Никифор Садовський
(Тернопіль).

Елїзийна функція.

Nikefor Sadowśkyj
(Ternopil).

Über die Elisionsfunktion.

У висшій аналїзї часто стрічаємо два ріжничкові рівнаня, іменно $y'=y$, яке дефінїює функцію e^x, і рівнанє четвертого ряду $y^{IV}=y$, якого частинною розвязкою є $sin x$ або $cos x$. В отсїй розвідці ставимо собі за задачу, розслїдити ріжничкове рівнанє типу

$$y^{(n)} = y,$$

до якого належать і два висше наведені рівнаня.

Нехай розвязкою рівнаня буде степенний ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots; \tag{1}$$

його похідні є:

$$y' = 1.a_1 + 2.a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots,$$
$$y'' = 1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + 3.4 a_4 x^2 + \ldots,$$
$$y''' = 1.2.3 a_3 + 2.3.4 a_4 x + 3.4.5 a_5 x^2 + \ldots;$$

загально n-та похідна має вид:

$$y^{(n)} = 1.2.3 \ldots n a_n + 2.3.4 \ldots (n+1) a_{n+1} x + 3.4 \ldots (n+2) a_{n+2} x^2 + \ldots, \tag{2}$$

а її можна й так написати:

$$y^{(n)} = n!\, a_n + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} x + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} x^2 + \ldots \tag{3}$$

Із порівнаня співчинників степенних рядів (3) і (2) на основі рівнаня (1) дістаємо ряд рівностий

$$n!\, a_n = a_0,$$

$$\frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} = a_1,$$

$$\frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} = a_2,$$

$$\vdots$$

загально

$$\frac{(n+\lambda)!}{\lambda!} a_{n+\lambda} = a_\lambda,$$

або

$$a_{n+\lambda} = a_\lambda \frac{\lambda!}{(n+\lambda)!} \quad \text{для } \lambda = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Взорець (4) позволяє нам усі співчинники ряду (2) виразити першими n співчинниками, іменно $a_0, a_1, a_2, \dots a_{n+1}$:

$$\left.\begin{array}{lll}
a_0 = a_0, & a_n = a_0 \dfrac{1}{n!}, & a_{2n} = a_n \dfrac{n!}{(2n)!} = a_0 \dfrac{1}{2n!}, \dots \\
a_1 = a_1, & a_{n+1} = a_1 \dfrac{1!}{(n+1)!}, & a_{2n+1} = a_{n+1} \dfrac{(n+1)!}{(2n+1)!} = a_1 \cdot \dfrac{1!}{(2n+1)!}, \dots \\
a_2 = a_2, & a_{n+2} = a_2 \dfrac{2!}{(n+2)!}, & \\
 & & \\
a_{n-1} = a_{n-1}, & a_{2n-1} = a_{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(2n-1)!}, & a_{3n-1} = a_{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(3n-1)!}, \dots
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Ряд (1) приймає вид

$$\left.\begin{array}{l}
y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots\dots\dots + a_{n-1} x^{n-1} + \\
\quad + a_0 \dfrac{x^n}{n!} + a_1\, 1! \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + a_2\, 2! \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + a_{n-1} (n-1)! \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\
\quad + a_0 \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1\, 1! \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots
\end{array}\right\} \tag{6}$$

З огляду на те, що першу стрічку (6) можна і так написати:

$$a_0 + a_1\, 1! \frac{x}{1!} + a_2\, 2! \frac{x^2}{2!} + a_3\, 3! \frac{x^3}{3!} + \dots + a_{n-1} (n-1)! \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

дістаємо на y виражене

$$y = a_0 + a_1\, 1!\frac{x}{1!} + a_2\, 2!\frac{x}{2!} \qquad + \ldots\ldots + a_{n-1}(n-1)!\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ a_0\frac{x^n}{n!} + a_1\, 1!\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + a_2\, 2!\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + a_{n-1}(n-1)!\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ a_0\frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1\, 1!\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + a_2 2!\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots + a_{n-1}(n-1)!\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} +$$

$$+$$

Нехай буде максімум $a_\lambda . \lambda ! = k$, тоді

$$y < k e^x.$$

Значить, ряд на y є безупинно і безумовно збіжний, його члени можна лучити в довільні ґрупи; зберім члени з рівними співчинниками $a_\lambda . \lambda !$, тоді y буде представлене при помочи n рядів

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$+ a_1 1!\left[\frac{x}{1!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \ldots\ldots\right]$$

$$+ a_2 2!\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] \qquad (7)$$

$$+ a_{n-1}(n-1)!\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \ldots\right]$$

Розумієть ся, що кождий із тих n рядів є безумовно й безупинно збіжний.

