

## Про остачу Lagrange'вого ряду.

[М. Kravčuk: Über das Restglied der Lagrange'schen Reihe.]

Остачу Lagrange'вого ряду:

$$(1) \quad F(x) = F(a) + \frac{t}{1!} F'(a) \varphi(a) + \frac{t^2}{2!} [F'(a) \varphi^2(a)]' + \dots + \\ + \frac{t^n}{n!} [F'(a) \varphi^n(a)]^{(n-1)} + R_{n+1},$$

де  $x$  є корінь рівняння

$$x = a + t \varphi(x),$$

представив Чебишев у формі:

$$(2) \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} [F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n] dx,$$

де по виконанні дії  $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$  треба покласти  $y = x$ . Золотарев дав иншу формулу:

$$(3) \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n dx.$$

Користаючи з тих самих засобів, що й згадані два автори, ми доведемо, що

$$(4) \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-p}}{d\alpha^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} [F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n] dx,$$

де по виконанні дії  $\frac{\partial^p}{\partial x^p}$  треба покласти  $y = x$ .

Нам доведеться послугуватися наступним взором частинної інтеграції:

$$(5) \quad \int F(x, y) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \int F(x, y) dx - \int \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int F(x, y) dx \right] \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi,$$

що його легко перевірити диференціацією. Тут  $x$  та  $y$  є функції незалежних змінних  $\xi, \dots$ ; перший та третій інтеграл береться по змінному  $\xi$ , другий є частинний інтеграл по змінному  $x$ .

З допомогою взору (5), взявши  $\xi = x$ ,  $y = a - x$ , напишемо:

$$(6) \quad \int_a^x \frac{\partial^n}{\partial x^p} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] dx = \left[ \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] \right]_a^x + n \int_a^x \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] dx.$$

Коли  $p \leq n$ , то (6) можна написати так:

$$(7) \quad n! \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] dx - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-1} \right] dx = -\frac{t^n}{n!} \left[ F'(a)\varphi^n(a) \right]^{(p-1)}$$

Подібнoж маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-1} \right] dx - \\ & - \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x \frac{\partial^{p-2}}{\partial x^{p-2}} \left[ F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-2} \right] dx = \\ & = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[ F'(a)\varphi^{n-1}(a) \right]^{(p-2)} \end{aligned}$$

$$(7_1) \quad \frac{1}{(n-p+1)!} \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left[ F'(x)t\varphi(x) + a - y)^{n-p+1} \right] dx - \frac{1}{(n-p)!} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-p} dx = -\frac{t^{n-p}}{(n-p)!} F'(a)\varphi^{n-p+1}(a).$$

Додавши рівності (7) та (7<sub>1</sub>), дістанемо:

$$(8) \quad \frac{1}{(n-p)!} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p} dx - \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} F'(a)\varphi^{n-p+1}(a) - \\ - \frac{t^{n-p+1}}{(n-p+1)!} \left[ F'(a)\varphi^{n-p}(a) \right]' - \dots - \frac{t^n}{n!} \left[ F'(a)\varphi^n(a) \right]^{(p-1)} = \\ = \frac{1}{n!} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[ F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n \right] dx.$$

А що, з огляду на поданий вислід Золотарева, маємо:

$$(9) \quad \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p} dx = \\ = F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-p} \frac{t^k}{k!} \left[ F'(a)\varphi^k(a) \right]^{(k-1)}$$

то, здиференціювавши рівність (8)  $n-p$  разів по  $a$ , переведемо її на

$$(10) \quad F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} \left[ F'(a)\varphi^k(a) \right]^{(k-1)} + \\ + \frac{1}{n!} \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[ F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n \right] dx,$$

що й малося довести.

Коли в (10) покласти  $p=0$ , то остача (4) дістане форму (3), а коли взяти  $p=n$ , то вона перейде на (2).

### Résumé.

Ist  $x$  die Wurzel der Gleichung

$$x = a + t\varphi(x),$$

so kann das Restglied der Reihe:

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} \left[ F'(a)\varphi^k(a) \right]^{(k-1)} + R_{n+1}$$

in folgender Form:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[ F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n \right] dx \quad (p \leq n, y = x)$$

dargestellt werden.