability loss).

The first chapter provides an overview of the existing criteria for the strength of plastic materials under CSS. Most often in engineering practice, the classical approaches of Mises and Treska are used, although the new criteria, which are their generalization, show a better agreement with experimental data. The construction of

a generalized stress-strain curve to track the stress-strain state of the material during the entire loading process significantly narrows the confidence zone of the experimental points obtained with different types of CSS. Accurate prediction of ultimate strength requires taking into account the actual dimensions of the loaded element and constructing a true deformation curve. Calculation of ultimate true stresses at the moment of uniform plastic stability loss under uniaxial tension, based on Swift-Marchiniak criterion and the analytical relationship  $\tilde{\sigma} = d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$  between true stresses and tangent modulus in true stresses, known as Considere scheme. There are also known attempts to use the Considere scheme for predicting the ultimate pressure in thin-walled pipes using the ratio  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$  that contains a correction factor of  $\frac{1}{2}$  of the tangent modulus. The task that was posed in this work was to develop a methodology for determining the limiting values of true stresses and actual loads in structural elements of standard shapes for various types of CSS, which would take into account both the physical and mechanical material properties and changes in the actual dimensions during uniform plastic deformation.

In the second chapter, a system of equivalent coordinates is developed for the analytical description of the generalized stress-strain curve, which is consistent with classical approaches, as well as with the results of experiments. The proposed phenomenological model of the generalized stress-state curve integrates the physical and mechanical properties of material by introducing the parameter  $p$ . In particular cases, equivalent stresses and strains are reduced to classical ones: for  $p=1$ , formulas for determining the greatest shear stresses and angular deformations  $\tau_{\max}$ ,  $\gamma_{\max}$ , and for  $p=2$ , the intensity of stresses and strains  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ , are obtained. Based on experimental data taken from open sources for series of structural materials, it has been established that there is calculated value of the parameter  $p$ , for which it is possible to construct a stress-strain curve with the smallest scattering of points. The optimal values of the parameter  $p$ , the regression equation for the generalized stress-strain curve and the corresponding quality indicators according to the results of several experiments on biaxial tension are obtained.



In the third chapter, on the basis of the maximum load principle, analytical conditions are formulated for achieving the true ultimate strength for structural elements of typical geometric shapes (strip, plate, thin-walled cylinder and thin-walled axisymmetric shell) for the simplest types of loads. The principle of maximum load is used to obtain two types of dependencies: boundary conditions, the graphs of which are secants of true stress-strain diagrams, and tangent modules. Boundary conditions, obtained for thin-walled axisymmetric shells, are applicable to stress states close to internal pressure or axial tension. The tangent modules are used to construct a generalized condition for the uniform plastic stability loss of a thin-walled pipe with a combined load of internal pressure and tension. The influence of the type of stress state and geometric parameters of structural elements on the limiting values of true stresses at the moment of formation of local deformations is analyzed. It has been analytically confirmed that the strength life of a thin-walled cylinder is the smallest for loading only by internal pressure. A slight additional load of the cylinder by axial tension increases the limit values of the actual design circular stresses for the pipe, but decreases them for an axisymmetric shell of positive Gaussian curvature.

In the fourth chapter method for predicting the limiting states of thin-walled shells loaded with internal pressure and axial tension is developed, taking into account their geometry. An analytical dependence for finding true stresses at the beginning of the strain localization, which contains a correction factor that takes into account the physical and mechanical properties of the material, the type of stress state and the geometry of the element in the complex, is established. The calculated values of the correction factor for the case of the combined load of a thin-walled cylinder by internal pressure and axial tension, obtained for steels of four grades (steel 45, 10MnH2MoV, 15Cr2HMoV, Cr16H6), lie in the range (0,2; 0,9). The range of values of the correction factor for each of the four steel grades was 0,4–0,45.

In the fifth chapter, the developed technique for thin-walled cylindrical pipes made of various types of plastic structural materials is tested. For two grades of steels (carbon steel 45 and alloy steel 10MnH2MoV), an increase in the calculated strength threshold is shown with an insignificant additional load of pressurised pipe with axial

tension ( $\sigma_z/\sigma_\theta=0,6..0,8$ ). With increasing the ratio of wall thickness to diameter twice (from 0,08 to 0,16), the maximum calculated limit circuit stresses (at  $\sigma_z/\sigma_\theta=0,6$ ) decrease by 2–5%, which confirms the inexpediency of improving the strength of structural elements only by increasing their massiveness. Increasing the ratio  $h/R$  from 0,08 to 0,11 makes it possible to increase the internal pressure by 1,5 times and tensile strength by 3,5..4 times when  $\sigma_z/\sigma_\theta \approx 2$  for both materials. The next increase in the  $h/R$  ratio (from 0,11 to 0,16) increases the allowable internal pressure by 1,3..1,5 times, but reduces the maximum allowable tension by  $\approx 1,5$  times.

Analysis of the results showed that it is possible to establish a balance between the actual geometry of the element and the load, which can solve the problem of finding the optimal ratio "weight–strength", important for practical applications in aircraft, rocket and mechanical engineering.

The scientific novelty of the obtained results lies in the fact that for the first time an analytical description of the generalized stress-strain curve is proposed, which agrees it with experimental data through the selection of a single parameter by optimization; an algorithm for obtaining the parameter as a constant of physical and mechanical properties of the material is developed; dependences for finding the boundary conditions under plastic deformation for typical structural elements (strips, plates, thin-walled cylindrical shells and axisymmetric shells) under a complex stress state are formulated; a new method of finding the real tensile strength in samples of isotropic plastic structural materials under CSS, taking into account their geometry is developed and substantiated; the engineering method is created and implemented for thin-walled pipes made of different types of metal plastic materials.

The proposed method for finding the limiting values of actual stresses makes it possible to establish admissible levels of loadings in shell-type structural elements (gas pipelines, gas cylinders, collectors of steam generators, reservoirs, etc., in mechanical engineering, aircraft construction, chemical, food, energy and other industries); justify the choice of safety factor and make optimal engineering solutions at structural elements design and operation stages; to increase the efficiency and safety of using pipelines and shell-type saving systems; to reduce the material

consumption of structures that undergo plastic deformation, providing their required strength, which is important for practical applications in aircraft, rocket and mechanical engineering. It is promising to use the method for assessing the behavior of the material at the crack tip to predict its growth.

The developed method for predicting the strength of materials under a complex stress state allows to improve the operation of computer systems and increase the accuracy of calculations and visualization of stress-strain states of heavily loaded structural elements, taking into account their geometry.

**Key words:** ultimate strength, true ultimate strength, ultimate stress, uniform plastic stability loss, strain localization, generalized stress-strain curve, equivalent stresses.

**СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Шкодзінський О. К., Козбур Г. В., Костишин С. О. Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. 2005. № 10 (1). С. 25–30. (**Google Scholar**)
2. Шкодзінський О. К., Козбур Г. Методика дослідження стійкості процесу пластичного деформування ізотропних матеріалів для плоского напруженого стану. *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. 2007. № 12 (4), С. 26–31. (**Google Scholar**)
3. Шкодзінський О., Козбур Г. Дослідження стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної трубки в умовах складного напруженого стану. *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. 2009. № 14 (3). С. 24–31. (механіка та матеріалознавство). (**Google Scholar**)
4. Козбур Г. В. Пружно-пластичне деформування вісесиметричної оболонки під впливом внутрішнього тиску і розтягу. *Наукові нотатки*. 2016. № 53. С. 79–83. ISSN: 2415-3966 (**Google Scholar**)
5. Kozbur H. Prediction technique for thin-walled cylindrical tubes boundary state. *Scientific Journal of TNTU*. 2019. № 94 (2). P. 145–155. (**Index Copernicus, Google Scholar**)
6. Козбур Г. В., Шкодзінський О. К. Осесиметричні пластичні деформації тонкостінного циліндра. *Наукові нотатки*. 2019. № 68. С. 41-49. ISSN: 2415-3966 (**Google Scholar**) <https://doi.org/10.36910/6775.24153966.2019.68.6>
7. Kozbur H., Shkodzinsky O., Kozbur I., Gashchyn N. Prediction of the Boundary States for Thin-Walled Axisymmetric Shells Under Internal Pressure and Tension Loads, *Strojnícky časopis - Journal of Mechanical Engineering*. 2019. № 70 (1). P. 57–68. (**SCOPUS**) <https://doi.org/10.2478/scjme-2020-0006>  
ISSN: 0039-2472 (print) ISSN: 2450-5471 (online)
8. Kozbur H., Shkodzinsky O., Kozbur I. Construction of a generalized hardening curve for isotropic plastic metal materials. *Scientific Bulletin Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas*. 2020. № 1 (48), P. 38–46.

- ISSN: 1993-9965 (print) ISSN 2415-3524 (online) (**Index Copernicus, Google Scholar**) [https://doi.org/10.31471/1993-9965-2020-1\(48\)-38-46](https://doi.org/10.31471/1993-9965-2020-1(48)-38-46)
9. Kozbur G. V., Shkodzinsky O. K., Gladio O. Yu. Methods of construction of the generalized hardening curve. *Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi*. 2020. № 2 (61). P. 78–85. ISSN: 2076-2429 (print) ISSN: 2223-3814 (online) (**Index Copernicus, Google Scholar**) <https://doi.org/10.15276/opu.2.61.2020.09>
  10. Kozbur H. Method of predicting necking true stress in a thin-walled tube under a complex stress state. *Strojnícky časopis - Journal of Mechanical Engineering*. 2020. № 70 (2). P. 101–116. ISSN: 0039-2472 (print) ISSN: 2450-5471 (online) (**SCOPUS**) <https://doi.org/10.2478/scjme-2020-0024>
  11. Halyna Kozbur; Oleh Shkodzinsky; Lesia Dmytrotsa. Numerical prediction of the strength of a thin-walled pipe loaded with internal pressure and axial tension, taking into account its actual dimensions. *Scientific Journal of TNTU*. 2020. № 100 (4). P. 11–19. (**Google Scholar**)
  12. Шкодзінський О., Козбур Г., Костишин С. Аналіз властивостей ізотропних металевих матеріалів за умов великих пластичних деформацій при різних видах СНС. *Матеріали VIII наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя, 11–12 травня 2004 року*. Т.: ТДТУ. 2004. С. 5.
  13. Шкодзінський О. К., Козбур Г. В. Вплив виду напруженого стану на міцність сталевих трубчастих зразків тиском. *Матеріали Всеукраїнської наукової конференції Тернопільського державного технічного університету ім. І. Пулюя, 13–14 травня 2009 року*. Т.: ТДТУ, 2009. С. 5.
  14. Шкодзінський О. К., Козбур Г. В. Умова втрати стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної циліндричної трубки в умовах СНС. *Матеріали міжнародної конференції «Сучасні проблеми механіки» Львівського національного університету ім. І. Франка, 7–9 грудня 2009 р.* С. 90–91.
  15. Шкодзінський О. К., Козбур Г. В. Пластичне деформування тонкостінної циліндричної трубки, навантаженої осьовим розтягуючим зусиллям та внутрішнім тиском. *Матеріали міжнародної науково-технічної конференції ТНТУ, 19–21 травня 2010 р.* С. 113.

16. Козбур Г. В., Шкодзінський О. К. Вплив опуклості тонкостінної осесиметричної оболонки на її міцнісні характеристики. *Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» до 100-річчя з дня заснування НАН України та на вшанування пам'яті Івана Пулюя (100-річчя з дня смерті), 22–24 травня 2018 р.* Т.: ТНТУ, 2018. С. 56.
17. Козбур Г., Гладько О. Валідація моделі єдиної кривої деформування для легованих сталей. *Матеріали конференцій МЦНД, 10.04.20.* Луцьк, 2020. С. 77–79. <https://doi.org/10.36074/0.04.2020.v1.07>
18. Козбур Г. Знаходження параметра для отримання узагальненої кривої зміцнення для ізотропних пластичних металевих матеріалів. *Актуальні проблеми інженерної механіки : тези доп. VII Міжнар. наук.-практ. конф.* Одеса : ОДАБА, 2020. С. 159–162. ISBN 978-617-7900-05-3
19. Козбур Г., Шкодзінський О. Валідація моделі узагальненої кривої деформування для конструкційних сталей. *Математичні проблеми технічної механіки – 2020. Міжнародна Наукова Конференція, Дніпро, Україна.* С. 45–47.
20. Козбур Г. В., Козбур І. Р. Валідація моделі узагальненої кривої зміцнення для вуглецевих сталей. *II Міжнародна науково-технічна інтернет-конференція «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» 16 квітня 2020 року, Покровськ, Україна.* С. 213–215.
21. Авторське право на твір «Комп'ютерна програма «The modeling of stress-state-independent deformation curve». Міністерство розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України, свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 96585 від 10.03.2020.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>19</b>
<b>Розділ 1. ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ</b>	
<b>КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ</b>	
<b>ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ ЗА СКЛАДНОГО</b>	
<b>НАПРУЖЕНОГО СТАНУ.....</b>	
	<b>26</b>
1.1. Порівняльна характеристика існуючих критеріїв міцності пластичних матеріалів за складного напруженого стану.....	28
1.2. Відомі теорії узагальнення деформаційних властивостей металевих конструкційних матеріалів за великих деформацій .....	31
1.3. Прогнозування граничних значень дійсних напружень з використанням дотичних модулів .....	35
1.4. Оцінювання граничних навантажень в конструкційних елементах оболонкового типу із врахуванням їх геометрії.....	37
1.5. Висновки за результатами огляду та постановка задачі .....	41
<b>Розділ 2. МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ</b>	
<b>ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНИХ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ</b>	
<b>ЗА СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ .....</b>	
	<b>42</b>
2.1 Концентричність граничних поверхонь плинності як умова узагальнення діаграми деформування пластичних металевих матеріалів.....	43
2.2 Методика побудови узагальненої кривої деформування.....	45
2.2.1 Уведення еквівалентних деформацій.....	45
2.2.2 Знаходження параметра $p$ за функціоналом якості .....	46
2.2.3 Знаходження параметра $p$ за функцією помилок.....	48
2.2.4 Аналіз розрахунків параметра $p$ .....	49
2.3 Апроксимація узагальненої кривої деформування.....	50
2.4 Висновки до розділу 2 .....	53

<b>Розділ 3. ФОРМУЛЮВАННЯ УМОВ НАСТАННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЇХ ГЕОМЕТРІЇ.....</b>	<b>54</b>
3.1. Дійсна границя міцності смуги за одновісного розтягу.....	55
3.1.1. Умови втрати стійкості пластичного деформування смуги .....	55
3.1.2. Дотичний модуль та діаграма Консідера.....	57
3.2. Дійсна границя міцності пластини за двовісного розтягу .....	58
3.2.1. Умови втрати стійкості пластичного деформування пластини .....	58
3.2.2. Формулювання граничних умов в еквівалентних координатах.....	59
3.2.3. Апробація граничної умови (3.26).....	61
3.3. Дійсна границя міцності тонкостінного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском та розтягом.....	64
3.3.1. Основні припущення та основні співвідношення задачі .....	64
3.3.2. Умови втрати стійкості пластичного деформування тонкостінного циліндра.....	67
3.3.3. Масштабний ефект при реалізації простого навантаження тонкостінного циліндра.....	70
3.3.4. Аналіз залежностей дійсних граничних напружень від виду напруженого стану та геометричних параметрів тонкостінного циліндра.....	71
3.3.5. Графічний аналіз залежностей дійсних граничних напружень від виду напруженого стану та геометричних параметрів тонкостінного циліндра.....	72
3.3.6. Узгодження з експериментальними даними .....	74
3.4. Дійсна границя міцності осесиметричної тонкостінної оболонки, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом.....	77
3.4.1. Основні припущення та основні співвідношення задачі .....	77
3.4.2. Знаходження залежності між дійсними граничними коловими напруженнями та деформаціями .....	80
3.4.3. Встановлення залежності між дійсними граничними меридіональними напруженнями та деформаціями .....	82



3.4.4. Графічний аналіз залежностей граничних дійсних напружень від виду напруженого стану та фактичних розмірів навантажених елементів.....	84
Висновки до розділу 3 .....	89
<b>Розділ 4. НОВИЙ МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ТОНКОСТІННОЇ ОБОЛОНКИ, НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ ТА ОСЬОВИМ РОЗТЯГОМ.....</b>	<b>90</b>
4.1. Дійсна узагальнена діаграма деформування .....	90
4.2. Дотичні модулі до дійсної узагальненої кривої деформування .....	92
4.2.1. Аналіз дотичного модуля до кривої деформування в дійсних колових напруженнях .....	93
4.2.2. Аналіз дотичного модуля до кривої деформування в дійсних осьових напруженнях .....	95
4.2.3. Дотичний модуль до узагальненої кривої деформування .....	95
4.3. Узагальнена умова заходження границі міцності тонкостінної труби, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом.....	99
4.4. Оцінка граничних навантажень .....	102
4.5. Алгоритм методу прогнозування граничних станів тонкостінної труби, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом.....	103
4.6. Висновки до розділу 4 .....	105
<b>Розділ 5. ПРОГНОЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ТОНКОСТІННИХ ТРУБ, НАВАНТАЖЕНИХ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ ТА РОЗТЯГОМ .....</b>	<b>106</b>
5.1. Знаходження сталої фізико-механічних властивостей матеріалу $p$ .....	107
5.2. Встановлення залежності між дійсними напруженнями та деформаціями в еквівалентних координатах .....	110
5.3. Знаходження дійсних граничних напружень .....	113
5.4. Визначення граничних значень внутрішнього тиску та розтягу.....	122
5.5. Висновки до розділу 5 .....	125
<b>ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....</b>	<b>126</b>
<b>Список використаних джерел.....</b>	<b>129</b>

<b>ДОДАТКИ.....</b>	<b>143</b>
Додаток А. Знаходження параметра $p$ та рівняння регресії для узагальненої кривої деформування .....	144
Додаток Б. Дерево рішень для знаходження граничних дійсних напружень залежно від геометрії елемента.....	146
Додаток В. Дерево рішень для знаходження дотичних модулів залежно від геометрії елемента.....	147
Додаток Г. Виведення формули для знаходження дотичного модуля до дійсної узагальненої кривої деформування.....	148
Додаток Д. Список публікацій здобувача.....	151
Додаток Е. Акт впровадження результатів дисертаційної роботи.....	154

## ВСТУП

### Обґрунтування вибору теми дослідження

Ключовим завданням при прогнозуванні міцності інженерних конструкцій є визначення максимальних допустимих навантажень, при перевищенні яких конструкція втрачає здатність чинити опір деформуванню та зазнає руйнування. При допустимості виникнення пластичних деформацій у матеріалі конструкції особливо важливою є коректна оцінка граничного навантаження, що передуює моменту втрати стійкості процесу пластичного деформування (ППД) з виникненням області локального деформування та наступним руйнуванням в'язкого характеру. Експериментально-лабораторне моделювання поведінки матеріалів в реальних експлуатаційних умовах із врахуванням усіх можливих комбінацій силових та інших чинників є складним завданням, оскільки вимагає пошкодження чи руйнування великої кількості зразків, створення і утримання вартісного обладнання. Тому більшість досліджень граничних станів зразків матеріалів за складного напруженого стану (СНС) зводиться до побудови критеріїв міцності, або умов еквівалентності. Такий підхід дозволяє моделювати багатоваріантні напружено-деформовані стани конструкцій та прогнозувати максимальні навантаження на основі обмеженої кількості дослідів. Загальним недоліком існуючих критеріїв є обмежене застосування для конкретних типів матеріалів та вузького діапазону видів напружених станів. На сьогоднішній день не існує теорії чи критерію, який би однозначно встановлював величини граничних навантажень для елементів конструкцій із врахуванням їх геометрії, виду СНС та властивостей матеріалу. Окрім того, розбіжності в розрахункових інженерних значеннях, отриманих аналітичним шляхом за нормативними документами і стандартами та з допомогою чисельних методів, наприклад, методу скінченних елементів, ускладнюють процедуру прийняття оптимальних рішень.

Розробка нових конструкційних матеріалів та необхідність врахування нових умов роботи конструкцій, підвищення запитів на економічність, ефективність конструкцій та безпеку в їх експлуатації постійно посилюють вимоги до точності та надійності розрахункових граничних значень показників напружено-деформованого стану. Тому удосконалення аналітично-розрахункового підходу до прогнозування граничних станів зразків матеріалів за складного напруженого стану і розрахунку на його основі граничних значень навантажень є **актуальною** інженерною та науковою задачею.

Розрахунок значень дійсних напружень, які виникають при рівномірному пластичному деформуванні конструкційних елементів аж до початку локалізації деформацій дозволить виносити у більшій мірі обґрунтовані рішення щодо безпеки експлуатації конструкцій, удосконалити підхід до визначення реалістичного коефіцієнта запасу при проєктуванні інженерних конструкцій, зменшити матеріаломісткість конструкцій, що критично важливо для деяких галузей з технічної точки зору, та економічно важливо для господарського комплексу в цілому.

### **Зв'язок з науковими програмами, планами, темами**

Дослідження за темою дисертації виконувалось у рамках науково-дослідних держбюджетних тем у Тернопільському національному технічному університеті імені І. Пулюя «Математичні моделі і методи аналізу залишкового ресурсу пружно-пластичних тіл з концентраторами напружень складної форми» (2012 р., № д. р. 0112U002201) та «Створення нового покоління методів фрактодіагностування матеріалів і конструкцій на основі використання нейронних мереж» (2020 р., № д. р. 0119U001323).

### **Мета і завдання дослідження**

*Метою* дослідження є розробка аналітичної методики прогнозування граничного стану металевих елементів конструкцій типових геометричних форм за пластичного деформування двовісним розтягом при статичному навантаженні із врахуванням впливу їх геометрії.

Для досягнення мети необхідно було вирішити такі *завдання*:

1. розробити систему еквівалентних координат для аналітичного опису узагальненої діаграми деформування, яка б узгоджувалась з класичними підходами та враховувала результати експериментів;
2. розробити алгоритм знаходження узагальненого параметра фізико-механічних властивостей матеріалу для побудови узагальненої кривої деформування;
3. встановити залежності для знаходження дійсної границі міцності для навантажених конструкційних елементів типових геометричних форм за плоского напруженого стану;
4. розробити та науково обґрунтувати метод прогнозування граничних станів тонкостінних оболонок за плоского напруженого стану із врахуванням їх геометрії;
5. створити інженерну методику розрахунку граничних навантажень для тонкостінних труб різної геометрії за одночасної дії внутрішнього тиску та розтягу.

*Об'єктом* дослідження є поведінка матеріалів за пружно-пластичного деформування в умовах складного напруженого стану.

*Предметом* дослідження є умови досягнення граничного стану елементів конструкцій за пластичного деформування двовісним розтягом (граничні дійсні напруження втрати стійкості процесу рівномірного пластичного деформування).

### **Методи дослідження**

При вирішенні завдань дисертаційного дослідження було використано:

- кореляційно-регресійний аналіз для отримання рівняння узагальненої кривої деформування;
- критерій максимального навантаження та аналітичні методи інтегрування диференціальних рівнянь для виведення умов досягнення граничних станів конструкційних елементів типової геометрії;

- методологію побудови Консідера, графічний та наближений методи розв'язування рівнянь для прогнозування граничних станів конструкційних елементів за плоского напруженого стану.

### **Наукова новизна одержаних результатів**

В дисертаційному дослідженні:

- розроблено новий метод побудови узагальненої кривої деформування через уведення еквівалентних напружень та деформацій на основі узагальнення класичних підходів та запропоновано методику знаходження параметра  $p$  як сталої фізико-механічних властивостей матеріалу, що найкраще узгоджує криву з результатами випробувань;
- уперше отримано аналітичні залежності для знаходження дійсної границі міцності в умовах в'язкого руйнування конструкційних елементів типових геометричних форм за плоского напруженого стану;
- розроблено та науково обґрунтовано новий метод прогнозування граничних станів тонкостінних оболонок, що комплексно враховує вид напруженого стану, фізико-механічні властивості матеріалу та геометрію навантажених елементів;
- уперше створено та реалізовано інженерну методику розрахунку граничних навантажень для тонкостінних труб, виконаних з різних типів металевих пластичних матеріалів, за одночасної дії внутрішнього тиску та розтягу.

Отримали подальший розвиток:

- методи побудови узагальненої кривої деформування пластичних матеріалів;
- методи знаходження дійсних напружень, що виникають при рівномірному пластичному деформуванні навантажених конструкційних елементів аж до появи локальних деформацій;
- спосіб використання методології на основі схеми Консідера для визначення дійсної границі міцності пластичних ізотропних матеріалів за складного напруженого стану.

### **Практичне значення одержаних результатів**

Запропонована методика знаходження граничних значень дійсних напружень дає можливість прогнозувати міцність тонкостінних посудин під тиском (газопроводи, газові балони, колектори парогенераторів, резервуари, тощо, в машино-, авіабудуванні, хімічній, харчовій, енергетичній та інших галузях промисловості); встановлювати допустимий рівень навантажень та обирати реалістичний коефіцієнт запасу; приймати оптимальні інженерно-конструкторські рішення на етапах проектування та експлуатації елементів конструкцій; підвищити ефективність та безпеку використання трубопровідних та зберігаючих систем оболонкового типу. Отримані в роботі результати досліджень (методику розрахунку граничних навантажень зразків металевих матеріалів та комп'ютерну програму, що реалізує розрахунок) впроваджено у виробництво підприємством ТДВ «Булат» (акт впровадження № 03/12 від 03.12.2020 р.).

### **Особистий внесок здобувача**

Основу дисертаційної роботи складають результати, отримані автором самостійно. Постановка мети та завдань, обговорення, аналіз результатів та можливостей їх практичного застосування проведені разом з керівником. Дисертанту належать виведення аналітичних залежностей методики, розробка алгоритму та реалізація з використанням комп'ютерної техніки. Наукові праці [4, 5, 10, 18] опубліковано дисертантом без співавторів. У наукових статтях зі співавторами дисертанту належать: розробка методики отримання узагальненої кривої деформування [1, 7, 8]; участь у постановці задач, вибір методів їх розв'язання [1–3, 6–9, 11], участь у розробці методики прогнозування міцності елементів різної геометрії [10] та її інженерної реалізації [11].

### **Апробація результатів дисертації**

Основні наукові результати, викладені у дисертації, доповідались і обговорювались на науковій конференції ТДТУ (Тернопіль, 2004); Всеукраїнській науковій конференції ТДТУ (Тернопіль, 2009); Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» ЛНУ ім. І. Франка (Львів, 2009);

Міжнародній науково-технічній конференції ТНТУ (Тернопіль, 2010); Міжнародній науково-технічній конференції «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» до 100-річчя з дня заснування НАН України та на вшанування пам'яті І. Пулюя (Тернопіль, 2018); Міжнародній конференції МЦНД «Традиційні та інноваційні підходи до наукових досліджень» (Луцьк, 2020); VII Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2020); Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпро, 2020); II Міжнародній науково-технічній інтернет-конференції «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» (Покровськ, 2020).

У повному обсязі дисертаційна робота представлялась та обговорювалась на науковому тематичному семінарі «Механіка, міцність матеріалів і конструкцій» ТНТУ ім. І. Пулюя (2020); науковому семінарі відділу діагностики корозійно-водневої деградації матеріалів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України (2021).

### **Публікації**

За матеріалами дисертаційного дослідження опубліковано 21 наукову працю. Серед 11 наукових статей – 2 статті у закордонному науковому періодичному виданні іншої держави, яке включене до міжнародної наукометричної бази Scopus [7, 10]; 9 статей у наукових фахових виданнях України [1–6, 8, 9, 11], серед яких 3 – у виданнях, включених до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus [5, 8, 9]. Опубліковано 9 тез доповідей та наукових праць в матеріалах наукових та науково-технічних конференцій, серед яких 7 – у міжнародних. В рамках дисертаційного дослідження отримано свідоцтво про авторське право на комп'ютерну програму.



### **Структура дисертації**

Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 136 найменувань та 6 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 154 сторінки, з них основного тексту – 126 сторінок, додатків – 12 сторінок. Дисертація містить 51 рисунок та 10 таблиць.

## **Розділ 1. ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ ЗА СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

Постійне зростання вимог до надійності, довговічності та зменшення матеріалоємності машин і конструкцій зумовлюють необхідність подальшого вдосконалення аналітично-розрахункового апарату механіки твердого деформівного тіла як основи сучасних методів розрахунку несівної здатності конструкцій. В процесі експлуатації матеріали, втілені в конструкційні елементи, зазнають силового, температурного та інших впливів. Проте у першу чергу навантажений елемент повинен зберігати свою цілісність, форму та розміри, тобто мати задовільну опірність плинності та руйнуванню. Разом з тим, не втрачає актуальності проблема складності організації та проведення дослідів з імітації складного напруженого стану (СНС), в умовах якого реально працюють більшість конструкційних елементів. Тому однією з основних задач механіки деформівного твердого тіла є прогнозування граничних значень напружень, пов'язаних з появою недопустимих пластичних деформацій чи руйнуванням, на основі обмеженої кількості дослідів.

При проєктуванні важконавантажених конструкцій оболонкового типу, як то корпуси реакторів, колекторів, парогенераторів та їх елементів, номінальні напруження приймаються нижче від границі плинності. Проте, для елементів, що працюють в умовах інтенсивного короткотривалого одноразового навантаження, допустимою є поява пластичних деформацій. За певного граничного рівня напружень елемент конструкції або втрачає пластичну стійкість, або зазнає локалізації пластичних деформацій. В обох випадках конструкційний елемент втрачає свою подальшу функціональність, пов'язану зі змінами форми та розмірів. Тому для точного прогнозування напружено-деформованого стану елемента в момент досягнення границі міцності необхідно вміти розраховувати дійсні напруження із врахуванням цих змін.

Способом уникнення пошкоджень чи руйнування конструкції, спричинених, в тому числі, похибками при розрахунках, є введення коефіцієнта запасу. Чітких методів розрахунку коефіцієнта запасу не існує, вибір допустимого значення залежить від досвіду експлуатації аналогічних конструкцій, які, у свою чергу, знову пов'язані з їх пошкодженням та руйнуванням, плановим чи аварійним.

Чим більший коефіцієнт запасу, тим більший запас міцності конструкції в експлуатації. Проте великі значення коефіцієнтів запасу призводять до перевитрат матеріалу, масивності, неефективності та неекономічності конструкції.

Удосконалення аналітично-обчислювальних методів прогнозування дійсних значень напружень, що призводять до запуску механізму в'язкого руйнування елемента конструкції через появу місцевих пластичних деформацій, необхідне для отримання максимально точних прогнозних значень граничних напружень та відповідних граничних навантажень із врахуванням як виду та умов навантаження, так і геометричних особливостей конструкції.

В дисертації досліджується дійсний напружений стан елементів конструкцій, що навантажуються монотонно і статично, одновісним чи двовісним розтягом (смуга та пластинка), а також внутрішнім тиском та осьовим розтягом (тонкостінні осесиметричні оболонки), що зазнають значних пластичних деформацій. Запропоновано методіку прогнозування граничних значень дійсних напружень та граничних навантажень у момент втрати стійкості процесу пластичного деформування (ППД), яка враховує як вид напруженого стану, так і геометрію навантаженого елемента. Утворення місцевих деформацій у зразку матеріалу під навантаженням вважається у роботі ознакою досягнення границі міцності.

### 1.1. Порівняльна характеристика існуючих критеріїв міцності пластичних матеріалів за складного напруженого стану

З метою прогнозування границі міцності в експлуатаційних умовах використовують критерії міцності, що ґрунтуються на певних гіпотезах про переважний вплив на механічні властивості матеріалу того чи іншого чинника. Використання концепції еквівалентних напружень дозволяє замінити складнонапружений стан еквівалентним йому простим напруженим станом. В загальному випадку критерії міцності мають вигляд:

$$\sigma_{eq} = f(\sigma_k, \tau_{kp}, \overline{\sigma}_k, \overline{\tau}_{kp}, C_i) \leq K, \quad (1.1)$$

де  $\sigma_k$  – головні нормальні напруження,  $\tau_{kp}$  – дотичні напруження,  $\overline{\sigma}_k, \overline{\tau}_{kp}$  – деякі їх граничні значення, отримані з найпростіших дослідів,  $C_i$  – сукупність сталих матеріалу, що визначаються експериментально,  $K$  – граничне числове значення критерію.

Якщо теорія міцності використовує лише головні напруження, то критерій міцності набуває вигляду:

$$\sigma_{eq} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C_i) \leq K. \quad (1.2)$$

Геометрично критерій виду (1.2) представляється поверхнею в системі координат  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , яку називають граничною поверхнею плинності (чи міцності, залежно від того, який саме граничний стан розглядається – поява пластичних деформацій чи їх локалізація із зародженням макротріщин та подальшим руйнуванням), а слід поверхні у площині  $(\sigma_1, \sigma_2)$  – граничною кривою плинності (міцності). Адекватність та область застосування окремих гіпотез та критеріїв оцінюють за множинами точок у згаданій системі координат, які вдається отримати експериментально.

Критерії міцності для ізотропних матеріалів були розроблені ще в кінці 19 ст. (І. Баушингер, Г. Галілей, Н. Генкі, М.Т. Губер, Ш.О. Кулон, Г. Ламе, І. Максвелл, Ф. Маріот, М. Нав'є та ін.) [1 – 4]. Найбільшого визнання набули «класичні» критерії: критерій найбільших нормальних напружень Галілея,

критерій найбільших відносних видовжень Маріота, критерій найбільших дотичних напружень Треска (Кулона), енергетичний критерій Мізеса (рис. 1.1). Усі класичні теорії мали спільний недолік – не враховували впливу виду напруженого стану та різного опору при дослідях на розтяг та стиск. Критерії Маріота, Треска та Мізеса найкраще узгоджувались із експериментом для матеріалів у пластичному стані.

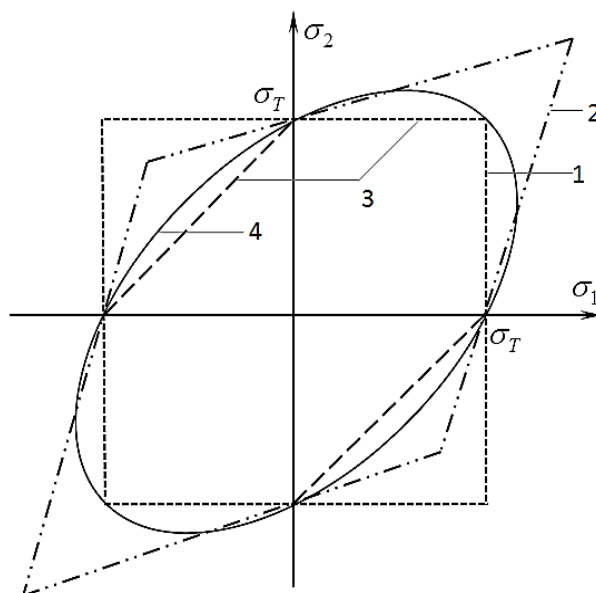


Рис. 1.1. Граничні криві, що відповідають чотирьом класичним критеріям міцності: 1 – найбільших нормальних напружень (Галілея), 2 – найбільших відносних видовжень (Маріота), 3 – найбільших дотичних напружень (Треска), 4 – енергетичному (Мізеса)

Часткова узгодженість класичних теоретичних поверхонь плинності з експериментальними даними сприяла розробці нових підходів до уведення еквівалентних напружень, більшість з яких була узагальненням класичних підходів [5 – 10]. Отримані узагальнені критерії міцності краще узгоджувались з матеріалами в пластичному, крихкому або проміжних станах. Зокрема, для ізотропних матеріалів еквівалентні напруження, введені Хосфордом [10]:

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|^n + |\sigma_2 - \sigma_3|^n + |\sigma_1 - \sigma_3|^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{Писаренком і Лебедевим [13]:}$$

$$\sigma_{eq} = \chi\sigma_i + (1 - \chi)\sigma_1; \quad \text{Ковальчуком [11]: } \sigma_{eq} = \eta\sigma_i + (1 - \eta)(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \text{де } \sigma_{eq} -$$

границя плинності, отримана з дослідів на одновісний розтяг. У статті [12] здійснено детальний огляд основних виразів для еквівалентних напружень та зроблено аналіз їх ефективності для прогнозування міцності матеріалів за СНС.

Поява нових матеріалів, суттєвий вплив новітніх технологій обробки, тощо, сприяли розробці сучасних теорій і критеріїв плинності для ізотропних та анізотропних матеріалів (Писаренка–Лебедева [13], Ковальчука [14], Біргера [15], Жу [16]; Потапової і Ярцева [1]; «натуральний» критерій міцності для ізотропних матеріалів [17] та ін.). Достатньо повний виклад розрахункових рівнянь різних критеріїв плинності зроблено в [13, 14].

Таблиця 1.1

## Узгодженість класичних критеріїв з даними експерименту для металевих матеріалів\*

Researchers	Materials	Specimen	shear/tension $\tau_y/\sigma_y$	Suitable Criterion
Guest, 1900	steel,		0.474, 0.727	
Guest, 1900	steel, brass, etc.	tubes	0.474	
Hancock, 1906,1908	mild steel	solid rods,tube	0.50 to 0.82	
Scoble, 1906	mild steel	solid rods	0.45 to 0.57	Tresca
Smith, 1909	mild steel	solid rods	0.55-0.56	between Tresca and von Mises
Turner, 1909-1911	steels		0.55 to 0.65	Tresca
Mason, 1909	mild steel	tubes	0.5 0.64	Tresca
Scoble,1910	steel		0.376, 0.432, 0.452	no one agreed
Becker, 1916	mild steel	tubes		no one agreed
Seeley and Putnam	steels	bars & tubes	0.6	> von Mises
Seigle and Cretin, 1925	mild steel	solid bars	0.45 to 0.49	Tresca
Lode, 1926	iron, copper etc.	tubes		von Mises
Ros and Eichinger, 1926	mild steel	tubes		von Mises
Taylor and Quinney, 1931	aluminum, steel	tubes		von Mises
	copper, mild steel			>von Mises
Morrison, 1940	mild steel	tubes		Tresca, von Mises
Davis, 1945-1948	copper,	tubes		von Mises
Osgood, 1947	aluminum alloy	tubes		von Mises
Cunningham, 1947	magnesium alloy	tubes		von Mises
Bishop-Hill, 1951	polycrystals	tubes	0.54	von Mises
Fikri, Johnson, 1955	mild steel	tubes		> von Mises
Marin and Hu, 1956	mild steel	tubes		von Mises
Naghdi, Essenberg, and Koff, 1958	aluminum alloy	tubes		> von Mises
Hu and Bratt, 1958	aluminum alloy	tubes		von Mises
Ivey, 1961	aluminum alloy	tubes		Twin shear
Bertsch-Findley, 1962	aluminum alloy	tubes		von Mises
Mair-Pugh, 1964	copper	tubes		Twin shear
Mair-Pugh, 1964	copper	tubes		von Mises
Chernyak <i>et al.</i> , 1965	mild steel	tubes		von Mises
Miastkowski, 1965	brass			von Mises
Rogan, 1969	steel	tubes		Tresca
Mittal, 1969, 1971	aluminum	tubes	0.57	von Mises
Dawson, 1970	polycrystals		0.64	near Twin shear
Phillips <i>et al.</i> , 1968- 1972	aluminum	tubes at elevated temperature		between Tresca and von Mises
Deneshi <i>et al.</i> , 1976	aluminum, copper	tubes, low temperature	0.6	> von Mises
Pisarenko <i>et al.</i> , 1984	copper, Cr-steel	tubes, low temperature		von Mises
Winstone, 1984	nickel alloy	tubes at elevated temperature	0.7	Twin shear
Ellyin, 1989	titanium	tubes	0.66-0.7	Twin shear
Wu-Yeh, 1991	Aluminum	tubes	0.58	von Mises
	stainless steel		0.66-0.7	Twin shear
Ishikawa, 1997	stainless steel	tubes	0.6-0.63	> von Mises
Granlund,Olsson, 1998	structural steel	flat cruciform specimens		between Tresca and von Mises

\*Запозичено із [23]

Численні результати експериментів підтверджували чи спростовували розроблені теорії (Guest, Scoble, Smith, Lode, Taylor-Quinney, Ivey, Paul, Bell, Писаренко і Лебедев, ін.) [1, 13, 18 – 22]. Авторами Кішкіним і Ратнер було

запропоновано попередньо класифікувати металеві матеріали залежно від відношення границі міцності зсуву до границі міцності розтягу.

