Никифор Садовський
(Тернопіль).

До теорії аналїтичних функцій двох незалежних змінних.

Nikefor Sadowškyj
(Ternopil).

Zur Theorie der analytischen Funktionen von zwei unabhängigen Variablen.

В теорії аналїтичних функцій одної змінної маємо два правила будови аналїтичних функцій зі з гори даними зерами або бігунами. Перше подав Ваєрштрасс для функцій цїлих, друге походить від Міттаґ-Леффлєра для функцій мероморфних.

В нинїшній розвідцї подаю конструкцію кількох інтересних функцій двох незалежних змінних, на яких покажу, що теорема Ваєрштрасса дасть ся примінити і в теорії аналїтичних функцій двох змінних.

I.

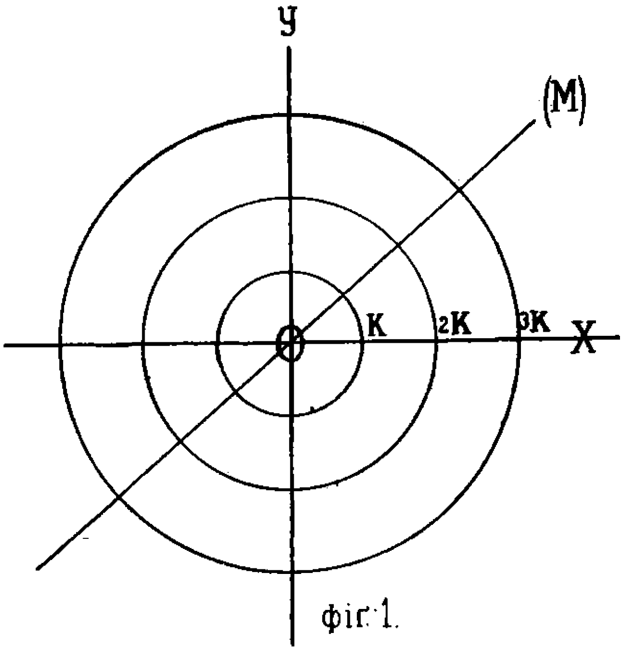
Як першу задачу ставляю собі: Збудувати аналїтичну функцію, яка має представити филю, що розходить ся на водї під впливом точки, коли вона дрожить прямовісно. В природї натрафляємо на такі филї, приміром викликує її камінь, кинений на воду.

З геометричної сторони буде се поверхня филяста $z = f(x, y)$. Вартости на z будуть всї замкнені поміж двома площами $z = \pm A$, де A є амплїтудою дрожачого руху. Для простоти рахунку кладу дрожачу точку в початок співрядних, вісь $+z$ прямовісно в гору, оси x і y поземі. Довільна площа

$(M) y - tg\alpha . x = 0$ перетинає поверхню $z = f(x, y)$ здовж кривої, яка є сінусоідою. З огляду на те, що її вид не зависить від кута α, поверхня $z = f(x, y)$ є оборотовою поверхнею Її можна представити формулою:

$$z = \sin x . \cos a \qquad \text{для } x \geqq 0 \qquad (1)$$

(Спосіб означеня гл. Николай Морозовъ, Функція, Кіевъ 1912). Однак ми постараємо ся виразити сю поверхню аналітично, будуючи її на основі її зер. Як видко з фігури, ся поверхня перетинає площу (xy) в колах о лучах k, $2k$, $3k \ldots$ загально λk.



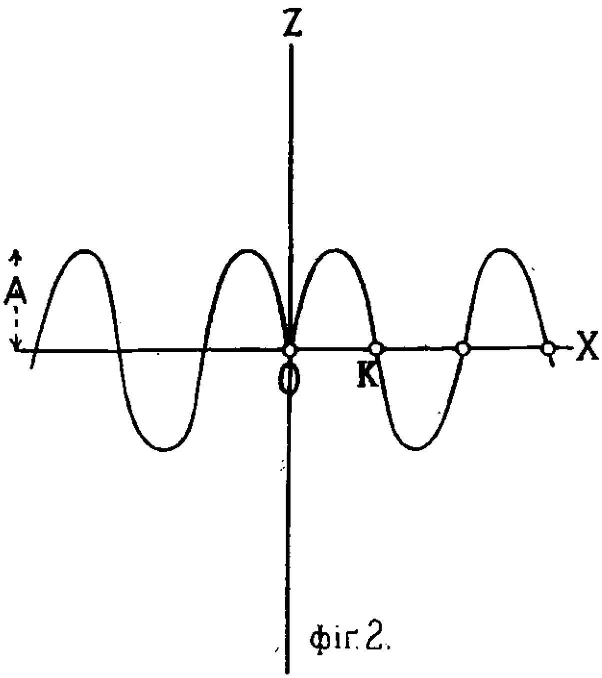
фіг. 1.

