Академик М. Крилов. *)

Спосіб нескінчених визначників у теорії лінійних інтеґральних рівнань.

Sur la méthode de déterminants infinis dans la théorie des équations intégrales linéaires

par *Nicolas Kryloff,* membre de l' Académie des Sciences d' Ukraïne.

У цій роботі нам доведеться скористуватися з наступних вислідів H. von Koch'a.

Нескінчений визначник:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12}\,. & a_{1n}\,. \\ a_{21} & 1+a_{22}\,.\,.\,.\,. & a_{2n}\,. \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2}\,.\,. & 1+a_{nn}\,.\,. \end{vmatrix}$$

називаємо абсолютно збіжним, коли збігається абсолютно так нескінчений добуток:

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} (1+a_{ii}),$$

як і сума з усіх добутків, що повстають із M через усі можливі переставлення других значків. Для абсолютної збіжности визначника $\triangle$ досить збіжности рядів:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}| \qquad \text{та} \qquad \sum_{i,\,k=0}^{\infty} a_{ik}^2.$$

---

*) Ця робота є один із параґрафів II розділу ширшої роботи, що тепер друкується в „Annales de la Faculté des Sciences de l' Université de Toulouse".

Коли справджені умови (I), то

$$\triangle = \triangle_{ii} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \triangle_{ik} = \triangle_{kk} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \triangle_{ik},$$

де $\triangle_{ik}$ є підвизначник, що відповідає елементові a_{ik}, а також

$$\triangle = \lim_{n \to \infty} \triangle_n,$$

де

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} \dots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & 1+a_{nn} \end{vmatrix};$$

окрім того, тоді абсолютно збігаються й усі підвизначники визначника $\triangle$ і суми:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\triangle_{ik})^2 \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\triangle_{ik})^2.$$

Нарешті, коли елементи визначника $\triangle$ є голоморфні функції скінченого числа комплексних арґументів, а умови (I) справджуються в певнім замкненім обсягу зміни тих арґументів, то визначник $\triangle$ та всі його підвизначники є теж голоморфні функції і $\triangle_n$ одностайно іде до $\triangle$[1]).

Із теорії нескінчених систем лінійних рівнань відзначимо тут наступні висліди H. von Kocha.

Коли, при істнуванні умов (I), система

$$\text{(II)} \qquad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

має таку розвязку, що сума

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

збігається і не є нуль (далі тільки такі розвязки й розглядатимемо), то

$$\triangle \neq 0$$

і навпаки.

---

[1]) Див. H. von Koch, Sur un théorème de Hilbert, Math. Ann. 59, стор. 266—283.

Коли

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_r \\ k_1 & k_2 \dots & k_r \end{pmatrix}$$

є відмінний від нуля підвизначник r-го ступня і притім усі підвизначники нижчого ступня є нулі, то найзагальнійша розвязка системи (II) є

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_r \\ k_1 & k_2 \dots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_r \\ k & k_2 \dots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_r \\ k_1 & k_2 \dots & k \end{pmatrix} x_{k_r}$$

($k = 1, 2, . \quad .$), де величини

$$x_{k_1}, \quad x_{k_2}, \dots, \quad x_{k_r}$$

є довільні.

Щоб система рівнань

$$\text{(III)} \qquad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, 3, . \quad .)$$

мала єдину певну розвязку, треба і досить, щоб

$$\sum_1^{\infty} c_i^2$$

збігалася, і щоб

$$\Delta \neq 0.$$

По цих попередніх увагах звертаємося до нашої задачі.

Як відомо, довід збіжности Ritz'ового способу наближеного розвязання діференціяльних, інтеґральних та інтеґро-діференціяльних рівнань математичної фізики звичайно базується на певних нерівностях, що їх повинні справджувати дані функції задачі[1]). Ми маємо тут на меті позбутися цих обмежень у випадку інтеґрального рівнання типу Fredholm'a:

$$\text{(1)} \qquad u(x) + k\int_0^1 \lambda(x, X)\, u(X)\, dX = f(x)$$

з допомогою вище поданих теорем із теорії нескінчених визначників та нескінчених систем лінійних рівнань.