Результати аналізу узгодженості класичних критеріїв з експериментом для металевих матеріалів, отримані в [23], наведено в табл. 1.1. Критерій найбільшої лінійної деформації (“Twin shear criterion”), що використовується у порівняльній таблиці поряд з класичними критеріями Мізеса і Треска, його геометрична та фізична інтерпретація описані в [24].

Новітні теорії, які базуються на виборі такої форми граничної поверхні, при якій можна найповніше врахувати особливості опору певного класу матеріалів в умовах СНС, уточнюють прогнозні граничні значення напружень порівняно з класичними [25, 26].

Незважаючи на численні дослідження в цій галузі, на сьогодні залишається досить проблематичною оцінка граничних напружень за СНС. Для переважної більшості критеріїв розрахункові значення добре узгоджуються з експериментальними лише для конкретних матеріалів, типів матеріалів чи їх станів. Тому на практиці для інженерних розрахунків найчастіше використовують класичні критерії Мізеса чи Треска, більшою мірою через простоту обчислень.

## **1.2. Відомі теорії узагальнення деформаційних властивостей металевих конструкційних матеріалів за великих деформацій**

Для отримання як граничних міцнісних характеристик матеріалу, так і кривих деформування, використовують експериментальні методи. Криві плинності для плоского напруженого стану отримують, розраховуючи умовні напруження для різних рівнів залишкової пластичності (рис. 1.2, а). Залишкову пластичність зазвичай виражають через комплексну характеристику деформованого стану – інтенсивність деформацій. Усі криві плинності є ізолініями щодо рівня деформацій. За простого навантаження координатами точок однієї кривої плинності є такі значення головних напружень  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , для

яких деформації  $\varepsilon(\sigma_1, \sigma_2) = Const$  за різних співвідношень головних напружень  $\sigma_1 / \sigma_2 = k$ . Граничні криві (плинності чи міцності) отримують в момент переходу матеріалу в іншу стадію деформування (із стадії пружних деформацій в стадію рівномірних пластичних деформацій або із стадії рівномірних пластичних в стадію стрімкої локалізації деформацій, утворення шийки та зародження тріщин).

На відміну від граничних кривих плинності, за кривими деформування відслідковують напруження та деформації впродовж усього процесу навантаження. В інженерній практиці за замовчуванням використовують умовні деформаційні криві, де напруження розраховуються як відношення прикладеного навантаження до початкової площі поперечного перерізу навантаженого зразка.

Одновісному напруженому стану відповідає одна крива деформування. За СНС кожному виду напруженого стану  $k$  відповідає інша крива деформування (рис. 1.2, б). Криві деформування в головних напруженнях та головних деформаціях, які отримують з найпростіших дослідів (одновісний розтяг стержня, двовісний розтяг пластини, внутрішній тиск у трубі, тощо), є первинними для подальшої обробки та аналізу.

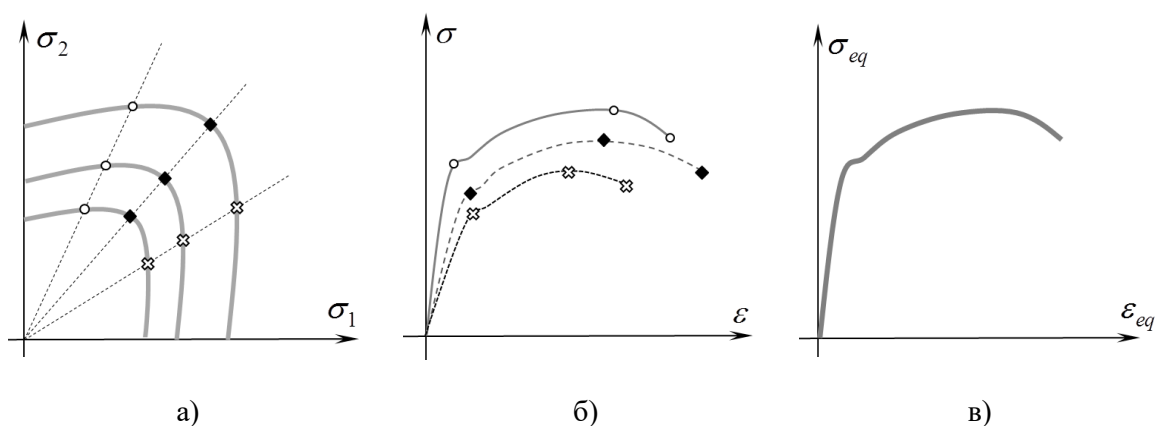


Рис. 1.2. Отримання єдиної кривої деформування за складного напруженого стану ( $\sigma_{eq}$ ,  $\varepsilon_{eq}$  – еквівалентні напруження та деформації)

За простого навантаження ( $\sigma_1 / \sigma_2 = k$ ,  $k = const$ ) первинних кривих існує безліч ( $k \in (0; \infty)$ ). Окрім того, існує численна варіантність форм та розмірів



зразків, що навантажуються. Тому відтворення в лабораторних умовах реальних експлуатаційних умов конструкцій та їх елементів із врахуванням виду, способу, швидкості навантаження, тощо, є неможливим. У зв'язку з цим основну відповідальність за прогнозування поведінки матеріалів за СНС несуть аналітико-обчислювальні методи; експериментальні дані відіграють роль «реперних точок» для підтвердження чи спростування гіпотез, теорій, критеріїв, моделей, тощо.

Узагальнення деформаційних властивостей матеріалів, а саме побудова єдиної кривої деформування, за якою можна прогнозувати напружено-деформований стан матеріалу за різних шляхів та способів навантаження на основі обмеженої кількості найпростіших дослідів, є одним із шляхів вирішення цієї проблеми. Згідно з гіпотезою єдиної кривої можна підібрати такі еквівалентні координати, в яких деформаційна крива буде інваріантною щодо типу прикладеного навантаження [27] (рис. 1.2, в).

Найчастіше для побудови кривої деформування матеріалу в якості еквівалентних координат використовують максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  та максимальні кутові деформації  $\gamma_{\max}$  або інтенсивності напружень  $\sigma_i$  та інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i$  (чи пропорційні до них октаедричні координати). Ці два «класичні» підходи до побудови узагальнених кривих деформування базуються на двох класичних теоріях плинності – найбільших дотичних напружень Треска та енергетичній Мізеса. Проте для більшості матеріалів крива деформування, побудована в максимальних дотичних напруженнях чи в інтенсивностях напружень, помітно залежить як від способу навантаження, так і від співвідношення головних напружень за простого навантаження. В роботі [28] було запропоновано описувати єдину криву деформування через уведення зваженого середнього напружень і деформацій, обчислених за двома «класичними» підходами. Авторами в [26] запропоновано інший метод усереднення, який краще узгоджується з енергетичним підходом Мізеса. Досить повний огляд підходів до введення еквівалентних координат наведено у [2]. Як показують експериментальні дані, для частини металевих матеріалів

спостерігається краще узгодження з одною із «класичних» узагальнених кривих, для іншої частини – з новими кривими, що використовують ту чи іншу форму усереднення.

У даному дисертаційному дослідженні увагу зосереджено на ділянці деформаційного зміцнення кривої деформування, оскільки науковий інтерес становить поведінка навантажених конструкцій, для яких допускаються великі пластичні деформації. Численні експериментальні та теоретичні дослідження процесів пружно-пластичного деформування елементів конструкцій різної форми за великих деформацій висвітлено в роботах школи Баженова В. Г. [29 – 33].

Питання побудови кривої деформування металевих матеріалів для ділянки великих деформацій залежно від форми зразка розглянуто в роботі [34]. Огляд існуючих сучасних методів побудови кривої деформування металевих матеріалів для ділянки великих пластичних деформацій здійснено в [35]. В роботі [36] запропоновано узагальнену апроксимаційну модель для кривої деформування металевих матеріалів, що враховує усі етапи деформування.

Огляд та аналіз різних підходів до побудови єдиної кривої описано в [22], [2]. В роботі [37] проведено огляд та порівняльний аналіз апроксимаційних моделей узагальненої кривої деформування. Проте висвітлення в літературі питання прогнозування напружено-деформованого стану матеріалів в області великих пластичних деформацій не є достатнім. Досі складно знайти узагальнені деформаційні криві для пластичних металевих матеріалів, за якими можна прогнозувати великі рівномірні пластичні деформації за СНС.

### 1.3. Прогнозування граничних значень дійсних напружень з використанням дотичних модулів

Для нестисливого пластичного матеріалу поява залишкових деформацій у напрямку прикладеного навантаження розтягу призводить до зменшення поперечного перерізу навантаженого зразка (ефект Пуассона). Тому дійсні напруження, знайдені як відношення прикладеної сили розтягу до миттєвого поперечного перерізу зразка, завжди більші від умовних. Конкуруючі деформаційне зміцнення матеріалу та знеміцнення конструкції визначають вид кривої деформування та момент появи локальних пластичних деформацій. Для пластичних матеріалів різниця між умовними та дійсними напруженнями може бути суттєвою (рис. 1.3).

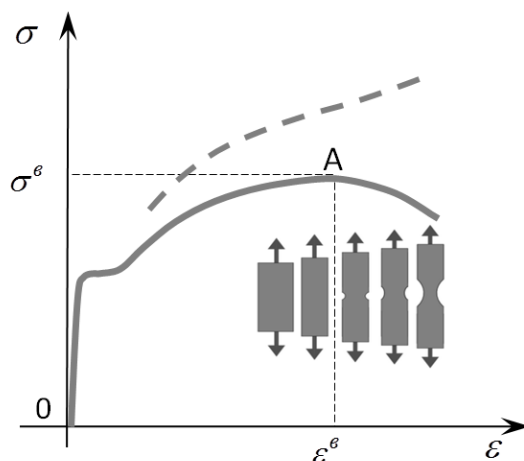


Рис. 1.3. Умовна (суцільна лінія) та дійсна (пунктирна лінія) криві деформування за одновісного розтягу та відповідні стадії пластичного деформування (використано <https://images.app.goo.gl/HdEdc43rj1SHcu389> )

Тому використання умовної діаграми деформування для прогнозування дійсного напруженого стану в навантаженому елементі в момент локалізації деформацій (шийкоутворення за одновісного розтягу) несе в собі систематичні помилки, які виправляються в інженерній практиці через використання коефіцієнта запасу.

Отримати аналітично обґрунтовані значення коефіцієнта запасу можна через удосконалення методів розрахунку дійсних напружень. Одним із способів

визначення граничних значень дійсних напружень є використання концепції «єдиної кривої деформування» Людвіга (п. 1.2) та критерію втрати стійкості пластичного деформування Свіфта–Марціньяка [38, 39].

Якщо матеріал вважається ізотропним, що зміцнюється на ділянці пластичного деформування, то для аналітичного опису єдиної кривої деформування найчастіше використовують степеневу модель виду  $\sigma_{eq} = A(\varepsilon_{eq})^n$  або її уточнення (зсув та/або розтяг кривої по одній з осей). Згідно з критерієм Свіфта–Марціньяка процес рівномірного пластичного деформування втрачає свою стійкість у момент, коли швидкість зростання напружень, викликана зменшенням площі поперечного перерізу, стає більшою, ніж швидкість зростання несівної здатності, викликана деформаційним зміцненням матеріалу. Пластичне деформування переходить в стадію стрімкого розвитку місцевих пластичних деформацій та зародження тріщин, зразок матеріалу незворотно втрачає свою опірну здатність. Для більшості матеріалів в момент втрати стійкості пластичного деформування прикладене навантаження досягає свого максимуму – «критерій шийкоутворення» [40], що підтверджено для простого способу навантаження [41]. На умовній діаграмі деформування пластичних матеріалів з нелінійним зміцненням (рис. 1.4, суцільна лінія) умові максимуму прикладеного навантаження відповідає точка А.

Для знаходження граничних значень дійсних напружень в момент втрати стійкості ППД за одновісного розтягу використовують два підходи. Згідно з першим підходом на дійсній кривій деформування  $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$  (пунктирна крива на рис. 1.4), знаходять точку, в якій похідна  $d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$  дорівнює максимальному значенню умовного напруження  $\sigma^e$ . Для цього будують дотичну до дійсної діаграми деформування з кутовим коефіцієнтом  $d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$ , який називають дотичним модулем. Геометричну побудову для цього підходу називають схемою Консідера (рис. 1.4, а) [42]. Другий підхід передбачає розв'язання рівняння  $d\tilde{\sigma}/d\varepsilon = \tilde{\sigma}$ , яке графічно зводиться до знаходження точки перетину дійсної

кривої деформування  $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$  та графіку швидкості знеміцнення матеріалу  $d\tilde{\sigma}/d\varepsilon$  (рис. 1.4, б).

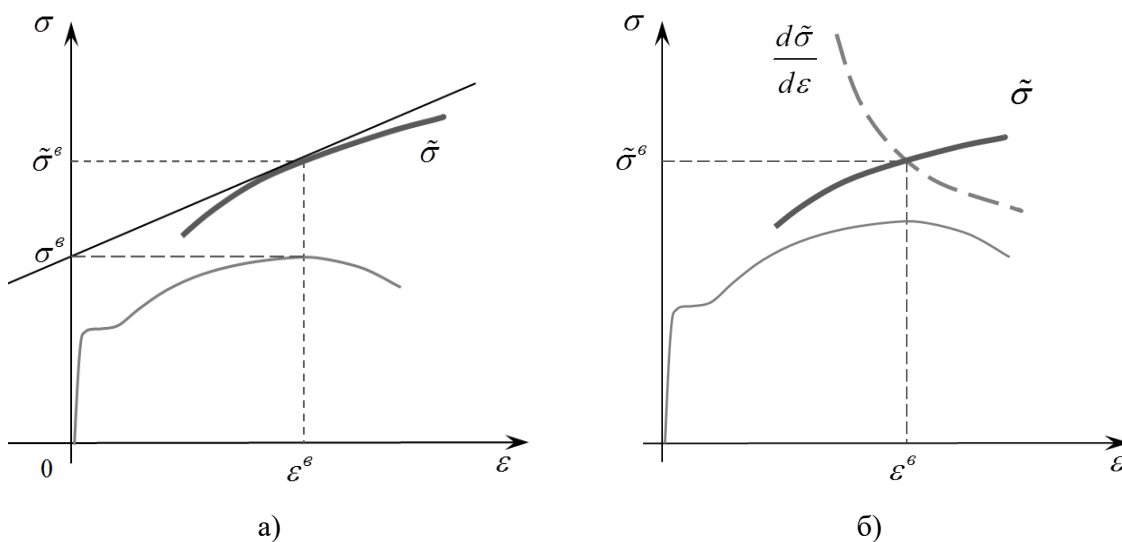


Рис. 1.4. Два підходи до знаходження дійсних напружень в момент шийкоутворення

Врахування фізико-механічних властивостей матеріалу (зокрема, характер зміцнення), виду напруженого стану та геометрії конструкційних елементів значно розширити область застосування описаного підходу. Це дозволить прогнозувати дійсні граничні значення силових факторів за комбінованих навантажень, як, наприклад, для труби, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом. Про розв'язання такої задачі на даний час дисертанту невідомо.

#### 1.4. Оцінювання граничних навантажень в конструкційних елементах оболонкового типу із врахуванням їх геометрії

Тонкостінні оболонки обертання є частинами конструкцій, що використовуються в усіх галузях техніки та вирізняються високою міцністю та легкістю. Навантаження осесиметричної оболонки рівномірно розподіленим внутрішнім тиском газу та осьовим розтягуючим навантаженням є одним з найбільш поширених видів навантаження.

Вирішальне значення для інженерного проектування, оцінки цілісності та оперативного управління нафто- і газопроводом та іншими ємностями, що

працюють під внутрішнім тиском, має точне прогнозування максимального навантаження (тиску розриву, тиску руйнування). Численні теоретичні, чисельні та експериментальні дослідження проведено з оцінювання міцності труб, виготовлених з ізотропних матеріалів, та розроблено багато аналітичних та емпіричних рівнянь для прогнозування тиску розриву. У роботі [43] було запропоновано аналітичний вираз для прогнозування тиску розриву для балонів, виготовлених з пластичного матеріалу, в якому враховувались початкові геометричні параметри зразків матеріалу та гранична міцність матеріалу за одновісного розтягу. Свенсон [44], спираючись на критерій міцності Мізеса та теорію Свіфта, запропонував формули для знаходження тиску розриву для тонкостінних та товстостінних посудин циліндричної та сферичної форми, що добре узгоджувались з експериментальними даними. Пізніше авторами Раджан та ін. [45] було проведено експериментальні дослідження на знаходження тиску розриву тонкостінних посудин під тиском. Було показано, що розрахункові значення тиску, отримані Свенсоном, були менші, ніж експериментальні дані, для тонкостінних трубок з певних типів сталей.

Law та ін. [28] проведено порівняльний огляд формул для розрахунку тиску розриву для тонкостінних труб. Зроблено висновок, що не існує методу оцінки, який був би точним водночас для широкого класу матеріалів. Чжу та Лейсом [46, 47] зроблено аналіз впливу відношення границі плинності до границі міцності за розтягу на тиск руйнування трубопроводів та запропоновано критерій середніх напружень зсуву (ASSY) для прогнозування тиску розриву. Розрахункові значення знаходились між прогнозними значеннями, отриманими з використанням критеріїв Треска та Мізеса. Інші підходи до узагальнення класичних критеріїв було висвітлено в [48 – 52].

В роботі [53] досліджено роль класичних критеріїв Треска та Мізеса в прогнозуванні тиску розриву трубопроводів з корозійними дефектами або без них та визначено практичні умови для застосування кожного з цих критеріїв.

Крістофером та ін. [54] було проведено порівняльний аналіз оцінювання тиску розриву для тонкостінних та товстостінних труб. Авторами Жу та Люїсом

[55] було здійснено огляд основних існуючих моделей для розрахунку тиску розриву для труб (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

**Існуючі аналітичні моделі для розрахунку тиску розриву в трубах (два сімейства рішень – Треска та Мізеса для знаходження граничного напруження шийкоутворення)\***

Predictive models for burst pressure ( $P_b$ ).					
ASME boiler code	Ta	$P_b = \sigma_{uts} \left( \frac{k-1}{0.6k+0.4} \right)$	Marin-2	vM	$P_b = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{uts}}{(1+\epsilon_u)} \ln(k)$
Barlow OD, ID, or flow	Ta	$P_b = \sigma_{uts} \frac{2t}{D_o}, \sigma_{uts} \frac{2t}{D_i}, \text{ or } \sigma_{flow} \frac{2t}{D_i}$	Marin-3	vM	$P_b = \frac{4}{(\sqrt{3})^{n+1}} \frac{t \sigma_{uts}}{D_i}$
Bailey-Nadai	Ta	$P_b = \frac{\sigma_{uts}}{2n} \left( 1 - \frac{1}{k^{2n}} \right)$	Maximum shear stress	Ta	$P_b = 2\sigma_{uts} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)$
Bohm	vM	$P_b = \sigma_{uts} \left( \frac{0.25}{0.227 + \epsilon_{uts}} \right) \left( \frac{e}{\epsilon_{uts}} \right)^{\epsilon_{us}} \frac{2t}{D_i} \left( 1 - \frac{t}{D_i} \right)$	Nadai-1	vM	$P_b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{uts} \ln(k)$
DNV	Ta	$P_b = \sigma_{flow} \frac{2t}{D_m}$	Nadai-2	vM	$P_b = \frac{\sigma_{uts}}{\sqrt{3}n} \left( 1 - \frac{1}{k^{2n}} \right)$
Faupel	vM	$P_b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ys} \left( 2 - \frac{\sigma_{ys}}{\sigma_{uts}} \right) \ln(k)$	Soderberg	vM	$P_b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_{uts} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)$
Fletcher	Ta	$P_b = \frac{2t \sigma_{flow}}{D_i (1 - \epsilon_{uts}/2)}$	Svensson	vM	$P_b = \sigma_{us} \left( \frac{0.25}{0.227 + \epsilon_{uts}} \right) \left( \frac{e}{\epsilon_{uts}} \right)^{\epsilon_{us}} \ln(k)$
Margetson		$P_b = \frac{4t}{\sqrt{3} D_i} \sigma_{uts} \exp \left( - \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_{uts} (1 + \nu_{secant}) \right)$	Turner	Ta	$P_b = \sigma_{us} \ln(k)$
Marin-1	vM	$P_b = 2.31(0.577)^n \frac{t \sigma_{uts}}{D_i}$	Zhu-Leis		$P_b = \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \right)^n \frac{4t \sigma_{uts}}{D_m}$

\* Запозичено із [55]

В реальних експлуатаційних умовах трубопроводи та ємності, навантажені внутрішнім тиском, можуть також зазнавати осьових навантажень, спричинених позаштатними факторами, наприклад, дією температури, гірськими умовами, рухомістю ґрунтів, тощо. Тому важливим є вивчення напружено-деформованого стану труб та ємностей в умовах комбінованого навантаження. Як показано в [56 – 61], вплив осьового розтягу на несівну здатність магістральних трубопроводів є істотним. В роботах [62 – 65] запропоновано експериментальні дослідження та теоретичні моделі для визначення впливу виду напруженого стану на несівну здатність труб. У роботі [66] було розроблено метод розрахунку навантаження, що викликає втрату стійкості ППД довгих тонких труб під дією внутрішнього тиску та осьового навантаження. Спираючись на критерій Мізеса, Апдайк та Калнінс [67] запропонували узагальнену математичну модель для прогнозування граничних значень розтягу та внутрішнього тиску для осесиметричних тонкостінних посудин. Було зазначено, що розрахунковий тиск розриву, що викликає появу місцевих пластичних деформацій, дає завищені значення порівняно з експериментальними.

Базові теоретичні положення та формули для визначення напружень в стінках навантажених осесиметричних оболонок надано в [68]. Переважна більшість досліджень в загальнодоступній літературі присвячена питанням стійкості циліндричних оболонок, які разом з конічними та сферичними оболонками є базовими випадками загальної теорії осесиметричних оболонок [69, 29].

У роботі [70] досліджено залежність тиску розриву для осесиметричних тонкостінних оболонок від виду напруженого стану та показника деформаційного зміцнення матеріалу, із використанням критерію Свіфта та умови максимуму навантаження. Авторами Moss, D. R., & Basic, M. було запропоновано посібник з проектування посудин, навантажених тиском [71], Middleton J., Owen DRJ., Blachut J., Zhu L., Boyle JT., Carbonari, R. C. та ін. було запропоновано підходи до підбору та оптимізації профілів тонкостінних осесиметричних оболонок, навантажених внутрішнім тиском з додатковими умовами навантаження [72 – 76].

Відомо багато аналітичних і емпіричних рівнянь для прогнозування граничного тиску для трубопроводів та ємностей; однак розрахувати точне значення тиску розриву і оцінити точність цих рівнянь складно. Недостатньо досліджено питання визначення дійсних граничних напружень та граничних силових факторів при навантаженні осесиметричних оболонок, переважна більшість досліджень не враховує зміцнення матеріалу та зміну розмірів зразків під навантаженням.



## 1.5. Висновки за результатами огляду та постановка задачі

На фоні загальної тенденції підвищення вимог до ефективності використання трубопровідних систем та ємностей під тиском актуалізується питання удосконалення аналітично-обчислювального апарату прогнозування напружень та деформацій в навантажених елементах конструкцій. Більша частина існуючих досліджень має експериментальний характер. Описується устаткування та постановка експерименту, структурний стан матеріалу та спосіб навантаження. Числові результати досліджень зразків певних матеріалів порівнюються з розрахунковими, отриманими найчастіше за класичними формулами. В кожному конкретному випадку робиться висновок про узгодженість критеріїв граничних станів з експериментом і зазвичай віддається перевага одному з класичних, Треска чи Мізеса. Оскільки граничні стани реальних конструкційних матеріалів не завжди мають добре узгодження з класичними критеріями, то їх застосування призводить до систематичних помилок в розрахунках. Дослідження напруженого стану навантаженого елемента з використанням лише його початкових геометричних параметрів додатково ускладнює оцінювання дійсних граничних характеристик напружено-деформованого стану елементів конструкцій. В інженерній практиці вагу накопичених похибок зменшують коефіцієнтом запасу, визначення якого повинно бути максимально обґрунтованим для забезпечення як ефективності, так економічності та безпеки конструкції в експлуатації.

Тому основною задачею даного дисертаційного дослідження є розробка узагальненої методики прогнозування граничних станів елементів конструкцій, виготовлених з пластичних ізотропних конструкційних матеріалів, за пластичного деформування із врахуванням: а) фізико-механічних властивостей матеріалу зразка; б) виду напруженого стану; в) початкової форми та фактичних розмірів.

## Розділ 2. МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНИХ МЕТАЛЕВИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Розділ присвячено побудові узагальненої кривої деформування, яка би узгоджувалась з класичними підходами та водночас враховувала деформаційні особливості реальних конструкційних матеріалів. Розроблено методику отримання параметра  $p$ , що інтегрально враховує фізико-механічні властивості матеріалу та найкраще узгоджує узагальнену криву деформування з дослідними даними. Результати дослідження опубліковано в працях [77, 78, 79] та апробовано [71, 81 – 88].

Для прогнозування граничних напружень, які спричиняють появу пластичних деформацій або досягнення певного їх рівня, найчастіше використовують «класичні» теорії Треска максимальних дотичних напружень та теорії Мізеса питомої потенціальної енергії формозміни. Аналітично умова пластичності Треска описується співвідношенням (2.1):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T, \quad (2.1)$$

умова пластичності Мізеса – формулою (2.2):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \sigma_M, \quad (2.2)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження,  $\sigma_T$  – еквівалентні напруження Треска,  $\sigma_M$  – еквівалентні напруження Мізеса (рис. 2.1).

Відхилення розрахункових значень, отриманих за критеріями (2.1) та (2.2), від експериментальних даних для різних матеріалів, сприяли розробці численних нових критеріїв міцності.

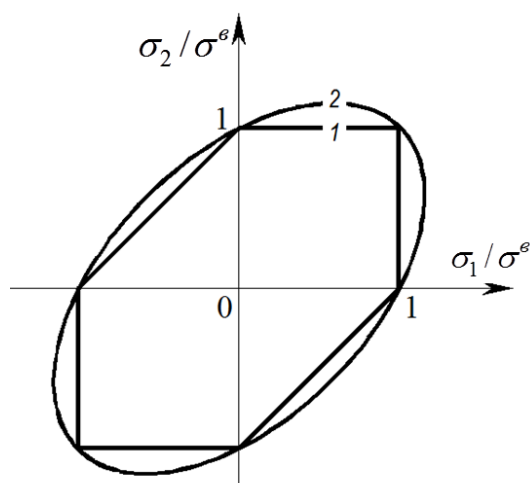


Рис. 2. 1. Графічне представлення умов (2.1) – лінія 1 та (2.2) – лінія 2 для плоского напруженого стану

Незважаючи на велику кількість досліджень в цій галузі, на сьогодні залишається досить проблематичною оцінка граничних напружень за СНС. Для переважної більшості критеріїв розрахункові значення добре узгоджуються з експериментальними лише для конкретних матеріалів та типів навантажень.

## 2.1 Концентричність граничних поверхонь плинності як умова узагальнення діаграми деформування пластичних металевих матеріалів

На основі даних експериментів з двовісного розтягу зразків металевих конструкційних матеріалів, наведених в [76], у двовимірній системі головних напружень побудовано криві плинності, що відповідають допускам (0,5...4)% на залишкову деформацію (рис. 2.2).

Отримано криві різної форми, від кореляції з еліпсом Мізеса (сталь 45 та сплав У7) до вираженої форми шестикутника Кулона (сплав Д16Т). Порівняльний аналіз побудованих кривих показав, що для них зберігаються центр, орієнтація та форма, тобто вони є концентричними в просторі головних напружень. Таке спостереження підтвердило гіпотезу існування єдиної, незалежної відносно напруженого стану, кривої деформування.

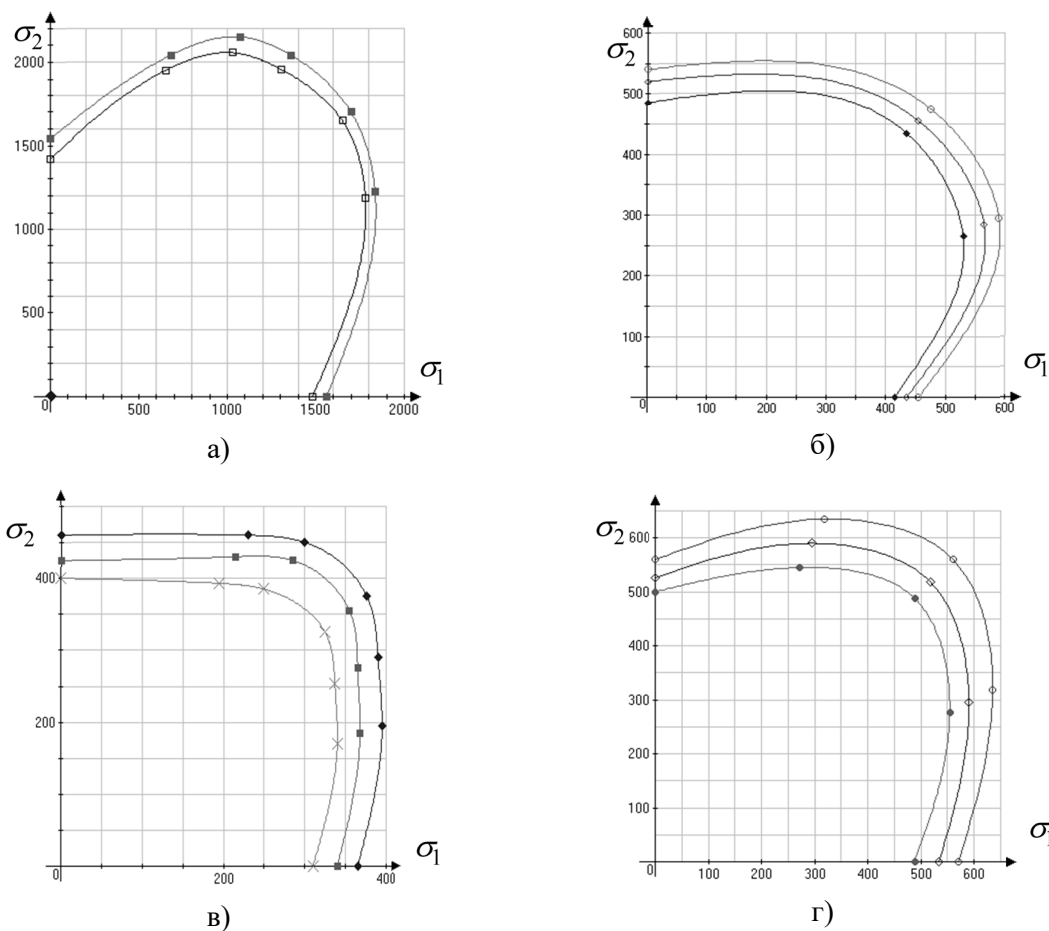


Рис. 2. 2. Криві плинності, що відповідають різним рівням залишкової деформації ( $\varepsilon_i$ , %:  $\times$  – 0,5;  $\square$  – 0,75;  $\blacksquare$  – 1;  $\blacklozenge$  – 2;  $\bullet$  – 2,4;  $\diamond$  – 3;  $\circ$  – 4) за двовісного розтягу за температури  $20^\circ\text{C}$ , для сплавів: а) У7, б) ЦМ6, в) Д16Т, г) Сталь 45.

З цією метою в [77] запропоновано узагальнити еквівалентні напруження (2.1) та (2.2) у вигляді:

$$\sigma_{eq} = \frac{p}{2} \left[ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|^p + |\sigma_2 - \sigma_3|^p + |\sigma_1 - \sigma_3|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.3)$$

де  $p$  – додатне число, що відображає ступінь відхилення фізико-механічних властивостей реального конструкційного матеріалу від ідеалізованого.

Використаний в моделі (2.3) параметр  $p$  як стала фізико-механічних властивостей матеріалу підлягає подальшому визначенню. З цією метою у дослідженні вводяться еквівалентні деформації.

## 2.2 Методика побудови узагальненої кривої деформування

Оскільки науковий інтерес становить поведінка елементів конструкцій, для яких допускається пластичне деформування, увагу приділено питанню побудови узагальненої кривої деформування на ділянці деформаційного зміцнення.

### 2.2.1 Уведення еквівалентних деформацій

Численні дослідження присвячені пошуку такої системи координат, в якій можна побудувати єдину для всіх видів напруженого стану криву деформування. Як показують експериментальні дані, для частини металевих матеріалів спостерігається краще узгодження з однією із «класичних» узагальнених кривих, для іншої частини – з новими, що використовують ту чи іншу форму усереднення.

В [89] введено еквівалентні деформації у вигляді:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{p}{2(p+1)} \left[ \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^p + |\varepsilon_2 - \varepsilon_3|^p + |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|^p}{1/2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.4)$$

При  $p=1$  з (2.3), (2.4) за умови  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  отримуємо формули для визначення найбільших дотичних напружень та кутових деформацій  $\tau_{\max}$ ,  $\gamma_{\max}$ , при  $p=2$  – інтенсивності напружень і деформацій  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ :

$$p=1: \quad \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{\max}, \\ \varepsilon_{eq} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \gamma_{\max}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$p=2: \quad \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \sigma_i, \\ \varepsilon_{eq} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} = \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система (2.3), (2.4) для розрахунку еквівалентних напружень та еквівалентних деформацій дозволить отримати узагальнену криву деформування за результатами кількох найпростіших дослідів.

## 2.2.2 Знаходження параметра $p$ за функціоналом якості

З метою визначення параметра  $p$  використано дані дослідів з деформування пластичних матеріалів, отримані в головних напруженнях та деформаціях за кількох видів плоского напруженого стану. В системі еквівалентних координат  $\sigma_{eq} \sim \varepsilon_{eq}$  побудовано точки, що відповідають експериментальним, перераховані за різних значень  $p$ . Отримували діаграми розсіювання точок в координатах  $\tau_{max} \sim \gamma_{max}$  (при  $p=1$ ), в координатах  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$  (при  $p=2$ ) та для проміжних значень  $p$  ( $1 < p < 2$ ). Крок  $\Delta p$  перерахунку встановлювався на рівні 0,001; 0,01; 0,05.

Для обробки відібрано експериментальні дані з двовісного розтягу зразків ізотропних металевих конструкційних матеріалів [14, 90]. Усі зразки матеріалів випробовувались статичним двовісним навантаженням за нормальних умов. Попередня обробка матеріалів та умови проведення експерименту описані в першоджерелах. Розглянуто дані для трьох марок сталей – вуглецевої сталі (0,37%С), вуглецевої якісної сталі 45, а також легованої теплостійкої сталі 15Х2НМФА з різною залишковою пластичністю за одновісного розтягу ( $\varepsilon^e \approx 14\%, 10\%, 7\%$  відповідно).

На рис. 2.3 показано діаграми розсіювання експериментальних даних, перерахованих за формулами (2.3), (2.4) за різних значень  $p$  ( $p=1$ ,  $p=2$  та  $p = p_{opt}$ ).

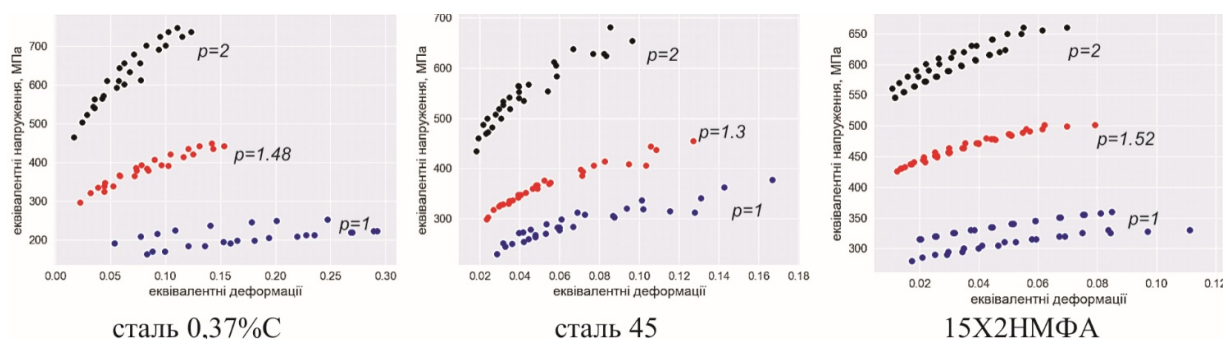


Рис. 2.3. Діаграми розсіювання експериментальних точок в координатах  $\sigma_{eq} \sim \varepsilon_{eq}$  за різних значень параметра  $p$

Для трьох наведених зразків матеріалів візуально спостерігається менша площа розсіювання точок за деякого оптимального значення параметра  $p$ , що визначався методами кореляційного аналізу. Аналогічні рисунки отримувались для інших металевих матеріалів. Для переважної більшості інших металевих матеріалів та сплавів параметр  $p$  набував значень з інтервалу (1; 2). Лише для кількох матеріалів оптимальними були значення, що виходили за межі цього інтервалу (додаток А).

Ділянка зміцнення кривої деформування для досліджуваних матеріалів має форму, близьку до лінійної. Тому як функціонал якості для знаходження оптимального значення  $p$  вибрано коефіцієнт кореляції Пірсона. Коефіцієнт кореляції Пірсона  $r$  розраховувався для кожного значення  $p$  за формулою:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n ((\varepsilon_{eq})_i - \overline{\varepsilon_{eq}})((\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}})}{(n-1) \sqrt{\sum_{i=1}^n ((\varepsilon_{eq})_i - \overline{\varepsilon_{eq}})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n ((\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}})^2}}, \quad (2.7)$$

де  $\overline{\sigma_{eq}} = \left( \sum_{i=1}^n (\sigma_{eq})_i \right) / n$ ,  $\overline{\varepsilon_{eq}} = \left( \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{eq})_i \right) / n$ ,  $n$  – кількість експериментальних точок.

На рис. 2.4 показано графіки залежностей коефіцієнта кореляції Пірсона від значень параметра  $p$ .