Функція з зером в точці $(0, 0)$ має вид $z^2 = x^2 + y^2$
Функція з зерами на колі $x^2 + y^2 = k^2$

$$P_1(x, y) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{k^2}$$

Функція з зерами на колі $x^2 + y^2 = (2k)^2$

$$P_2(x, y) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{(2k)^2}$$



фіг. 2.

Для кола

$$x^2+y^2=(\lambda k)^2$$

дістанемо функцію

$$P_\lambda(x,y)=1-\frac{x^2+y^2}{\lambda^2 k^2} \qquad \lambda=1,2,3\ldots$$

Функція, яка буде мати рівночасно зера на обводі всіх кіл $x^2+y^2=(\lambda k)^2$, буде добутком

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(x,y)=\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2+y^2}{\lambda^2 k^2}\right) \tag{2}$$

Сей добуток є збіжний рівночасно зі сумою

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{x^2+y^2}{\lambda^2 k^2}=\frac{x^2+y^2}{k^2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}$$

а ся остання сума є збіжна для всіх (xy).

Возьмім приміром точку в перстени $4k < r < 5k$, тоді

$$16k^2 < x^2+y^2 < 25k^2.$$

Добуток $\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(xy)$ ділю тоді на два добутки частинні: $\prod_{\lambda=1}^{5} P_\lambda(xy)$, який, як функція вимірна, ціла, є збіжний на цілій площі, і на добуток $\prod_{\lambda=6}^{\infty} P_\lambda(xy)$, для якого

$$x^2+y^2 < (\lambda k)^2 \text{ при } \lambda > 5$$

буде також збіжний, і то абсолютно. З сего розважаня бачимо, що добуток $\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(xy)$ є безупинно збіжний.

Квот
$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2+y^2}{\lambda^2k^2}\right)}$$

є вже функцією, яка на цілій площі (xy) немає ніде зера, а таку прикмету має функція ціла

$$e^{H(x,y)}, \text{ евент. } const;$$

притім $H(x\,y)$ зовсім довільна, отже можна зажадати, щоби вона мала вид $H(x^2+y^2)$.

В результаті

$$z = e^{H(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2+y^2}{\lambda^2k^2}\right) \tag{3}$$

Возьмім довільне коло із лучом $x^2+y^2=R^2$ у довільнім перстені, тоді

$$z = e^{H(R^2)}R.\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{R^2}{\lambda^2k^2}\right) \tag{4}$$

Коли порівнаємо ту формулу зі знаною з теорії Ваєрштрасса

$$sin \pi x = \pi x\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right), \tag{5}$$

побачимо, що вистане покласти $x=\frac{R}{k}$, щоби вона перейшла на

$$sin\frac{\pi R}{k} = \frac{\pi}{k}R\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{R^2}{\lambda^2k^2}\right)$$

із співчинником

$$e^{H(R^2)\frac{k}{\pi}}.$$

Тепер постараємо ся вишукати функцію $H(R^2)$. У тій цїли кладемо $y=o$ і бачимо, що функція z переходить на простїщу.

$$z=e^{H(x^2)\cdot\frac{k}{\pi}}\sin\frac{\pi x}{k}, \tag{6}$$

про яку знаємо, що співчинник $H(x^2)$ є постійний, значить, не залежить від x (але $H(x,y)$ ще може залежати від y).

Тому кладемо на відміну у функції

$z=f(x,y)$ $\qquad x=o$ і дістаємо

$$z=e^{H(y^2)\cdot\frac{k}{\pi}}\sin\frac{\pi y}{k}.$$

Тут знову переконуємо ся, що співчинник $H(y^2)$ є постійний, значить $H(x,y)=const.$, а тим самим

$$e^{H(xy)\frac{k}{\pi}}=const.$$

Назвім його коротко A (гляди фіг. 2), тоді

$$z=A\,\frac{\pi}{k}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2+y^2}{\lambda^2k^2}\right) \tag{7}$$

є вже розвязкою даного проблєму.