Як відомо, Ritz'ів спосіб для рівнання (1) зводиться на визначення сучинників $a_i^{(m)}$ скінченої суми:

---

[1]) Пор. напр. мою роботу „Про ріжні узагальнення Ritz'ового методу та методу найм. квадр. для набл. інтеґр. рівнань матем. фізики" (Труди Ф.-М. Відділу УАН., т. III, вип. 2, 1926).

$$(2) \qquad u_m = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \psi_i(x),$$

де $[\psi_i(x)]$ є система функцій ортоґональна і нормована, із умов:

$$(3) \qquad \int_0^1 \left[u_m + k\int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX - f(x) \right] \psi_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

і до доводу, що

$$u = \lim_{m \to \infty} u_m.$$

Натомісць ми замісць (2) візьмемо

$$(4) \qquad u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(x);$$

та сучинники a_i визначатимемо з умов:

$$(5) \qquad \int_0^1 \left[u + k\int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX - f(x) \right] \psi_i(x) dx = 0.$$

Зазначивши

$$b_{ie} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_e(X) dx dX,$$

бачимо, що визначник системи лінійних рівнань (3) є

$$(6) \qquad D^{(n)}(k) = \begin{vmatrix} kb_{11}+1 & b_{12} \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & kb_{22}+1 & b_{2n} \\ . & & . \quad . \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots & kb_{nn}+1 \end{vmatrix},$$

а визначник системи (5) є

$$(7) \qquad D(k) = \begin{vmatrix} kb_{11}+1 & b_{12} \ldots & b_{1n} \ldots \\ b_{21} & kb_{22}+1 \ldots & b_{2n} \ldots \\ . & & . \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots & kb_{nn}+1 \ldots \\ & & \end{vmatrix}.$$

Тепер доведімо збіжність рядів

$$(8) \qquad \sum_{i,e} b_{ie}^2 \qquad \text{та} \qquad (9) \qquad \sum_i |b_{ii}|.$$

На підставі дослідів Hilbert'a[1]),

$$\sum_{i,e} b_{ie}^2 = \sum_{i,e}\left[\int_0^1\int_0^1 \lambda(x,X)\psi_i(x)\psi_e(X)dxdX\right]^2 = \int_0^1\int_0^1\left[\lambda(x,X)\right]^2 dxdX,$$

що доводить збіжности ряду (8).

Завваживши тепер, що

$$b_{ii} = \int_0^1\int_0^1 \lambda(x,X)\psi_i(x)\psi_i(X)dxdX$$

і припустивши, що $\lambda\ (x,\ X)$ є вислід ітерації якогось симетричного зерна (ядра) $K\ (x,\ X)$, отже

$$\lambda(x,X) = \int_0^1 K(x,y)K(y,X)dy\,, \tag{10}$$

дістанемо:

$$b_{ii} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K(x,y)K(y,X)\psi_i(x)\psi_i(X)dxdydX =$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^1 K(x,y)\psi_i(x)dx\right]^2 dy = \sum_j c_{ij}^2\,,$$

де

$$c_{ij} = \int_0^1\int_0^1 K(x,y)\psi_i(x)\psi_j(y)dxdy$$

є очевидно сучинник Fourier'a функції

$$\int_0^1 K(x,y)\psi_i(x)dx.$$

Із очевидної рівности

$$\sum_i \left|\, b_{ii} \,\right| = \sum_{i,j} c_{ij}^2$$

випливає збіжність ряду (9), для чого досить лише у (8) замінити $\lambda(x,X)$ на $K(x,X)$. Ясно нпр., що коли $\lambda\,(x,y)$ має форму

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \alpha_\lambda(x)\beta_\lambda(y)\,,$$

---

[1]) Hilbert, Grundzüge ein. allg. Theorie der lin. Integralgleichungen, ст. 445.

де системи $\alpha_\lambda(x)$, $\beta_\lambda(x)$ є біортоґональні та нормальні, то умова (10) справджується, бо тоді зерно (ядро) не міняється від ітерації[1]).

Завважмо ще, що міркування тут наведені лишаються, з незначними змінами, правдиві, коли

$$\lambda(x, X) = \int_0^1 K_1(x, y) K_2(y, X) dy ,$$

де K_1 та K_2 є функції симетричні. Справді рівнання замкнености дає:

$$(11) \qquad b_{ii} = \sum_j \overset{(1)}{c}_{ij} \overset{(2)}{c}_{ij} ,$$

де

$$\overset{(1)}{c}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy ; \quad \overset{(2)}{c}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy ;$$

застосувавши до (11) нерівність Cauchy, дістанемо збіжність ряду (9), бо ряди

$$\sum_{i,j} \overset{(1)}{c}{}_{ij}^2 \qquad \sum_{i,j} \overset{(2)}{c}{}_{ij}^2$$

збігаються з огляду на симетричність функцій K_1 та K_2.