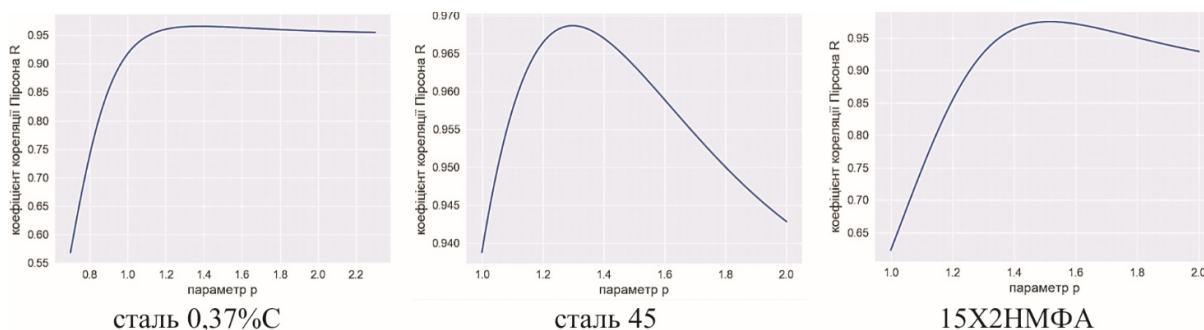


Рис. 2. 4. Залежності  $r(p)$  коефіцієнта кореляції Пірсона від параметра  $p$  для трьох марок сталей

Аналіз графіків, наведених на рис. 2.4, показав, що залежності коефіцієнта кореляції Пірсона від параметра  $p$  досягають свого максимуму на інтервалі (1; 2). Аналогічна картина спостерігалась для більшості матеріалів. В окремих

випадках графіки для ділянки  $p \in (1; 2)$  були строго монотонними, максимуми спостерігались на кінцях відрізка або за його межами, з незначним відхиленням (додаток А).

Отже, для більшості спостережених металевих матеріалів існує таке значення параметра  $p \in (1; 2)$ , за якого коефіцієнт кореляції Пірсона для експериментальних даних, отриманих за різних видів СНС, досягає свого максимуму.

### 2.2.3 Знаходження параметра $p$ за функцією помилок

Як міра розсіювання експериментальних точок для кожного значення  $p$  обчислювалось усереднене значення показника варіації  $V$ . Для знаходження коефіцієнта варіації  $V$  вхідні дані розбивались на певну кількість інтервалів однакової довжини по величині деформацій. Оскільки число експериментальних точок  $n$  варіювалось в межах 20–40, за кількість часткових інтервалів було вибрано 5. Для кожного значення параметра  $p$  обчислювались значення коефіцієнта варіації  $(V)_k$  на часткових проміжках, в подальшому ці значення усереднювались. Такий підхід до обчислення коефіцієнта  $V$  має два обґрунтування. По-перше, через різну «протяжність» первинних даних, отриманих за різних видів плоского напруженого стану, уздовж горизонтальної осі для деформацій, на різних ділянках отримується різна кількість точок. Розбиття на часткові інтервали зменшує вагу впливу значень, отриманих на початку деформаційного процесу, на подальший регресійний аналіз кривої зміцнення для ділянки середніх та великих пластичних деформацій. По-друге, при збільшенні значень параметра  $p$  від 1 до 2 значення ординат точок (еквівалентні напруження) також збільшуються, відповідно збільшуються середні значення напружень та дисперсія значень по вертикальній осі. Найбільшого значення дисперсія набуватиме на ділянці малих пластичних деформацій, де стрімкість підйому первинних кривих деформування є вищою, та водночас сконцентрована найбільша кількість точок, отриманих експериментально. Усереднення значень коефіцієнта варіації в цьому випадку



зменшує вплив форми первинних кривих на значення показника щільності.

Формула для обчислення значення коефіцієнта варіації на  $k$ -му проміжку:

$$(V)_k = \frac{(STD)_k}{(\overline{\sigma_{eq}})_k}, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (2.8)$$

де  $(STD)_k$  – середнє квадратичне відхилення значень напружень  $(\sigma_{eq})_i$  з  $k$ -го проміжку від середнього значення на цьому проміжку  $(\overline{\sigma_{eq}})_k$ .

Усереднене значення коефіцієнта варіації  $V$  для кожного значення  $p$ :

$$V = \frac{\sum_{k=1}^5 (V)_k}{5}. \quad (2.9)$$

На рис. 2.5 зображено графіки залежностей коефіцієнта варіації від параметра  $p$ .

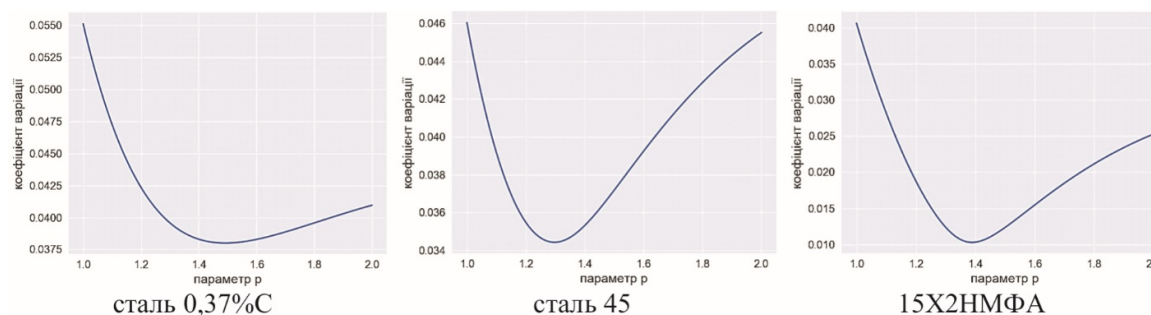


Рис. 2. 5. Залежності  $V(p)$  коефіцієнта варіації від параметра  $p$  для трьох марок сталей

Аналіз графіків, зображених на рис. 2.5, показав, що існують мінімуми залежностей  $V(p)$  для  $p \in (1; 2)$ . Значення параметра  $p$ , за яких коефіцієнт варіації мінімальний, близькі до значень, отриманих за умови максимуму коефіцієнта кореляції Пірсона.

## 2.2.4 Аналіз розрахунків параметра $p$

Наближені значення параметра  $p$  та відповідні показники якості моделі наведені в табл. 2.1. Тут  $r_{\max}$  – максимальне значення коефіцієнта кореляції Пірсона для  $p \in (1; 2)$ ,  $p(r_{\max})$  – значення параметра  $p$ , за якого досягається максимум коефіцієнта кореляції Пірсона. Мінімільне значення усередненого

коефіцієнта варіації  $V$  позначено  $V_{\min}$ , значення параметра  $p$ , за якого досягалось  $V_{\min}$ , позначено  $p(V_{\min})$ .

Таблиця 2.1

Наближені значення параметра  $p$  та показники якості моделі (2.3), (2.4)

Марка сталі	$r_{\max}$	$p(r_{\max})$	$V_{\min}$	$p(V_{\min})$
сталь 0,37%С	0,970	1,48	3,81%	1,50
сталь 45	0,968	1,30	3,44%	1,32
15Х2НМФА	0,975	1,52	1,03%	1,39

Високі показники коефіцієнта Пірсона корелюють з низькими значеннями усередненого коефіцієнта варіації, що свідчить про адекватність обраного підходу до оцінювання відносної щільності розташування точок, отриманих за різних значень параметра  $p$ . Деякі відхилення оптимальних значень  $p$ , отриманих за функціоналом якості  $r(p)$  та за функціями помилок  $V(p)$ , пояснюються накопиченими похибками, в тому числі на етапі вимірювання, побудови первинних кривих деформування, оцифруванні даних, запозичених із зовнішніх джерел, та при заокругленнях розрахункових даних.

Розрахунок параметра  $p$  запропонованої моделі (2.3), (2.4), параметрів апроксимаційних залежностей та показників якості здійснено з використанням чистого коду та вбудованих функцій і бібліотек мови програмування Python [91].

Перевірка моделі для інших матеріалів та підбір додаткових показників якості дозволить виокремити клас матеріалів, напружено-деформований стан яких можна із задовільною точністю описувати узагальненою кривою деформування (2.3), (2.4).

### 2.3 Апроксимація узагальненої кривої деформування

Для апроксимації ділянки зміцнення кривої деформування в еквівалентних координатах використано степеневу модель, яка була запропонована в [92] та потім широко використовувалась [93 – 102]:

$$\sigma_{eq}^* = A \cdot (\varepsilon_{eq})^B, \quad (2.10)$$

де  $A$ ,  $B$  – параметри моделі, отримані методом найменших квадратів – модуль зміцнення та показник зміцнення відповідно. На рис. 2.6 показано апроксимаційні криві деформування, побудовані на ділянках зміцнення для  $p(r_{\max})$  та стандартне відхилення експериментальних точок від розрахункової кривої [79].

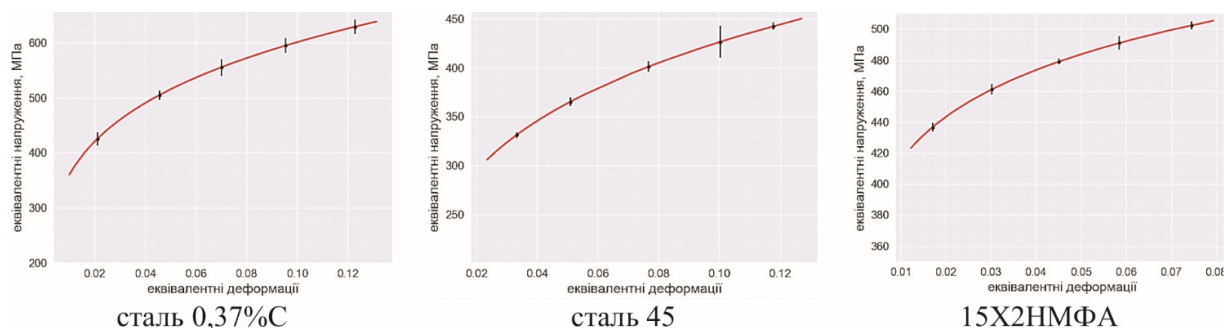


Рис. 2. 6. Апроксимаційні криві зміцнення за оптимальних значень  $p$

У табл. 2.2 наведено розрахункові параметри моделі (2.10) та показники якості – індекс детермінації ( $R^2$ ) та середнє відносне абсолютне відхилення експериментальних точок від апроксимаційної кривої ( $AAE$ ), що обчислювались за формулами:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left( (\sigma_{eq})_i - (\sigma_{eq}^*)_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left( (\sigma_{eq})_i - \overline{\sigma_{eq}} \right)^2}; \quad (2.11)$$

$$AAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left| (\sigma_{eq})_i - (\sigma_{eq}^*)_i \right|}{(\sigma_{eq})_i} \cdot 100\%. \quad (2.12)$$

У формулах (2.11), (2.12)  $(\sigma_{eq}^*)_i$  – значення еквівалентних напружень, отримані за формулою (2.10),  $(\sigma_{eq})_i$  – дані експерименту.

Таблиця 2.2

Розрахункові параметри моделі (2.10) та показники якості апроксимації

Марка сталі	$A$	$B$	$R^2$	$MR$	$AAE$
сталь 0,37%С	1001,88	0,222	0,971	0,210	2,2%
сталь 45	721,41	0,229	0,973	0,047	1,24%
15Х2НМФА	643,27	0,095	0,980	0,011	0,56%

Показники якості апроксимації перевірено з допомогою статистики Фішера та є статистично значущими (додаток А).

Апроксимаційні криві, побудовані на основі логарифмічної моделі  $\sigma_{eq}^* = A + B \ln \varepsilon_{eq}$ , давали співвимірні показники якості.

Отримані криві деформування дозволяють за даними кількох найпростіших експериментів прогнозувати поведінку матеріалу за будь-якого напруженого стану в діапазоні  $k \in (0; \infty)$ .

Отримання регресійних моделей узагальнених кривих зміцнення та їх валідація для широкого кола пластичних ізотропних металевих матеріалів, а також порівняльний аналіз запропонованої методики отримання узагальненої кривої зміцнення з існуючими сучасними підходами дозволить виокремити клас матеріалів, для якого застосування методики дає найкращі результати.

## 2.4 Висновки до розділу 2

1. Запропоновано методика побудови узагальненої кривої деформування для пластичних матеріалів, яка узгоджується із класичними підходами Мізеса та Треска та враховує відхилення дослідних даних для класу пластичних ізотропних металевих матеріалів через оптимізацію параметра матеріалу  $p$ . Для знаходження оптимального значення  $p$  використовувалось статистичне оцінювання щільності та розсіювання експериментальних точок в системі еквівалентних координат.
2. Розрахунок параметра  $p$  як сталої фізико-механічних властивостей матеріалу здійснено за результатами кількох дослідів з двовісного розтягу за різних співвідношень головних напружень. Для максимально точної калькуляції сталої  $p$  необхідно мінімізувати вплив похибок на усіх етапах зняття та обробки даних.
3. Аналіз розрахунків, проведених для серії конструкційних сталей та сплавів, показав, що існує таке розрахункове значення параметра  $p$ , для якого можна побудувати криву деформування з найменшим показником розсіювання дослідних даних. Наведено результати обробки даних для трьох марок сталей – вуглецевої сталі (0,37%С), вуглецевої якісної сталі 45, а також легованої теплостійкої сталі 15Х2НМФА з різною залишковою пластичністю за одновісного розтягу ( $\varepsilon^e \approx 14\%, 10\%, 7\%$  відповідно). Показник відносного розсіювання дослідних точок при оптимальному  $p$  становив 3,8%, 4,1% та 1% відповідно. Для інших матеріалів, наведених в додатку А, цей показник не перевищував 8,5%.
4. За діаграмами розсіювання дослідних даних, побудованими в координатах  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}$  за оптимальних значень параметра  $p$ , отримано рівняння регресії для єдиної кривої деформування з найкращими показниками якості ( $R^2=0,97..0,98$  для наведених в розділі матеріалів). Для інших матеріалів, наведених в додатку А, цей показник  $\geq 0,58$ .

### Розділ 3. ФОРМУЛЮВАННЯ УМОВ НАСТАННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЇХ ГЕОМЕТРІЇ

Розділ присвячено формулюванню умов досягнення дійсної границі міцності у навантажених конструкційних елементах з врахуванням їх геометрії та виду напруженого стану. Розглянуто конструкційні елементи чотирьох типових форм: смугу, пластину, тонкостінні трубу та осесиметричну оболонку. Карту отриманих аналітичних рішень наведено в додатках Б, В. Здійснено графічний аналіз граничних умов для серії конструкційних сталей. Результати дослідження опубліковано в працях [103 – 108] та апробовано [109 – 116].

Для оцінки впливу геометричної форми елемента конструкції на міцність конструкційного матеріалу використано критерій втрати стійкості процесу пластичного деформування (ППД) Свіфта-Марціньяка [38, 39] та умову максимуму навантаження [40, 118 – 122].

Підхід для знаходження дійсної границі міцності, використаний в [90] та розвинутий в [123], застосовано до найпоширеніших типів зразків конструкційних елементів – смуги, пластинки, тонкостінної циліндричної труби та осесиметричної оболонки за плоского напруженого стану.

Матеріал усіх зразків вважається у дослідженні однорідним, ізотропним, пружнопластичним із зміцненням на пластичній ділянці та нестисливим.

За пластичного деформування умову нестисливості як умову незмінності об'єму приймемо у вигляді:

$$(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = 1 \quad (3.1)$$

або в еквівалентній формі

$$\frac{d\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} + \frac{d\varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2} + \frac{d\varepsilon_3}{1 + \varepsilon_3} = 0, \quad (3.2)$$

де  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – головні відносні деформації. Формули (3.1), (3.2) використовують для великих пластичних деформацій. Для малих пластичних деформацій

добутками  $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_2\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$  як малими вищого порядку нехтують, умову нестисливості записують у вигляді

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (3.3)$$

Вказані припущення та співвідношення використаємо при формулюванні граничних умов для типових конструкційних елементів.

### 3.1. Дійсна границя міцності смуги за одновісного розтягу

Явище втрати стійкості ППД найповніше вивчене для випадку розтягу смуги. Основні залежності та обґрунтування для цього випадку наводяться в дослідженні як базові, для вибудовування цілісної системи смуга-пластина-труба-оболонка та перевірки умов, отриманих за СНС для елементів складнішої геометрії, у часткових випадках.

#### 3.1.1. Умови втрати стійкості пластичного деформування смуги

Позначимо початкові ширину та товщину смуги довжиною  $l$  через  $a$  і  $b$  відповідно (рис. 3.1), тоді навантаження  $N$  буде пов'язане із співнапрямленим напруженням  $\sigma$  формулою:

$$N = \sigma ab. \quad (3.4)$$

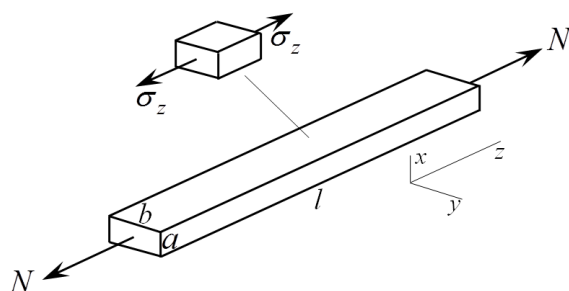


Рис. 3.1. Розрахункова схема одновісного розтягу смуги

Якщо вісь  $Oz$  напрямити вздовж дії сили  $N$ , то головні рівномірні пластичні деформації – поперечні  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  та осьова  $\varepsilon_z$  визначаються формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.5)$$

Вираз (3.4) із врахуванням зміни розмірів смуги набуде вигляду:

$$N = \tilde{\sigma}_z a(1 + \varepsilon_x) b(1 + \varepsilon_y), \quad (3.6)$$

де  $\tilde{\sigma}_z$  – дійсні осьові напруження у поперечному перерізі смуги, що виникають в смугі у напрямку дії сили розтягу  $N$ :

$$\tilde{\sigma}_z = \frac{N}{a(1 + \varepsilon_x) b(1 + \varepsilon_y)}.$$

Із врахуванням (3.4) та (3.1) отримуємо дійсні осьові напруження, що розвиваються в розтягнутій смугі в довільній точці рівномірного пластичного деформування:

$$\tilde{\sigma}_z = \sigma_z (1 + \varepsilon_z). \quad (3.7)$$

З умови максимуму навантаження

$$dN = 0 \quad (3.8)$$

із (3.6) отримаємо

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{\tilde{\sigma}_z} + \frac{d\varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x} + \frac{d\varepsilon_y}{1 + \varepsilon_y} = 0. \quad (3.9)$$

Із врахуванням умови нестисливості у вигляді (3.2) отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{\tilde{\sigma}_z} = \frac{d\varepsilon_z}{1 + \varepsilon_z}. \quad (3.10)$$

Загальний інтеграл рівняння (3.10) співпадає із залежністю (3.7), отриманою з геометричних міркувань. За одновісного розтягу стала інтегрування

$$C = \frac{\tilde{\sigma}_z^\varepsilon}{1 + \varepsilon_z^\varepsilon} = \sigma_z^\varepsilon.$$

Тому дійсні напруження в момент шийкоутворення, викликані дією осрової сили, описуються формулою:

$$\tilde{\sigma}_z^\varepsilon = \sigma_z^\varepsilon (1 + \varepsilon_z^\varepsilon). \quad (3.11)$$

Отже, дійсні напруження, що виникають в розтягнутій смугі, залежать лінійно від рівня відносних осьових деформацій, аж до моменту шийкоутворення.



### 3.1.2. Дотичний модуль та діаграма Консідера

З (3.10) отримано формулу для знаходження дотичного модуля до кривої деформування в дійсних напруженнях у момент шийкоутворення, як це було показано в [40]:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} = \frac{\tilde{\sigma}_z}{1 + \varepsilon_z}. \quad (3.12)$$

Позначимо граничні деформації, умовні напруження та дійсні напруження в момент шийкоутворення через  $\varepsilon_z^e$ ,  $\sigma_z^e$ ,  $\tilde{\sigma}_z^e$  відповідно. Піддотичною до кривої, побудованої в дійсних осьових напруженнях, проведеною в точці  $(\varepsilon_z^e, \tilde{\sigma}_z^e)$ , є відрізок  $1 + \varepsilon_z^e$ . Відповідну побудову Консідера показано на рис. 3.2.

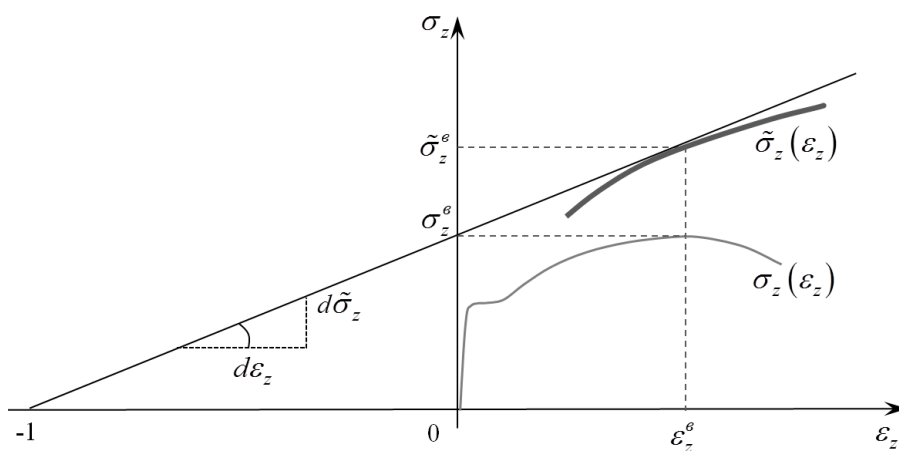


Рис. 3.2. Побудова Консідера для рівняння (3.12)

Враховуючи (3.7), із (3.10) отримаємо формулу, що пов'язує дотичний модуль до кривої деформування в дійсних напруженнях з інженерною границею міцності:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} = \sigma_z^e. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) показує, що дотична, проведена в точці з абсцисою  $\varepsilon_z^6$  до дійсної кривої деформування, перетинає вісь напружень в точці  $\sigma_z^6$ , яка є границею міцності матеріалу за одновісного розтягу.

### 3.2. Дійсна границя міцності пластини за двовісного розтягу

#### 3.2.1. Умови втрати стійкості пластичного деформування пластини

За двовісного розтягу пластини ( $\sigma_1, \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$ ) силами  $N_1$  і  $N_2$  (рис. 3.3) напруження будуть пов'язані з силами розтягу формулами, аналогічними до (3.4), а із врахуванням зміни розмірів – аналогічними до (3.6).

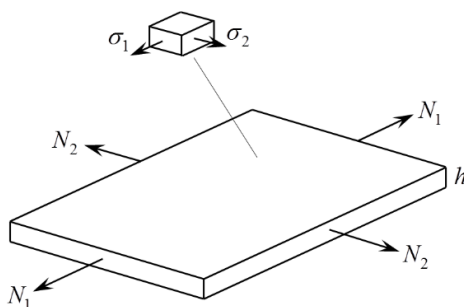


Рис. 3.3. Розрахункова схема двовісного розтягу пластинки

При досягненні однією із сил максимального значення виконується одна із умов

$$dN_1 = 0 \quad \text{або} \quad dN_2 = 0. \quad (3.14)$$

Врахувавши умову нестисливості матеріалу (3.2), отримаємо диференціальні рівняння:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_1} = \frac{d\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}, \quad \frac{d\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_2} = \frac{d\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}. \quad (3.15)$$

Загальні інтеграли рівнянь (3.15) мають вигляд:

$$\tilde{\sigma}_1 = C_1(1 + \varepsilon_1), \quad \tilde{\sigma}_2 = C_2(1 + \varepsilon_2). \quad (3.16)$$

Перше із співвідношень (3.16) є визначальним для випадку  $\sigma_1 > \sigma_2$ , друге – для випадку  $\sigma_2 > \sigma_1$ . Вважаючи задачу симетричною через властивість ізотропності матеріалу, обмежимося розглядом першого випадку. Сталу

інтегрування  $C_1$  визначимо із (3.16), розглянувши одновісний розтяг силою  $N_1$  ( $N_2 = 0$ ) до моменту втрати міцності, тобто, при  $\sigma_1 = \sigma_1^e$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e$ :

$$C_1 = \frac{\tilde{\sigma}_1^e}{1 + \varepsilon_1^e} = \sigma_1^e. \quad (3.17)$$

Із рівностей (3.17) отримуємо дотичні модулі до дійсних кривих деформування в точках, що відповідають моменту втрати стійкості ППД:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_1^e, \quad \frac{d\tilde{\sigma}_2}{d\varepsilon_2} = \sigma_2^e, \quad (3.18)$$

аналогічні до (3.13) для одновісного розтягу смуги.

### 3.2.2. Формулювання граничних умов в еквівалентних координатах

Нехай навантаження є простим:

$$\sigma_1 = k\sigma_2. \quad (3.19)$$

Із (2.3) виразимо головні напруження через еквівалентні:

$$\sigma_1 = \sigma_{eq} k \frac{2}{p} \left[ \frac{2}{|k|^p + |k-1|^p + 1} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \sigma_2 = \sigma_{eq} \frac{2}{p} \left[ \frac{2}{|k|^p + |k-1|^p + 1} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.20)$$

Поширивши дію узагальненого закону Гука на пластичну область і поклавши коефіцієнт поперечної деформації  $\mu = 0,5$ , отримаємо співвідношення для головних деформацій:

$$\varepsilon_1 = n\varepsilon_2, \quad (3.21)$$

де

$$n = \frac{2k-1}{2-k}. \quad (3.22)$$

Зауважимо, що для  $0 < k < 1/2$  отримуємо  $n < 0$  (тоді  $\varepsilon_1 < 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ); для  $1/2 < k < 2$   $n > 0$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ); для  $k > 2$   $n < 0$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 < 0$ ). Якщо  $k = 1/2$  і  $k = 2$ , одна із головних деформацій буде рівна нулеві (рис. 3.4):

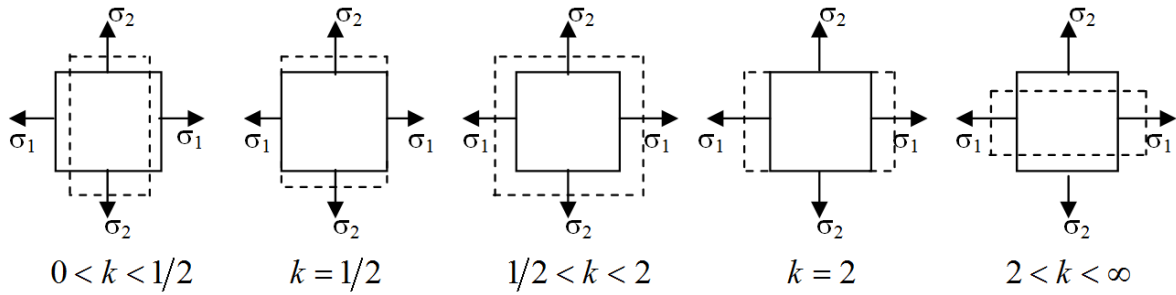


Рис. 3.4. Якісна картина деформування пластинки в умовах двовісного розтягу за різних  $k$

З (3.21) та умови нестисливості (3.3) отримуємо формулу для знаходження  $\varepsilon_3$  у випадку малих пластичних деформацій:

$$\varepsilon_3 = -\frac{n+1}{n} \varepsilon_1. \quad (3.23)$$

Із (2.4) отримуємо залежності головних деформацій від еквівалентних:

$$\varepsilon_1 = \frac{2k-1}{|2k-1|} \varepsilon_{eq} |n| \frac{2(p+1)}{p \left[ 2 \left( |n-1|^p + |n+2|^p + |2n+1|^p \right) \right]^{1/p}}, \quad (3.24, a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2-k}{|2-k|} \varepsilon_{eq} \frac{2(p+1)}{p \left[ 2 \left( |n-1|^p + |n+2|^p + |2n+1|^p \right) \right]^{1/p}}. \quad (3.24, б)$$

Залежності між еквівалентними та головними деформаціями для ділянки великих пластичних деформацій із використанням умов нестисливості (3.1) або (3.2) мають складнішу аналітичну форму (розділ 4, п. 4.1), значення головних деформацій за відомими еквівалентними отримуються у чисельному вигляді наближеними методами розрахунку. Тому з метою виключно якісного аналізу граничних умов (3.16) в системі координат  $(\varepsilon_{eq}, \sigma_{eq})$  прийmemo  $\tilde{\sigma}_1 \approx \sigma_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2 \approx \sigma_2$ ,  $\tilde{\sigma}_{eq} \approx \sigma_{eq}$  на ділянці малих пластичних деформацій.

Загальні інтеграли (3.16) представимо через узагальнені величини  $\sigma_{eq}$ ,  $\varepsilon_{eq}$ .

Гранична умова для випадку  $\sigma_1 > \sigma_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} k \frac{2}{p} \left[ \frac{2}{|k|^p + |k-1|^p + 1} \right]^{\frac{1}{p}} &= \\ &= C_1 \left\{ 1 + \frac{2k-1}{|2k-1|} \varepsilon_{eq} |n| \frac{2(p+1)}{p \left[ 2 \left( |n-1|^p + |n+2|^p + |2n+1|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Врахувавши (3.22) та (3.17), із (3.25) отримаємо узагальнену умову втрати стійкості ППД для випадку  $\sigma_1 > \sigma_2$  ( $k > 1$ ):

$$\sigma_{eq} = \sigma_1^e \left\{ \frac{p}{2k} \left[ \frac{k^p + (k-1)^p + 1}{2} \right]^{1/p} + \varepsilon_{eq} \frac{(2k-1)(p+1)}{3 \cdot 4^{1/p} k} \right\}. \quad (3.26)$$

Графічно рівняння (3.26) є сімейством прямих ліній в координатах  $(\varepsilon_{eq}, \sigma_{eq})$ , що відповідають умові локалізації деформацій від дії сили розтягу  $N_1$ . При перетині прямих з узагальненою діаграмою деформування, представленою в еквівалентних координатах, отримуємо граничні значення напружень і деформацій.

Аналогічну умову можна отримати для випадку  $0 < k < 1$ .

Отже, маючи сталу фізико-механічних властивостей матеріалу  $p$ , границю міцності за одновісного розтягу  $\sigma_1^e$  та задаючи різні значення співвідношень головних напружень коефіцієнтом  $k$ , можна прогнозувати значення дійсних напружень в момент втрати стійкості ППД.

### 3.2.3. Апробація граничної умови (3.26)

Для апробації граничної умови (3.26) із прийнятими в п. 3.2.2 допущеннями за даними експерименту з двовісного розтягу було побудовано експериментальні точки в координатах  $(\varepsilon_{eq}, \sigma_{eq})$ , розраховано оптимальні значення сталої  $p$  для властивостей кожного з матеріалів та побудовано узагальнені криві деформування. В цій же системі координат побудовано прями (3.26), що відповідають умові втрати стійкості ППД за різних видів напруженого стану (для

$k = 1 \dots \infty$ ). Криві деформування в координатах  $\sigma_{eq} \sim \varepsilon_{eq}$  та граничні прямі, отримані для деяких значень  $k$ , для сталі (0,37%С) із значенням  $p = 1,5$  (дані взято із [14], табл. 39, хім.склад та термообробка – там же) та сталі 45 із отриманим  $p = 1,6$  (дані взято із [90], табл. 5.1, хім. склад та термообробка – там же) показано на рис. 3.5.

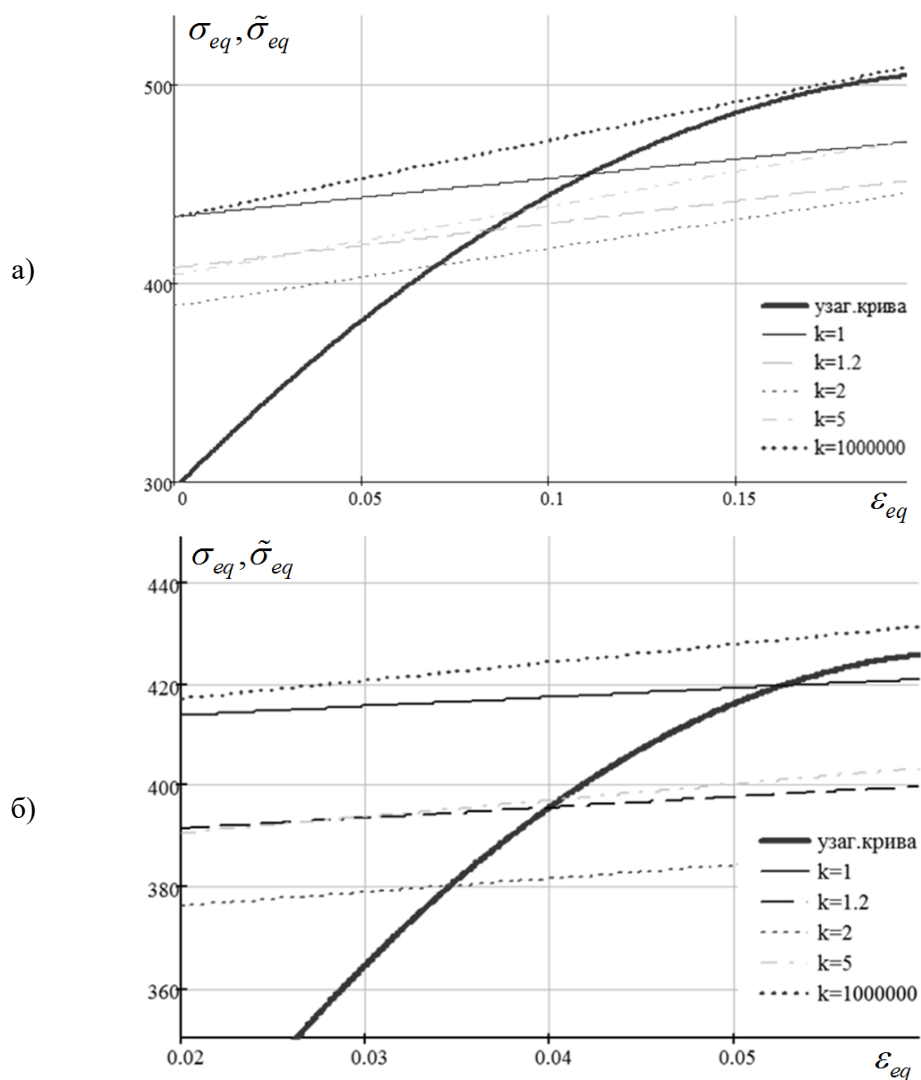


Рис. 3.5. Узагальнені криві деформування та графічне представлення умови (3.26) за різних  $k$  (тонкі лінії) для конструкційних матеріалів: а) Сталь (0,37%С); б) Сталь 45

Графічний аналіз рис. 3.5 показав, що одновісний розтяг ( $k = \infty$ ) і двовісний розтяг із  $k=1$  допускають найбільший ступінь пластичного деформування матеріалу до моменту появи локальних деформацій. За умови  $\sigma_1/\sigma_2 = 2$  втрата

стійкості ППД настає за найменшого рівня еквівалентних напружень. Аналогічні результати отримано в результаті численних експериментів при однократному лінійному навантаженні пластин [124, 125].

Знайдені для різних значень співвідношень головних напружень  $k$  граничні залишкові деформації  $\varepsilon_{eq}^6$  представлені у вигляді діаграм на рис. 3.6.

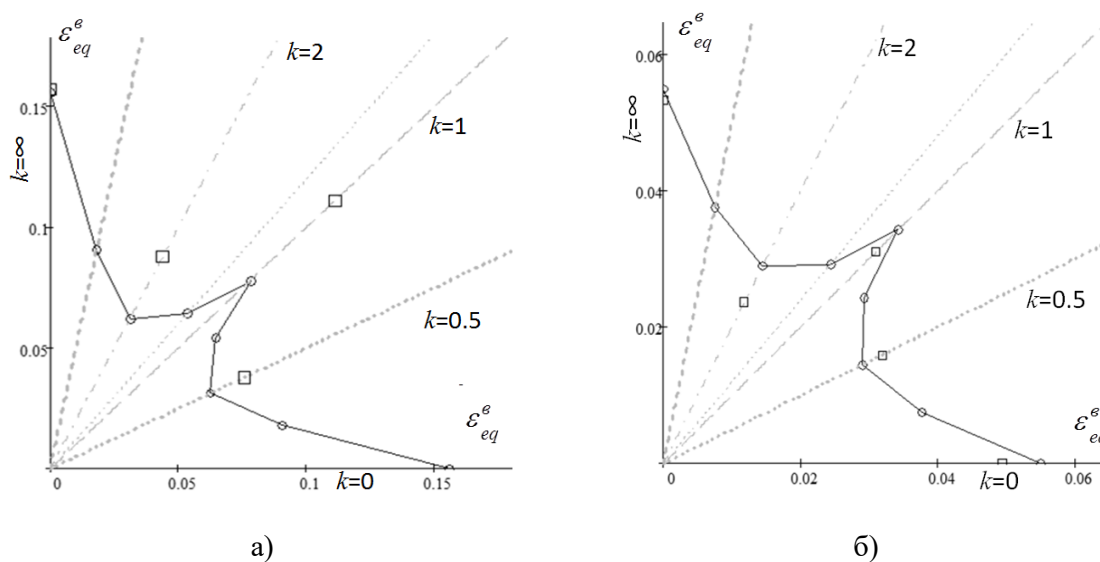


Рис. 3.6. Залежність граничних еквівалентних деформацій від виду плоского напруженого стану для матеріалів: а) Сталь (0,37%С); б) Сталь 45 (--- – розрахункові значення,  $\square$  – експериментальні точки)

Графіки w-подібної форми, представлені на рис. 3.6, побудовано з врахуванням симетрії напружено-деформованого стану пластини відносно  $k=1$ . Аналогічні результати отримано експериментальним шляхом для зразків легованих сталей в [126, 127].

Застосування описаного вище алгоритму із використанням умови (3.1) або (3.2) дозволяє із (3.18) отримати дотичні модулі до дійсної узагальненої кривої на ділянці великих пластичних деформацій та визначати граничні значення дійсних напружень в момент втрати стійкості ППД.

### 3.3. Дійсна границя міцності тонкостінного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском та розтягом

#### 3.3.1. Основні припущення та основні співвідношення задачі

Прийmemo основні припущення теорії тонкостінних оболонок:

а) напружено-деформований стан незмінний по товщині стінки (безмоментний напружений стан);

б) гіпотезу прямих нормалей та рівність нулю напружень, напрямлених по нормалі до серединної поверхні оболонки (гіпотези Кірхгофа-Лява) [128], зміну товщини стінки враховуватимемо;

в) відношення товщини стінки  $h$  до радіуса серединної поверхні  $R$  є малим, що дозволяє нехтувати порівняно з одиницею доданками вищого порядку, ніж  $h/R$  [129]. В інженерних розрахунках тонкостінними вважають оболонки, в яких відношення товщини стінки до радіуса серединної поверхні не перевищує 0,05, проте такий поділ є досить умовним.

Розглянемо тонкостінний циліндр із закритими торцями, навантажений осьовим розтягом  $N$  та внутрішнім тиском  $q$  (рис. 3.7). Позначимо через  $l$ ,  $R$  та  $h$  початкові довжину, радіус серединної поверхні та товщину стінки відповідно. Осьові, колові та радіальні напруження позначимо через  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  та  $\sigma_r$  відповідно.

