Др. Володимир Левицький.

До теорії інтеґральних рівнань.

(Dr. Wladimir Lewyćkyj: Zur Theorie der Integralgleichungen).

1. a. Возьмім під увагу рівнання Фредгольма другого рода:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

і заложім, що ядро $K(xs)$ є лиш функцією змінної x, т. є. $K(xs) = K(x)$, однозначною і тяглою в інтервалі інтеґрованя, а $f(x) = \mu K(x)$, де μ є постійний параметер. Обмежимо ся притім на дійсну царину. Тоді є:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x)\,\varphi(s)\,ds = \mu K(x). \qquad 1)$$

Щоби найти розвязку сього рівнання, напишім 1) в виді:

$$\varphi(x) + \lambda K(x) \int_a^b \varphi(s)\,ds = \mu K(x)$$

або:

$$\varphi(x) + \lambda C K(x) = \mu K(x), \qquad 2)$$

де:

$$C = \int_a^b \varphi(s)\,ds.$$

Щоби найти постійне C, з'інтеґруймо рівнання 2) зглядом x в границях $(a\,..\,b)$; тоді з огляду на се, що:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = C$$

дістанемо:

$$C+\lambda C\int_a^b K(x)\,dx=\mu\int_a^b K(x)\,dx,$$

а звідси дістанемо вартість постійного:

$$C=\frac{\mu\int_a^b K(x)\,dx}{1+\lambda\int_a^b K(x)\,dx} \qquad 3)$$

В сей спосіб C є точно означене — коли вид функції $K(x)$ є звісний. В виду сього:

$$\varphi(x)=(\mu-\lambda C)K(x)=m\,K(x) \qquad 4)$$

Розвязкою інтеґрального рівнання 1) є отже само ядро, помножене постійним числом.

б. Коли рівнання 1) напишемо при помочи розвязуючого ядра $\mathfrak{R}(x)$, то після звісної теорії буде:

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\int_a^b \mathfrak{R}(x)\,f(s)\,ds,$$

отже в нашім случаю:

$$m\,K(x)=\mu\,K(x)-\lambda\,\mathfrak{R}(x)\int_a^b f(s)\,ds,$$

а що:

$$\int_a^b f(s)\,ds=\mu\int_a^b K(s)\,ds,$$

то дістанемо:

$$\mathfrak{R}(x)=\frac{\mu-m}{\mu\lambda}\,\frac{K(x)}{\int_a^b K(s)\,ds}=n\,K(x),$$

значить: розвязуюче ядро є також рівне ядру рівнання 1), помноженому постійним числом.

2. Як примір возьмім случай, що

$$K(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \qquad 5)$$

отже є рівне лінійній субституції, причім:

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1,$$

а границі інтеґрованя a, b не є рівні $-\frac{\delta}{\gamma}$. Тоді дістанемо рівнання :

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \varphi(s)\, ds = \mu \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad 6)$$

або:

$$\varphi(x) + \lambda \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \int_a^b \varphi(s)\, ds = \mu \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

т. є.

$$\varphi(x) + \lambda\, C \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \mu \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Після 3) є:

$$C = \frac{\mu \int_a^b \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\, dx}{1 + \lambda \int_a^b \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\, dx}.$$

Інтеґрал:

$$J = \int_a^b \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\, dx$$

дає:

$$J = \frac{\alpha}{\gamma} \int_a^b \frac{x + \frac{\beta}{\alpha}}{x + \frac{\delta}{\gamma}}\, dx = \frac{\alpha}{\gamma} \int_a^b \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma} \right) \frac{1}{x + \frac{\delta}{\gamma}} \right] dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} \int_a^b \left[1 - \frac{1}{\alpha\gamma} \frac{1}{x + \frac{\delta}{\gamma}} \right] dx - \frac{\alpha}{\gamma}(b - a) - \frac{1}{\gamma^2} \log \frac{b\gamma + \delta}{a\gamma + \delta}. \qquad 7)$$

Так як ми обмежаємо ся лиш на царину дійсних чисел, то беремо лиш головну вартість льоґаритма. В зложеній царині дорогу інтеґрованя $(a..b)$ треба заступати якоюсь кривою L, що іде через a і b і не переходить через точку O; тоді льоґаритм дістає додаток $\pm 2\nu\pi i$, отже постійне C, а тим самим і сама функція $\varphi(x)$ стає многозначна і залежить від довільного параметра ν.

В виду 7) дістанемо тепер:

$$C = \frac{\mu(ac\gamma - d)}{\gamma^2 + \lambda(ac\gamma - d)} \qquad 8)$$

де:

$$c = (b - a), \qquad d = \log \frac{b\gamma + \delta}{a\gamma + \delta}.$$

Тепер розвязкою рівнання 6) буде функція:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}(\mu - \lambda C) = h\,\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad 9)$$

т. є. також лінійна субституція, якої визначник має вартість h.

Коли доберемо параметри λ і μ так, щоби:

$$\gamma^2(\mu - 1) = \lambda(ac\gamma - d),$$

тоді:

$$h = \mu - \lambda C = 1,$$

а в тім случаю розвязкою рівнання 6) є найпростійша лінійна субституція (о визначнику 1).

3. До сього висліду можна дійти ще і в иньший спосіб. З рівнання 2) утворім першу, другу і трету похідну, то:

$$\varphi'(x) = (\mu - \lambda C)\,K'(x)$$
$$\varphi''(x) = (\mu - \lambda C)\,K''(x)$$
$$\varphi'''(x) = (\mu - \lambda C)\,K'''(x).$$

Звідси:

$$\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} = \frac{K'''(x)}{K'(x)},$$

або з огляду на се, що $K(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$

$$\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} = \frac{6\gamma^2}{(\gamma x + \delta)^2};$$

так само:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{2\gamma}{\gamma x + \delta}.$$

Утворім тепер шварціян функції $\varphi(x)$, т. є.

$$\left\{\varphi(x), x\right\} = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right)^2$$

то дістанемо:

$$\left\{ \varphi(x),\ x \right\} = 0, \qquad 10)$$

а се доказує, що $\varphi(x)$ є взагалі рівне лінійній субституції $h\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, яка є розвязкою рівнання 10).

Львів, в маю 1919.

INHALT. Eine Integralgleichung von der Form:

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x)\,\varphi(s)\,ds = \mu\,K(x)$$

wo der Kern $K(x)$ eine stetige, eindeutige Funktion im Intervalle $(a..b)$ im reellen Gebiete der Veränderlichen darstellt, hat als Lösung den Kern $K(x)$ selbst, multipliziert mit einer Konstanten. Dann ist auch der Kern $\mathfrak{K}(x)$ der resolvierenden Glg:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\int_a^b \mathfrak{K}(x)\,f(s)\,ds.$$

dem Kern $K(x)$ — multipliziert mit einer Konstanten — gleich. Als Beispiel nimmt der Verfasser den Kern $K(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (lineare Substitution); die Richtigkeit der Lösung ist auch aus der Schwarz'schen Ableitung der obigen Integralgleichung ersichtlich.