Возьмім перший із них під увагу:

$$1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \ldots \qquad (8)$$

Його будемо називати **елїзийною функцією n-того ряду** і означимо коротко

$$M_{n,1}(x)$$

Ріжничкуймо ту елізийну функцію n разів; показуєть ся: 1) що її похідні є як раз рядами при співчинниках

$$a_0,\ a_{n-1}\ (n-1)!,\ a_{n-2}\ (n-2)!, \ldots\ a_2\ 2!,\ a_1\ 1!$$

функції y, і 2) що n-та похідна кождого з тих рядів дає з поворотом той сам ряд.

З огляду на те, що похідні функції $M_{n,1}$ є знову рядами з пропущеними членами, будемо їх називати також **е л ї з и й н и м и ф у н к ц і я м и** і означуємо

$$M'_{n,1} = M_{n,2},$$

$$M''_{n,1} = M_{n,3},$$

$$M^{n-1}_{n,1} = M_{n,n},$$

Кожда з них сповнює ріжничкове рівнанє

$$y^{(n)} = y.$$

Співчинники a_0, $a_1 1! \ldots a_{n-1} (n-1)!$ є довільними постійними величинами; назвім їх по черзї $C_1\ C_2\ C_3 \ldots C_n$, тоді загальна розвязка рівнаня

$$y^{(n)} = y$$

представляєть ся у виді:

$$y = C_1 M_{n,1} + C_2 M_{n,2} + \ldots + C_n M_{n,n}$$

або коротше

$$y = \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda M_{n,\lambda} \tag{9}$$

На нашу думку та форма розвязки є догіднїйша чим форма, яку дає нам підставленє

$$y = e^{kx},$$

яке приводить нас до розвязки рівнаня $k^n = 1$.

П р и м і н е н е:

$$n = 4 \qquad\qquad y^{IV} = y$$

$$M_{4,1} = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \ldots$$

1) Для $C_1 = C_2 = C_3 = C_4$

$$y = Ce^x$$

2) Для $C_1 = -C_2 = C_3 = -C_4$

$$y = Ce^{-x}$$

3) Для $C_1 = C_3 = 0 \qquad C_4 = -C_2$

$$y = C \sin x$$

4) Для $C_2 = C_4 = 0 \qquad C_1 = -C_3$

$$y = C \cos x$$

$$\cos x = M_{4,1} - M_{4,3}$$

$$\sin x = M_{4,4} - M_{4,2}$$

Назвім елїзийну функцію $M_{n,1}$ функцією n-того ряду; з огляду на те, що функція висшого ряду p дасть ся при відповіднім доборі постійних величин завсїди зложити з функцій низшого ряду n, наскільки n є подільне числом p, рівнане висшого ряду n має в собі розвязки рівнаня ряду p:

$y' = y \qquad y = Ce^x$

$y'' = y \qquad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$y''' = y$ — 3 не є подільне через 2, лише через 1, значить e^x є розвязкою рівнаня, але e^{-x} уже нї.

$y^{IV} = y \qquad 4 = 2 . 2 = 4 . 1$

отже розвязками є e^x, e^{-x} а понад те n дві нові: $\sin x$ і $\cos x$.

Ріжничкові рівнаня, яких ряд є число перве, вводять нові функції, які при доборі довільних постійних не дадуть ніякої розвязки рівнаня низшого ряду з виїмком першого.

Функції відворотні до елїзийних.

Ріжничкові рівнаня для функцій відворотних до елїзийних не є вже такі прості, як для самих елїзийних функцій. Можна про се переконати ся на примірі

$$y' = y.$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1, \tag{10}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{y},$$

$$y\frac{dx}{dy} - 1 = 0. \tag{11}$$

$$y'' = y.$$

Ріжничкуємо (10) і дістаємо

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dy^2} = 0;$$

коли підставимо в нїм $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ і $y'' = y$, одержимо рівнанє відворотне другого ряду

$$\frac{d^2x}{dy^2} + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0. \tag{12}$$

Анальоґічно для $y''' = y$
дістаємо рівнанє:

$$\frac{d^3x}{dy^3}\,\frac{dx}{dy} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^5 = 0. \tag{13}$$

Для $y^{IV} = y$ є

$$\frac{d^4x}{dy^4}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 10\frac{d^3x}{dy^3}\,\frac{d^2x}{dy^2}\,\frac{dx}{dy} + 15\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^3 + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^7 = 0. \tag{14}$$

Бачимо, що рівнаня вже від третого ряду є дуже скомплїковані.