Згідно з припущеннями задачі

$$\sigma_r \approx 0. \quad (3.27)$$

Осьові напруження, що виникають в стінках труби від дії лише розтягуючого зусилля  $N$ , рівні

$$\sigma_z = \frac{N}{2\pi Rh}. \quad (3.28)$$



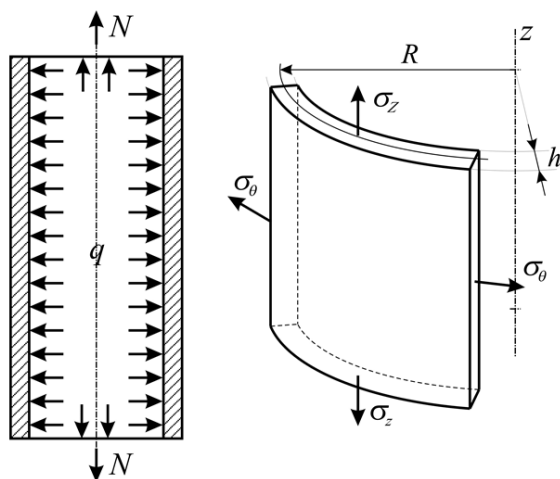


Рис. 3.7. Розрахункова схема осесиметричного навантаження тонкостінного циліндра внутрішнім тиском та розтягом

Осьова  $\varepsilon_z$ , колова  $\varepsilon_\theta$  та радіальна  $\varepsilon_r$  відносні деформації визначаються формулами:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\Delta R}{R}, \quad \varepsilon_r = \frac{\Delta h}{h}, \quad (3.29)$$

де  $\Delta l$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta h$  – абсолютні зміни в розмірах після зняття навантаження.

Дійсні осьові напруження, що розвиваються в процесі рівномірного пластичного деформування, визначаються формулою

$$\tilde{\sigma}_z = \frac{N}{2\pi R(1 + \varepsilon_\theta)h(1 + \varepsilon_r)}. \quad (3.30)$$

Розглянемо випадок великих рівномірних пластичних деформацій. Використаємо умову нестисливості (3.1), справедливості якої для трубчастих зразків підтверджено у роботі [130]:

$$(1 + \varepsilon_z)(1 + \varepsilon_\theta)(1 + \varepsilon_r) = 1. \quad (3.31)$$

Дійсні осьові напруження виражаються формулою

$$\tilde{\sigma}_z = \sigma_z(1 + \varepsilon_z). \quad (3.32)$$

Формула (3.33) співпадає з формулою (3.7) для розрахунку значень дійсних осьових напружень в розтягнутій смузі.

Умовні колові напруження  $\sigma_\theta$ , що виникають внаслідок дії внутрішнього тиску  $q$ , знаходять за формулою

$$\sigma_{\theta} = \frac{q\left(R - \frac{h}{2}\right)}{h}. \quad (3.33)$$

Із врахуванням рівномірних пластичних деформацій отримаємо вираз для дійсних колових напружень, що виникають в процесі навантаження тонкостінного циліндра внутрішнім тиском:

$$\tilde{\sigma}_{\theta} = \frac{q\left(R(1 + \varepsilon_{\theta}) - \frac{h}{2}(1 + \varepsilon_r)\right)}{h(1 + \varepsilon_r)}. \quad (3.34)$$

Виконаємо тотожні перетворення виразу (3.34):

$$\tilde{\sigma}_{\theta} = \frac{q\left(R - \frac{h}{2}\right)}{h} \cdot \frac{R(1 + \varepsilon_{\theta}) - \frac{h}{2}(1 + \varepsilon_r)}{\left(R - \frac{h}{2}\right)(1 + \varepsilon_r)} = \sigma_{\theta}(1 + \varepsilon_{\theta}) \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon_r} + \frac{\frac{h}{2} \cdot \left(1 - \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_{\theta}}\right)}{\left(R - \frac{h}{2}\right)(1 + \varepsilon_r)} \right].$$

За дії лише внутрішнього тиску

$$\varepsilon_z \approx 0, \quad (3.35)$$

тоді умова нестисливості (3.31) спроститься до

$$(1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_{\theta}) = 1, \quad (3.36)$$

залежність між дійсними та умовними коловими напруженнями набуде вигляду:

$$\tilde{\sigma}_{\theta} = \sigma_{\theta} \cdot (1 + \varepsilon_{\theta})^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \left( 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{\theta})^2} \right) \right]. \quad (3.37)$$

Оскільки за дії лише внутрішнього тиску колові деформації  $\varepsilon_{\theta} > 0$ , то із врахуванням нерівності  $0 < 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{\theta})^2} < 1$  та тонкостінності циліндра ( $h \ll R$ )

другим доданком у квадратних дужках знехтуємо. Із врахуванням прийнятих припущень знайдемо дійсні колові напруження в стінках циліндра в процесі навантаження внутрішнім тиском:

$$\tilde{\sigma}_{\theta} = \sigma_{\theta} \cdot (1 + \varepsilon_{\theta})^2. \quad (3.38)$$

Розглянемо випадок одночасного навантаження тонкостінного циліндра розтягом  $N$  та внутрішнім тиском  $q$ . Умовні осьові напруження знаходять за формулою:

$$\sigma_z = \frac{N}{2\pi Rh} + \frac{q\left(R - \frac{h}{2}\right)^2}{2Rh}. \quad (3.39)$$

Враховуючи пластичні деформації, із (3.39) отримаємо вираз для знаходження дійсних осьових напружень:

$$\tilde{\sigma}_z = \frac{N}{2\pi R(1+\varepsilon_\theta)h(1+\varepsilon_r)} + \frac{q\left(R(1+\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2}(1+\varepsilon_r)\right)^2}{2R(1+\varepsilon_\theta)h(1+\varepsilon_r)}. \quad (3.40)$$

Після тотожних перетворень (3.40) та із врахуванням нестисливості (3.31) отримаємо вираз для знаходження дійсних осьових напружень, що виникають у процесі навантаження внутрішнім тиском та розтягом у зоні великих пластичних деформацій:

$$\tilde{\sigma}_z = \sigma_z(1+\varepsilon_z) \left[ 1 + \frac{(1+\varepsilon_\theta)^2 \left(1 - \frac{h}{2R} \frac{1+\varepsilon_r}{1+\varepsilon_\theta}\right)^2 - \left(1 - \frac{h}{2R}\right)^2}{\frac{N}{q\pi R^2} + \left(1 - \frac{h}{2R}\right)^2} \right]. \quad (3.41)$$

При  $h \ll R$  формула (3.41) спроститься до виду

$$\tilde{\sigma}_z = \sigma_z(1+\varepsilon_z) \left[ 1 + \frac{(1+\varepsilon_\theta)^2 - 1}{\frac{N}{q\pi R^2} + 1} \right]. \quad (3.42)$$

Для одновісного розтягу ( $q=0$ ) з (3.41) отримуємо як частковий випадок формулу (3.32). За навантаження лише внутрішнім тиском ( $N=0$ ) та з врахуванням (3.35) отримуємо як частковий випадок формулу (3.38).

Отже, з геометричних міркувань за даних припущень задачі отримали вирази для обчислення дійсних осьових та колових напружень, що виникають в тонкостінному циліндрі в процесі рівномірного осесиметричного пластичного деформування:  $\tilde{\sigma}_z = \sigma_z(1+\varepsilon_z)$  та  $\tilde{\sigma}_\theta = \sigma_\theta(1+\varepsilon_\theta)^2$ .

### 3.3.2. Умови втрати стійкості пластичного деформування тонкостінного циліндра

Згідно з критерієм максимального навантаження помітні пластичні деформації починають локалізуватись, коли тиск або осьове навантаження

досягають максимуму, що аналітично виражається однією з двох умов:  $dq = 0$  та  $dN = 0$ .

За простого навантаження

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_\theta} = k \quad (3.43)$$

з умови  $dq = 0$  із врахуванням зв'язку між головними деформаціями (3.21) та умови нестисливості (3.31) отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{(1 + \varepsilon_\theta)^2 (1 + n\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2R}} - \tilde{\sigma}_\theta \frac{2(1 + \varepsilon_\theta)(1 + n\varepsilon_\theta) + n(1 + \varepsilon_\theta)^2}{\left((1 + \varepsilon_\theta)^2 (1 + n\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2R}\right)^2} d\varepsilon_\theta = 0. \quad (3.44)$$

З (3.44) отримуємо дотичний модуль до дійсної діаграми деформування  $\tilde{\sigma}_\theta(\varepsilon_\theta)$  в точці втрати стійкості ППД, викликаній дією внутрішнього тиску  $q$ :

$$\frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\varepsilon_\theta} = \tilde{\sigma}_\theta \frac{2(1 + \varepsilon_\theta)(1 + n\varepsilon_\theta) + n(1 + \varepsilon_\theta)^2}{(1 + \varepsilon_\theta)^2 (1 + n\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2R}}. \quad (3.45)$$

Якщо в рівності (3.45) знехтувати товщиною стінки ( $h/2R \approx 0$ ) та осьовими деформаціями ( $\varepsilon_z = n\varepsilon_\theta \approx 0$ ), то вираз для дотичного модуля спроститься до виду

$$\frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\varepsilon_\theta} = \frac{2}{1 + \varepsilon_\theta} \tilde{\sigma}_\theta. \quad (3.46)$$

Проінтегрувавши (3.44), отримуємо залежність дійсних граничних колових напружень  $\tilde{\sigma}_\theta$  від рівня колових пластичних деформацій, виду напруженого стану та геометрії тонкостінного циліндра:

$$\tilde{\sigma}_\theta = C_\theta \left[ (1 + \varepsilon_\theta)^2 (1 + n\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2R} \right]. \quad (3.47)$$

За дії лише внутрішнього тиску ( $k=0,5, n=0$ ) та при  $h \ll R$  із (3.47) отримуємо  $\tilde{\sigma}_\theta = C_\theta (1 + \varepsilon_\theta)^2$ .

Розглянемо випадок втрати стійкості ППД, спричиненої дією осьової сили розтягу  $N$ :  $dN = 0$ . За осьового розтягу товщина стінки та радіус середньої поверхні зменшуються одночасно, тому показник тонкостінності змінюється

незначно порівняно із осьюою деформацією,  $\frac{h(1+\varepsilon_r)}{R(1+\varepsilon_\theta)} \approx \frac{h}{R}$ . Умова  $dN=0$

зводиться до диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{\tilde{\sigma}_z} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR}\right) \frac{1}{1+\varepsilon_z} + \frac{h}{2knR} \frac{1}{1+\frac{1}{n}\varepsilon_z}}{1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{4kR}} d\varepsilon_z. \quad (3.48)$$

Поінтегрувавши (3.48), отримуємо залежність дійсних граничних осьових напружень від рівня осьових деформацій, виду напруженого стану та геометрії тонкостінного циліндра від дії осьового розтягу:

$$\tilde{\sigma}_z = C_z \left[ (1+\varepsilon_z)^{2\left(2k-1+\frac{h}{R}\right)} \left(1+\frac{1}{n}\varepsilon_z\right)^{\frac{2h}{R}} \right]^{\frac{1}{4k-2+\frac{h}{R}}}. \quad (3.49)$$

Якщо  $h \ll R$ , то з (3.49) отримаємо як частковий випадок залежність  $\tilde{\sigma}_z = C_z(1+\varepsilon_z)$ , що співпадає з умовою, отриманою для розтягу смуги.

З рівняння (3.48) отримуємо дотичний модуль до дійсної кривої деформування  $\tilde{\sigma}_z(\varepsilon_z)$  в точці, що відповідає моменту локалізації деформацій, викликаній дією осьового розтягу силою  $N$ :

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR}\right) \frac{1}{1+\varepsilon_z} + \frac{h}{2knR} \frac{1}{1+\frac{1}{n}\varepsilon_z}}{1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{4kR}} \tilde{\sigma}_z. \quad (3.50)$$

Отже, значення дотичного модуля, що визначає момент втрати стійкості рівномірного пластичного деформування тонкостінного циліндра від дії осьового розтягу, залежить від виду напруженого стану та початкових значень товщини  $h$  та радіуса  $R$  серединної поверхні труби.

Поклавши у формулі (3.50)  $k \rightarrow \infty$ , отримаємо як частковий випадок формулу

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} = \frac{\tilde{\sigma}_z}{1+\varepsilon_z}, \quad (3.51)$$

що збігається з (3.12), отриманою для випадку розтягу смуги. Аналогічне спрощення отримаємо незалежно від значень  $k$ , поклавши  $h/R \rightarrow 0$ . Це підтверджує можливість моделювання напружено-деформованого стану розтягнутої тонкостінної труби з достатньо малим значенням  $h/R$  через розтяг смуги.

Аналіз дотичних модулів (3.47) та (3.51) до дійсних кривих деформування  $\tilde{\sigma}_\theta(\varepsilon_\theta)$  та  $\tilde{\sigma}_z(\varepsilon_z)$ , отриманих для прогнозування початку процесу локалізації деформацій від дії внутрішнього тиску чи осьового розтягу відповідно, показав, що швидкість процесу локалізації деформацій є удвічі вищою при навантаженні труби внутрішнім тиском порівняно з навантаженням лише осьовим розтягом.

Отримані дотичні модулі  $d\tilde{\sigma}_z/\varepsilon_z$  та  $d\tilde{\sigma}_\theta/\varepsilon_\theta$  дозволять сформулювати умову локалізації деформацій за комбінованого навантаження тонкостінного циліндра осьовим розтягом та внутрішнім тиском.

### 3.3.3. Масштабний ефект при реалізації простого навантаження тонкостінного циліндра

Умовою простого навантаження у роботі прийнято стале відношення між головними напруженнями. Напружений стан тонкостінного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском  $q$  та осьовим розтягом  $N$ , описується двома головними напруженнями – осьовим  $\sigma_z$  та коловим  $\sigma_\theta$ , що знаходять із формул (3.33) та (3.39) без врахування змін розмірів труби під навантаженням.

За простого навантаження труби напрямки головних напружень та відношення між їх числовими значеннями  $k$  залишаються постійними. Підставивши (3.33) та (3.39) в умову простого навантаження  $\sigma_z/\sigma_\theta = k$  та відкинувши доданок  $(h/R)^2$  із врахуванням тонкостінності, отримаємо:

$$\frac{N}{q} = 2\pi R^2 \left[ k - \frac{1}{2} + \frac{h}{2R}(1-k) \right]. \quad (3.52)$$

Окрім безрозмірного показника тонкостінності  $h/R$ , що може бути однаковим для труб різних розмірів, на значення відношення  $N/q$  квадратично

впливає радіус труби. Отже, спостерігається масштабний ефект при реалізації простого навантаження труби.

Залежність відношення  $N/qR^2$  для тонкостінних труб з фіксованим радіусом  $R$  ( $R=1$  ум. од. довж.), але за різних значень товщини стінки, від виду напруженого стану  $k$  показано на рис. 3.8:

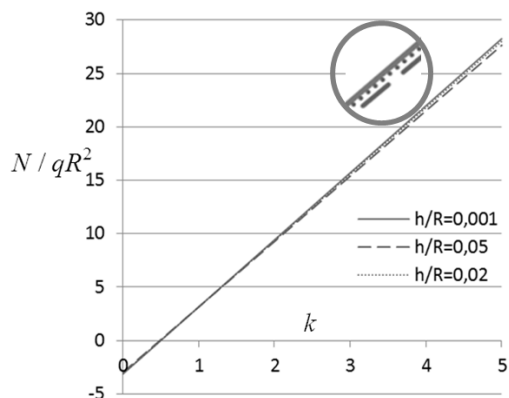


Рис. 3.8. Залежність відношення  $N/qR^2$  з фіксованим  $R$  від  $k$

За навантаження тонкостінного циліндра лише внутрішнім тиском, тобто для  $N \approx 0$ , із (3.52) отримується  $k \approx 0,5$ , що підтверджується експериментально. Оскільки в процесі навантаження труби лише внутрішнім тиском значення відношення  $\eta$  зменшується, реальне значення  $k$  при сталому навантаженні збільшується.

Формула (3.52) встановлює зв'язок між величинами розтягу  $N$  та внутрішнього тиску  $q$  для підтримання умови пропорційності головних напружень та реалізації простого навантаження труби.

### 3.3.4. Аналіз залежностей дійсних граничних напружень від виду напруженого стану та геометричних параметрів тонкостінного циліндра

Умова (3.47) є аналітичним виразом для знаходження граничних дійсних колових напружень у тонкостінному циліндрі для випадку  $\sigma_\theta > \sigma_z$ , умова (3.49) – граничних дійсних осьових напружень для випадку  $\sigma_z > \sigma_\theta$ .

Аналіз умови (3.47) показує, що граничне значення дійсного колового напруження  $\tilde{\sigma}_\theta$  залежить від виду напруженого стану та показника тонкостінності  $h/R$ . Оскільки за навантаження тонкостінного циліндра внутрішнім тиском колові залишкові деформації  $\varepsilon_\theta > 0$ , то найменшого свого значення для  $0,5 < k < 2$  граничне колове дійсне напруження  $\tilde{\sigma}_\theta$  буде набувати при  $k \approx 0,5$  ( $n \approx 0$ ). Збільшення показника тонкостінності  $h/R$  зменшує рівень дійсних напружень в коловому напрямку.

Формула (3.49) аналітично підтверджує збільшення дійсних граничних значень осьових напружень зі збільшенням відношення  $h/R$ , оскільки при

$$0 < h/R < 0,5 \text{ виконується } \left[ \frac{2(1+2h/R)}{2+h/R} \right]' > 0.$$

Координати точок перетину діаграми деформування та граничних кривих, побудованих за формулами (3.47) та (3.49), визначають значення залишкових пластичних деформацій та дійсних напружень, що відповідають початку процесу локалізації деформацій.

Для знаходження сталої інтегрування  $C_\theta$  у загальному інтегралі (3.47) розглядається частковий випадок навантаження внутрішнім тиском  $q$ , в цьому разі  $k = 0,5$ . Граничні колові напруження і деформація  $\varepsilon_\theta^e$ ,  $\tilde{\sigma}_\theta^e$  відповідають початковій локалізації деформацій від дії внутрішнього тиску.

Аналогічно на основі значень граничних напружень  $\sigma_z = \sigma_z^e$  при  $k = 2$  визначаються сталі інтегрування  $C_z$  для умови (3.49).

### **3.3.5. Графічний аналіз залежностей дійсних граничних напружень від виду напруженого стану та геометричних параметрів тонкостінного циліндра**

Графіки умови локалізації деформацій (3.47) для випадку  $\sigma_\theta > \sigma_z$  було побудовано для трьох значень  $k$  в діапазоні 0,5..0,7 та показника тонкостінності



$h/R = 0,06$  (рис. 3.9, а). По вертикальній осі відкладались приведені напруження  $\tilde{\sigma}_\theta^e/C_\theta$ .

Графіки умов втрати міцності (3.49) для випадку  $\sigma_z > \sigma_\theta$ , побудовані для  $k = 1,7 \dots 1,9$ , показано на рис. 3.9, б. По вертикальній осі відкладались приведені напруження  $\tilde{\sigma}_z^e/C_z$ , значення показника тонкостінності було взято  $h/R = 0,06$ .

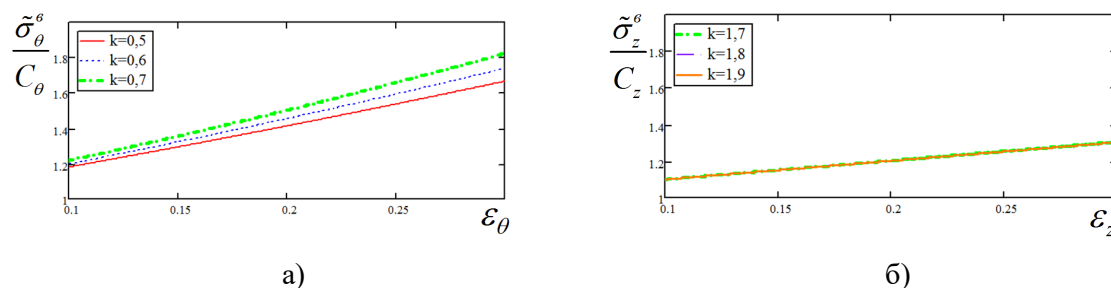


Рис. 3.9. Графічне зображення умов: а) (3.47) для випадку  $\sigma_\theta > \sigma_z$  за різних  $k$ ;  
б) (3.49) для випадку  $\sigma_z > \sigma_\theta$  за різних  $k$

Графічний аналіз умови (3.47) для випадків  $\sigma_\theta > \sigma_z > 0$  (рис. 3.9, а) показав зменшення рівня розрахункових граничних дійсних колових напружень в тонкостінному циліндрі за наближення значень співвідношень головних напружень до 0,5. Чим більшим є рівень залишкових деформацій в момент втрати стійкості ППД, тим вплив  $k$  суттєвіший. Так, при збільшенні  $k$  на 0,1 та рівні колових деформацій  $\epsilon_\theta \approx 0,3$  приведені розрахункові напруження збільшуються на 5%. При  $\sigma_z > \sigma_\theta > 0$  (рис. 3.9, б) вплив виду напруженого стану на значення дійсних осьових граничних напружень є несуттєвим.

Вплив показника тонкостінності  $\eta = h/R$  на значення дійсних граничних напружень аналізували за серією графіків, у яких параметру  $h/R$  було надано значень 0,04; 0,06 та 0,08. На рис. 3.10 показано граничні криві, описані умовою (3.47) за співвідношень головних напружень  $k = 0,5$  та  $k = 0,6$ .

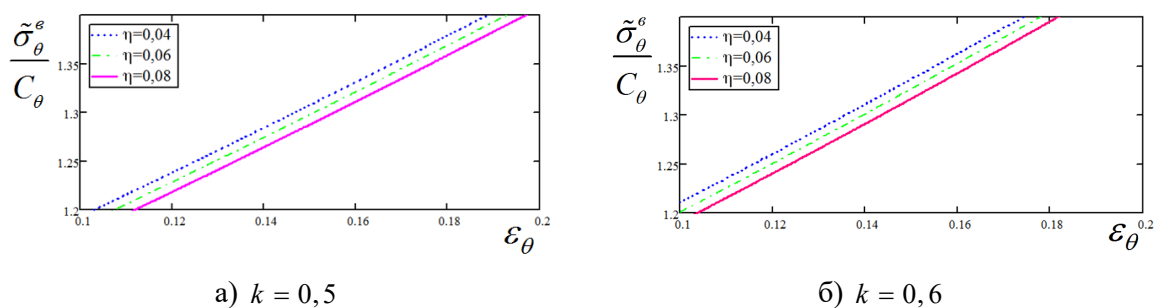


Рис. 3.10. Графічне зображення залежності граничних дійсних колових напружень  $\tilde{\sigma}_\theta$  при різних  $h/R = \eta$

Аналіз графіків на рис. 3.10 показав зменшення рівня приведених дійсних колових напружень в стінках циліндричної оболонки із збільшенням значень  $h/R$  в обох випадках. При зростанні відношення  $\eta = h/R$  на 0,02 приведені розрахункові граничні колові напруження зменшуються в середньому на 2%. Порівняльний аналіз графіків показав збільшення дійсної границі міцності при незначному додатковому навантаженні труби осьовим розтягом (при  $k=0,6$ ).

Побудова граничних кривих (3.49) для  $\sigma_z > \sigma_\theta$  та значень  $\eta = 0,04; 0,06; 0,08$  показала, що ресурс міцності тонкостінного циліндра в цьому випадку майже не залежить від відношення  $h/R$ .

### 3.3.6. Узгодження з експериментальними даними

Для перевірки адекватності побудованої моделі прогнозування граничних станів за деформування тонкостінного циліндра від дії внутрішнього тиску та осьового розтягу було використано результати експериментів, наведені в [14] для конструкційних сталей двох марок: легованої сталі 10ГН2МФА та вуглецевої сталі 0,37%С.

Граничні криві побудовано відповідно до умов (3.47) та (3.49) для різних співвідношень головних напружень  $k$ . Дані експерименту, перераховані в дійсних напруженнях, показано точками, при побудові виконано масштабування вертикальної осі – відкладались приведені напруження.

На рисунках 3.11, 3.12 показано граничні криві та дані експерименту для сталі 10ГН2МФА. Рисунки 3.11 (а) та 3.12 (а) відображають взаємне розташування експериментальної кривої деформування та розрахункових

граничних кривих, побудованих за формулами (3.47) та (3.49) відповідно. Рисунки 3.11 (б) та 3.12 (б) показують задовільне узгодження розрахункових значень напружено-деформованого стану з експериментом.

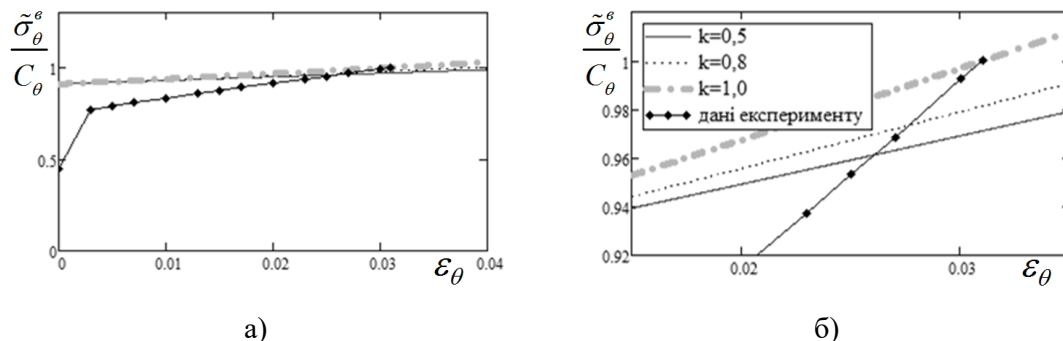


Рис. 3.11. Експериментальні криві деформування сталі 10ГН2МФА та розрахункові граничні криві (3.47), загальна картина (а) та деталізація перетину (б) за різних  $k$

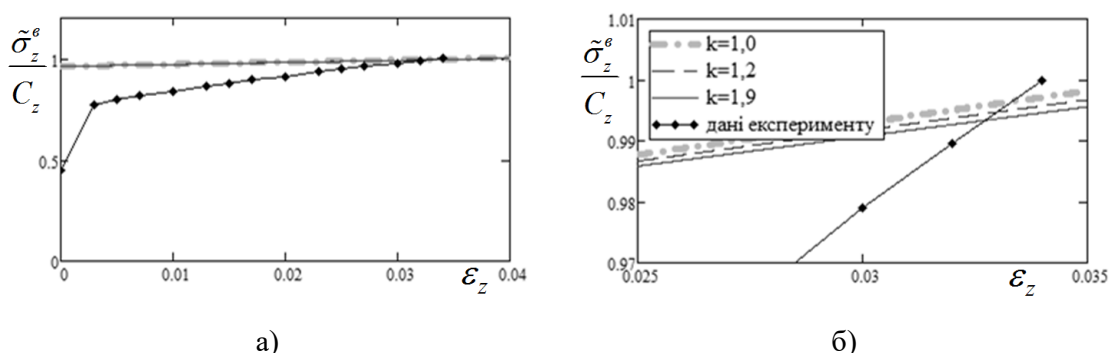


Рис. 3.12. Експериментальні криві деформування сталі 10ГН2МФА та розрахункові граничні криві (3.49), загальна картина (а) та деталізація перетину (б) за різних  $k$

Помилка, отримана при розрахунку дійсних осьових граничних напружень та залишкових деформацій (рис. 3.12), пояснюється похибками заокруглень при знятті експериментальних даних чи обчисленнях, впливом множника масштабування  $C_z$ , а також впливом прийнятих допущень при виведенні залежності (3.49).

На рис. 3.13 (а) та 3.14 (а) зображено криві деформування сталі 0,37%С, отримані експериментально, та графіки залежностей (3.47) та (3.49) відповідно.

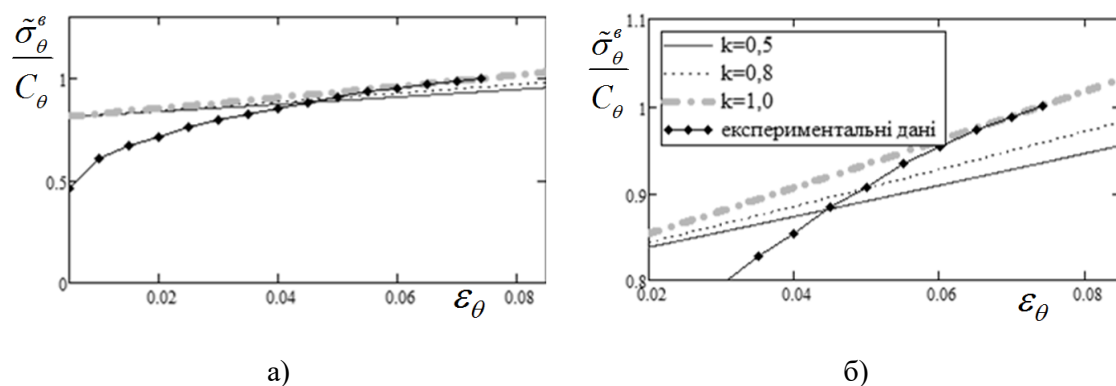


Рис. 3.13. Експериментальні криві деформування сталі 0,37%С та розрахункові граничні криві (3.47), загальна картина (а) та деталізація перетину (б) за різних  $k$

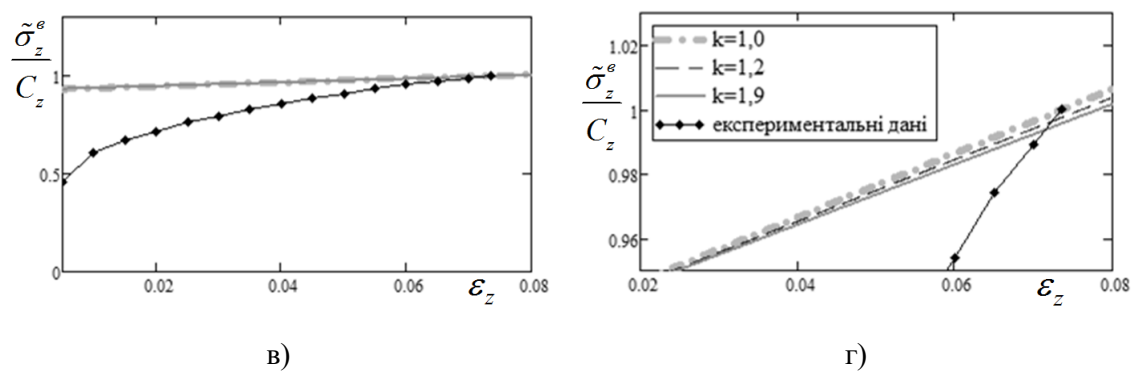


Рис. 3.14. Експериментальні криві деформування сталі 0,37%С та розрахункові граничні криві (3.49), загальна картина (а) та деталізація перетину (б) за різних  $k$

Аналіз графіків, побудованих для вуглецевої сталі 0,37%С, показав відповідність розрахункових значень експериментальним. Зменшення ресурсу міцності тонкостінного циліндра за співвідношень головних напружень  $k \rightarrow 0,5$  підтверджується результатами дослідів.

Узагальнення запропонованої методики для тонкостінних осесиметричних оболонок довільної гаусівської кривизни дозволить застосувати її до широкого класу конструкційних елементів, що працюють в умовах плоского напруженого стану.

### 3.4. Дійсна границя міцності осесиметричної тонкостінної оболонки, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом

При розробці методики прогнозування граничних станів тонкостінних осесиметричних оболонок із врахуванням виду напруженого стану та геометричних параметрів розглядалися тонкостінні оболонки додатної гаусівської кривизни.

#### 3.4.1. Основні припущення та основні співвідношення задачі

Приймемо основні припущення теорії тонкостінних оболонок:

а) напружено-деформований стан незмінний по товщині стінки (безмоментний);

б) гіпотезу «прямих нормалей» та рівність нулю напружень, напрямлених по нормалі до серединної поверхні оболонки (гіпотези Кірхгофа-Лява); проте враховуватимемо зміну фактичної товщини стінки;

в) відношення товщини стінки  $h$  до радіуса серединної поверхні  $R$  є малим, що дозволяє нехтувати порівняно з одиницею доданками вищого порядку, ніж  $h/R$ .

Осесиметрична оболонка товщини  $h$  із днищами, серединна поверхня якої утворена обертанням гладкої кривої, рівномірно навантажена внутрішнім тиском  $q$  та зусиллям розтягу  $N$  так, що утворені меридіональні  $\sigma_m$ , колові  $\sigma_t$  та радіальні  $\sigma_r$  напруження є головними. Меридіональні напруження напрямлені по дотичній до меридіана в кожній точці прикладання (рис. 3.15).

Розглянуто елемент оболонки, виділений двома достатньо близькими осьовими перерізами, взятими під кутом  $d\varphi_1$  та двома ортогональними до них перерізами під центральним кутом  $d\varphi_2$ . Довжини граней вздовж серединних радіусів в коловому та меридіональному напрямках позначено відповідно через  $ds_1$  та  $ds_2$  (рис. 3.16). Для елемента, взятого на достатній для нехтування крайовим ефектом відстані від днищ, уведено позначення:  $\rho_m$  – поточний радіус

меридіана серединної поверхні елемента (меридіональний радіус),  $\rho_t$  – поточний радіус поверхні, ортогональної до меридіана (коловий, або широтний радіус). Радіальне напруження  $\sigma_r = 0$ . Кут повороту нормалі навантаженої оболонки вважається незмінним.

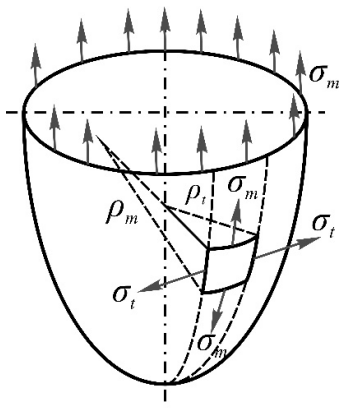


Рис. 3.15. Розрахункова схема навантаженої тонкостінної осесиметричної оболонки

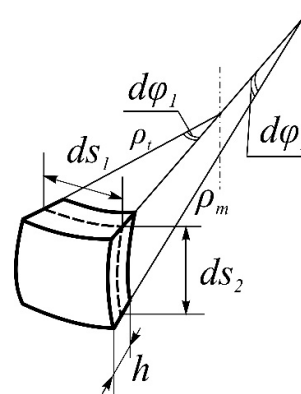


Рис. 3.16. Елемент осесиметричної оболонки

З умови рівноваги відносно нормалі до елемента оболонки отримуємо рівняння:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{h} \left( 1 - \frac{h}{2\rho_t} \right) \left( 1 - \frac{h}{2\rho_m} \right). \quad (3.53)$$

Прийнявши  $h/\rho_t \approx 0$ ,  $h/\rho_m \approx 0$ , з (3.53) отримаємо рівняння Лапласа (3.54).

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{h}. \quad (3.54)$$

Для циліндричної труби ( $\rho_m \rightarrow \infty$ ) отримаємо рівняння середнього діаметра Надаї [40].

Другу умову рівноваги для визначення напружень  $\sigma_m$  та  $\sigma_t$  отримаємо, розглянувши рівновагу частини оболонки, що відтинається круговою конічною поверхнею із твірними, нормальними до серединної поверхні оболонки у кожній точці її перетину, та нахиленими до осі оболонки під кутом  $\theta$  (рис. 3.17).

Використавши перетворення, як показано в [108], та ввівши позначення

$$h/\rho_t = \eta, \quad (3.55)$$

отримаємо

$$\sigma_m^q = \frac{q \left( 1 - \frac{\eta}{1 - \cos 2\theta} \right)^2}{2\eta}. \quad (3.56)$$

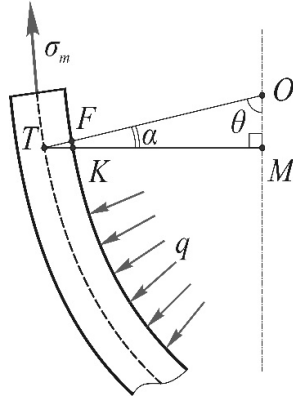


Рис. 3.17. Фрагмент осьового перерізу оболонки

Відповідно до принципу незалежності дії сил сумарні меридіональні напруження від дії внутрішнього тиску та розтягу будуть  $\sigma_m = \sigma_m^q + \sigma_m^N$ :

$$\sigma_m = \frac{q \left( 1 - \frac{\eta}{1 - \cos 2\theta} \right)^2}{2\eta} + \frac{N}{\pi \rho_t h (1 - \cos 2\theta)}. \quad (3.57)$$

Враховуючи  $\alpha = \pi/2 - \theta$ ,  $\rho_t \cos \alpha = r$  (рис. 3.17) та нехтуючи поправкою на товщину стінки в першому доданку, отримаємо відомі залежності для знаходження меридіональних напружень в тонкостінній осесиметричній оболонці за безмоментною теорією.

Вважатимемо навантаження простим:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_t} = k. \quad (3.58)$$

Колова  $\varepsilon_t$ , радіальна  $\varepsilon_r$  та меридіональна  $\varepsilon_m$  відносні деформації визначаються рівностями:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta \rho_t}{\rho_t}, \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta \rho_m}{\rho_m}, \quad \varepsilon_r = \frac{\Delta h}{h} \quad (3.59)$$

Уведемо позначення для показника опуклості

$$v = \frac{\rho_t}{\rho_m}. \quad (3.60)$$

Із системи рівнянь (3.53), (3.57) виразимо  $q$  та  $N$ , врахуємо зміни фактичних розмірів навантаженої оболонки:

$$q = \tilde{\sigma}_t \eta \frac{kv \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_m} + \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_t}}{\left(1 - \frac{\eta}{2} \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_t}\right) \left(1 - \frac{\eta v}{2} \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_m}\right)}, \quad (3.61)$$

$$N = \pi \rho_t h \tilde{\sigma}_m (1 - \cos 2\theta) (1 + \varepsilon_r) (1 + \varepsilon_t) \times \left[ 1 - \frac{\left(1 - \frac{\eta}{1 - \cos 2\theta} \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_t}\right)^2}{2k \left(1 - \frac{\eta}{2} \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_t}\right)} \cdot \frac{1 + kv \frac{1 + \varepsilon_t}{1 + \varepsilon_m}}{1 - \frac{\eta v}{2} \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_m}} \right]. \quad (3.62)$$

Отримані вирази для силових факторів, що враховують зміни розмірів навантаженої оболонки, дозволять сформулювати умови локалізації деформацій.

### 3.4.2. Знаходження залежності між дійсними граничними коловими напруженнями та деформаціями

Для виведення граничної умови початку локалізації деформацій, спричиненої дією внутрішнього тиску  $q$ , використаємо умову

$$dq = 0, \quad (3.63)$$

як це було зроблено для тонкостінної труби.