Дальші розслїди над сею функцією редукують ся до функції

$$z=\frac{A\pi}{k}R\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{R^2}{\lambda^2k^2}\right).$$

Бачимо що вона є функцією яуча R, а тим самим поверхня є оборотова з огляду на вісь z; дальше бачимо, що вартости функції z осцілюють поміж $+A$ і $-A$ (амплїтуда дрожа́ня).

З огляду на те, що

$$\sin\left(\frac{\pi R}{k}\pm 2s\pi\right)=\sin\frac{\pi R}{k} \tag{8}$$

$2k$ є періодою функції, як се видко впрост на фігурі 2.

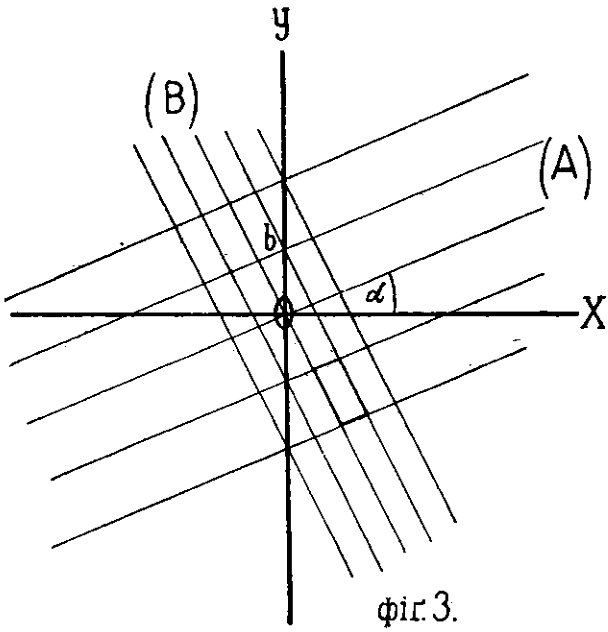
II.

Як що за зерові лінії функції взяти не кола, але инші криві лінії, тоді справа комплікуєть ся, Найпростійший випадок дістанемо, коли даною кривою буде лінія проста. Покажемо се на такій задачі:

Збудувати функцію, яка має зера здовж боків прямокутників, утворених пучками рівнобіжних прямих

$$\left.\begin{array}{ll}(A) & y-ax-b\lambda=0, \\ (B) & ay+x-\lambda ab(a+1)=0\,;\end{array}\right\}\quad(9)$$

притім λ приймає всї вартости чисел цїлих додатнїх і відємних.



фіг. 3.

Шукаємо функції із зерами на лінії $y=ax+b$:

$$y-ax-b=0,$$

$$\frac{y-ax}{b}-1=0,$$

отже

$$P_1(x,y)=1-\frac{y-ax}{b}.$$

Анальоґічно будуємо дальші функції

$$P_2(x,y) = 1 - \frac{y-ax}{2b},$$

$$P_3(x,y) = 1 - \frac{y-ax}{3b},$$

$$\vdots$$

$$P_\lambda(x,y) = 1 - \frac{y-ax}{\lambda b}.$$

Добуток

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(x,y) = \prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y-ax}{\lambda b}\right) \tag{10}$$

є розбіжний, бо $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} \frac{y-ax}{\lambda b} = \frac{y-ax}{b}\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda} = diverg,$ по причині, що $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}$ є гармонічний ряд.

Та ми порадимо собі тут анальоґічно, як се робимо при функціях із одною незалежною. Іменно замість брати

$$P_\lambda(x,y) = \left(1 - \frac{y-ax}{\lambda b}\right)$$

берем

$$P_\lambda(x,y) = e^{\frac{y-ax}{\lambda}}\left(1 - \frac{y-ax}{\lambda b}\right) \tag{11}$$

Розвиваємо виложничу функцію у ряд і виконуємо множенє, уважаючи $\frac{y-ax}{b}$ змінною J.

$$P_\lambda(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{y-ax}{\lambda b} + \frac{1}{2!}\left(\frac{y-ax}{\lambda b}\right)^2 + \ldots,$$

$$-\frac{1}{1!}\frac{y-ax}{\lambda b} - \frac{1}{1!}\left(\frac{y-ax}{\lambda b}\right)^2 - \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{y-ax}{\lambda b}\right)^2 - \frac{2}{3!}\left(\frac{y-ax}{\lambda b}\right)^3 - \ldots$$

$$z=\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(x,y)=\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{y-ax}{\lambda b}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{y-ax}{\lambda b}\right)^3\ldots\right]$$

