Деякі типи функцій з ґрупи Фухса.

Подав ***Др. Володимир Левицький.***

(Dr. Wladimir Lewyćkyj: Einige Typen der zur Fuchs'schen Gruppe gehörigen Funktionen).

1. Як звісно, ґрупа субституцій

$$\left(z,\ F_\nu(z)\right),$$

де: $F_\nu(z)=\dfrac{a_\nu z+b_\nu}{c_\nu z+d_\nu}$, a_ν, b_ν, c_ν, d_ν якінебудь числа цілі, що їх модул:

$$\begin{vmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{vmatrix} \neq 0,$$

є ґрупою Фухса.

Постріймо загальну функцію роду Galois — який беру тут в ширшім змислї —, а власне:

$$G(z)=\alpha_0\ F_0(z)+\alpha_1\ F_1(z)+\ldots\ldots+\alpha_n F_n(z)+\ldots\ldots \text{in inf.},$$

де:

$$\alpha_\mu \gtrless \alpha_\nu,\ F_0(z)=z$$

(сочинники α так дібрані, що $G(z)$ є збіжне) і пристосуймо до єї всї субституції даної ґрупи, то дістанемо що раз то инші вартости функції Galois.

Добуток тих усїх вартостий:

$$\Phi(z)=\prod_{n=1}^{\infty} G_n(z)$$

не змінить своєї вартости для ніякої субституції ґрупи, отже функція $\Phi(z)$ належить до ґрупи.

А що:

$$G_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n\lambda} F_n(z);\quad \lambda=0,1,2,$$

то функція, що належить до ґрупи Фухса, або функція роду Фухса, має найзагальнїйший вид:

$$\Phi(z) = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\lambda} F_n(z) \right\}. \tag{1}$$

Є се одна з функцій роду Фухса.

2. Возьмім безконечний добуток:

$$F_0(z)^{\alpha_0} F_1(z)^{\alpha_1} \ldots\ldots F_n(z)^{\alpha_n} \ldots\ldots = \prod_{n=0}^{\infty} F_n(z)^{\alpha_n},$$

то сей добуток зміняє свою вартість для кождої субституції нашої ґрупи. Колиж утворимо суму таких добутків, дістанемо функцію:

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \prod_{n=0}^{\infty} F_n(z)^{\alpha_{n\lambda}} \right\}. \tag{2}$$

Ся функція не змінює своєї вартости для субституцій ґрупи Фухса, є се отже одна з **функцій роду Фухса**.[1])

3. Функція, що не змінює своєї вартости, коли за z вставимо $F(z)$, або якубудь ітерацію єї:

$$F_n(z) = \{F[F(F\ldots\ldots F(z)\ldots\ldots)]\}$$

є функцією періодичною з наворотом (періодою) $F(z)$, отже до ґрупи Фухса (згл. Кляйна) належать всї функції з лїнійною періодою $\dfrac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}$, де постійні є якінебудь.

А що між двома функціями Фухса єствує всегда альґебраічна звязь, тож кожда періодична функція дає ся представити альґебраічно через иншу функцію, отже і через якусь **елїптичну функцію** $\varphi(z)$.

Після **теореми Appell'а** можна кожду періодичну функцію представити в виді:

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}[F_n(z)],$$

отже на основі висше сказаного буде:

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}\Big[F_n(z)\Big] = A\Big(\varphi(z)\Big),$$

де A є альґебраічна функція.

---

[1]) Очивидно, що для зложених α_n будуть се **функції Кляйна**. — Всї повисші розвинення є лиш формальні і мають значінє доперва тодї, коли $G_\lambda(z)$, $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ відповідають вимогам збіжности, в що однак на сїм місци не входжу близше.

Но після звісного твердженя з теорії еліптичних функцій Вейерштрасса можна кожду еліптичну функцію представити вимірно через функцію $p(z)$ і єї похідну, т. є:

$$\varphi(z) = R\Big(p(z),\ p'(z)\Big),$$

де R є вимірна функція, тож

$$h(x) = A_1\Big(p(z),\ p'(z)\Big).$$

Наоборот буде можна функцію $p(z)$ представити альґебраічно через $h(x)$, отже:

$$p(z) = A_2\Big(h(x)\Big)$$

або:

$$p(z) = A_2\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}\{F_n(z)\}\right] \tag{3}$$

де A_2 є функція альґебраічна.

Така загальна звязь єствує між основною функцією $p(z)$ з теорії еліптичних функцій а функціями ґрупи Фухса.

Коли вкінци перейдемо до звісної функції $\sigma(z)$ Вейерштрасса, то дістанемо з огляду на се, що

$$log\ \sigma(z) = -\iint p(z) dz^2$$

слідуючу загальну звязь функції $\sigma(z)$ з функціями ґрупи Фухса:

$$\sigma(z) = e^{-\iint A_2\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}\{F_n(z)\}\right] dz^2} \tag{4}$$

У Львові, жовтень 1918.

Contents. In this short note the author derives two types of the Fuchs's fonctions and studies the relation one between the fonctions $p(z)$ of Weierstrass and the Fuchs's fonctions.