Отож бачимо, що визначник (7) є абсолютно збіжний, а система рівнань (5) при умові $f(x) = 0$ розвязується що до невідомих a_i.

Окрім того $D(k)$ та всі його підвизначники є цілі трансцендентні функції параметра k, а рівнання

$$D(k) = 0$$

має безліч дійсних додатних корінів:

$$k_1 , k_2 , \ldots . ;$$

коли k дорівнює одному з них k_s, то хоч один із підвизначників $D_{ir}(k_s)$ не є нуль, і система (5) має розвязку:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n : \ldots = D_{i1}(k_s) : D_{i2}(k_s) : \ldots . ;$$

відповідна „особлива“ функція $\varphi_s(x)$ напишеться в наступній формі:

---

[1]) Vivanti, Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari, ст. 180—182.

$$\varphi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{in}(k_s)\psi_n(x),$$

де значок i довільний при умові, що хоч один із визначників $D_{ir}(k_s)$ не є нуль. Щоб довести всі ці твердження, досить завважити, що з огляду на збіжність суми

$$\sum_{1}^{\infty} a_i^2$$

(згідно з дослідами H. von Koch'a), можна, помноживши рівнання (5) відповідно на d_i (де d_i є сучинник Fourrier'a „довільної" функції, що стає нулем у точках 0 та 1) застосувати рівнання замкнености та основну лемму варіяційного числення; звідси й вийде, що $\varphi_s(x)$ є „особлива" функція, а k_s особлива вартість параметру, отже дійсна й додатна з огляду на симетричність і додатність $\lambda(x, X)$.

Тепер для доводу Ritz'ового способу (див. рівн. (3) та визначник (6)) покажемо, що

$$\lim_{n \to \infty} | \varphi_s(x) - \overset{(n)}{\varphi_s}(x) | = 0,$$

де $\varphi_s(x)$ справджує рівнання

$$\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X)\varphi_s(X)dX = 0,$$

отже й умови

$$(12) \qquad \int_0^1 \left[\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X)\varphi_s(X)dX \right] \psi_i(x)dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \infty),$$

а $\overset{(n)}{\varphi_s}$ — умови:

$$(13) \qquad \int_0^1 \left[\overset{(n)}{\varphi_s}(x) + \overset{(n)}{k_s} \int_0^1 \lambda(x, X)\overset{(n)}{\varphi_s}(X)dX \right] \psi_i(x)dx = 0, \quad \text{коли } i \leq n,$$

і окрім того умови:

$$(14) \qquad \int_0^1 \left[\overset{(n)}{\varphi_s}(x) + \overset{(n)}{k_s} \int_0^1 \lambda(x, X)\overset{(n)}{\varphi_s}(X)dX \right] \psi_i(x)dx =$$

$$= -\overset{(n)}{k_s} \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X)\overset{(n)}{\varphi_s}(X)dX \right] \psi_i(x)dx, \quad \text{коли } i > n.$$

Комбінуючи (12), (13) та (14), дістанемо:

$$\int_0^1 \left\{ \left[\varphi_s(x) - \overset{(n)}{\varphi_s}(x) \right] + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \left[\varphi_s(X) - \overset{(n)}{\varphi_s}(X) \right] dX \right\} \psi_i(x) dx =$$

$$= \begin{cases} (\overset{(n)}{k_s} - k_s) \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \overset{(n)}{\varphi_s}(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{коли } i \leq n \\ - k_s \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X)\, dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{коли } i > n, \end{cases}$$

а звідси:

$$(15) \quad \overset{(n)}{\varphi_s}(x) - \varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \left[\overset{(n)}{\varphi_s}(X) - \varphi_s(X) \right] dX =$$

$$= \overset{(n)}{\varphi_s} + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \overset{(n)}{\varphi_s}(X) dX = R_n(x),$$

де

$$(16) \quad R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(k_s - \overset{(n)}{k_s} \right) \psi_i(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \overset{(n)}{\varphi_s}(X) dX \right] \psi_i(x) dx +$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty} k_s \psi_i(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx.$$

Алеж остача триґонометричного розвинення функції, що справджує Lipschitz'ову умову (з сучинником λ), може бути обмежена виразом $\frac{A\lambda}{n}$ $(A = const)$, як довів D. Jackson[1]), і хоч функція

$$\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX$$

залежить від n, її Lipschitz'ів сучинник напевно не залежить від n, коли нпр.

$$\int_0^1 \left[\lambda_x^1(x, X) \right]^2 dX$$

---

[1]) Transactions of the Am. Math. Soc. 1912.