Сей ряд є збіжний враз із сумою

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{y-ax}{b}\right)^2\sum\frac{1}{\lambda^2}$$

Через розділенє сего добутка на два частинні, подібно як у попереднім примірі, легко переконати ся, що функція

$$z=\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(xy) \tag{12}$$

є безупинно збіжна:

$$z=\prod_{\lambda=1}^{\infty} e^{\frac{y-ax}{\lambda b}}\left(1-\frac{y-ax}{\lambda b}\right) \tag{13}$$

Такий сам взорець дістанемо для відємних λ, іменно

$$z=\prod_{\lambda=+1}^{\infty} e^{-\frac{y-ax}{\lambda b}}\left(1+\frac{y-ax}{\lambda b}\right) \tag{14}$$

З огляду на те, що оба добутки є абсолютно збіжні, можемо їх почленно помножити; притім виложнича функція зникне:

$$z=\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{(y-ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right] \tag{15}$$

Для $\lambda=0$ є $y=ax$. Тому, щоби і зера, які лежать на тій простій, були узгляднені, треба дописати чинник

$$(y-ax).$$

В результаті функція, яка має зера на всїх простих $y-ax-\lambda b=0$, має вид

$$z_1=(y-ax)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{(y-ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right]. \tag{16}$$

Тепер розслїджуємо прості

$$ay+x-\lambda ab(a+1)=0;$$

для них творимо функції

$$Q_\lambda(xy) = e^{\frac{ay+x}{a(a+1)\lambda b}}\left[1 - \frac{ay+x}{a(a+1)\lambda b}\right] \tag{17}$$

і добуток

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} Q_\lambda(xy) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} e^{\frac{ay+x}{a(a+1)\lambda b}}\left[1 - \frac{ay+x}{a(a+1)\lambda b}\right]; \tag{18}$$

сей добуток є теж безупинно збіжний. Як що узгляднити відємні λ і просту, що переходить через початок співрядних, дістаємо для всіх простих прямовісних добуток

$$z_2 = (ay+x)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1 - \frac{(ay+x)^2}{\lambda^2[ba(a+1)]^2}\right]. \tag{19}$$

Квот

$$\frac{z}{(y-ax)(ay+x)\prod\limits_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(xy)\, Q_\lambda(xy)} = e^{H(xy)}$$

є вже функцією без зер у скінчености,

а звідти остаточно

$$z = e^{H(x,y)}(y-ax)(ay+x)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1 - \frac{(y-ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right]\left[1 - \frac{(ay+x)^2}{\lambda^2[ab(a+1)]^2}\right] \tag{20}$$

Дуже цікавий випадок дістанемо, як возьмемо за основу зер квадратову сітку із боком a (фіг. 4).

Тоді два пучки прямих можна написати у виді

$$x = \pm a\lambda$$
$$y = \pm a\lambda \qquad \lambda = 1, 2, 3,$$

і окремо $\lambda = 0$.

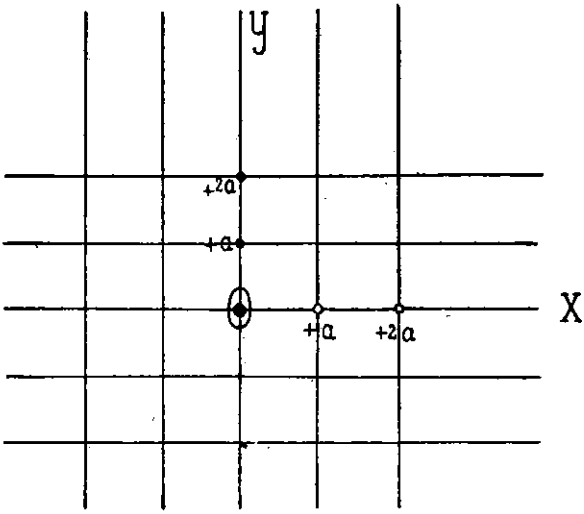
Зерові чинники $x \pm a\lambda = 0$ можна написати у виді

$$1 - \frac{x}{\pm a\lambda};$$

як що брати їх завсїди парами так, щоби $+\lambda$ і $-\lambda$ були разом, тоді чинник

$$1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2}.$$

містить у собі обі прості.