Використаємо умову нестисливості матеріалу у вигляді

$$(1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_t)(1 + \varepsilon_m) = 1. \quad (3.64)$$

Вважатимемо, що при навантаженні защемленої на торцях оболонки лише внутрішнім тиском меридіональні залишкові деформації близькі до нуля:

$$\varepsilon_m \approx 0. \quad (3.65)$$

Із врахуванням прийнятих допущень вираз (3.61) спроститься до вигляду



$$q = \tilde{\sigma}_t \eta \frac{(1 + \varepsilon_t)(kv(1 + \varepsilon_t) + 1)}{\left((1 + \varepsilon_t)^2 - \eta/2\right)(1 + \varepsilon_t - \eta v/2)}. \quad (3.66)$$

Врахувавши умову нестисливості (3.64) та вважаючи  $k$ ,  $\eta$ ,  $v$  сталими величинами, умову  $dq=0$  запишемо через дійсні колові напруження вигляді:

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{\sigma}_t} d\tilde{\sigma}_t + \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_t} d\varepsilon_t = 0. \quad (3.67)$$

Після виконання перетворень отримаємо:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_t}{\tilde{\sigma}_t} + \left[ \frac{(1 + 2kv(1 + \varepsilon_t))}{(1 + \varepsilon_t)(kv(1 + \varepsilon_t) + 1)} - \frac{\left(3(1 + \varepsilon_t)^2 - \eta v(1 + \varepsilon_t) - \frac{\eta}{2}\right)}{\left((1 + \varepsilon_t)^2 - \frac{\eta}{2}\right)\left(1 + \varepsilon_t - \frac{\eta v}{2}\right)} \right] d\varepsilon_t = 0. \quad (3.68)$$

Прийнявши спрощення  $\eta^2 \approx 0$ , із (3.68) отримаємо залежність дійсних граничних колових напружень від виду напруженого стану, початкової геометрії оболонки та її деформацій:

$$\tilde{\sigma}_t = C_t \frac{\left[ (1 + \varepsilon_t)^2 - \eta/2 \right]^{\frac{4 - (1 - k + 2k^2)\eta v^2}{4 - 2(1 + k^2)\eta v^2}} \left[ \frac{1 + \varepsilon_t - \sqrt{\eta/2}}{1 + \varepsilon_t + \sqrt{\eta/2}} \right]^{\frac{v\sqrt{\eta/2}}{2 - (1 + k^2)\eta v^2}}}{\left[ 1 + \varepsilon_t - \eta v/2 \right]^{\frac{(1 + k)\eta v^2}{2 - (1 - k)\eta v^2}} \left[ 1 + kv(1 + \varepsilon_t) \right]}. \quad (3.69)$$

Стала інтегрування  $C_t$  визначається за результатами досліду при  $k=0,5$ .

Для часткового випадку ( $v=0$ ) отримаємо

$$\tilde{\sigma}_t = C_t \left[ (1 + \varepsilon_t)^2 - \eta/2 \right], \quad (3.70)$$

що збігається з результатом, отриманим для тонкостінного циліндра.

З (3.68) отримуємо дотичний модуль до дійсної кривої деформування  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_t}{d\varepsilon_t} &= \\ &= \left[ \frac{3(1+\varepsilon_t)^2 - \eta\nu(1+\varepsilon_t) - \frac{\eta}{2}}{\left( (1+\varepsilon_t)^2 - \frac{\eta}{2} \right) \left( 1 + \varepsilon_t - \frac{\eta\nu}{2} \right)} - \frac{1 + 2k\nu(1+\varepsilon_t)}{(1+\varepsilon_t)(k\nu(1+\varepsilon_t) + 1)} \right] \tilde{\sigma}_t. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Нехтуючи товщиною стінки ( $\eta \approx 0$ ) для часткового випадку тонкостінного циліндра ( $\nu=0$ ) отримуємо вираз:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_t}{d\varepsilon_t} = \frac{2}{1+\varepsilon_t} \tilde{\sigma}_t. \quad (3.72)$$

Дотичний модуль (3.71) для знаходження дійсних граничних колових напружень в момент локалізації деформацій у частковому випадку звівся до отриманого вище (3.46) для тонкостінного циліндра.

### 3.4.3. Встановлення залежності між дійсними граничними меридіональними напруженнями та деформаціями

Для виведення граничної умови початку локалізації деформацій, спричиненої дією сили розтягу  $N$ , використаємо умову

$$dN=0. \quad (3.73)$$

В цьому випадку  $\varepsilon_m > 0$ ,  $\varepsilon_r < 0$ ,  $\varepsilon_t < 0$ , в зоні рівномірних пластичних деформацій змінюється опуклість оболонки, а показник тонкостінності є майже незмінним, тобто  $\eta(1+\varepsilon_r)/(1+\varepsilon_t) \approx \eta$ . Тоді (3.62) можна спростити до виду

$$\begin{aligned} N &= \pi\rho_t h \tilde{\sigma}_m (1 - \cos 2\theta)(1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_t) \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{\left( 1 - \frac{\eta}{1 - \cos 2\theta} \right)^2}{2k \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right)} \cdot \frac{1 + k\nu \frac{1 + \varepsilon_t}{1 + \varepsilon_m}}{1 - \frac{\eta\nu}{2} \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_m}} \right]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Аналогічно, як для тонкостінного циліндра, приймемо позначення

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_t} = n, \quad (3.75)$$

де  $n$  обчислюється за формулою (3.22). Враховуючи умову нестисливості (3.64), вираз для осьової сили розтягу запишемо у вигляді:

$$N = \pi \rho_t h (1 - \cos 2\theta) \frac{\tilde{\sigma}_m}{1 + \varepsilon_m} \times \left[ 1 - \frac{\left(1 - \frac{\eta}{1 - \cos 2\theta}\right)^2}{2k \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)} \cdot \frac{1 + \varepsilon_m + kv \left(1 + \frac{1}{n} \varepsilon_m\right)}{1 + \varepsilon_m - \frac{\eta v}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \varepsilon_m\right)} \right]. \quad (3.76)$$

Умова (3.73) зведеться до диференціального рівняння:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_m}{\tilde{\sigma}_m} = \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon_m} + \frac{va(k + \eta/2)(1/n - 1)}{\left(1 + \varepsilon_m - \frac{\eta v}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{n}\right)\right) \left[ 2k \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \left(1 + \varepsilon_m - \frac{\eta v}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{n}\right)\right) - a \left(1 + \varepsilon_m + kv \left(1 + \frac{\varepsilon_m}{n}\right)\right) \right]} \right\} d\varepsilon_m, \quad (3.77)$$

де  $a = \left(1 - \eta / (1 - \cos 2\theta)\right)^2$ .

Проінтегрувавши (3.77), отримуємо залежність дійсних меридіональних напружень від виду напруженого стану (параметри  $k, n$ ) та геометрії оболонки (параметри  $\eta, v$ ):

$$\tilde{\sigma}_m = C_m \frac{(1 + \varepsilon_m) \left[ 1 - \frac{\eta v}{2} + \varepsilon_m \left(1 - \frac{\eta v}{2n}\right) \right]}{k \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) (2 - \eta v) - a(1 + kv) + \varepsilon_m \left[ k \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \left(2 - \frac{\eta v}{n}\right) - a \left(1 + \frac{kv}{n}\right) \right]}. \quad (3.78)$$

Поклавши  $v=0$ , отримаємо випадок тонкостінного циліндра, тоді  $\sigma_m = \sigma_z$ ,

$\varepsilon_m = \varepsilon_z$ ,  $C_m = C_z$ . Гранична умова (3.78) набуде вигляду  $\tilde{\sigma}_z = \frac{C_z(1 + \varepsilon_z)}{2k(1 - \eta/2) - a}$  або, із

позначенням  $C_z / (2k(1 - \eta/2) - a) = C_z^*$ ,

$$\tilde{\sigma}_z = C_z^* (1 + \varepsilon_z). \quad (3.79)$$

Умова (3.79) збігається з умовою для знаходження граничних значень дійсних осьових напружень в тонкостінному циліндрі, що розвиваються від дії осьового розтягу на початку утворення місцевих пластичних деформацій.

З (3.77) отримуємо дотичний модуль до кривої деформування  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  для знаходження точки втрати стійкості ППД:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_m}{d\varepsilon_m} = \left\{ \frac{1}{1+\varepsilon_m} + \frac{va\left(k+\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-1\right)}{\left(1+\varepsilon_m-\frac{\eta v}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_m}{n}\right)\right)\left[2k\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\left(1+\varepsilon_m-\frac{\eta v}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_m}{n}\right)\right)-a\left(1+\varepsilon_m+kv\left(1+\frac{\varepsilon_m}{n}\right)\right)\right]} \right\} \tilde{\sigma}_m. \quad (3.80)$$

Для часткового випадку тонкостінного циліндра ( $v=0$ ) отримаємо:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_m}{d\varepsilon_m} = \frac{\tilde{\sigma}_m}{1+\varepsilon_m}. \quad (3.81)$$

Дотичний модуль у формі (3.81) збігається з отриманим для осьового розтягу тонкостінного циліндра. Другий доданок у правій частині формули (3.80) враховує кут нахилу нормалі до виділеного елемента відносно осі, а також тип напруженого стану та початкові геометричні параметри оболонки.

Аналіз дотичних модулів до дійсних кривих деформування  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  та  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$ , отриманих для прогнозування початку локалізації деформацій від дії внутрішнього тиску чи осьового розтягу відповідно, показав, що швидкість процесу локалізації деформацій залежить від виду напруженого стану, і є удвічі вищою при навантаженні елемента внутрішнім тиском порівняно з навантаженням лише осьовим розтягом.

#### **3.4.4. Графічний аналіз залежностей граничних дійсних напружень від виду напруженого стану та фактичних розмірів навантажених елементів**

Для знаходження  $C_t$  у загальному інтегралі (3.69) спочатку розглянуто випадок навантаження лише внутрішнім тиском,  $k=0,5$  та прийнято  $v=0$ . Використано результати експериментів для сталевих циліндричних

тонкостінних зразків, наведені в [14, 123]. Граничні колові напруження і деформації  $\varepsilon_t^e$ ,  $\tilde{\sigma}_t^e$  відповідають моменту початку локалізації деформацій (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

## Розрахунок значень сталих інтегрування для умови (3.69)

Марка матеріалу	$\eta = h/\rho_t$	$\varepsilon_t^e$	$\tilde{\sigma}_t^e$	$C_t$	Приведені напруження $\tilde{\sigma}_t^e/C_t$
Сталь 0,23%С	0,078	0,150	595 МПа	463,58	1,28
Сталь 0,37%С	0,048	0,063	665 Мпа	601,28	1,11
Сталь 10ГН2МФА	0,06*	0,036	705 Мпа	675,74	1,04
Сталь 15Х2МФА	0,067	0,021	746 Мпа	739,39	1,01
Сталь 15Х2НМФА	0,067	0,024	745 Мпа	733,94	1,02

\*узято середнє значення для тонкостінних оболонок із  $\eta = 0,04..0,08$

На основі граничних значень  $\tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma}_m^e$ ,  $\varepsilon_m = \varepsilon_m^e$  циліндричних труб для  $k=2$  визначено сталі інтегрування  $C_m$  для умови (3.78). Результати показано в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

## Розрахунок значень сталих інтегрування для умови (3.78)

Марка матеріалу	$\eta = h/\rho_t$	$\varepsilon_m^e$	$\tilde{\sigma}_m^e$	$C_m$	Приведені напруження $\tilde{\sigma}_m^e/C_m$
Сталь 10ГН2МФА	0,06*	0,043	722 МПа	692,23	1,04
Сталь 15Х2МФА	0,067	0,042	830 МПа	796,55	1,04
Сталь 15Х2НМФА	0,067	0,030	800 МПа	776,70	1,03
Сталь 28Х3СНМВФА	0,06*	0,016	2020 МПа	1988,19	1,02

\*узято середнє значення для тонкостінних оболонок із  $\eta = 0,04..0,08$

На рис. 3.18 показано графіки залежностей масштабованих граничних дійсних колових  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  та меридіональних  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  напружень, описаних формулами (3.69) та (3.78) відповідно. Для аналізу впливу виду напруженого стану на граничні значення дійсних напружень було взято  $\eta = 0,06$ .

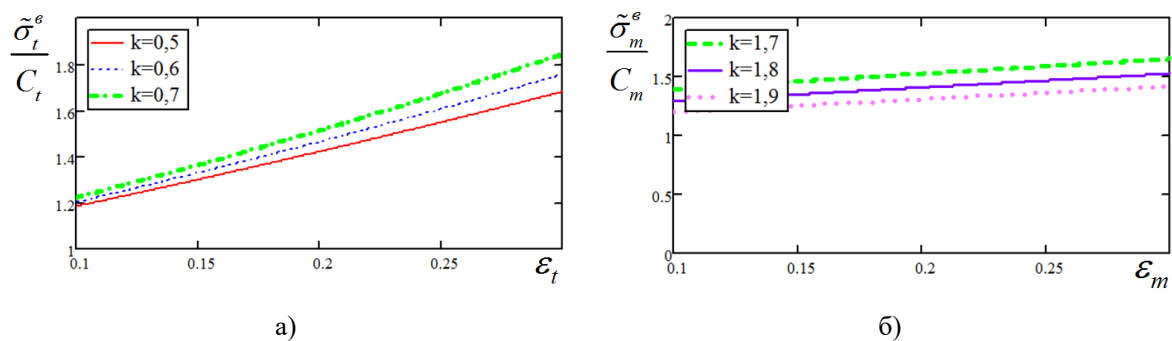


Рис. 3.18. Графічні зображення: а) залежності  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  для  $k < 1$ , згідно з умовою (3.69);  
б) залежності  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  для  $k > 1$ , згідно з умовою (3.78).

Аналіз графіка  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  (рис. 3.18, а) показав, що за навантаження, близького до внутрішнього тиску ( $k=0,5..0,7$ ) розрахункові граничні дійсні колові напруження збільшуються при незначному додатковому навантаженні зразка осьовим розтягом. Так, збільшення  $k$  на 0,1 за рівня залишкових деформацій  $\varepsilon_t=0,3$  призводить до збільшення граничних розрахункових колових напружень на 5%; зростає стрімкість процесу розвитку локальних деформацій. Малі кути нахилу граничних ліній  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  (рис. 3.18, б) показують, що за  $k=1,7..1,9$  швидкість процесу локалізації деформацій є невисокою. Плавність процесу утворення шийки за навантажень, близьких до одиниці розтягу, пояснює більший рівень граничних залишкових деформацій.

На рис. 3.19 показано масштабовані граничні криві  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$ , побудовані для циліндричної труби ( $\nu=0$ ) за співвідношення головних напружень  $k=0,5$ .

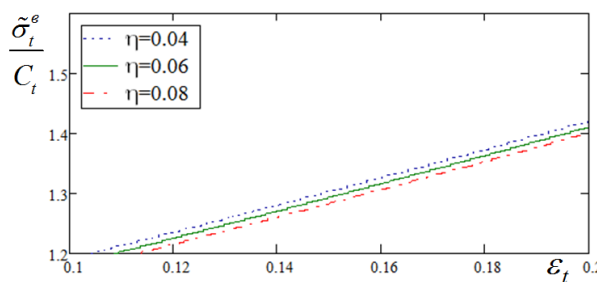


Рис. 3.19. Графічне зображення залежності  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  (3.69) за різних значень  $\eta$

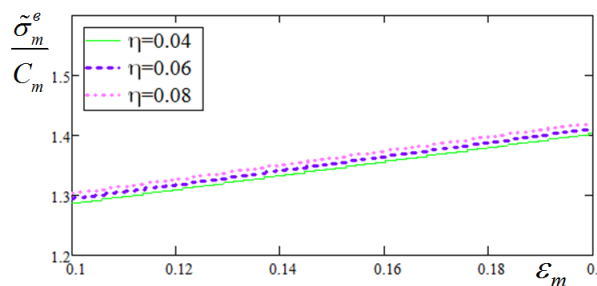


Рис. 3.20. Графічне зображення залежності  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  (3.78) за різних значень  $\eta$

Аналіз графіка на рис. 3.19 показав, що за навантаження оболонки внутрішнім тиском збільшення товщини стінки призводить до зменшення рівня розрахункових граничних дійсних колових напружень. Так, із збільшенням показника тонкостінності на 0,02 (2%) рівень приведених розрахункових граничних колових напружень зменшується на 1–2%. Для значень  $k = 0,5 \dots 0,7$  якісна та кількісна картина залишалась практично незмінною.

На рис. 3.20 показано графіки залежності  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  (3.78) в приведених напруженнях для  $k=1,8$ . Розглядався випадок циліндричної труби ( $\nu=0$ ). Плогість графіків на рис. 3.20 порівняно із графіками на рис. 3.19 показує на плавність процесу шийоутворення при  $\sigma_m > \sigma_t$ , що допускає розвиток великих пластичних деформацій. Збільшення  $\eta$  збільшує дійсну границю міцності, проте кількісний вплив  $\eta$  на значення розрахункових граничних дійсних меридіональних напружень  $\tilde{\sigma}_m$  майже не помітний (<1%).

На рис. 3.21 показано сімейство граничних ліній  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  (3.69) для різних значень показника опуклості  $\nu$ . Показник тонкостінності прийнято  $\eta = 0,06$ .

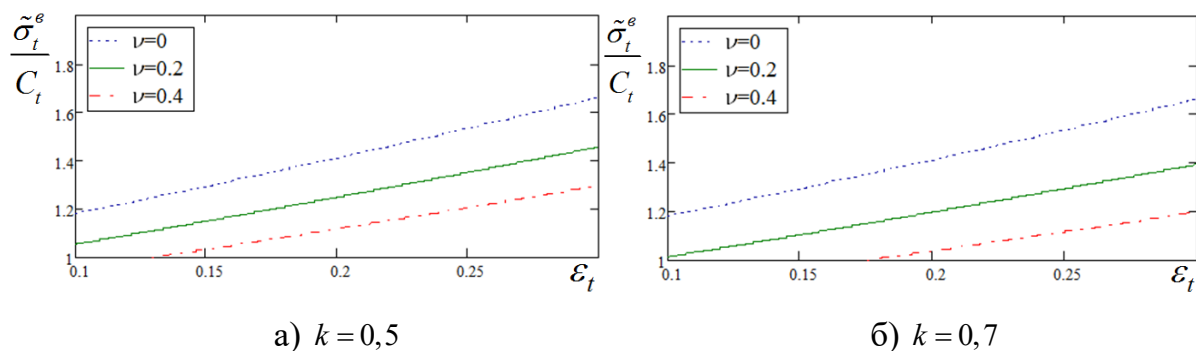


Рис. 3.21. Графічне зображення залежності  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  (3.69) за різних значень  $\nu$

Графіки залежностей  $\tilde{\sigma}_t(\varepsilon_t)$  показали, що за дії лише внутрішнього тиску (рис. 3.21, а) збільшення показника опуклості  $\nu$  призводить до зменшення рівня розрахункових граничних дійсних колових напружень. Так, збільшення  $\nu$  від 0 (циліндрична труба) до 0,2 призводить до зменшення рівня приведених розрахункових граничних напружень на  $\approx 13\%$ , збільшення  $\nu$  від 0,2 до 0,4

призводить до зменшення рівня приведених розрахункових граничних напружень на  $\approx 12\%$ . Незначне довантаження оболонки осьовим розтягом (рис. 3.21, б) зменшує дійсний ресурс міцності в коловому напрямку.

В умовах одночасної дії внутрішнього тиску та розтягу розрахункових граничні колові дійсні напруження з тими ж показниками опуклості дещо зменшуються (рис. 3.21, б). Збільшення  $\nu$  від 0 (тонкостінний циліндр) до 0,4 призводить до зменшення рівня приведених розрахункових граничних напружень в середньому на 30%, збільшення  $\nu$  від 0,4 до 0,8 призводить до зменшення рівня приведених розрахункових граничних напружень в середньому на 20%. Отже, для  $k \rightarrow 1$  вплив опуклості оболонки на її розрахункову міцність посилюється.

На рис. 3.22 представлено графіки залежності  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  (3.78) для  $k=1,9$  та показника тонкостінності  $\eta = 0,06$ .

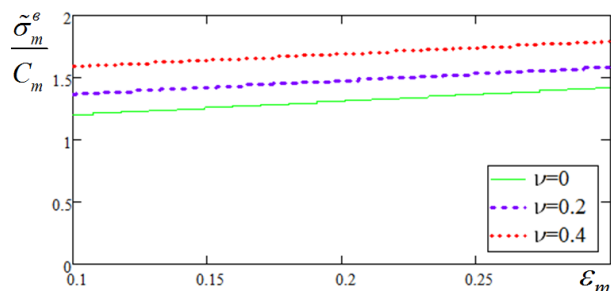


Рис. 3.22. Графічне зображення залежності  $\tilde{\sigma}_m(\varepsilon_m)$  (3.78) граничних дійсних меридіональних напружень за різних  $\nu$

Графічний аналіз залежності (3.78), представленої на рис. 3.22 для трьох показників опуклості  $\nu$ , показав, що розрахункові граничні дійсні напруження в меридіональному напрямку збільшуються із збільшенням показника опуклості. Так, збільшення  $\nu$  від 0 (тонкостінний циліндр) до 0,2 призводить до збільшення рівня приведених розрахункових граничних напружень в середньому на 12%, збільшення  $\nu$  від 0,2 до 0,4 призводить до збільшення рівня приведених розрахункових граничних напружень в середньому на 13%.



### Висновки до розділу 3

1. Аналітично показано залежність граничних напружень від фізичних властивостей матеріалу, виду напруженого стану, геометричної форми та розмірів конструкційного елемента, що підтверджується експериментами.
2. Аналітично підтверджено зменшення ресурсу міцності тонкостінного циліндра за співвідношень головних напружень  $k \approx 0,5$ . Аналітично показано зменшення розрахункових граничних колових напружень із збільшенням показника тонкостінності. Збільшення відношення  $\eta = h/R$  на 0,02 призводить до зменшення приведених розрахункових граничних колових напружень в середньому на 2%.  
Показано, що для  $k > 1$  та значень  $\eta = 0,04; 0,06; 0,08$  ресурс міцності тонкостінного циліндра майже не залежить від відношення  $h/R$ .  
Незначне довантаження тонкостінного циліндра осьовим розтягом (при  $k \approx 0,6$ ) збільшує дійсні розрахункові граничні колові напруження.
3. Прослідковано вплив опуклості оболонки на граничні значення дійсних напружень. За дії лише внутрішнього тиску збільшення показника опуклості  $\nu$  призводить до зменшення розрахункових граничних дійсних колових напружень (при зміні  $\nu$  від 0 (циліндрична труба) до 0,4 з кроком 0,2 приведені розрахункові граничні напруження зменшуються на 12–13%).  
Розрахункові граничні дійсні напруження в меридіональному напрямку збільшуються із збільшенням показника опуклості (при зміні  $\nu$  від 0 до 0,4 з кроком 0,2 розрахункові граничні напруження збільшуються на 12–13%).  
Незначне довантаження оболонки осьовим розтягом зменшує дійсний ресурс міцності в коловому напрямку.

## Розділ 4. НОВИЙ МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ТОНКОСТІННОЇ ОБОЛОНКИ, НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ ТА ОСЬОВИМ РОЗТЯГОМ

Розділ присвячено розробці методу для оцінювання граничних станів конструкційних елементів різної геометрії з класу тонкостінних оболонок для різних видів СНС. Виклад методу здійснено для випадку навантаження тонкостінної циліндричної оболонки (далі в розділі – труби) внутрішнім тиском та осьовим розтягом (рис. 4.1).

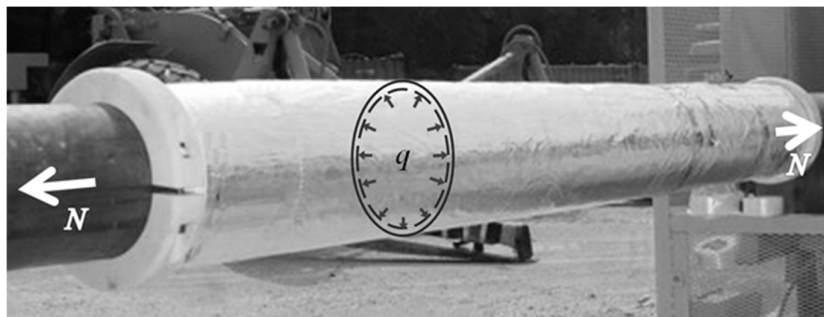


Рис. 4.1. Схема навантаження тонкостінної труби внутрішнім тиском та осьовим розтягом (використано [<https://images.app.goo.gl/C5RvBuXW1qPeGG2h6>])

Результати дослідження опубліковано в праці [131].

### 4.1. Дійсна узагальнена діаграма деформування

Введемо до розгляду дійсні еквівалентні напруження, що виникають в стінках труби під дією внутрішнього тиску та розтягу, за аналогією з (2.3) та враховуючи (3.27):

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{p}{2} \left[ \frac{|\tilde{\sigma}_z - \tilde{\sigma}_\theta|^p + |\tilde{\sigma}_z|^p + |\tilde{\sigma}_\theta|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1)$$

Розглянемо випадок простого навантаження (3.43). Врахувавши залежності між умовними та дійсними осьовими напруженнями (3.32), між умовними та дійсними коловими напруженнями (3.38), виразимо  $\tilde{\sigma}_z$  через  $\tilde{\sigma}_\theta$ :

$$\tilde{\sigma}_z = k \frac{1 + \varepsilon_z}{(1 + \varepsilon_\theta)^2} \tilde{\sigma}_\theta. \quad (4.2)$$

Дійсні еквівалентні напруження (4.1) виразимо через дійсні осьові напруження:

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{p}{2k(1 + \varepsilon_z)} \left[ \frac{|k(1 + \varepsilon_z) - (1 + \varepsilon_\theta)^2|^p + |k(1 + \varepsilon_z)|^p + |(1 + \varepsilon_\theta)^2|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (4.3, a)$$

або через дійсні колові напруження у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{p}{2(1 + \varepsilon_\theta)^2} \tilde{\sigma}_\theta \left[ \frac{|k(1 + \varepsilon_z) - (1 + \varepsilon_\theta)^2|^p + |k(1 + \varepsilon_z)|^p + |(1 + \varepsilon_\theta)^2|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (4.3, б)$$

Поклавши у формулі (2.4) для знаходження еквівалентних деформацій  $\varepsilon_1 = \varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_r$ , отримаємо вираз для еквівалентних деформацій:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{p}{2(p+1)} \left[ \frac{|\varepsilon_z - \varepsilon_\theta|^p + |\varepsilon_\theta - \varepsilon_r|^p + |\varepsilon_z - \varepsilon_r|^p}{1/2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (4.4)$$

Зв'язок між головними деформаціями, аналогічно до (3.21), виражається формулою:

$$\varepsilon_z = n\varepsilon_\theta. \quad (4.5)$$

Врахувавши залежність між головними деформаціями та головними напруженнями  $n = \frac{2k-1}{2-k}$  та умову нестисливості для великих деформацій у вигляді  $(1 + \varepsilon_z)(1 + \varepsilon_\theta)(1 + \varepsilon_r) = 1$ , отримаємо залежність еквівалентних деформацій  $\varepsilon_{eq}$  від осьових деформацій  $\varepsilon_z$ :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{p \cdot 2^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)} \times \left[ (\varepsilon_z)^p \left| 1 - \frac{1}{n} \right|^p + \frac{\left| (1 + \varepsilon_z)^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon_z}{n} \right) - 1 \right|^p + \left| (1 + \varepsilon_z) \left( 1 + \frac{\varepsilon_z}{n} \right)^2 - 1 \right|^p}{\left( (1 + \varepsilon_z) \left| 1 + \frac{\varepsilon_z}{n} \right| \right)^p} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (4.6)$$

Отже, за відомими константою матеріалу  $p$ , видом напруженого стану  $k$  (або  $n$ ) та діаграмою деформування  $\sigma_z(\varepsilon_z)$  для одновісного розтягу отримуємо дійсну узагальнену криву деформування в координатах  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ .

#### 4.2. Дотичні модулі до дійсної узагальненої кривої деформування

Для знаходження граничних значень дійсних напружень, що виникають в стінках труби за дії осьового розтягу та внутрішнього тиску (рис. 4.1), скористаємось схемою Консідера. Для цього, окрім дійсної діаграми деформування  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$  необхідно отримати дотичний модуль  $\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}}$  до діаграми, який відображає процес знеміцнення навантаженої труби.

У загальному випадку сімейство узагальнених кривих деформування в дійсних напруженнях можна записати як систему:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{eq} = \varphi(\sigma_z, \varepsilon_z, k, p), \\ \varepsilon_{eq} = \psi(\varepsilon_z, k, p), \end{cases} \quad (4.7)$$

де  $\varphi(\sigma_z, \varepsilon_z, k, p)$  та  $\psi(\varepsilon_z, k, p)$  – залежності, описані відповідно формулами (4.3, а) із використанням (4.2) та (4.6). Отже, розміщення узагальненої кривої деформування (4.7) в системі еквівалентних координат  $(\varepsilon_{eq}; \tilde{\sigma}_{eq})$  залежить від сталої матеріалу  $p$ , що відображає фізико-механічні властивості матеріалу та коефіцієнта  $k$ , що відображає тип навантаження.

Дотичні модулі ( $d\tilde{\sigma}_\theta/\varepsilon_\theta$  для напружених станів, близьких до внутрішнього тиску, та  $d\tilde{\sigma}_z/\varepsilon_z$  для напружених станів, близьких до одновісного розтягу) для знаходження дійсних напружень у трубі, що виникають в момент локалізації пластичних деформацій, отримано у розділі 3, формули (3.45) та (3.48) відповідно.

#### 4.2.1. Аналіз дотичного модуля до кривої деформування в дійсних колових напруженнях

Із використанням критерію максимального навантаження у розділі 3 отримано формулу дотичного модуля до кривої деформування  $\tilde{\sigma}_\theta(\varepsilon_\theta)$  для знаходження граничних значень дійсних колових напружень:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\varepsilon_\theta} = \tilde{\sigma}_\theta (1 + \varepsilon_\theta) \frac{2(1 + n\varepsilon_\theta) + n(1 + \varepsilon_\theta)}{(1 + \varepsilon_\theta)^2 (1 + n\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2R}}. \quad (4.8)$$

Умова (4.8) відповідає моменту локалізації деформацій, спричинених переважною дією внутрішнього тиску  $q$ , та враховує геометрію навантаженої труби.

Покладемо у (4.8)  $k=0,5$ , що відповідає навантаженню труби лише внутрішнім тиском. Оскільки із формули (3.22)  $n=0$ , то (4.8) спроститься до вигляду:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\varepsilon_\theta} = \frac{2\tilde{\sigma}_\theta}{1 + \varepsilon_\theta - \frac{h}{2R}}. \quad (4.9)$$

Отже, за навантаження труби лише внутрішнім тиском піддотичною до кривої деформування, побудованої в дійсних колових напруженнях, буде відрізок  $\left(1 + \varepsilon_\theta - \frac{h}{2R}\right)/2$  (рис. 4.2). Граничне значення піддотичної залежить від початкових геометричних параметрів конструкції та рівня колових деформацій.

Якісний аналіз графіків на рис. 4.2 показав, що швидкість зростання дійсних колових напружень в стінках труби, викликаних дією внутрішнього тиску,

залежить від показника тонкостінності. Із збільшенням товщини стінки за незмінного радіуса процес локалізації деформацій стає стрімкішим, що зменшує тривалість наступного процесу руйнування (показано низхідною ділянкою умовної діаграми деформування). Зменшення показника тонкостінності труби робить процес локалізації деформацій плавнішим.

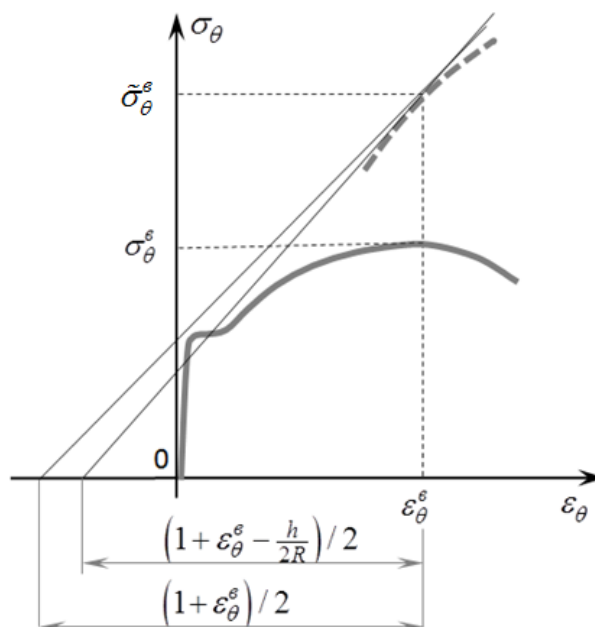


Рис. 4.2. Геометрична інтерпретація формули (4.9)  
(**—** — умовна діаграма деформування, **- - - -** — крива деформування в дійсних напруженнях)

Нехтуючи товщиною стінки труби, з (4.9) отримуємо формулу, що встановлює зв'язок між граничним значенням дійсного колового напруження та відповідним значенням дотичного модуля:

$$\tilde{\sigma}_\theta = \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\epsilon_\theta}. \quad (4.10)$$

Множник біля дотичного модуля у правій частині формули (4.10) для тонкостінної труби, навантаженої внутрішнім тиском, було отримано в роботах [132 – 135], діапазон значень становив від  $1/2$  до  $\sqrt{3}/3$ .

Формула (4.9) є уточненням для співвідношення (4.10) із врахуванням фактичних геометричних параметрів труби під тиском.

#### 4.2.2. Аналіз дотичного модуля до кривої деформування в дійсних осьових напруженнях

Із використанням критерію максимального навантаження у розділі 3 отримано формулу дотичного модуля для знаходження граничних значень дійсних осьових напружень:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} = \tilde{\sigma}_z \frac{\left(1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR}\right) \frac{1}{1+\varepsilon_z} + \frac{h}{2knR} \frac{1}{1+\frac{1}{n}\varepsilon_z}}{1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{4kR}}. \quad (4.11)$$

Умова (4.11) відповідає моменту локалізації деформацій в стінках труби, спричиненої переважною дією осьового розтягу силою  $N$ . Значення дотичного модуля залежать від виду напруженого стану, вираженого через коефіцієнти  $k$ ,  $n$ , а також початкових геометричних параметрів труби  $R$  та  $h$ .

Розглянемо випадок навантаження труби лише осьовим розтягом. Покладемо у (4.11)  $k \rightarrow \infty$ , отримаємо формулу

$$\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} = \frac{\tilde{\sigma}_z}{1+\varepsilon_z}, \quad (4.12)$$

яка збігається з формулою (3.11) для розрахунку граничних значень дійсних осьових напружень, що передують утворенню шийки в розтягнутому стержні [40]. Піддотичною до кривої, побудованої в дійсних осьових напруженнях, проведеною в точці  $(\varepsilon_z^e, \tilde{\sigma}_z^e)$ , є відрізок  $1+\varepsilon_z^e$ , що збігається з діаграмою Консідера для розтягу смуги (рис. 3.2). Це підтверджує можливість моделювання граничного напруженого стану тонкостінної труби у випадку  $\sigma_z \gg \sigma_\theta$  через одновісний розтяг смуги.

#### 4.2.3. Дотичний модуль до узагальненої кривої деформування

Розглянемо випадок комбінованого навантаження труби внутрішнім тиском та осьовим розтягом,  $k=0,5\dots 2$ . У п. 4.1 отримано дійсну узагальнену криву деформування  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ , яка враховує властивості матеріалу зразка та вид

напруженого стану. Знайдемо вираз для дотичного модуля  $\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}}$ , який би враховував вид напруженого стану та фактичні розміри навантаженого зразка.

Дійсні еквівалентні напруження та еквівалентні деформації виражаються через осьові напруження та деформації  $\sigma_z, \varepsilon_z$  (4.7), тому вираз для знаходження дотичного модуля запишемо у вигляді:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = \frac{\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_z}}{\frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_z}}. \quad (4.13)$$

Дійсні еквівалентні напруження залежать від дійсних осьових та дійсних колових напружень (формула (4.1)):

$$\tilde{\sigma}_{eq} = f(\tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_\theta). \quad (4.14)$$

За правилом диференціювання функції двох аргументів отримуємо:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_z} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_z} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_\theta} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\varepsilon_z}. \quad (4.15)$$

Із формули (4.5) отримуємо  $d\varepsilon_z = n d\varepsilon_\theta$ . Тоді із (4.13) отримуємо аналітичний вираз для знаходження дотичного модуля  $\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_z}$  до дійсної діаграми деформування  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ , який відповідає моменту локалізації деформації від дії внутрішнього тиску та розтягу:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = \frac{\frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_z} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_\theta} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{nd\varepsilon_\theta}}{\frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_z}}. \quad (4.16)$$

Усі складові для формули (4.16) отримані вище. Дотичні модулі  $\frac{d\tilde{\sigma}_z}{d\varepsilon_z}$  та

$\frac{d\tilde{\sigma}_\theta}{d\varepsilon_\theta}$  знаходяться за формулами (4.11) та (4.8) відповідно. Вирази для



знаходження  $\frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_z}$ ,  $\frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_\theta}$  отримуємо із (4.3, а) та (4.3, б) відповідно. Похідну

$\frac{d\varepsilon_{eq}}{d\varepsilon_z}$  знаходимо із (4.6). Детальне виведення остаточної формули для

знаходження дотичного модуля наведено в додатку Г.

Після підстановок та спрощень формулу для знаходження дотичного модуля зведено до вигляду

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = \frac{p}{2} \left[ \frac{|k(1+\varepsilon_z) - (1+\varepsilon_\theta)|^p + |k(1+\varepsilon_z)|^p + |(1+\varepsilon_\theta)|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \times \quad (4.17)$$

$$\times \frac{\tilde{\sigma}_z \left(1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR}\right) \frac{1}{1+\varepsilon_z} + \frac{h}{2knR} \frac{1}{1+\varepsilon_z/n}}{k(1+\varepsilon_z) \frac{1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR}}{1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR}}} + \frac{\tilde{\sigma}_\theta \frac{2(1+n\varepsilon_\theta) + n(1+\varepsilon_\theta)}{n(1+\varepsilon_\theta)(1+\varepsilon_\theta)^2(1+n\varepsilon_\theta) - h/2R}}{n(1+\varepsilon_\theta)(1+\varepsilon_\theta)^2(1+n\varepsilon_\theta) - h/2R}$$

$$\left[ \frac{p \cdot 2^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)} \cdot (A)^{\frac{1}{p}-1} \left[ (\varepsilon_z)^{p-1} \left| 1 - \frac{1}{n} \right|^p + \frac{|1+\varepsilon_z-b|^p}{1+\varepsilon_z-b} \left( 1 + b^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + 2\frac{\varepsilon_z}{n} \right) \right) + \frac{|1+\frac{\varepsilon_z}{n}-b|^p}{1+\frac{\varepsilon_z}{n}-b} \left( \frac{1}{n} + b^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + 2\frac{\varepsilon_z}{n} \right) \right) \right] \right]$$

де позначено

$$b = \frac{1}{(1+\varepsilon_z)(1+\varepsilon_z/n)}, \quad (4.18)$$

$$A = (\varepsilon_z)^p \left| 1 - \frac{1}{n} \right|^p + \frac{\left| (1+\varepsilon_z)^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon_z}{n} \right) - 1 \right|^p + \left| (1+\varepsilon_z) \left( 1 + \frac{\varepsilon_z}{n} \right)^2 - 1 \right|^p}{\left( (1+\varepsilon_z) \left| 1 + \frac{\varepsilon_z}{n} \right| \right)^p}. \quad (4.19)$$

Вираз для знаходження дотичного модуля враховує механічні властивості конструкційного матеріалу (параметр  $p$ ), вид напруженого стану труби (коефіцієнти  $k$ ,  $n$ ), її початкові геометричні параметри (товщина стінки  $h$ , серединний радіус  $R$ ) та рівень деформацій на початку локалізації деформацій.