Подаємо розвязку двох перших:

$$y\frac{dx}{dy} - 1 = 0$$

$$dx = \frac{dy}{y}$$

$$x = C\log y. \tag{14}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$$

Назначім $\frac{dx}{dy} = p$; тоді рівнанє переходить на рівнанє першого ряду

$$p' + yp^3 = 0$$

$$\frac{dp}{p^3} = - y dy,$$

а звідси

$$p = \pm \frac{1}{y}$$

Дальше $dx = \pm \frac{dy}{y}$

$$x = \pm \log y$$

Загальна розвязка є $x = C_1 \log y + C_2 \log \frac{1}{y}$ (15)

З огляду на те, що C_2 є довільною постійною величиною і що

$$\log \frac{1}{y} = - \log y,$$

бачимо, що се лише замаскована загальна розвязка, бо в тій другій формі дістаємо

$$x = (C_1 - C_2) \log y$$

або коротше

$$x = C \log y.$$

Ясне, що те саме явище виступить і у висших ріжничко вих рівнанях відворотних до типу

$$y^{(n)} = y.$$

Примірoм рівнанє четвертого ряду має розвязки відворотні, бо

e^x і e^{-x}; $\cos x$ і $\sin x$

значить

до $\log y$ і $\log \frac{1}{y}$ є відворотні: $\arccos y$ і $\arcsin y$;

притім знову обі пари дають лише одну розвязку з огляду на рівности

$$C_1 \log y + C_2 \log \frac{1}{y} = A \log y$$

$$C_3 \arccos y + C_4 \arcsin y = B \arcsin y.$$

Отже розвязка буде знову неповна.

Можна би ще розслідити аналітично функції відворотні до елїзийних і побачити, чи вони не дадуть загальної розвязки відворотних ріжничкових рівнань. Наразі те одно є певне, що з функцій відвернених супроти розвязок, які нам дають підставлене

$$y = e^{kx}$$

неможливо зложити загальної розвязки для ріжничкових рівнань почавши від другого ряду.

Тара, 28 жовтня 1917.

INHALT.

Es wird die allgemeinste Auflösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = y$$

untersucht; Verf. bildet und differenziert n mal die der Funktion y entsprechende Potenzreihe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots ;$$

sodann vergleicht er die Koeffizienten der Ableitungen und findet dafür die Bedingung, daß y die Differentialgleichung befriedigt:

$$(n+\lambda)!\, a_{n+\lambda} = \lambda !\, a_\lambda .$$

Den auf diese Weise reduzierten Koeffizienten von a_0:

$$1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \ldots .$$

nennt Verf. die *Elisionsfunktion n-ter Ordnung* und bezeichnet sie $M_{n,1}$.

Da ergibt sich leicht, daß sich die sämtlichen Koeffizienten von $a_{n-1}\,(n-1)!$, $a_{n-2}\,(n-2)!, \ldots, a_2\, 2!$, $a_1\, 1!$ in der Gesammtheit der n ersten Ableitungen von $M_{n,1}$ reproduzieren, somit also die allgemeinste Auflösung der gegebenen Differentialgleichung die Form

$$y = \sum_{\lambda=1} C_\lambda M_{n,\lambda} \quad \text{(alle } C_\lambda \text{ beliebig, konstant)}$$

annimmt.

Als Anwendung wird der Fall $n=4$ dargestellt.

Ist n durch p $(< n)$ teilbar, dann lassen sich die Konstanten C so bestimmen, daß M_{n1} aus den Funktionen $M_{p,1}$ zusammengesetzt werden kann; falls also n eine Primzahl ist, bekommt man neue Funktionen, die aus Auflösungen von Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung sich nicht zusammenstellen lassen.

Als Umkehrungen von Elisionsfunktionen ergeben sich Funktionen, deren Differentialgleichungen sehr kompliziert sind, für $y^{IV} = y$:

$$\frac{d^4x}{dy^4}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 10\frac{d^3x}{dy^3}\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dx}{dy} + 15\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^3 + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^7 = 0.$$

Mann könnte noch diese Umkehrungsfunktionen analytisch umkehren, um festzustellen, ob sie auch allgemeine Auflösungen der betr. Differentialgleichungen ergeben. Vorläufig ist es nur sicher, daß aus Umkehrung der Funktionen, die sich als Auflösung von $y = e^{kx}$ ergeben, sich die allgemeine Auflösung für Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung an nicht zusammensetzen läßt.