фіг. 4.

Функція z, із зерами здовж простих

$$x = \pm a\lambda$$

має вид

$$z_1 = e^{H_1(x,y)} \, x \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2}\right) \tag{23}$$

Одначе з теоріїВаєрштрасса знаємо, що

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

Примінюючи підставлене $x \Big| \frac{x}{a}$, дістаємо

$$\sin \pi \frac{x}{a} = \frac{\pi x}{a} \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 a^2}\right) \tag{24}$$

З порівнаня (23) і (24) дістаємо взорець

$$z_1 = e^{H_1(x,y)} \, \frac{a}{\pi} \sin \pi \frac{x}{a} \tag{25}$$

а се значить, що $H(x, y) = const.$, отже також $e^{H(xy)} = const.$

Длятого

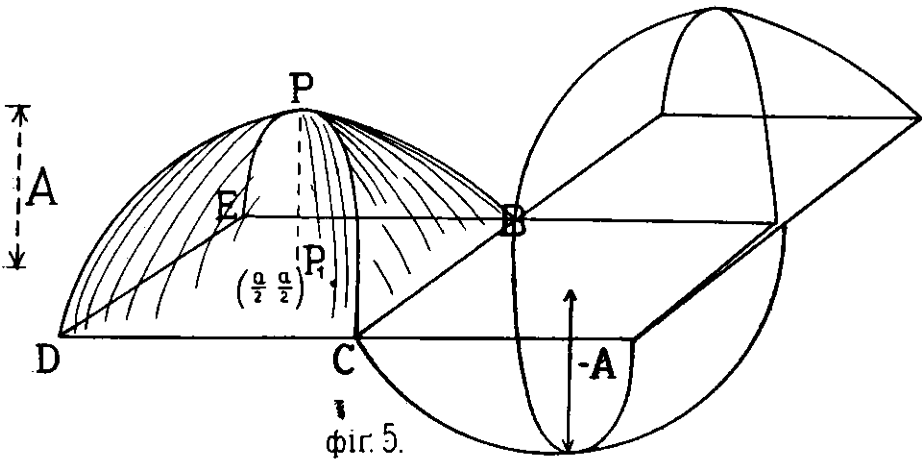
$$z = C\frac{a^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} \tag{31}$$

Нехай буде

$$H(xy) = C = \frac{A\pi^2}{a^2},$$

де A будемо називати амплїтудою поверхнї z, тодї z прийме вид

$$z = A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} \tag{32}$$



фіг. 5.

Дальші розслїди показують, що се буде поверхня, зложена із пристайних квадратових чашок, із яких дві довільні сусїднї завсїди лежать так, що одна дає максімум, а сусїдня мінїмум вартости функції z і то якраз $+A$ або $-A$ (гляди фіґ. 5).

Рівнанє сеї поверхнї збудоване аналїтично-на основі її зер має остаточний вид

$$z = A\frac{\pi^2}{a^2}xy\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{a^2\lambda^2}\right]\left[1-\frac{y^2}{a^2\lambda^2}\right] \tag{33}$$

Із сього приміру видко, який вплив має довільна функція $H(xy)$. Зера функції $z = f(xy)$ визначують її аж до чинника

$$e^{H(xy)}.$$

Рівночасно повстають нові проблєми в теорії аналітичних функцій двох змінних. Замість точок виступають тут уже й цілі криві, здовж яких розміщені зера або бігуни функції $z = f(xy)$. Отже заходить питанє, як ті криві мають бути упорядковані, щоби вони однозначно дефініювали функцію.

Висше наведені приміри показують наглядно конечність істнованя тверджeня Ваєрштрасса, поширеного до двох змінних. У консеквенції мусить істнувати й поширене право Міттаг-Лєффлєра, бо функція $log\, z$ буде мати приписані бігуни.

Тара, Сибір 26. жовтня 1917.

INHALT.

Verf. stellt sich die Aufgabe, in der Theorie der analytischen Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen ein Analogon zu den Theoremen von Weierstraß und Mittag-Leffler zu finden, die ganze bzw. meromorphe Funktionen einer unabhängigen Variablen betreffen.