Нехай тангенс кута  $\varphi$  нахилу дотичної, проведеної до дійсної узагальненої кривої деформування  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ , набуває значення, розрахованого за формулою

(4.17), у деякій точці  $(\varepsilon_{eq}^e, \tilde{\sigma}_{eq}^e)$ . Із збільшенням кута  $\varphi$  значення дотичного модуля також збільшуватиметься, граничні напруження та деформації зменшуватимуться, що призведе до меншого порогу міцності труби. Навпаки, із зменшенням значення дотичного модуля границя міцності труби буде збільшуватись (рис. 4.3).

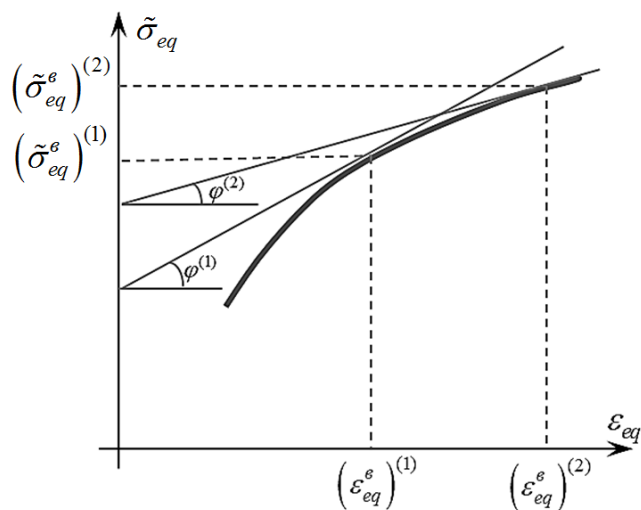


Рис. 4.3. Вплив значення дотичного модуля на граничні значення дійсних напружень та деформацій

Як показали дослідження в п.п. 4.2.1 та 4.2.2, кут нахилу  $\varphi_1$  має дотична за навантаження, близького до внутрішнього тиску, а кут  $\varphi_2$  – за навантаження, близького до одноосного розтягу. Підстановка різних значень  $k$  у формулі (4.17) при фіксованих інших вхідних параметрах дозволить отримати сімейство дотичних для різних співвідношень значень внутрішнього тиску та осьового розтягу.

Отже, за відомими константою матеріалу  $p$ , видом напруженого стану  $k$  та початковими параметрами геометрії труби  $h$ ,  $R$  визначається положення точки  $(\varepsilon_{eq}^e, \tilde{\sigma}_{eq}^e)$  на кривій, а відповідно граничні значення еквівалентних деформацій  $\varepsilon_{eq}^e$  та дійсних напружень  $\tilde{\sigma}_{eq}^e$  за комбінованого навантаження труби внутрішнім тиском та осьовим розтягом.

### 4.3. Узагальнена умова заходження границі міцності тонкостінної труби, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом

Граничні рівні дійсних еквівалентних напружень в стінках труби за комбінованого навантаження залежать від виду напруженого стану  $k$  та початкових геометричних параметрів  $h$ ,  $R$  (рис. 4.4):  $(\tilde{\sigma}_{eq}^e)^{(1)} = g(k_1, h_1, R_1)$ ,  $(\tilde{\sigma}_{eq}^e)^{(2)} = g(k_2, h_2, R_2)$ .

Чим більший рівень граничних дійсних напружень, тим більшою є швидкість розвитку локальних деформацій, викликаного геометрією труби та співвідношенням прикладених навантажень. І навпаки, чим менший рівень граничних дійсних напружень розвивається для даного рівня залишкової пластичності, тим з меншою швидкістю розвиватимуться місцеві деформації, та тим більшим є ресурс міцності труби із заданими геометричними параметрами.

Враховуючи залежність (4.3, а) між дійсними еквівалентними  $\tilde{\sigma}_{eq}$  та дійсними осьовими напруженнями  $\tilde{\sigma}_z$ , а також залежність (4.3, б) між дійсними еквівалентними  $\tilde{\sigma}_{eq}$  та дійсними коловими напруженнями  $\tilde{\sigma}_\theta$ , із (4.17) отримаємо вираз, що пов'язує граничні значення дійсних еквівалентних напружень  $\tilde{\sigma}_{eq}$  із значенням дотичного модуля:

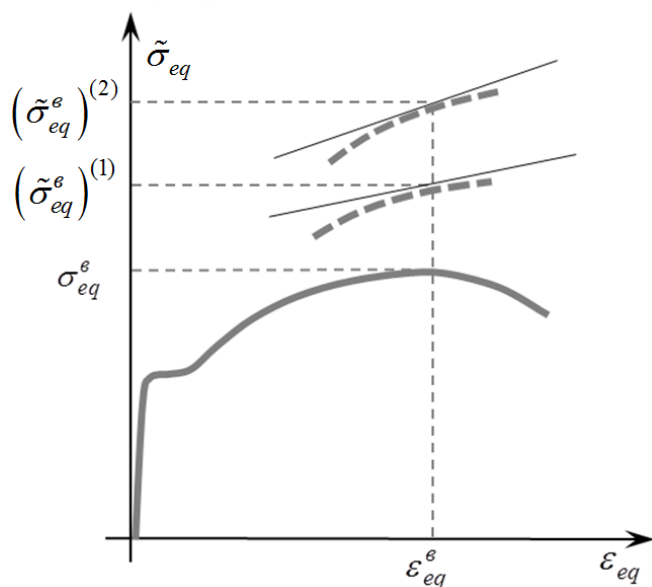


Рис. 4.4. Знаходження граничних дійсних напружень за різних значень  $k$ ,  $h$ ,  $R$  за заданого рівня граничних осьових деформацій. Суцільною кривою показано умовну діаграму деформування

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{p \cdot 2^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)} \cdot (A)^{\frac{1}{p}-1} \times \quad (4.20)$$

$$\times \frac{\left[ (\varepsilon_z)^{p-1} \left| 1 - \frac{1}{n} \right|^p + \frac{|1 + \varepsilon_z - b|^p}{1 + \varepsilon_z - b} \left( 1 + b^2 \left( 1 + \frac{1 + 2\varepsilon_z}{n} \right) \right) + \frac{|1 + \frac{\varepsilon_z}{n} - b|^p}{1 + \frac{\varepsilon_z}{n} - b} \left( 1 + b^2 \left( 1 + \frac{1 + 2\varepsilon_z}{n} \right) \right) \right]}{\frac{\left( 1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{2kR} \right) \frac{1}{1 + \varepsilon_z} + \frac{h}{2knR} \frac{1}{1 + \varepsilon_z/n}}{1 - \frac{1}{2k} + \frac{h}{4kR}} + \frac{2(1 + \varepsilon_\theta)(1 + n\varepsilon_\theta) + n(1 + \varepsilon_\theta)^2}{n \left( (1 + \varepsilon_\theta)^2 (1 + n\varepsilon_\theta) - \frac{h}{2R} \right)}} d\varepsilon_{eq}.$$

Вираз біля  $\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}}$  у правій частині формули є коригувальним множником, який враховує механічні властивості матеріалу, вид напруженого стану та геометрію труби.

Побудувавши криву деформування  $\tilde{\sigma}_{eq} = f(\varepsilon_{eq})$  на ділянці зміцнення та графік правої частини формули (4.20), на перетині отримуємо точку, координатами якої є граничні значення еквівалентних деформацій та дійсних еквівалентних напружень в стінках труби в момент локалізації деформацій (рис. 4.5).

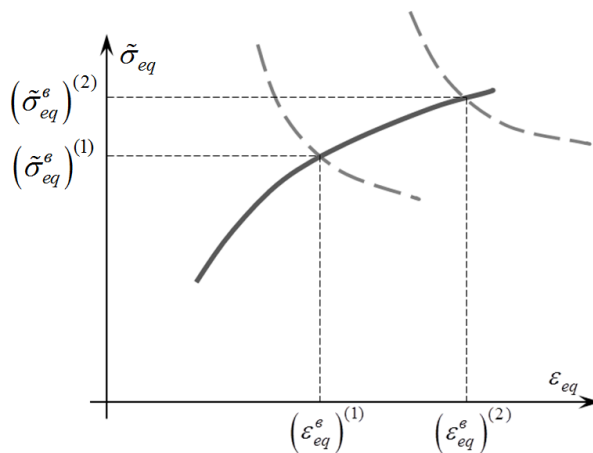


Рис. 4.5. Графічна інтерпретація формули (4.20). Суцільна лінія – дійсна узагальнена крива зміцнення, пунктирні криві – графіки правої частини формули (4.20), отримані для різних значень  $k$ ,  $h$ ,  $R$

На рис. 4.6 показано графічні залежності коригувального множника від виду напруженого стану для тонкостінних труб, виготовлених із чотирьох марок сталей.

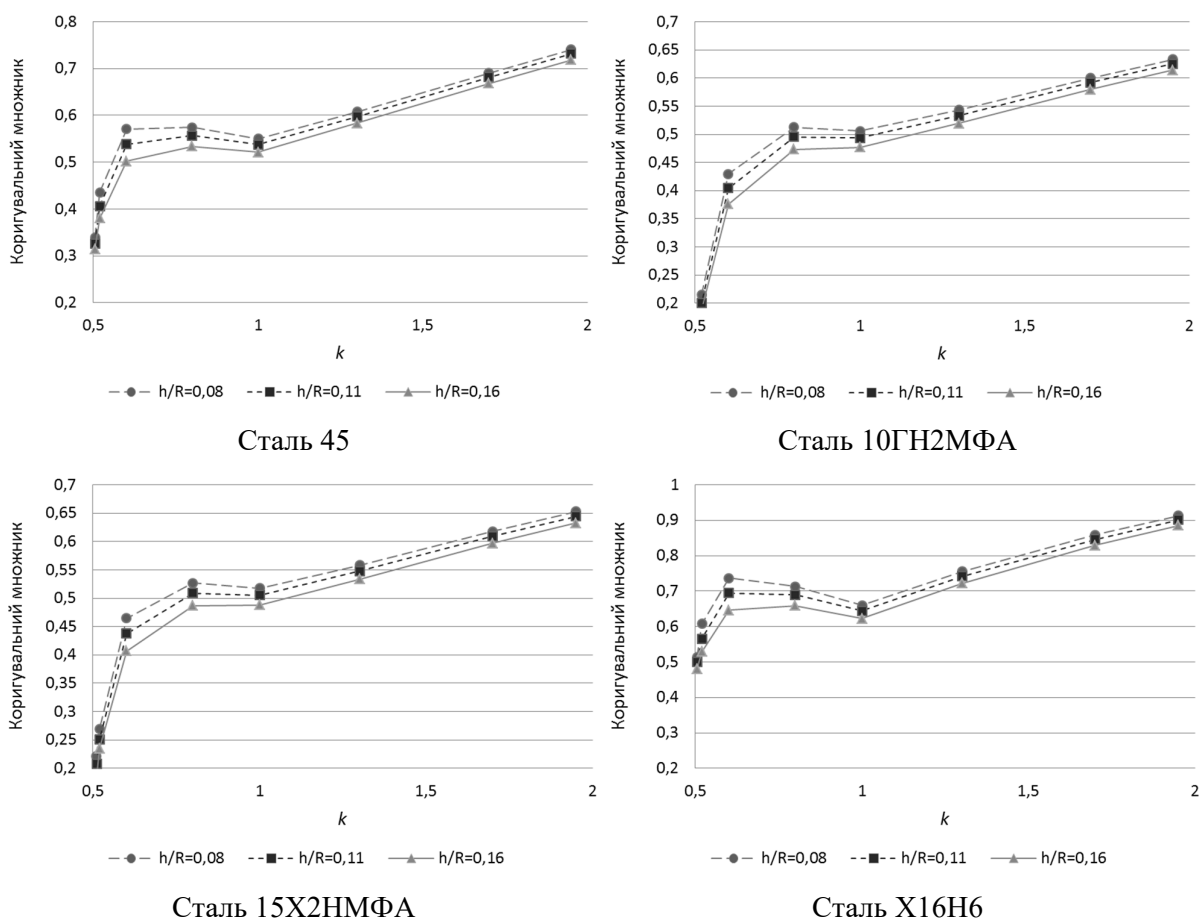


Рис. 4.6. Залежність коригувального множника у формулі (4.20) від  $k$  за різних значень відношень  $h/R$

Найменші розрахункові значення коригувального множника, а отже, і найменші граничні напруження, спостерігаються за навантаження труби внутрішнім тиском. Це пояснюється стрімким зростанням дійсних колових напружень, викликаним одночасним потоншенням стінки та збільшенням діаметра труби. Додаткове навантаження труби осьовим розтягом зменшує ріст колових напружень, оскільки стримує розпирання труби та супутнє збільшення її діаметра. Як показано на рис. 4.6, розрахункові значення коригувального множника, отримані для чотирьох марок сталей та трьох значень показника тонкостінності, збільшуються, якщо зростає вплив сили розтягу. Розрахункові значення коригувального множника, отримані для сталей чотирьох марок, лежать в інтервалі  $(0,2; 0,9)$ . Розмах значень коригувального множника для кожної з чотирьох марок сталей для  $k \in (0,5..2)$  становив  $0,4..0,45$ . Найбільший

вплив показника тонкостінності на значення коригувального множника спостерігається для напружених станів із  $k \in (0,5; 1)$ .

Результат, отриманий для високолегованої хромонікелевої сталі X16H6, де коригувальний множник змінюється в інтервалі  $(0,5; 0,9)$ , найкраще узгоджується висновками, отриманими в [55].

Отже, формула (4.20), добре узгоджуючись з відомими результатами в часткових випадках навантаження труби лише внутрішнім тиском чи осьовим розтягом, дозволяє прогнозувати початок локалізації пластичних деформацій за всіх типів комбінованого навантаження внутрішнім тиском та осьовим розтягом.

#### 4.4. Оцінка граничних навантажень

Визначивши граничні значення дійсних еквівалентних напружень  $\tilde{\sigma}_{eq}^s$  та відповідних еквівалентних деформацій  $\varepsilon_{eq}^s$ , з формул (4.3, а) та (4.3, б) отримуємо граничні значення дійсних осьових  $\tilde{\sigma}_\theta^s$  та колових  $\tilde{\sigma}_z^s$  напружень.

З формули (4.6) знаходимо граничне значення рівномірної осьової деформації  $\varepsilon_z^s$ , що розвивається в стінках труби під дією комбінованого навантаження перед початком локалізації деформацій. З умови нестисливості (3.31) та формули (4.5) отримуємо відповідні значення колової та радіальної деформацій.

Із системи рівнянь (3.30), (3.34) отримуємо вирази для знаходження відповідних граничних значень компонент комбінованого навантаження – внутрішнього тиску  $q$  та розтягу  $N$ , за перевищення яких в стінках труби починають розвиватись місцеві деформації:

$$q = \frac{\sigma_\theta h(1 + \varepsilon_r)}{R(1 + \varepsilon_\theta) - \frac{h}{2}(1 + \varepsilon_r)}, \quad (4.21)$$

$$N = 2\pi R h (1 + \varepsilon_\theta) (1 + \varepsilon_r) \sigma_z \left[ 1 - \frac{1}{2k} \left( 1 - \frac{h(1 + \varepsilon_r)}{2R(1 + \varepsilon_\theta)} \right) \right]. \quad (4.22)$$

Зауважимо, що для забезпечення простого навантаження внутрішній тиск та розтяг повинні задовольняти співвідношення (3.52).

Розрахунок граничних значень силових факторів за формулами (4.21) та (4.22) із визначенням граничних значень дісних напружень за розробленою методикою з урахуванням змін фактичних розмірів навантаженого конструкційного елемента дозволить удосконалити інженерне оцінювання коефіцієнта запасу.

#### **4.5. Алгоритм методу прогнозування граничних станів тонкостінної труби, навантаженої внутрішнім тиском та розтягом**

Загальний алгоритм методу прогнозування границі міцності тонкостінної циліндричної труби із днищами, навантаженої внутрішнім тиском  $q$  та осьовим розтягом  $N$ , та визначення граничних значень силових факторів формується з послідовності задач (рис. 4.7):

- I) знаходження сталої  $p$  за первинними діаграмами деформування, побудованими для кількох значень  $k = \sigma_z / \sigma_\theta$  за простого навантаження та побудова узагальненої кривої деформування;
- II) встановлення залежності між дійсними напруженнями та деформаціями в еквівалентних координатах;
- III) визначення дійсних граничних напружень в еквівалентних координатах з рівняння (4.20);
- IV) обчислення граничних значень внутрішнього тиску  $q$  та розтягу  $N$ .

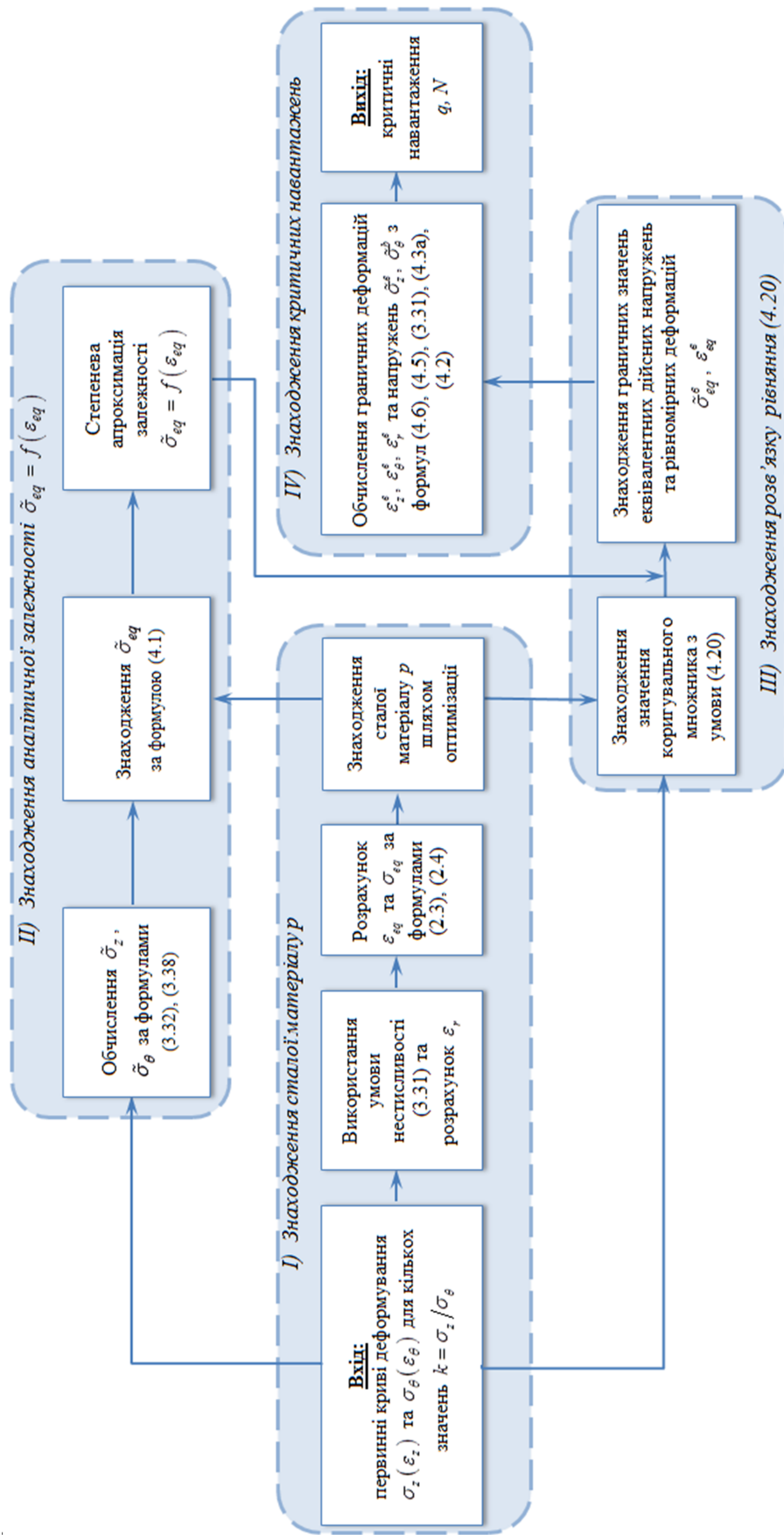


Рис. 4.7. Алгоритм методу прогнозування граничної міцності тонкостінної циліндричної труби, навантаженої внутрішнім тиском  $q$  та осовим розтягом  $N$



#### 4.6. Висновки до розділу 4

1. Встановлено аналітичну залежність для прогнозування дійсної границі міцності тонкостінного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском та осьовим розтягом.
2. Розроблено алгоритм реалізації методу прогнозування дійсної границі міцності тонкостінного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском та осьовим розтягом.
3. На різних етапах реалізації методу використано такі результати попереднього дослідження:
  - вирази для знаходження еквівалентних деформацій та напружень, запропоновані в розділі 2;
  - стала фізико-механічних властивостей матеріалу  $p$  та узагальнена крива деформування, алгоритм отримання яких описано в розділі 2;
  - зв'язок між дійсними та умовними коловими та осьовими напруженнями, отриманий у розділі 3;
  - вирази для знаходження дотичних модулів до кривих деформування в дійсних осьових та дійсних колових напруженнях, отримані в розділі 3.
4. Розрахункові значення коригувального множника для  $k \in (0,5; 2)$ , отримані для сталей чотирьох марок (сталь 45, 10ГН2МФА, 15Х2НМФА, Х16Н6), лежать в інтервалі  $(0,2; 0,9)$ . Розмах значень коригувального множника для кожної з чотирьох марок сталей становив  $0,4..0,45$ .

## Розділ 5. ПРОГНОЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ ТОНКОСТІННИХ ТРУБ, НАВАНТАЖЕНИХ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ ТА РОЗТЯГОМ

У розділі створено та реалізовано інженерну методичку розрахунку граничних навантажень для тонкостінних циліндричних труб, виготовлених із двох конструкційних матеріалів:

- конструкційної вуглецевої якісної сталі 45, яка широко використовується при виготовленні прокату та кованок, які згодом використовуються при створенні труб та інших металоконструкцій. Експериментальні дослідження зразків відбувались в Інституті механіки Академії Наук. Навантажували трубчасті зразки з прутка  $\varnothing 55\text{мм}$ , попередньо нагріті до  $850^\circ\text{C}$  та витримані в печі 2 год, опісля охолоджені у печі до  $500^\circ\text{C}$  та до нормальної температури на повітрі [90]. Дослідні дані наведено у вигляді таблиць значень (для  $k=0; 0,5; 1; 2$ );
- теплостійкої легованої сталі 10ГН2МФА, що використовується для виготовлення парогенераторів, компенсаторів тиску, колекторів та іншого обладнання АЕС. Випробування відбувались в Інституті міцності ім. Г.С Писаренка НАН, результати висвітлено в [14], режим попередньої термообробки описано там же. Дослідні дані надано у вигляді первинних кривих деформування для  $k=0,5; 1; 2; \infty$ .

Навантаження відбувалось за траєкторіями  $\sigma_z = k\sigma_\theta$  за різних значень  $k$ .

Для реалізації методички було відібрано лише ті точки, для яких виконувалось  $\min((\varepsilon_z)_i, (\varepsilon_\theta)_i) \geq 1\%$  ( $i = \overline{1, n}$ , усього  $n=30$  спостережень).

Почерговість виконання задач описана алгоритмом у розділі 4 (рис. 4.7). Основні результати опубліковані в [136].

### 5.1. Знаходження сталої фізико-механічних властивостей матеріалу $p$

Експериментальні значення колових  $(\varepsilon_\theta)_i$ ,  $(\sigma_\theta)_i$  та осьових  $(\varepsilon_z)_i$ ,  $(\sigma_z)_i$  напружень та деформацій перераховано за формулами, отриманими з (2.3) та (2.4) для випадку циліндричної труби:

$$(\sigma_{eq})_i = \frac{p}{2} \left[ \frac{((\sigma_z)_i - (\sigma_\theta)_i)^p + |(\sigma_\theta)_i|^p + |(\sigma_z)_i|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (5.1)$$

$$(\varepsilon_{eq})_i = \frac{p}{2(p+1)} \left[ \frac{((\varepsilon_z)_i - (\varepsilon_\theta)_i)^p + |(\varepsilon_\theta)_i - (\varepsilon_r)_i|^p + |(\varepsilon_z)_i - (\varepsilon_r)_i|^p}{1/2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (5.2)$$

Згідно з прийнятими допущеннями радіальними напруженнями знехтувано:  $(\sigma_r)_i = 0$ . Радіальні деформації  $(\varepsilon_r)_i$  пов'язані з осьовими та коловими умовою нестисливості (3.32):

$$(\varepsilon_r)_i = 1 - \frac{1}{(1 + (\varepsilon_z)_i)(1 + (\varepsilon_\theta)_i)}. \quad (5.3)$$

Параметру  $p$  надавалось значень з інтервалу (0,8; 2,2) з кроком 0,01. Для відібраної множини точок за формулою (2.7) обчислювався коефіцієнт кореляції Пірсона  $r$  та усереднене значення коефіцієнта варіації  $V$  за формулою (2.9).

Значущість максимального значення коефіцієнта кореляції оцінювалась за критерієм Стюдента. Статистику  $t$  розраховували за формулою:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (5.4)$$

У табл. 5.1 наведено результати оцінювання значущості коефіцієнта кореляції Пірсона.

Оцінка значущості коефіцієнта кореляції Пірсона (рівень значущості  $\alpha=0,01$ )

матеріал	$r = r_{\max}$	t	k, степені свободи	$t_{\alpha,k}$	$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}$	$t_{\alpha,k} \cdot \sigma_r$	99% інтервал довіри
Сталь 45	0,969	20,615	28	2,763	0,012	0,038	0,969±0,038
Сталь 10ГН2МФА	0,927	23,217	28	2,763	0,009	0,026	0,927±0,026

На рис. 5.1 (а) та рис. 5.2 (а) показано графіки залежностей  $r(p)$  коефіцієнта кореляції від параметра  $p$ , на рис. 5.1 (б) та рис. 5.2 (б) – графіки залежностей  $V(p)$  усередненого коефіцієнта варіації від параметра  $p$ . На рис. 5.1 (в) та рис. 5.2 (в) показано діаграми розсіювання експериментальних даних за трьох значень параметра  $p$ . Діаграма, побудована при  $p=1$  збігається з діаграмою розсіювання в координатах  $\tau_{\max} \sim \gamma_{\max}$ , при  $p=2$  – з діаграмою, побудованою в координатах  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ .

Результати розрахунків узгоджувались із візуальним аналізом діаграм розсіювання в системі еквівалентних координат.

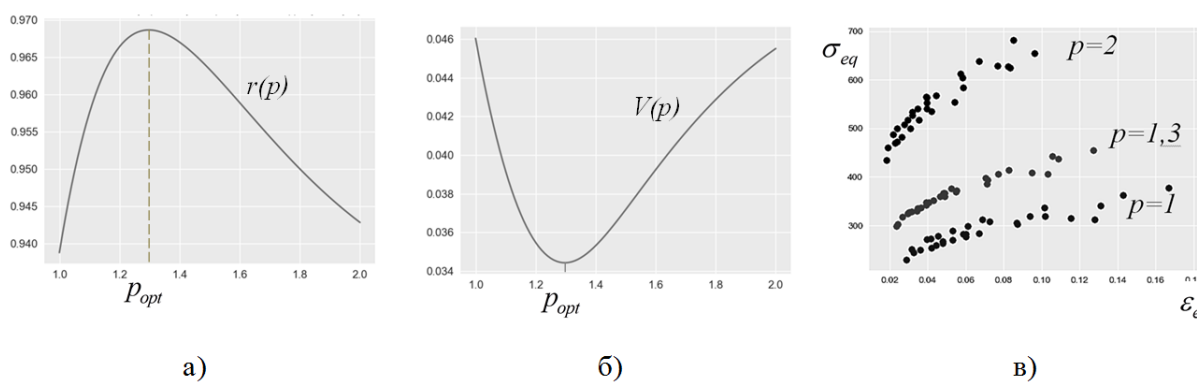


Рис. 5.1. Знаходження параметра  $p$  сталі 45: а) за коефіцієнтом кореляції  $r$ ; б) за усередненим коефіцієнтом варіації  $V$  та в) порівняння діаграм розсіювання точок за трьох значень параметра  $p$

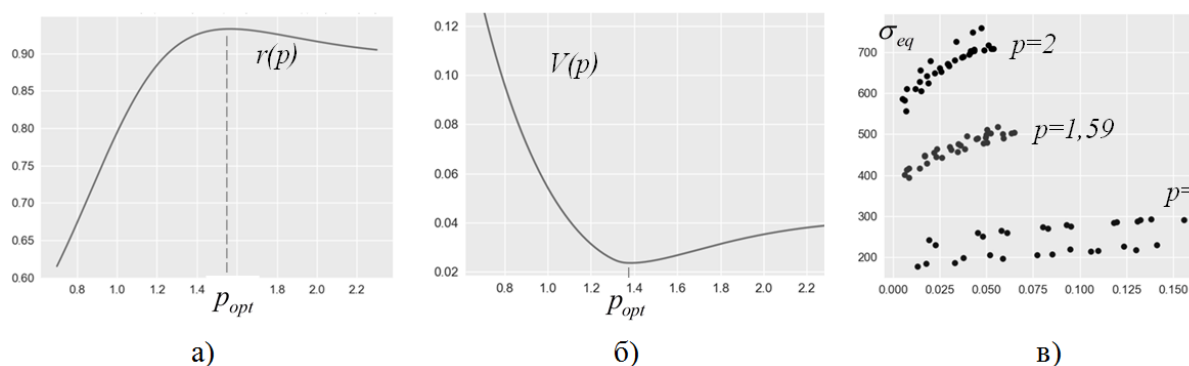


Рис. 5.2. Знаходження параметра  $p$  для сталі 10ГН2МФА: а) за коефіцієнтом кореляції  $r$ ; б) за усередненим коефіцієнтом варіації  $V$  та в) порівняння діаграм розсіювання точок за трьох значень параметра  $p$

У табл. 5.2 наведено числові точкові оцінки щільності та розсіювання експериментальних точок в системі координат  $\sigma_{eq} \sim \varepsilon_{eq}$ . Через  $D_{сер.зв.}(\sigma_{eq})$  позначено середнє зважене дисперсій, обчислених за значеннями  $(\sigma_{eq})_i$  із врахуванням кількості експериментальних точок в кожному з часткових інтервалів. Для розрахунку оптимальної кількості часткових інтервалів використано формулу Стерджеса:

$$k = 1 + 3,32 \log n. \quad (5.5)$$

Для заданої кількості спостережень ( $n=30$ ) вибрано  $k=5$  часткових інтервалів для розбиття даних за абсцисою  $\varepsilon_{eq}$ . Відповідне середнє зважене значення середніх квадратичних відхилень позначено через  $STD_{сер.зв.}(\sigma_{eq})$ .

Таблиця 5.2

#### Оцінювання якості знаходження параметра $p$

матеріал	$D_{сер.зв.}(\sigma_{eq})$	$STD_{сер.зв.}(\sigma_{eq})$	$r_{\max}$	$p(r_{\max})$	$V_{\min}$	$p(V_{\min})$
Сталь 45	199,72	13,29	0,97	1,30	3,44%	1,28
Сталь 10ГН2МФА	152,43	11,90	0,93	1,59	2,22%	1,39

Для подальших обчислень було взято значення  $p = p(r_{\max})$ , отримані з умови максимуму коефіцієнта кореляції Пірсона  $r$ .

## 5.2. Встановлення залежності між дійсними напруженнями та деформаціями в еквівалентних координатах

За точками  $\left( (\varepsilon_{eq})_i, (\sigma_{eq})_i \right)$ , отриманими для  $p=1,30$  (сталь 45) та для  $p=1,59$  (сталь 10ГН2МФА), було побудовано узагальнені криві деформування. Для апроксимації ділянки зміцнення використали степеневу модель виду (2.10):  $\sigma_{eq} = A\varepsilon_{eq}^B$ . Отримали рівняння узагальнених деформаційних кривих:

$$\sigma_{eq} = 721,42 \cdot \varepsilon_{eq}^{0,2286} \quad (\text{для сталі 45}), \quad (5.6, \text{ а})$$

$$\sigma_{eq} = 672,17 \cdot \varepsilon_{eq}^{0,1047} \quad (\text{для сталі 10ГН2МФА}). \quad (5.6, \text{ б})$$

Для знаходження модуля зміцнення  $A$  та показника зміцнення  $B$  використовували метод найменших квадратів. На рис. 5.3 (а) та рис. 5.4 (а) показано експериментальні точки, криві, побудовані за формулами (5.6, а), (5.6, б), та відповідні коефіцієнти детермінації. На рис. 5.3 (б) та рис. 5.4 (б) показано узагальнені криві та середні квадратичні відхилення розрахункових значень від експериментальних для п'яти часткових проміжків. На рис. 5.3 (в) та рис. 5.4 (в) показано розподіл помилок для обох апроксимацій. На рис. 5.3 (г) та рис. 5.4 (г) показано гістограми розподілів помилок.

Близьке до 1 значення коефіцієнта детермінації та розподіл помилок, близький до нормального, свідчать про хорошу якість апроксимації. Гістограма розподілу помилок, отримана для сталі 10ГН2МФА, вказує на гіршу якість апроксимації, ніж для сталі 45. Проте інші метрики помилок, в тому числі середнє відносних абсолютних відхилень  $A\Delta E$  (2.12), показували на задовільну якість моделі (5.6, б).

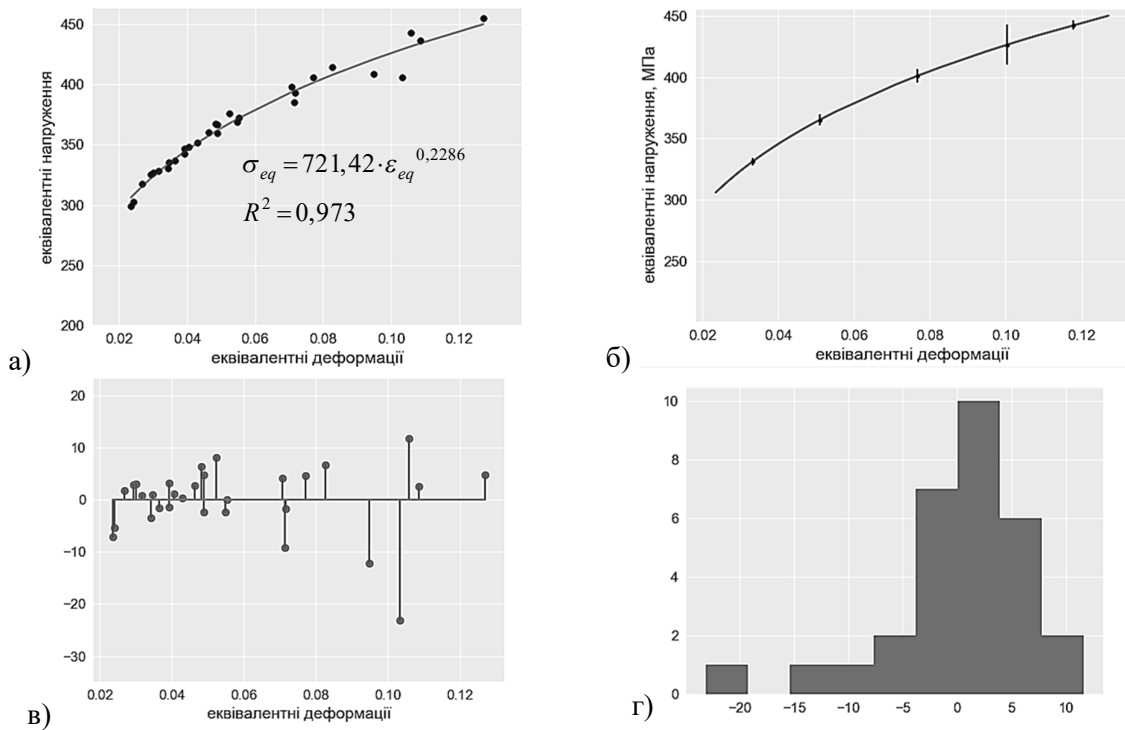


Рис. 5.3. Узагальнена крива зміцнення для сталі 45 та оцінка її якості: а) степенева апроксимація кривої та коефіцієнт детермінації; б) середнє квадратичне відхилення помилок; в) розподіл помилок апроксимації; г) гістограма розподілу помилок апроксимації.

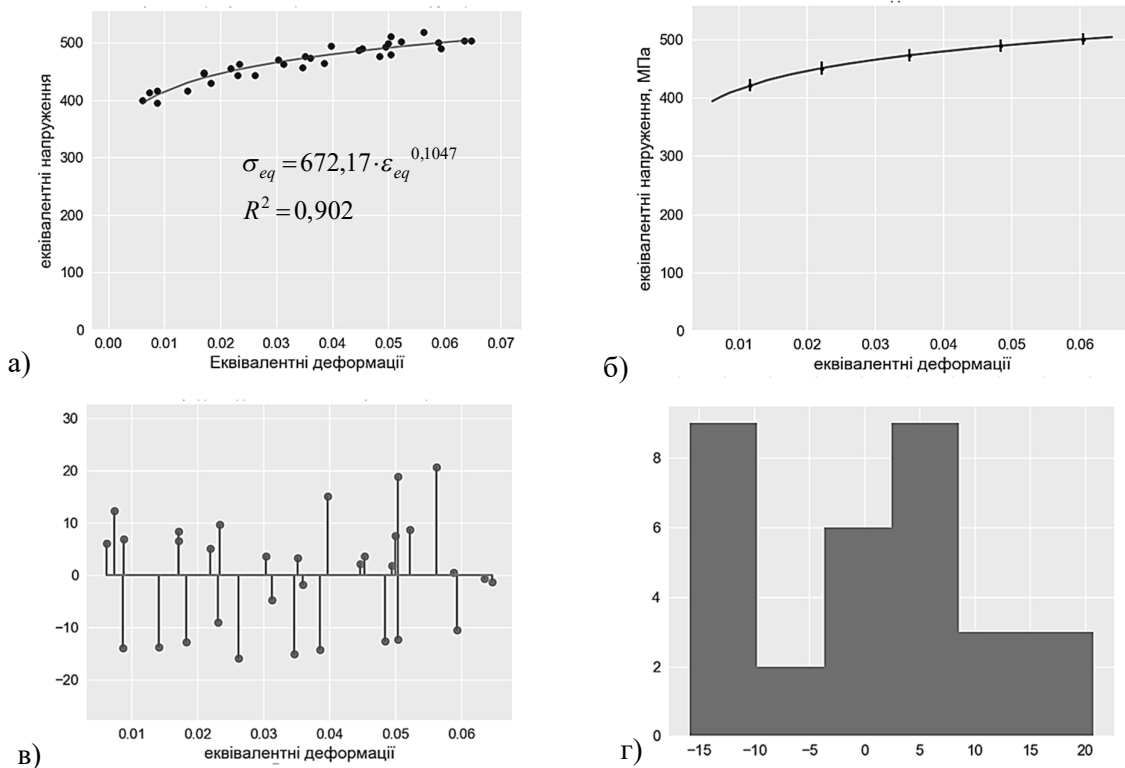


Рис. 5.4. Узагальнена крива зміцнення для сталі 10ГН2МФА та оцінка її якості: а) степенева апроксимація кривої та коефіцієнт детермінації; б) середнє квадратичне відхилення помилок; в) розподіл помилок апроксимації; г) гістограма розподілу помилок апроксимації.