Als erstes Beispiel konstruiert er die analytische Funktion, die eine auf der Wasseroberfläche unter dem Einfluß eines vertikal schwingenden Punktes entstehende Wellenfläche darstellen soll. Eine beliebige Fläche (*M*) $y - tg\,\alpha . x = 0$ schneidet die gesuchte Wellenfläche $z = f(x, y)$ längs einer Sinuslinie. Nach Morosoff hat dieselbe die Gleichung

$$z = \sin x . \cos \alpha \qquad (x \geq o).$$

Wenn man aber diese Gleichung auf analytischem Wege aufzustellen hat, u. z. auf Grund ihrer Eigenschaft, daß die Fläche die $(x\,y) =$ Ebene nach Kreisen mit den Radien λk, schneidet, bildet man das absolut konvergente Produkt

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(x, y) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 k^2}\right).$$

Der Quotient

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 k^2}\right)}$$

stellt eine Funktion dar, die auf der Ebene (x, y) keine Nullstellen hat; diese Eigenschaft kommt aber der Funktion $e^{H(x, y)}$ event.

const. zu. Da $H(x, y)$ beliebig, kann man die Bedingung stellen, daß ihre Variablen in der Verbindung $x^2 + y^2 = R^2$ auftreten; somit wird

$$z = e^{H(R^2)} R. \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{\lambda^2 k^2}\right);$$

dlese Funktion läßt sich mit der bekannten Weierstraßschen Sinus-Entwickelung $\sin \pi x = \pi x \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{x^2}\right)$ in Zusammenhang bringen, indem man $x = \frac{R}{k}$ setzt, $\lambda = 1$ und ihr einen entsprechenden Faktor voranstellt. Wenn man noch die Funktion $H(R^2)$ so einfach als möglich wählt und also

$$e^{H(x, y)} \frac{k}{\pi} = const.$$

setzt, reduziert sich ihre weitere Untersuchung auf die der Funktion

$$z = \frac{A\pi}{k} R \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{\lambda^2 k^2}\right);$$

A ist ihre Amplitude, $2k$ ihre Periode (cf. Fig. 2).

Zweitens verlangt Verf., als Nullinien mögen nicht Kreise, sondern Geraden angenommen werden, u. z. die der zwei orthogonalen Scharen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(A)} & y - ax - b\lambda = 0, \\ \text{(B)} & ay + x - \lambda ab(a+1) = 0. \end{array}\right\} \lambda = 1, 2, 3, \ldots .$$

Da $\prod \left(1 - \frac{y - ax}{b\lambda}\right)$ divergiert, setzen wir jedem seiner Faktoren den Koeffizienten $e^{\frac{y-ax}{\lambda}}$ voran und bekommen daraus ein beständig konvergentes Produkt von absolut konvergenten Reihen. Schließlich kommt man zur Funktion, die längs der Geradenschar (A) Nullstellen besitzt:

$$z_1 = (y - ax) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(y - ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right].$$

Ebenso liegen die Nullstellen von

$$z_2 = (ay+x)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{(ay+x)^2}{\lambda^2[ba(a+1)]^2}\right]$$

auf der Geradenschar *(B)*. Nun ist die gewünschte Funktion

$$z = e^{H(x,y)}(y-ax)(ay+x)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{(y-ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right]\left[1-\frac{(ay+x)^2}{\lambda^2[ab(a+1)]^2}\right].$$

Als ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn die beiden Geradenscharen das quadratische Netz mit der Seite a bilden. Dann wird

$$z = e^{H(x,y)}\frac{a^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}.$$

Um $H(x,y)$ zu bestimmen, setzen wir fest, daß $z\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) = \mathrm{Max.}$ sein soll. Daraus folgt $H(x,y) = const.$ oder

$$z = A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

(Fig. 5); $\pm A$ ist die Amplitude der einzelnen Flächenteile. Der analytische Ausdruck für z ist demnach

$$z = A\frac{\pi^2}{a^2}xy\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{a^2\lambda^2}\right]\left[1-\frac{y^2}{a^2\lambda^2}\right].$$

Daraus ergeben sich neue Probleme in der analytischen Funktionentheorie für den Fall zweier Veränderlichen, indem hier nicht einzelne Punkte, sondern ganze Linien als Örter für Nullstellen oder Pole auftreten. Aus diesen Beispielen schließt Verf. auf die Notwendigkeit einer Verallgemeinerung nicht nur des Weierstraß-schen Theorems, sondern auch des von Mittag-Leffler, weil z. B. $\log z$ vorgeschriebene Pole besitzt.