Розрахувавши за формулами (3.32) та (3.38) значення дійсних колових та осьових напружень, а також за формулою (4.1) дійсні еквівалентні напруження, отримали рівняння дійсної кривої деформування  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ . Ділянки зміцнення для кривих деформування в умовних еквівалентних напруженнях та в дійсних еквівалентних напруженнях, їх рівняння та коефіцієнти детермінації зображено на рис. 5.5 (сталь 45) та рис. 5.6 (сталь 10ГН2МФА).

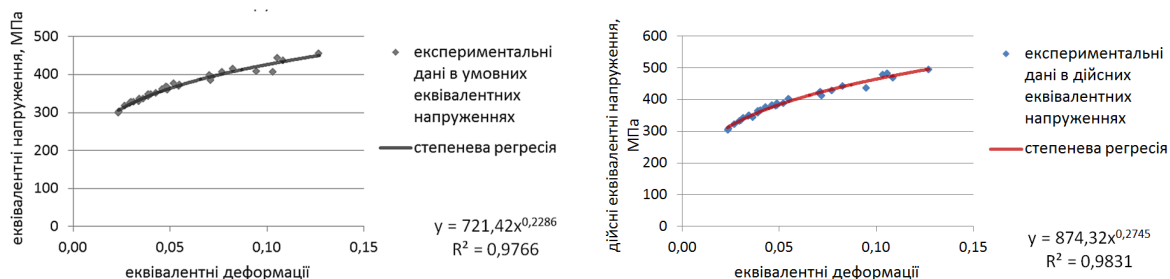


Рис. 5.5. Експериментальні точки та криві зміцнення для сталі 45 в умовних та дійсних еквівалентних напруженнях

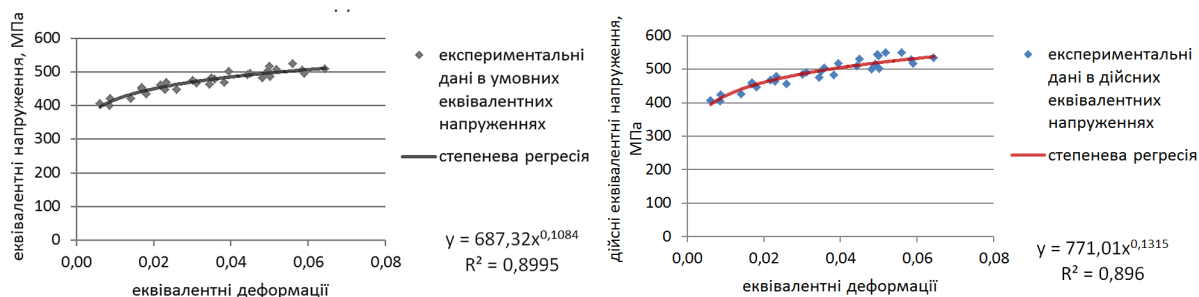


Рис. 5.6. Експериментальні точки та криві зміцнення для сталі 10ГН2МФА в умовних та дійсних еквівалентних напруженнях

Рівняння деформаційних кривих в еквівалентних деформаціях та дійсних еквівалентних напруженнях:

$$\tilde{\sigma}_{eq} = 874,32 \cdot \varepsilon_{eq}^{0,2745} \quad (\text{для сталі 45}), \quad (5.7, \text{ а})$$

$$\tilde{\sigma}_{eq} = 771,01 \cdot \varepsilon_{eq}^{0,1315} \quad (\text{для сталі 10ГН2МФА}). \quad (5.7, \text{ б})$$

Близькі до 1 значення коефіцієнта детермінації ( $R^2 = 0,9831$  для сталі 45 та  $R^2 = 0,896$  для сталі 10ГН2МФА) показали хорошу якість апроксимації. Середнє відносних абсолютних помилок апроксимації для сталі 45 рівний 1,3%, для сталі



10ГН2МФА цей показник становив 2,3%, що також вказує на задовільну якість моделей (5.7, а) та (5.7, б).

### 5.3. Знаходження дійсних граничних напружень

Для знаходження граничних значень дійсних напружень розглянуто три випадки тонкостінних труб з різними співвідношеннями  $2R/h$  (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Початкові геометричні параметри труб

№з/п	Товщина стінки $h$ , мм	Зовнішній діаметр, мм	$h/R$	$2R/h^*$
1	2,5	65	0,08	26
2	6	108	0,11	18
3	6	76	0,16	12,7

\*тонкостінність труби забезпечується в діапазоні значень  $2R/h=12,5...40$

Для розв'язання рівняння (4.20) та знаходження дійсних значень граничних напружень в системі координат  $(\varepsilon_{eq}; \tilde{\sigma}_{eq})$  було побудовано графіки обох частин рівняння. При  $k \gg 2$  напружено-деформований стан труби близький до одновісного розтягу, тому на рисунках відображено результати розрахунків для діапазону, важливого для застосувань, при  $k \in (0,5; 2)$ .

Узагальнені криві деформування побудовано за формулами (5.7, а) та (5.7, б). Еквівалентні деформації розраховувались за формулою (4.6) через задані значення  $\varepsilon_z$  з інтервалу  $(0; 0,2)$ .

Оскільки для аналітичного опису кривої деформування обрано степеневу модель виду (2.8), то похідна  $d\tilde{\sigma}_{eq} / d\varepsilon_{eq}$  виражається формулою:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = A \cdot B \cdot \varepsilon_{eq}^{B-1}. \quad (5.8)$$

Отримали вираз для знаходження дотичних модулів:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = 240,0 \cdot \varepsilon_{eq}^{-0,7255} \quad (\text{для сталі 45}), \quad (5.9, \text{ а})$$

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eq}}{d\varepsilon_{eq}} = 101,4 \cdot \varepsilon_{eq}^{-0,8685} \quad (\text{для сталі 10ГН2МФА}). \quad (5.9, \text{ б})$$

Для побудови графіків правої частини формули (4.20) використовували формулу (5.9), а також виконувались проміжні обчислення за формулами (3.22), (4.18) та (4.19).

На рис. 5.7 (а) зображено графічне розв'язування рівняння (4.20) для труб із сталі 45 для трьох значень співвідношень  $h/R$  (табл. 5.3). Розміри труб вибрано згідно з стандартизованим сортаментом. На рис. 5.7 (б) показано графічне розв'язування рівняння (4.20) для сталі 10ГН2МФА.

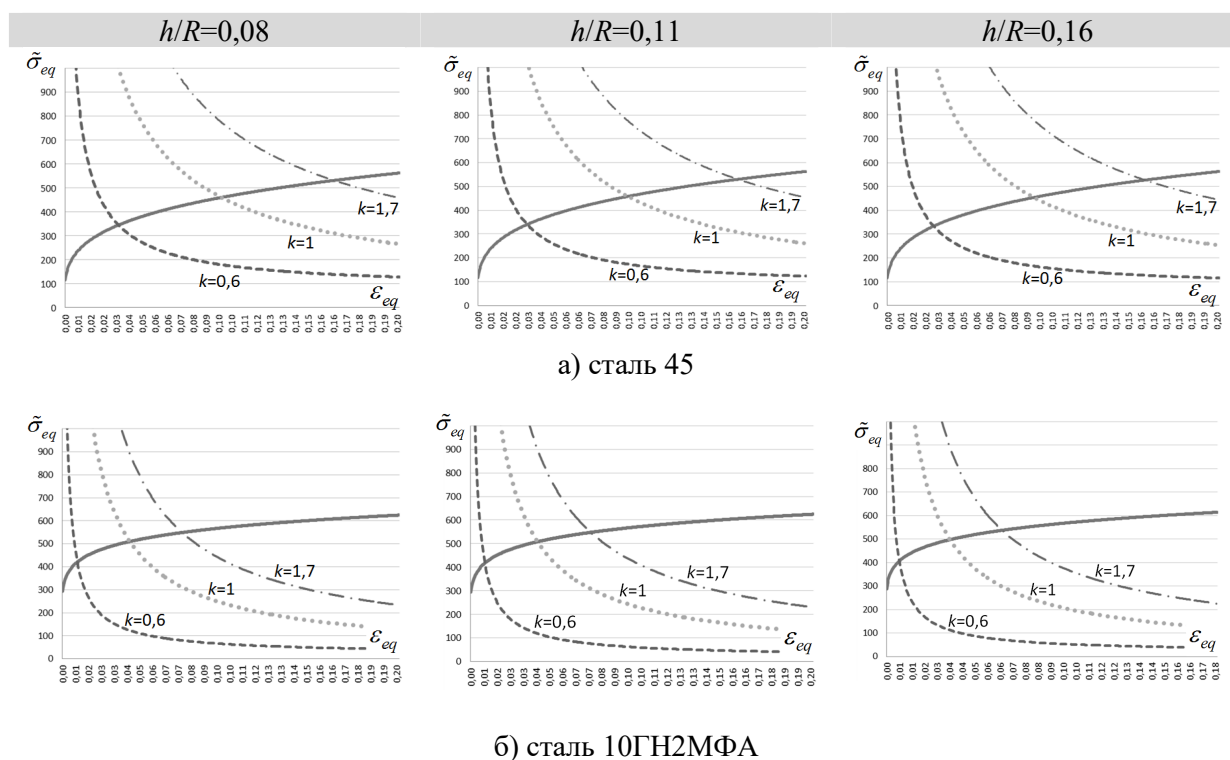


Рис. 5.7. Графічне розв'язування рівняння (4.20) для тонкостінних труб із сталі 45 (а) та сталі 10ГН2МФА (б). Суцільна лінія – дійсна узагальнена крива деформування

Суцільними кривими показано дійсні узагальнені криві деформування, побудовані за оптимальних значень параметра  $p$  для кожного з матеріалів,

пунктирними лініями показано графіки правої частини рівняння (4.20) – добутку дотичного модуля та коригувального множника.

Аналіз графіків, представлених на рис. 5.7 для трьох показників тонкостінності, показав, що вид напруженого стану  $k$  суттєво впливає на ресурс міцності труби. Найменших своїх значень  $\tilde{\sigma}_{eq}$  та  $\varepsilon_{eq}$  набувають у випадку, коли навантаження близьке до внутрішнього тиску ( $k \rightarrow 0,5$ ). За одночасної дії внутрішнього тиску та осьового розтягу (для  $k \rightarrow 2$ ) граничні дійсні еквівалентні напруження та деформації збільшуються.

Точки перетину суцільної кривої та пунктирних ліній, отриманих для різних  $k$ , визначають дійсні еквівалентні напруження  $\tilde{\sigma}_{eq}^s$  та еквівалентні деформації  $\varepsilon_{eq}$  в стінках труби на початку локалізації деформацій. На рис. 5.8 показано розміщення на дійсній узагальненій кривій точок, що відповідають граничним значенням  $\tilde{\sigma}_{eq}$  та  $\varepsilon_{eq}$  для  $k=0,505..1,95$ . Порівняльний якісний аналіз взаємного розташування точок показав вплив показника тонкостінності  $h/R$  на граничні значення дійсних еквівалентних напружень та еквівалентних деформацій. Особливо помітний вплив відношення  $h/R$  для сталі 45, що має більший рівень залишкової пластичності, при  $k=0,5..1$ . Для легованої сталі 10ГН2МФА з меншим рівнем залишкових деформацій вплив відношення  $h/R$  на значення граничних напружень спостерігається при  $k=0,8..1$ .

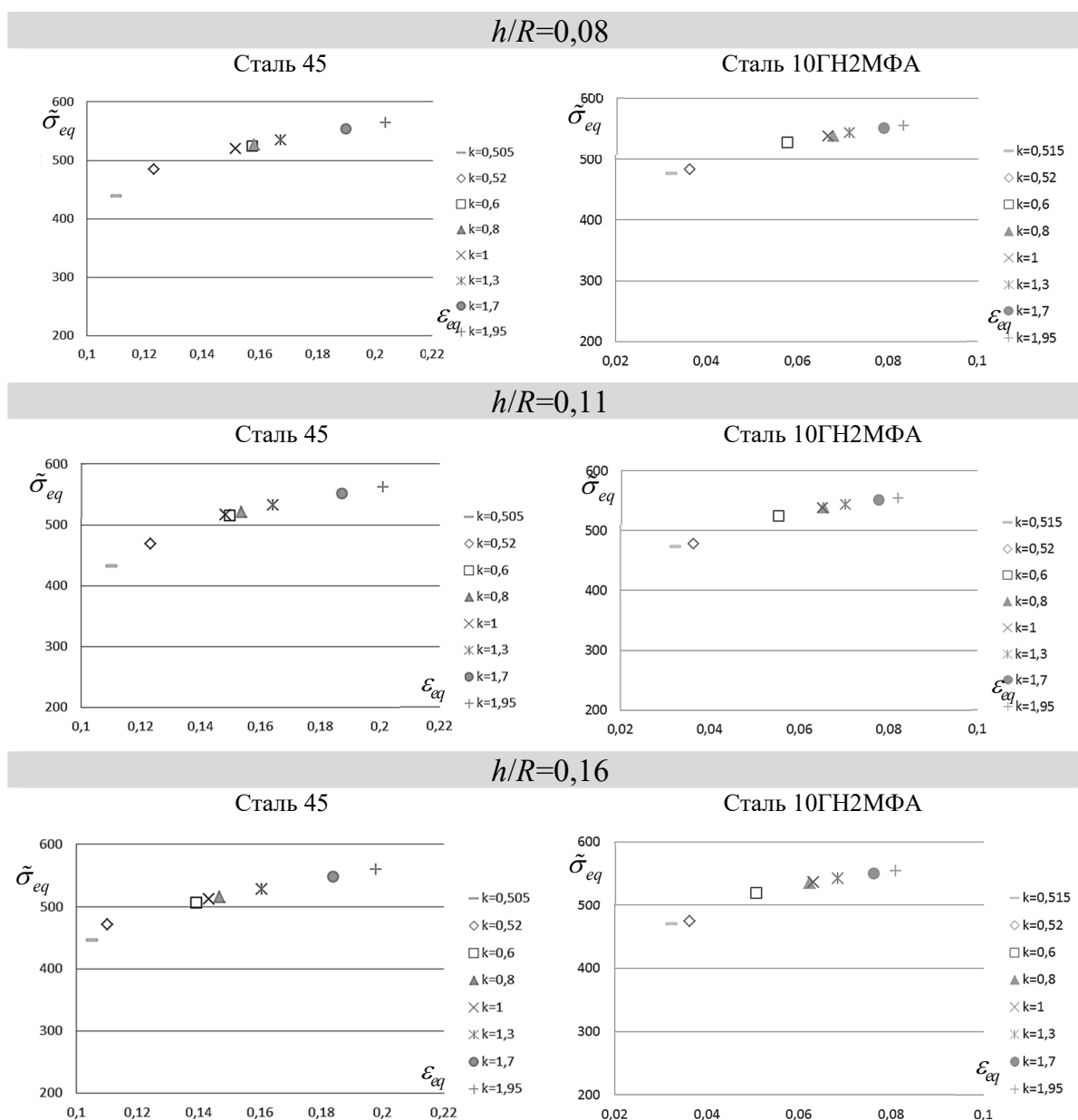


Рис. 5.8. Розміщення на узагальненій кривій в дійсних напруженнях точок, що відповідають граничним значенням напружень  $\tilde{\sigma}_{eq}$  та деформацій  $\varepsilon_{eq}$  залежно від виду напруженого стану

Залежність граничних напружень  $\tilde{\sigma}_{eq}$  від відношення  $h/R$  для різних значень  $k$  показано на рис. 5.9.

Аналіз графіків на рис. 5.9 показав, що найменший розрахунковий ресурс міцності спостерігається за навантаження труби лише внутрішнім тиском. При  $k = 0,5 \dots 1$  втрата стійкості рівномірного пластичного деформування відбувається за більших дійсних еквівалентних напружень для усіх зразків.

Збільшення відношення  $h/R$  від 0,08 до 0,11 при  $k=0,6..0,7$  призводить до зменшення граничних дійсних еквівалентних напружень в середньому на 10 МПа (або  $\approx 2\%$ ).

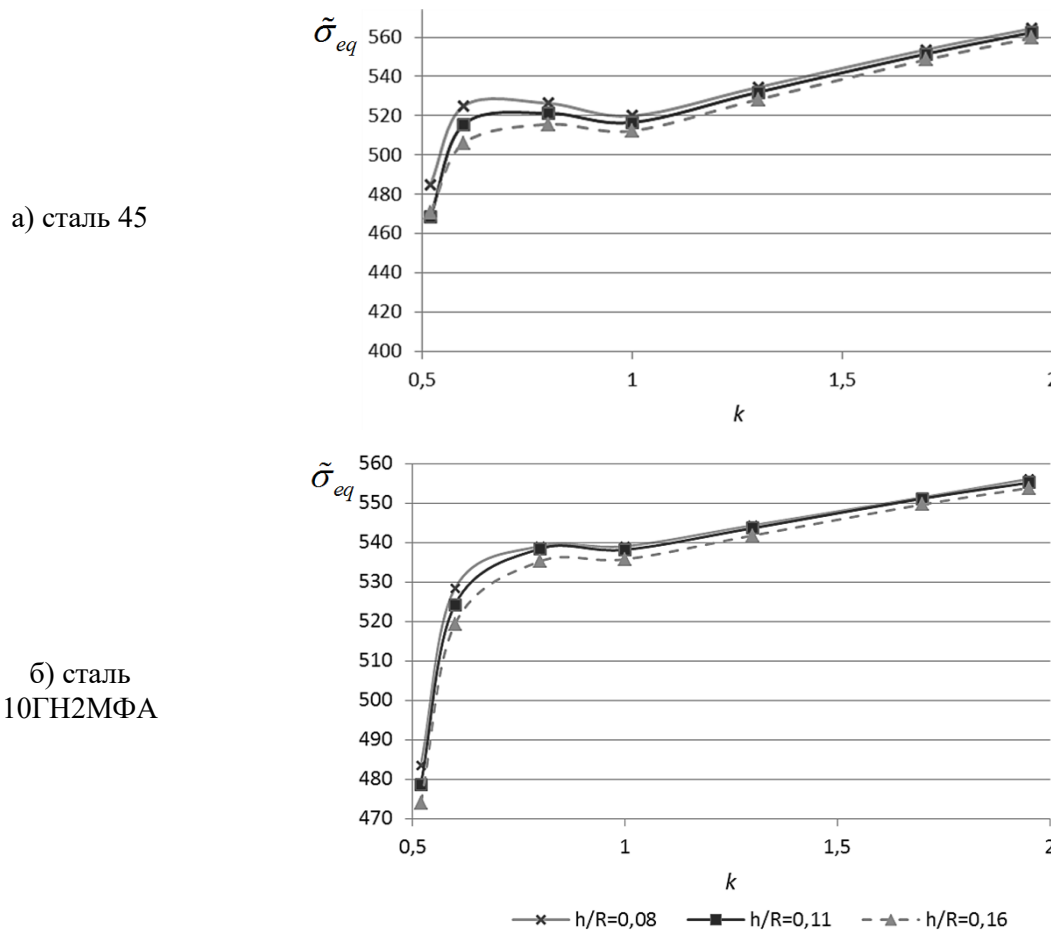


Рис. 5.9. Залежність граничних напружень  $\tilde{\sigma}_{eq}$  від  $k$  за різних значень  $h/R$

При  $k \approx 1$  спостерігається незначне зменшення розрахункової граничної міцності порівняно з суміжними напруженими станами. У трубах з меншим відношенням  $h/R$  спостерігається вищий рівень розрахункових дійсних еквівалентних напружень в стінках труби в момент локалізації деформацій. При  $k = 1$  збільшення відношення  $h/R$  від 0,08 до 0,11 призводить до зменшення розрахункових граничних дійсних еквівалентних напружень в середньому на 5 МПа (або  $\approx 1\%$ ) для Сталі 45. Для сталі 10ГН2МФА рівень розрахункових граничних еквівалентних напружень за відношень  $h/R = 0,08$  та  $h/R = 0,11$  є однаковим. За подальшого збільшення відношення  $h/R$  від 0,11 до 0,16 граничні

розрахункові еквівалентні напруження зменшуються на 1–1,5% для обох матеріалів.

Залежність  $\tilde{\sigma}_{eq}$  від виду напруженого стану при  $k=1..2$  близька до лінійної для усіх розглянутих співвідношень  $h/R$ .

На рис. 5.10 показано залежність дійсних колових  $\tilde{\sigma}_\theta$  та дійсних осьових  $\tilde{\sigma}_z$  напружень від  $k$  для різних співвідношень  $h/R$ . Значення граничних дійсних напружень обчислено за формулами (4.3, а) та (4.3, б). Побудовані лінії для граничних дійсних напружень дають уявлення про характер залежності граничних дійсних колових та осьових напружень від  $k$  з інтервалу (0,5; 2) із врахуванням геометрії зразків.

На рис. 5.10 (а) показано точки, що відповідають значенням границі міцності сталі 45 за різних видів СНС [90]. При навантаженні труби лише внутрішнім тиском розрахункове граничне дійсне осьове напруження збігається з довідниковим, що пояснюється нульовими осьовими деформаціями. Помітним є значне заниження граничних інженерних значень порівняно з розрахунковими дійсними. Так, при  $k=1$  розрахункові дійсні напруження перевищують довідникові в 1,2–1,3 рази, при  $k=2$  перевищення становить 1,1–1,2 рази. Збільшення показника тонкостінності удвічі (від 0,08 до 0,16) призводить до зменшення рівня максимальних розрахункових граничних колових напружень (при  $k=0,6$ ) на 4–5%.

На рис. 5.10 (б) показано розрахункові дійсні границі міцності сталі 10ГН2МФА за різних видів СНС [14]. Якісна картина залежностей аналогічна до попередньої. Збільшення показника тонкостінності удвічі (від 0,08 до 0,16) призводить до зменшення рівня максимальних розрахункових граничних колових напружень (при  $k=0,6$ ) на 2–3%. Дещо занижені значення розрахункових дійсних напружень пояснюються накопиченими похибками, в тому числі, на етапі оцифрування первинних кривих деформування, наданих в першоджерелі.

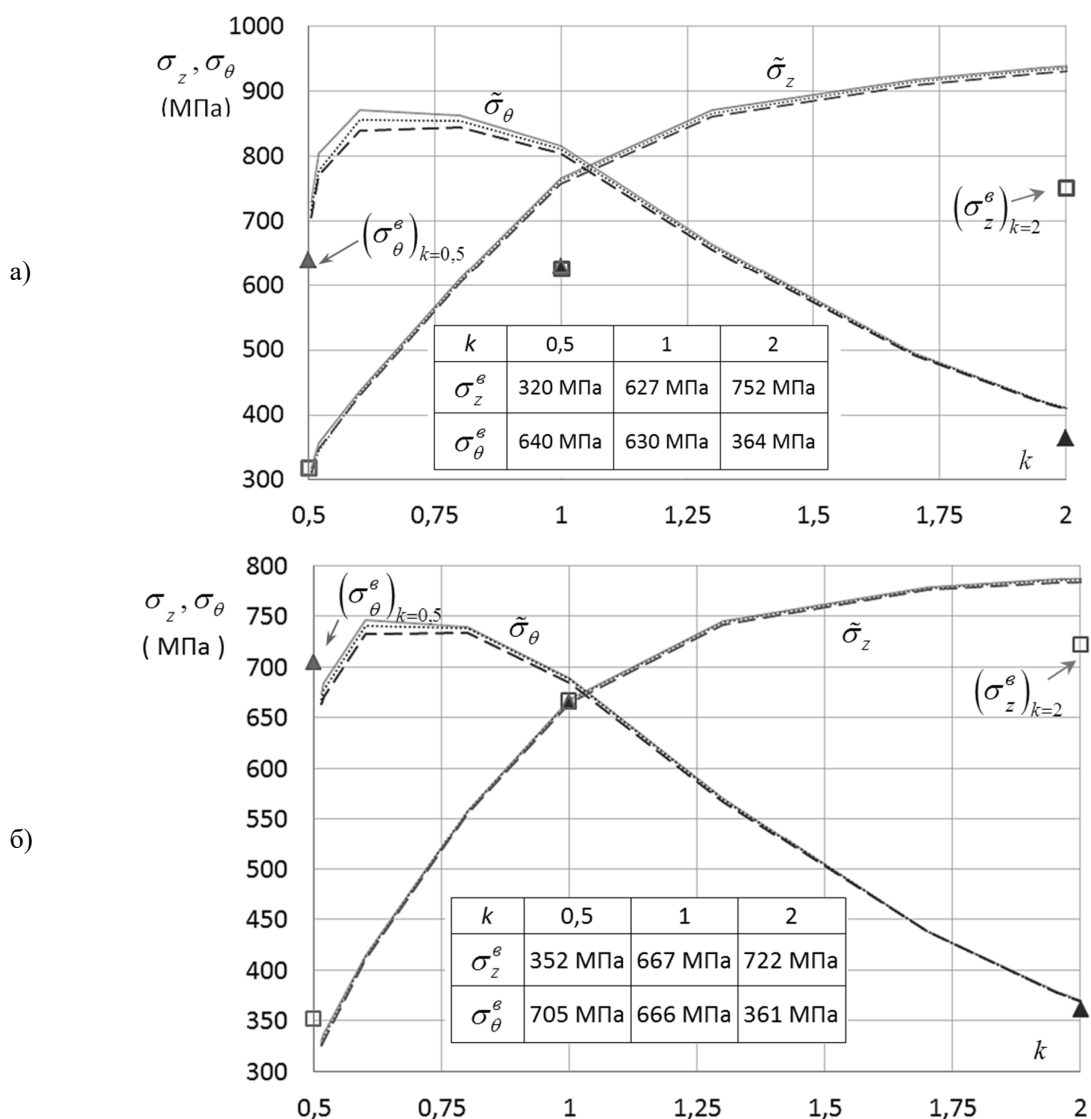


Рис. 5.10. Залежність граничних значень дійсних напружень від виду напруженого стану  $k$  за різних відношень  $h/R$ : а) для сталі 45; б) для сталі 10ГН2МФА. Позначено: — — —  $h/R=0,08$ ; ..... —  $h/R=0,11$ ; - - -  $h/R=0,16$ . Окремими точками показано інженерні границі міцності для  $k = 0,5; 1; 2$

Аналіз графіків на рис. 5.10 показав, що при  $k = 1$  дійсні колові граничні напруження перевищують інженерні в середньому в 1,01..1,3 рази, дійсні осеві граничні напруження перевищують інженерні в середньому в 1,1..1,2 рази. Збільшення показника тонкостінності удвічі (від 0,08 до 0,16) призводить до зменшення рівня граничних розрахункових напружень на 1–3%, що підтверджує недоцільність покращення міцнісних характеристик елементів конструкцій лише за рахунок збільшення їх масивності.

Залежність від  $k$  граничних значень розрахункових еквівалентних деформацій показано на рис. 5.11.

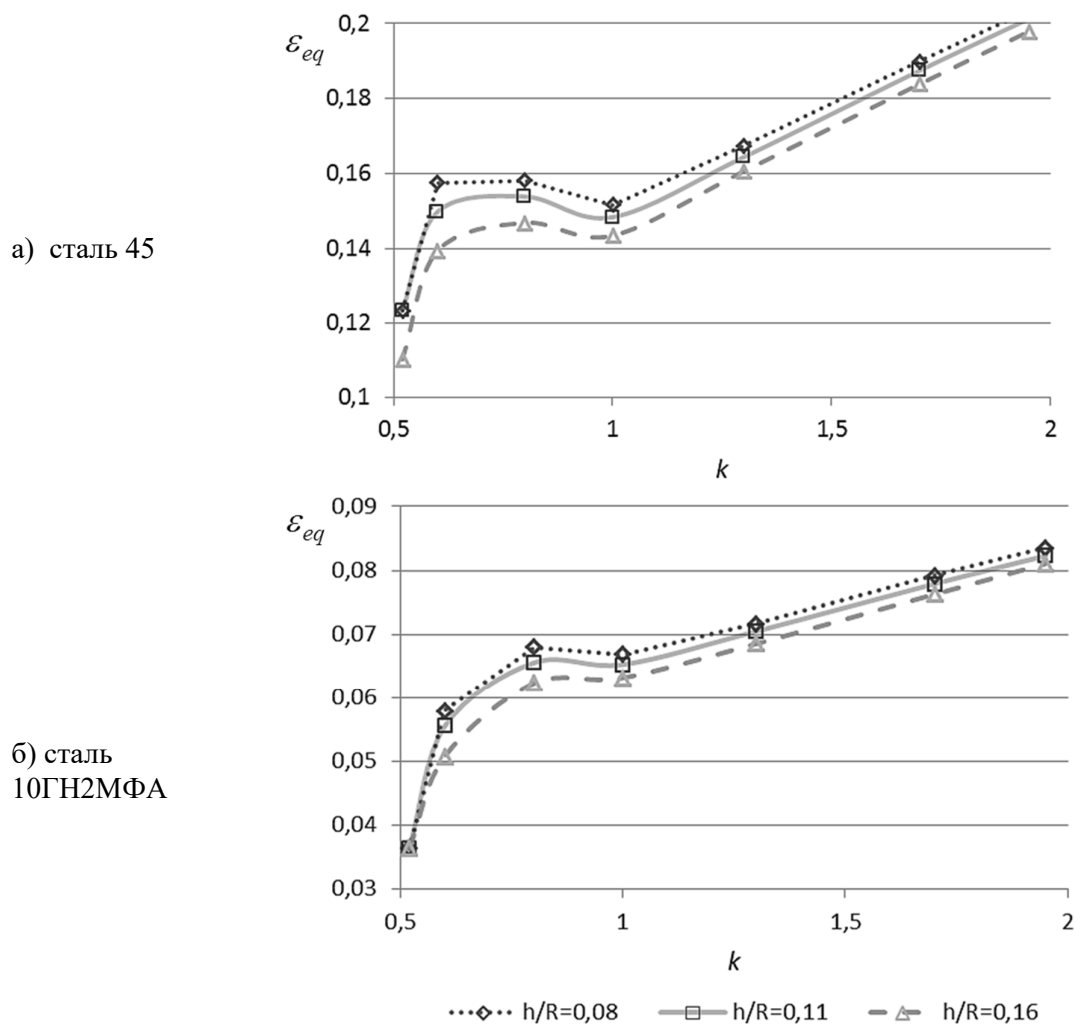


Рис. 5.11. Залежність граничних еквівалентних деформацій від виду напруженого стану із врахуванням зміни геометрії труби

Аналіз графіків, зображених на рис. 5.11, показав, що за навантаження лише внутрішнім тиском ( $k=0,5$ ) еквівалентні деформації набувають найменших значень, границя міцності досягається без помітних пластичних деформацій. За навантаження труби внутрішнім тиском із незначним додатковим осьовим розтягом ( $k=0,6..0,8$ ) вплив початкових геометричних параметрів на граничні значення еквівалентних деформацій є найбільшим. Із зростанням сили осьового розтягу цей вплив частково нейтралізується. Для труб з найменшим значенням  $h/R$  спостерігається більший рівень залишкових еквівалентних деформацій, що розвиваються в стінках на момент утворення місцевих деформацій. Із



збільшенням показника тонкостінності від 0,08 до 0,11 розрахунковий рівень  $\varepsilon_{eq}$  зменшується в середньому на 1% для Сталі 45 та на 0,2% для Сталі 10ГН2МФА. Ця зміна досягається при  $k = 0,6..0,7$  та є максимальною порівняно з іншими видами СНС.

На рис. 5.12 показано залежність граничних значень розрахункових рівномірних пластичних деформацій від  $k$  із врахуванням відношення  $h/R$ . Показано характер зміни еквівалентних деформацій  $\varepsilon_{eq}$  та трьох компонент  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_r$ .

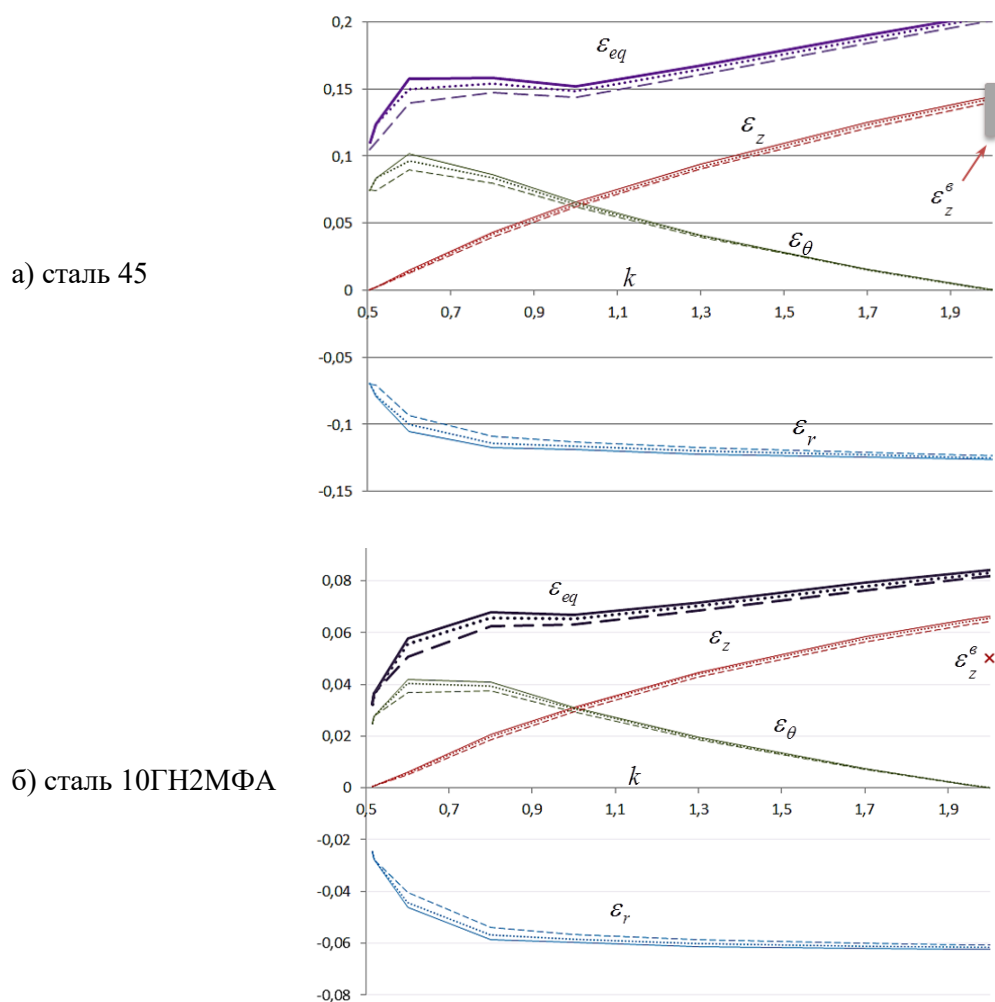


Рис. 5.12. Залежність граничних рівномірних деформацій від виду напруженого стану із врахуванням показника тонкостінності труби.

Позначено: —  $h/R=0,08$ ; .....  $h/R=0,11$ ; — · —  $h/R=0,16$ .

Аналіз графіків, представлених на рис. 5.12, показав, що за навантаження труби, близького до внутрішнього тиску (при  $k=0,5..0,9$ ), найбільшого впливу від

показника тонкостінності труби зазнають колові та радіальні деформації. Із збільшенням впливу осьового розтягу за комбінованого навантаження зростає вплив показника тонкостінності на осьові напруження. Незначне осьове навантаження розтягу, прикладене до труби, навантаженої внутрішнім тиском, збільшує граничні деформації труби у радіальному та коловому напрямках.

Для порівняння на рис. 5.12 (а) показано граничне значення осьової деформації  $\varepsilon_z^e$  при  $k=2$  для сталі 45 (значення  $\varepsilon_z^e$  у першоджерелі не наведене, тому взяте із довідників з найближчими показниками термомеханічної обробки та геометрії зразка матеріалу). На рис. 5.12 (б) показано граничне значення осьової деформації  $\varepsilon_z^e$  при  $k=2$  для сталі 10ГН2МФА, взяте з довідника [14].

#### 5.4. Визначення граничних значень внутрішнього тиску та розтягу

Формули (4.21) та (4.22) дозволяють розрахувати граничні значення силових факторів, за перевищення яких у стінках труби починають розвиватись місцеві деформації, за відомими граничними значеннями деформацій  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_r$  та дійсних напружень  $\tilde{\sigma}_z$ ,  $\tilde{\sigma}_\theta$ , що утворюються в стінках труби від дії внутрішнього тиску  $q$  та осьового розтягу  $N$ .

На рис. 5.13 показано залежності значень граничних силових факторів від виду напруженого стану  $k$  та відношення  $h/R$ . По основній вертикальній осі (зліва) відкладено значення внутрішнього тиску  $q$ , по допоміжній вертикальній осі (справа) відкладено значення сили розтягу  $N$ .

Окремими замальованими значками показані розрахункові інженерні значення тиску для труби, обчислені за формулою:

$$q_{инж} = \frac{2h\sigma_z^e}{D_3 n}, \quad (5.10)$$

де  $\sigma_z^e$  – границя міцності, знайдена з дослідів на одновісний розтяг,  $D_3$  – зовнішній діаметр труби,  $n$  – коефіцієнт запасу. Для сталі 45 взято  $n=1,85$ , для

сталі 10ГН2МФА взято  $n=1,7$ . Порожніми значками тієї ж форми показано інженерні значення тиску, розраховані без врахування коефіцієнта запасу.

Значення тиску, обчислені за формулою (5.10) для труб №1, №2 та №3 із сталі 45 та сталі 10ГН2МФА, занесені в табл 5.4.

Таблиця 5.4

Розрахункові значення тиску  $q_{інж}$ 

№з/п	$h/R$	сталь 45 ( $n=1,85$ )	сталь 10ГН2МФА ( $n=1,7$ )
1	0,08	$q_{інж}^{(1)} = 28,4$ МПа	$q_{інж}^{(1)} = 31,0$ МПа
2	0,11	$q_{інж}^{(2)} = 41,0$ МПа	$q_{інж}^{(2)} = 44,8$ МПа
3	0,16	$q_{інж}^{(3)} = 58,2$ МПа	$q_{інж}^{(3)} = 63,7$ МПа

Залежності, зображені на рис. 5.13, дозволяють прогнозувати граничні значення силових факторів – внутрішнього тиску  $q$  та осевого розтягу  $N$ , за яких у стінках труби виникатиме процес локалізації деформацій.

Незначне навантаження розтягом ( $k=0,6..0,8$ ) підвищує максимально допустимий рівень внутрішнього тиску та відповідно збільшує поріг міцності труби. Наступне зростання граничної сили розтягу  $N$  вимагає зменшення граничних значень внутрішнього тиску.

Збільшення показника  $h/R$  від 0,08 до 0,11 дозволяє збільшення граничних значень осевої сили розтягу  $N$  в 3,5..4 рази та внутрішнього тиску  $q$  в 1,5 рази при  $k \approx 2$  для обох матеріалів. Наступне збільшення відношення  $h/R$  (від 0,11 до 0,16) збільшує допустиме значення внутрішнього тиску  $q$  в 1,3..1,5 рази, проте зменшує максимально допустимі значення сили  $N$  в  $\approx 1,5$  рази при  $k \approx 2$ .

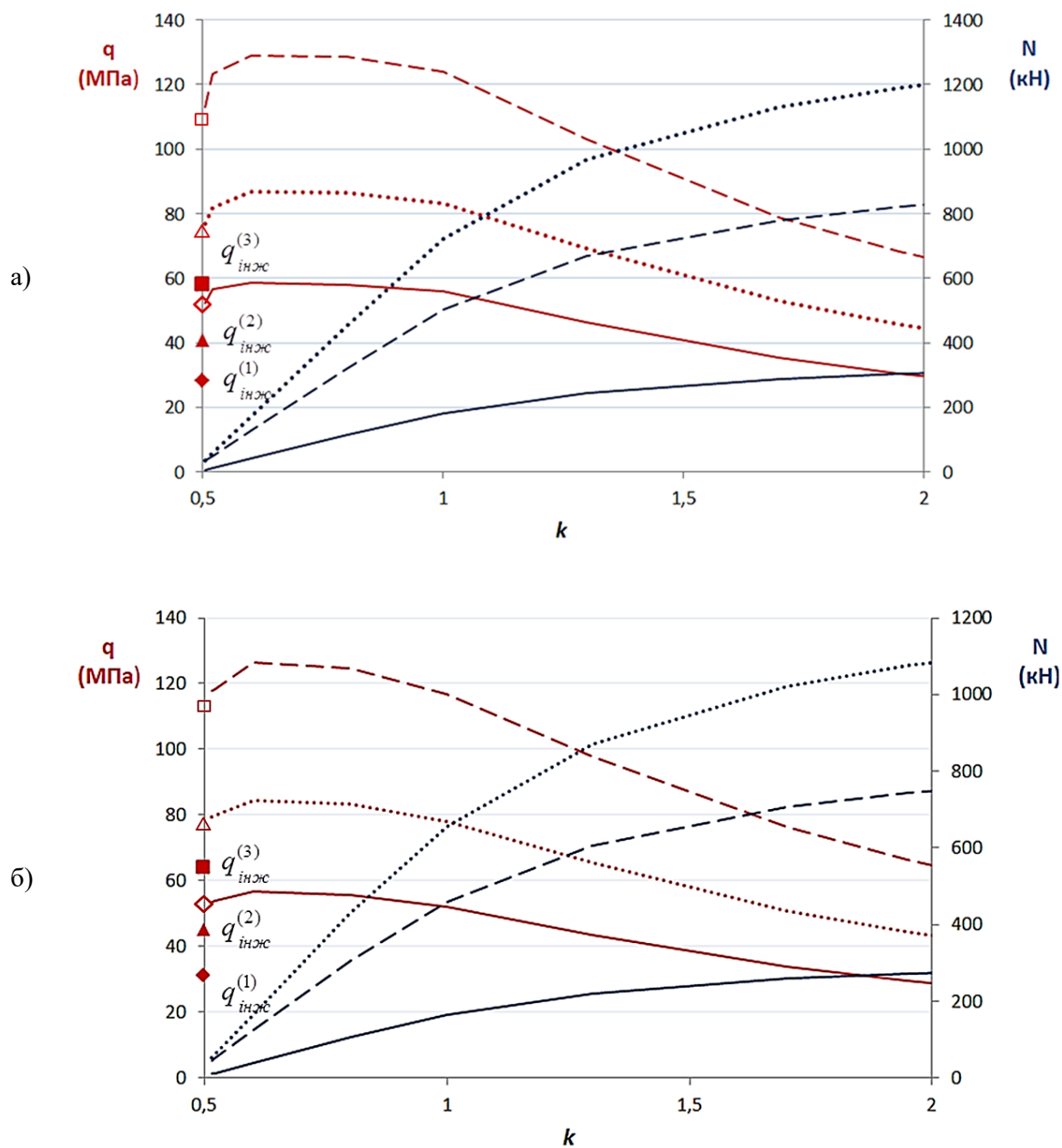


Рис. 5.13. Залежності розрахункових значень граничних силових факторів  $q$ ,  $N$  від виду напруженого стану  $k$  та відношення  $h/R$  для: а) сталі 45; б) сталі 10ГН2МФА.

Позначено: — — — — —  $h/R=0,08$ ; ..... —  $h/R=0,11$ ; - - - - -  $h/R=0,16$ .

Розроблена методика дозволяє визначати оптимальні товщину та діаметр труби для забезпечення несівної здатності та максимально ефективного співвідношення «вага-міцність» при заданому комбінованому навантаженні внутрішнім тиском та розтягом.

## 5.5. Висновки до розділу 5

1. Методику прогнозування граничних станів реалізовано для тонкостінних труб з різними значеннями відношень товщини стінки до діаметра: 0,08; 0,11 та 0,16. Матеріали труб: вуглецева сталь 45 та легована сталь 10ГН2МФА. Розрахунки проводились для  $k \in (0,5; 2)$ .
2. Дійсні криві деформування апроксимовано степеневою залежністю, індекс детермінації  $R^2 > 90\%$ .
3. Показано, що труба, навантажена внутрішнім тиском, має більший ресурс міцності у випадку довантаження незначним осьовим розтягом ( $k \approx 0,6-0,7$ ).
4. При  $k=1$  розрахункові дійсні напруження для сталі 45 перевищують довідникові (умовні) в 1,2–1,3 рази, при  $k = 2$  перевищення становить 1,1–1,2 рази.
5. Збільшення показника тонкостінності удвічі (від 0,08 до 0,16) призводить до зменшення рівня максимальних розрахункових граничних колових напружень (при  $k=0,6$ ) на 4–5% для сталі 45 та на 2–3% для сталі 10ГН2МФА, що підтверджує недоцільність покращення міцнісних характеристик елементів конструкцій лише за рахунок збільшення їх масивності.
6. Збільшення показника  $h/R$  від 0,08 до 0,11 дозволяє збільшення граничних значень осової сили розтягу  $N$  в 3,5..4 рази та внутрішнього тиску  $q$  в 1,5 рази при  $k \approx 2$  для обох матеріалів. Наступне збільшення відношення  $h/R$  (від 0,11 до 0,16) збільшує допустиме значення внутрішнього тиску  $q$  в 1,3..1,5 рази, проте зменшує максимально допустимі значення сили  $N$  в  $\approx 1,5$  рази при  $k \approx 2$ , що говорить про існування оптимального балансу між геометрією труби та її міцністю.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну наукову задачу удосконалення аналітико-розрахункового підходу до прогнозування граничного стану елементів конструкцій за пластичного деформування двовісним розтягом, що має істотне значення при проєктуванні та експлуатації конструкцій з метою зменшення їх матеріалоемності, підвищення ефективності використання та рівня безпеки.

Основні наукові результати дисертаційного дослідження полягають у наступному:

1. Розроблено систему еквівалентних координат для аналітичного опису узагальненої діаграми деформування, яка узгоджується з класичними підходами та враховує результати експериментів.

Запропонована в роботі феноменологічна модель узагальненої кривої деформування інтегровано враховує фізико-механічні властивості матеріалу через введення параметра  $p$ . У часткових випадках еквівалентні напруження і деформації зводяться до класичних: при  $p = 1$  отримуються формули для визначення найбільших дотичних напружень та кутових деформацій  $\tau_{\max}$ ,  $\gamma_{\max}$ , при  $p = 2$  – інтенсивності напружень і деформацій  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ .

2. Розроблено алгоритм отримання параметра фізико-механічних властивостей матеріалу для знаходження еквівалентних напружень та деформацій.

На основі дослідних даних, запозичених з відкритих джерел для серії вуглецевих сталей, легованих сталей та титанових сплавів встановлено, що існує таке розрахункове значення параметра  $p$ , для якого можна побудувати криву деформування з найменшим показником розсіювання точок. Значення параметра  $p$  спостерігались в інтервалі (1; 2), відносний показник розсіювання не перевищував 8,5%. Рівняння степеневі регресії для узагальненої кривої деформування за оптимальних значень параметра  $p$  отримано з індексом детермінації  $R^2 \geq 0,58$ . Створена в ході дослідження комп'ютерна програма

дозволяє отримати оптимальне значення параметра  $p$ , рівняння регресії для узагальненої кривої деформування та відповідні показники якості за результатами кількох дослідів на двовісний розтяг.

3. Сформульовано умови досягнення дійсної границі міцності для навантажених конструкційних елементів типових геометричних форм за плоского напруженого стану.

Проаналізовано вплив виду напруженого стану та геометричних параметрів конструкційних елементів на граничні значення дійсних напружень в момент появи місцевих деформацій. Принцип максимуму навантаження використано для отримання двох видів залежностей: граничних умов, графіками яких є січні відносно дійсних діаграм деформування, та дотичних модулів. Граничні умови, отримані для навантаження тонкостінних осесиметричних оболонок, застосовні до напружених станів  $\sigma_z / \sigma_\theta \approx 0,5; 2$ . Дотичні модулі використано при конструюванні узагальненої умови втрати стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної труби за комбінованого навантаження внутрішнім тиском та розтягом із  $k \in (0,5; 2)$ . Аналітично підтверджено факт зменшення ресурсу міцності тонкостінного циліндра за співвідношень головних напружень  $k \approx 0,5$ .

Показано, що для  $k > 1$  ресурс міцності тонкостінного циліндра є інваріантним до відношення  $h/R$ . Незначне довантаження осьовим розтягом (при  $k \approx 0,6$ ) збільшує граничні значення дійсних розрахункових колових напружень для циліндра, але зменшує їх для осесиметричної оболонки додатної гаусівської кривизни.

4. Розроблено метод прогнозування граничних станів тонкостінних оболонок за плоского напруженого стану із врахуванням їх геометрії.

Детальний опис методу здійснено для тонкостінної труби, навантаженої внутрішнім тиском та осьовим розтягом. Встановлено основні аналітичні залежності та розроблено алгоритм методу. Побудовано узагальнену криву деформування  $\tilde{\sigma}_{eq}(\varepsilon_{eq})$ . Основна формула алгоритму містить коригувальний

множник, що враховує фізико-механічні властивості матеріалу, вид напруженого стану та геометрію елемента в комплексі. Розрахункові значення коригувального множника для  $k \in (0,5; 2)$ , отримані для сталей чотирьох марок (сталь 45, 10ГН2МФА, 15Х2НМФА, Х16Н6), лежать в інтервалі  $(0,2; 0,9)$ . Розмах значень коригувального множника для кожної з чотирьох марок сталей становив 0,4-0,45.

5. Створено та реалізовано інженерну методику розрахунку граничних навантажень для тонкостінних циліндричних труб, виготовлених з різних типів пластичних конструкційних матеріалів.

Для двох марок сталей (вуглецевої сталі 45 та легованої сталі 10ГН2МФА) аналітично підтверджено збільшення порогу міцності за незначного додаткового навантаження труби під тиском осьовим розтягом ( $k=0,6..0,8$ ). Зі збільшенням показника тонкостінності удвічі (від 0,08 до 0,16) максимальні розрахункові граничні колові напруження (при  $k=0,6$ ) зменшуються на 4–5% для сталі 45 та на 2–3% для сталі 10ГН2МФА, що підтверджує недоцільність покращення міцнісних характеристик елементів конструкцій лише за рахунок збільшення їх масивності. Збільшення показника  $h/R$  від 0,08 до 0,11 дозволяє збільшити внутрішній тиск в 1,5 рази та силу розтягу в 3,5..4 рази при  $k \approx 2$  для обох матеріалів. Наступне збільшення відношення  $h/R$  (від 0,11 до 0,16) збільшує граничний внутрішній тиск в 1,3..1,5 рази, проте зменшує максимально допустимий розтяг в  $\approx 1,5$  рази.



### Список використаних джерел

1. Потапова Л. Б., Ярцев В. П. Статистический критерий текучести твердых материалов при сложном напряженном состоянии. Вестник ТГТУ, 9(3). 2003. С. 477–485.
2. Трощенко В.Т., Лебедев А.А., Стрижало В.А. и др. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения. К.: Логос, 2000. 571 с. ISBN 966-581-174-6.
3. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
4. Писаренко Г.С., Лебедев А.А., Матвеев В.В., Новиков Н.В. и др. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: В 2 томах. Киев: Наук. думка, 1980. Т.1. 536 с.
5. Ягн Ю.И. Новые методы расчета на прочность. Вестник инженеров и техников, 1931, Вып. 6. С.122–127.
6. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. Quart. Appl. Math, 1952. 10, No 2. P. 157–165.
7. Hershey A.V. The plasticity of an isotropic aggregate of an-isotropic face-centered cubic crystals. ASME J. Appl. Mech., 1954, pp. 21–30.
8. Davis E.A. The bailey flow rule and associated yield surface. J. Appl. Mech. Jun 1961, 28(2): 310.
9. Paul V. Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture. Fracture, 1968, 2. P. 313–496.
10. Hosford W.F. A generalized isotropic yield criterion. ASME, J. Appl. Mech. Jun 1972, 39(2): P. 607–609.
11. Ковальчук Б.І., Зубков С.С. Про критерії граничного стану пластичних ізотропних матеріалів за складного напруженого стану. Вестник НТУУ “КПІ”, Машиностроение. К.: Изд-во ВИПОЛ, 2009, Вып. 57. С. 28–33.
12. Lokoshchenko A.M. Long-term strength of metals in complex stress state (a survey). Mech. Solids 47, 2012. P. 357–372.
13. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 416 с.

14. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Под ред. академика НАН Украины А.А. Лебедева. Киев: Издательский дом “Ин Юре”, 2003. 540 с.
15. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1993. 640 с: ил.
16. Xian-Kui Zhu, Brian N. Leis, Average shear stress yield criterion and its application to plastic collapse analysis of pipelines. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Volume 83, Issue 9, 2006. P. 663-671. ISSN 0308-0161. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2006.06.001>.
17. Цыбулько А. Е., Козлов П. Н. Критерий прочности изотропных материалов. Вестник машиностроения, 2005. № 11. С. 20—22.
18. Лебедев А.А., Музыка Н.Р. Методы испытаний и механика разрушения листовых материалов при двухосном растяжении: моногр. Ин-т пробл. прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины. К., 2002. 216 с.
19. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов: отв. ред. Писаренко Г.С., 2-е изд. Киев: Наук. Думка, 1988. 736 с.
20. Лебедев А.А. Развитие теорий прочности в механике материалов. Пробл. прочности, N 5, 2010. С. 127–146
21. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Гриневич Д.В., Шершак П.В. Обзор критериев прочности материалов. Труды ВИАМ. 2019. №9 (81). URL: [http://viam-works.ru/ru/articles?art\\_id=1467](http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=1467) (дата звернения: 22.04.2020)
22. Потапова Л.Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? М.: Издательство Машиностроение–1, 2005. 244 с. URL: [http://pnu.edu.ru/media/filer\\_public/2013/04/10/2-29\\_potapova-yarcev.pdf](http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/04/10/2-29_potapova-yarcev.pdf)
23. Mao-hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century. ASME. Appl. Mech. Rev. May 2002; 55(3). pp. 169–218. doi: <https://doi.org/10.1115/1.1472455>

24. Mao-hong Yu. Twin shear stress yield criterion. International Journal of Mechanical Sciences, Volume 25, Issue 1, 1983. pp.71-74. ISSN 0020-7403. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(83\)90088-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(83)90088-7)
25. Yu M.H. Unified strength theory and its material parameters. In: Generalized Plasticity. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. Online ISBN 978-3-540-30433-3. doi: [https://doi.org/10.1007/3-540-30433-9\\_4](https://doi.org/10.1007/3-540-30433-9_4)
26. Zhang, S.H., Jiang, X.R., Xiang, C.C. et al. Proposal and application of a new yield criterion for metal plastic deformation. Archive of Applied Mechanics 90, pp. 1705–1722 (2020). doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01691-6>
27. Людвиг П. Основы технологической механики. Расчеты на прочность. Машиностроение, 1970. Вып. 15. С. 130–166.
28. Law M., Bowie G., Fletcher L., Piper J. Burst pressure and failure strain in pipeline. Journal of Pipeline Integrity. 2004. pp. 95–113. URL: [https://www.researchgate.net/publication/283925162\\_Burst\\_pressure\\_and\\_failure\\_strain\\_in\\_pipeline](https://www.researchgate.net/publication/283925162_Burst_pressure_and_failure_strain_in_pipeline)
29. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование процесса образования шейки при растяжении стального трубчатого образца до разрыва. Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. С. 35–41.
30. Крамарев Л.Н., Горохов А.Н., Сысоев О.В., Жегалов Д.В. Испытание конструкционных материалов при сложном нагружении с определением параметров предельного состояния. II Научная конференция по механике и прочности конструкций, посвященная 80-летию академика Е.А. Негина (г. Саров, 10–12 января 2001 г.). Сборник докладов. Саров: ВНИИЭФ, 2002. С. 195.
31. Баженов В.Г., Жегалов Д.В., Кибец А.И., Крамарев Л.Н., Лаптев П.В., Осетров С.Л. Образование шейки и закритическое поведение упругопластических стержней с различным профилем поперечного сечения. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2003. Вып. 1(5). С. 84–89.

32. Баженов В.Г., Жегалов Д.В., Зефирова С.В., Осетров С.Л. Упругопластическое деформирование и предельные состояния цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления при различных граничных условиях. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Механика. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2003. Вып. 1(5). С. 90–95.
33. Баженов В.Г. Математическое моделирование и методы идентификации деформационных и прочностных характеристик материалов. Физическая мезомеханика 10(5), 2007. С. 91–105.
34. Tian H., Kang D. A study on determining hardening curve for sheet metal. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2003, 43(12). pp. 1253–1257.
35. Tu S., Ren X., He J., Zhang, Z. Stress–strain curves of metallic materials and post-necking strain hardening characterization: A review. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2020. pp. 3–19.
36. Hradil P., Talja A., Real E., Mirambell E., Rossi B. Generalized multistage mechanical model for nonlinear metallic materials. Thin-Walled Structures, Volume 63, 2013. P. 63–69. ISSN 0263-8231.
37. Real E., Arrayago I., Mirambell E., Westeel R. Comparative study of analytical expressions for the modelling of stainless steel behavior. Thin-Walled Structures, Volume 83, 2014. pp. 2–11, ISSN 0263-8231. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.01.026>.
38. Swift H.W. Plastic Instability under Plane Stress. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1952, Vol. 1, no. 1. pp. 1–18.
39. Marciniak Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych. Mech. teoretyczna i stosowana, 1966, Vol. 4, no. 3. pp. 209–220.
40. Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. Том 1: Под ред. Г.С. Шапиро. в 2-х томах. Москва: Иностранная литература, 1954. 647 с.
41. Колпак Е.П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. С.Петербург: СПбГУ, 2000. 248 с.
42. Considère A. Ann Ponts Chaussées, Vol 9, 1885. pp. 574–775.

43. Cooper W.E. The significance of the tensile test to pressure vessel design. *Weld J-Weld Res.*, 36, 1957. pp. 49–56.
44. Svensson N.L. The bursting pressure of cylindrical and spherical pressure vessels. *Trans ASME J. Appl. Mech.*, 1958, 80(3). pp. 89–96.
45. Rajan K.M., Deshpande P.U., Narasimhan K. Experimental studies on bursting pressure of thin-walled flow formed pressure vessels. *Journal of Materials Processing Technology*, Volumes 125–126, 2002. pp. 228–234. ISSN 0924-0136.
46. Zhu X.K., Leis B.N. Plastic collapse assessment method for unequal wall transition joints in transmission pipelines. *ASME. J. Pres. Ves. Technol.*, 2005, 127(4). pp. 449–456.
47. Zhu X.-K. Determination of pipeline yielding occurred in hydrostatic pressure testing. *Proceedings of the ASME 2019 Pressure Vessels & Piping Conference. Volume 6B: Materials and Fabrication. San Antonio, Texas, USA. July 14–19, 2019.*
48. Yu M.H., He L.N. TS2e4 – A new model and theory on yield and failure of materials under the complex stress state. *Proceedings of the Sixth International Conference, Kyoto, Japan, 29 July – 2 August 1991. Editor(s): J. Masahiro, I. Tatsuo, Mechanical Behaviour of Materials VI, Pergamon, 1992. pp. 841-846.*
49. Fan S.C., Yu M.H., Yang S. On the unification of yield criteria. *ASME Journal of Applied Mechanics*, March 2001; 68(2). pp. 341–343.
50. Wang L.Z., Zhang Y.Q. Plastic collapse analysis of thin-walled pipes based on unified yield criterion. *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 53, Issue 5, 2011. pp. 348–354. ISSN 0020-7403.
51. Yu M., Li J.C., Ma G.W. Yield Condition. In: *Structural Plasticity. Advanced Topics in Science and Technology in China. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-88152-0*
52. Stewart G., Klever F.J., Ritchie D. An analytical model to predict the burst capacity of pipelines. *Proceedings of the 13th International Conference of Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE'94), Vol. V, Pipeline Technology, 1994. pp. 177–188. ISBN 0-7918-1268-5.*

53. Zhu X.K., Leis B.N. Strength criteria and analytic predictions of failure pressure in line pipes. *International journal of offshore and polar engineering*, Vol. 14, No. 2, June 2004. ISSN 1053-5381.
54. Thankaiyan C., Sarma B.S.V., Potti P.K., Rao B., Sankarnarayanamy K. A comparative study on failure pressure estimations of unflawed cylindrical vessels. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 79(1), 2002. pp. 53–66.
55. Zhu X.K., Leis B.N. Evaluation of burst pressure prediction models for line pipes. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Volume 89, 2012. pp. 85–97. ISSN 0308-0161. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2011.09.007>
56. Черняев В.Д., Черняев К.В., Березин В.Л. и др. Системная надежность трубопроводного транспорта углеводородов. М.: Наука, 1997. 516 с.
57. Бородавкин П.П., Березин В.Л. Сооружение магистральных трубопроводов. М.: Недра, 1987. 471 с.
58. Моношков А.Н., Пыхов С.И., Пустин И.А. Пластическая устойчивость и ее роль в оценке прочности труб. Производство труб с покрытиями, отделка и контроль качества труб. М.: Металлургия, 1972. С. 77–81.
59. Куркин, С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением. М.: Машиностроение, 1976. 183 с.
60. Дильман В.Л., Остсемин А.А. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов. *Изв. РАН. Механика твердого тел*, 2000. № 5. С. 179–185.
61. Дильман, В.Л., Остсемин А.А. О потере пластической устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2002. № 5. С. 50–57.
62. Дегтярев В.П. Деформации и разрушение в высоконапряженных конструкциях. М.: Машиностроение, 1987. 105 с.
63. Ковальчук Б.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек. *Проблемы прочности*, 1983. №5. С. 11–16.
64. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
65. Спорыхин А.Н., Гоцев Д.В., Плотников Л.Г. Напряженное состояние толстостенных цилиндрических труб с учетом силы тяжести для материалов

- со сложной реологией. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, 11 (3-1), 2011. С. 110–115.
66. Hillier M.J. Tensile plastic instability of thin tubes–I. *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 7, Issue 8, 1965. pp. 531–538.
67. Updike D.P., Kalnins A. Tensile plastic instability of axisymmetric pressure vessels. *ASME. J. Pressure Vessel Technol*, 120(1), February 1998. pp. 6–11.
68. Писаренко Г.С., Агаев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С. Сопротивление материалов. Учебник: 4-е изд., перераб. и доп. Киев: Вища школа, 1979. 696 с.
69. Tomita Y., Shindo A., Nagai M. Axisymmetric deformation of circular elastic-plastic tubes under axial tension and internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 26, Issues 6–8, 1984. pp. 437–444, ISSN 0020-7403.
70. Распопов А.А., Гумеров К.М., Мельников А.В., Фридлянд Я.М. Об учёте особенностей пластического деформирования при расчёте предельных состояний тонкостенных оболочек давления. *Нефтегазовое дело*, т.14, №4, 2016. С. 158–161.
71. Moss D.R., Basic M. High pressure vessels. *Pressure vessel design manual*, 2013. pp. 473–556.
72. Middleton J., Owen D.R.J. Automated design optimization to minimize shearing stress in axisymmetric pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, Volume 44, Issue 3, 1977. pp.357–366, ISSN 0029-5493.
73. Błachut J. Minimum weight of internally pressurised domes subject to plastic load failure. *Thin-Walled Structures*, Volume 27, Issue 2, 1997. pp. 127–146, ISSN 0263-8231.
74. Zhu, L., Boyle J.T. Optimal shapes for axisymmetric pressure vessels: A Brief Overview. *ASME. J. Pressure Vessel Technol.* November 2000; 122(4). pp. 443–449. doi: <https://doi.org/10.1115/1.1308572>
75. Carbonari R.C., Muñoz-Rojas P.A., Andrade E.Q., Paulino G.H., Nishimoto K., Silva E.C.N. Design of pressure vessels using shape optimization: An integrated approach. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Volume 88, Issues

- 5–7, 2011. pp. Pages 198-212, ISSN 0308-0161. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2011.05.005>
76. Bony M., Alamilla J. L., Vai R., Flores E. Failure pressure in corroded pipelines based on equivalent solutions for undamaged pipe. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 2010; 132(5): 051001.
77. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В., Костишин С.О. Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. Вісник ТДТУ. Т.: ТДТУ, 2005, Том 10, № 1. С. 25–30. (Механіка та матеріалознавство).
78. Kozbur H., Shkodzinsky O., Kozbur I. Construction of a generalized hardening curve for isotropic plastic metal materials. Scientific Bulletin Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas. 2020. № 1 (48), pp. 38–46.
79. Kozbur G. V., Shkodzinsky O. K., Gladio O. Yu. Methods of construction of the generalized hardening curve. Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi. 2020. № 2 (61). pp. 78–85.
80. Шкодзінський О., Козбур Г. Метод узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. Матеріали V наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя (24–26 квітня 2001 р., м. Тернопіль). Т.: ТДТУ, 2001. С. 113.
81. Шкодзінський О., Козбур Г. Методика узагальнення діаграми деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. Матеріали VII наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя (22–24 квітня 2003 р., м. Тернопіль). Т.: ТДТУ, 2003. С. 113.
82. Шкодзінський О., Козбур Г., Костишин С. Аналіз властивостей ізотропних металевих матеріалів за умов великих пластичних деформацій при різних видах СНС. Матеріали VIII наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя (11–12 травня 2004 р., м. Тернопіль). Т.: ТДТУ, 2004. С. 5.
83. Шкодзінський О., Козбур Г. Міцність металевих сплавів при пластичному деформуванні в умовах складного напруженого стану. Матеріали VIII наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя (11–12 травня 2004 р., м. Тернопіль). Т.: ТДТУ, 2004. С. 98.



84. Шкодзінський О., Козбур Г., Костишин С. Знаходження єдиної узагальненої характеристики механічних властивостей ізотропного матеріалу. Матеріали ІХ наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя (12–13 травня 2005 р., м. Тернопіль). Т.: ТДТУ, 2005. С. 9.
85. Козбур Г., Гладь О. Валідація моделі єдиної кривої деформування для легованих сталей. Матеріали конференцій МЦНД, 10.04.20, Луцьк, 2020. С. 77–79.
86. Козбур Г. Знаходження параметра для отримання узагальненої кривої зміцнення для ізотропних пластичних металевих матеріалів. Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доп. VII Міжнар. наук.-практ. конф.: під заг. ред. М. Г. Сур'янінова. Одеса: ОДАБА, 2020. С. 159–162. ISBN 978-617-7900-05-3.
87. Козбур, Г., Шкодзінський, О. Валідація моделі узагальненої кривої деформування для конструкційних сталей. Математичні проблеми технічної механіки – 2020. Міжнародна Наукова Конференція, Дніпро, Україна. С. 45–47.
88. Козбур Г. В., Козбур І. Р. Валідація моделі узагальненої кривої зміцнення для вуглецевих сталей. II Міжнародна науково-технічна інтернет-конференція «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» 16 квітня 2020 року, Покровськ, Україна. С. 213–215.
89. Шкодзінський О. К., Козбур Г. В., Костишин С. О. Методика узагальнення діаграм деформування ізотропних матеріалів для складного напруженого стану. Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2005, 10 (1). С. 25–30.
90. Каминский А.А., Бастун В.Н. Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения. К.: Наук.думка, 1985. 168 с.
91. Авторське право на твір «Комп'ютерна програма «The modeling of stress-state-independent deformation curve». Міністерство розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України, свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 96585 від 10.03.2020.
92. Hollomon J.H. Tensile Deformation. Trans AIME, Vol. 32, 1945, pp. 268–290.

93. Fusfeld H.I. New interpretation of the n-power law in plastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 20(11), 1949. pp. 1052–1055.
94. Хван Д.В. Технологические испытания материалов. Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1992. 152 с., ISBN 5-7455-0671-7.
95. Огородников В.А., Киселев В.Б., Сивак И.О. Энергия. Деформации. Разрушение (задачи автотехнической экспертизы): монография. Винница: Универсум–Винница, 2005. С. 176–183, ISBN 966-641-117-2.
96. Shin T., Hiroshi Y., Naoyuki K. Measurement of strain hardening exponent  $n$ -value by additional rolling strain for aluminum alloy sheets. *Journal of Japan Institute of Light Metals*, 59(4), 2009. pp. 195-200, online: ISSN 1880-8018, print: ISSN 0451-5994.
97. Грушко А.В. Определение кривой течения материала по стандартным механическим характеристикам. *Вісник НТУУ «КПІ», Машинобудування: збірник наукових праць*, № 60, 2010. С. 223–227.
98. Matusevich A., Massa J., Mancini R. Computation of tensile strain-hardening exponents through the power-law relationship. *Journal of testing and evaluation*, 40(4), 2012. pp. 521–530.
99. Dong J., Li F., Wang Ch. Micromechanical behavior study of  $\alpha$  phase with different morphologies of Ti–6Al–4V alloy by microindentation. *Materials Science and Engineering: A*, Volume 580, 2013. pp. 105-113, ISSN 0921-5093.
100. Kowser M.A., Mahiuddin Md. Determination of constant parameters of copper as power-law hardening material at different test conditions, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 19(4), 2014. pp. 687-698.
101. Головина Н.Я., Белов П.А. Модель кривой нелинейного деформирования стали 20ХГР и стали 35. *Проблемы прочности и пластичности*, 82(3), 2020. С. 305–316.
102. Raymond K.N., Nana K.A., Fang Y.Z. Using the Hollomon model to predict strain-hardening in metals. *American Journal of Materials Synthesis and Processing*. Vol. 2, No. 1, 2017. pp. 1-4.
103. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В. Методика дослідження стійкості процесу пластичного деформування ізотропних матеріалів для плоского

- напруженого стану. Вісник Тернопільського державного технічного університету, № 12 (4), 2007. С. 26–31.
104. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В. Дослідження стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної трубки в умовах складного напруженого стану. Вісник Тернопільського державного технічного університету, № 14 (3) (механіка та матеріалознавство), 2009. С. 24–31.
105. Козбур Г.В. Пружно-пластичне деформування вісесиметричної оболонки під впливом внутрішнього тиску і розтягу. Наукові нотатки. Луцьк, 2016. Вип. 53. С. 79–83.
106. Kozbur H. Prediction technique for thin-walled cylindrical tubes boundary state. Scientific Journal of TNTU (Mathematical modeling. mathematics), № 94 (2), 2019. pp. 145–155, ISSN 2522-4433.
107. Козбур Г.В., Шкодзінський О.К. Осесиметричні пластичні деформації тонкостінного циліндра. Наукові нотатки, № 68. Луцьк, 2019. С. 41–49, ISSN: 2415-3966. doi: <https://doi.org/10.36910/6775.24153966.2019.68.6>
108. Kozbur H., Shkodzinsky O., Kozbur I., Gashchyn N. Prediction of the boundary states for thin-walled axisymmetric shells under internal pressure and tension loads. Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering. 2019. № 70 (1). pp. 57–68, ISSN: 0039-2472 (print) ISSN: 2450-5471 (online). doi: <https://doi.org/10.2478/scjme-2020-0006>
109. Шкодзінський О., Козбур Г. Моделювання граничного стану трубчатих зразків в умовах навантаження внутрішнім тиском  $p$  та осьовим зусиллям  $N$ . Матеріали XII наукової конференції ТДТУ ім. І. Пулюя (Математичне моделювання і механіка), 14–15 травня 2008 року. Т.: ТДТУ, 2008, С. 17.
110. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В. Вплив виду напруженого стану на міцність сталевих трубчастих зразків тиском. Матеріали Всеукраїнської наукової конференції Тернопільського державного технічного університету ім. І. Пулюя, 13–14 травня 2009 року. Тернопіль: ТДТУ, 2009. С. 5.
111. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В. Умова втрати стійкості процесу пластичного деформування тонкостінної циліндричної трубки в умовах СНС. Матеріали міжнародної конференції «Сучасні проблеми механіки», ЛьвівНУ ім. І. Франка, 7–9 грудня 2009 р. С. 90–91.

112. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В. Пластичне деформування тонкостінної циліндричної трубки, навантаженої осьовим розтягуючим зусиллям та внутрішнім тиском. Матеріали міжнародної науково-технічної конференції ТНТУ «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій», 19–21 травня 2010 р. С. 113.
113. Шкодзінський О.К., Козбур Г.В. Пластичне деформування осесиметричної оболонки, навантаженої внутрішнім тиском  $q$  та розтягуючим зусиллям  $N$ . Збірник тез доповідей XIV наукової конференції Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя «Природничі науки та інформаційні технології», 27–28 жовтня 2010 року. Т.: ТНТУ, 2010. Том 1: Математичне моделювання і механіка. С. 11.
114. Козбур Г.В., Шкодзінський О.К. Умови міцності осесиметричної оболонки, навантаженої розтягуючим зусиллям  $N$  та внутрішнім тиском  $q$ . Збірник тез доповідей XVI наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, 5–6 грудня 2012 року. Т.: ТНТУ, 2012. Том I: Природничі науки та інформаційні технології (Математичне моделювання і механіка). С. 8.
115. Козбур Г.В., Шкодзінський О.К., Данилишин Г.М. Пружно-пластичне деформування осесиметричної оболонки під впливом внутрішнього тиску газу і розтягуючого зусилля. Матеріали XIX наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, 18–19 травня 2016 року. Т.: ТНТУ, 2016. С. 146. (Матеріалознавство, міцність матеріалів і конструкцій, будівництво).
116. Козбур Г.В., Шкодзінський О.К. Вплив опуклості тонкостінної осесиметричної оболонки на її міцнісні характеристики. Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» до 100 річчя з дня заснування НАН України та на вшанування пам'яті Івана Пулюя (100 річчя з дня смерті), 22–24 травня 2018. Т.: ТНТУ, 2018. С. 56 (Нові матеріали, міцність і довговічність елементів конструкцій).
117. Козбур Г.В., Шкодзінський О.К. Розрахунок сталих інтегрування для умов втрати стійкості пружно-пластичного деформування тонкостінних осесиметричних оболонок в умовах СНС. Матеріали XXI наукової

- конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, 16–17 травня 2019 року. Т.: ТНТУ, 2019. С. 5–6 (Математичне моделювання та механіка).
118. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Машиностроение, 1974. Т.2. 368 с.
119. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Учебник. Перевод с английского Э.И. Григолюка. Москва: Гостехиздат, 1956. 408 с.
120. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
121. Дегтярѐв В. П. Некоторые методические вопросы исследования критериев разрушения при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 187–191.
122. Дель Г.Д. Технологическая механика. – М.: Машиностроение, 1978. 174 с.
123. Гігіняк Ф.Ф., Лебедев А.О., Шкодзінський О.К. Міцність конструкційних матеріалів при малоцикловому навантаженні за умов складного напруженого стану.: Монографія. К.: Наукова думка, 2003. 270 с.
124. Yoshida K., Kuwabara T. Effect of strain hardening behavior on forming limit stresses of steel tube subjected to nonproportional loading paths. International Journal of Plasticity, Volume 23, Issue 7, 2007. pp. 1260–1284.
125. Kuwabara T. Advances in experiments on metal sheets and tubes in support of constitutive modeling and forming simulations. International Journal of Plasticity, Volume 23, Issue 3, 2007. pp. 385-419.
126. Гигиняк Ф. Ф., Шкодзинский О. К., Лебедев А. А., Тимофеев Б. Т. О потере устойчивости процесса пластического деформирования при сложном напряженном состоянии. Проблемы прочности, №10, 1991. С. 3–8.
127. Гигиняк Ф.Ф., Шкодзинский О.К., Лебедев А.А., Тимофеев Б.Т. Характеристики вязкопластичности теплоустойчивых сталей в условиях сложного напряженного состояния. Проблемы прочности, №11, 1991. С. 52–57.
128. Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. CRC Press, Taylor and Francis. 2007. 568 p.

129. Дильман В.Л. Численный анализ критического давления в тонкостенной цилиндрической оболочке, содержащей мягкую прослойку. Вестник ЮУрГУ, 17(234), 2011. С. 29–35.
130. Гормахов М.М. Деформації в дослідях з навантаженням трубчастих зразків внутрішнім тиском. Матеріали XX міжнародної науково-технічної конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла), 2019. С. 26–29.
131. Kozbur H. Method of predicting necking true stress in a thin-walled tube under a complex stress state. *Strojnícky časopis - Journal of Mechanical Engineering*. 2020. № 70 (2). ISSN: 0039-2472 (print), ISSN: 2450-5471 (online). pp. 101-116. doi: <https://doi.org/10.2478/scjme-2020-0024>
132. Jones B.H., Mellor, P.B. Plastic flow and instability behaviour of thin-walled cylinders subjected to constant-ratio tensile stress. *Journal of Strain Analysis*, 2(1), 1967. pp. 62–72.
133. Lankford W.D., Saibel E. Some problems in unstable plastic flow under biaxial tension. *Metals Technol.*, 1947. pp. 22–38.
134. Law M. Use of the cylindrical instability stress for blunt metal loss defects in linepipe. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Volume 82, Issue 12, 2005. pp. 925–928.
135. Zhu X., Leis B.N. Theoretical and numerical predictions of burst pressure of pipelines. *ASME. J. Pressure Vessel Technol.* November 2007. № 129 (4). pp. 644–652. doi: <https://doi.org/10.1115/1.2767352>
136. Halyna Kozbur; Oleh Shkodzinsky; Lesia Dmytrotsa. Numerical prediction of the strength of a thin-walled pipe loaded with internal pressure and axial tension, taking into account its actual dimensions. *Scientific Journal of TNTU*. 2020. № 100 (4). P.11–19.