Une méthode d'introduction de la notion de bon ordre dans la Théorie des Ensembles.

Par

Miron Zarycki (Léopol).

Je donne dans cette note une définition de bon ordre en termes fondamentaux du système des axiomes de M. Zermelo, à savoir, celui d'ensemble et celui d'élément. Notre définition équivaut aux définitions connues de M. M. Hessenberg[1]), Hartogs[2]), Hausdorff[3]) et Kuratowski[4]), mais elle est basée sur une idée differente.

I. Soit C un ensemble arbitraire et A un sous-ensemble quelconque de C. Pour tout ensemble $A \subset C$ je suppose donnée une fonction univoque A^r contenue également dans C.

Je suppose enfin que l'ensemble A^r vérifie les axiomes suivants[5]):

I. $[\sum_i A_i]^r = \sum_i A_i^r$

II. $A \subset A^r$

III. $O^r = O$

IV. Tout ensemble non vide A contient un élément a tel que: $(a)^r = A^r$

---

1) Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906

2) Ueber das Problem der Wohlordnung, Mathematische Annalen 76, 1914.

3) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.

4) Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles, Fundamenta Mathematicae II, 1921.

5) $\{A_i\}$ désigne une famille quelconque d'ensembles contenus dans C, i étant un indice variable. $\sum_i A_i$ désigne la somme logique des ensembles A_i. (a) désigne un ensemble d'ont l'élément unique est a.

V. $(a)^r = (b)^r$ implique $a = b$.

2. Pour démontrer l'indépendence des nos axiomes supposons que C est un ensemble composé de trois éléments: 1, 2, 3. Dans chacune de cinq colonnes de la table suivante on trouve une telle définition de l'ensemble A^r, qui remplit tous les axiomes sauf un seul. La dernière colonne prouve que le système de nos axiomes est possible.

	I	II	III	IV	V	
$0^r =$	0	0	(3)	0	0	0
$(1)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
$(2)^r =$	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2)	(1, 2, 3)	(2, 3)
$(3)^r =$	(1, 3)	0	(3)	(3)	(1, 2, 3)	(3)
$(1, 2)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
$(1, 3)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
$(2, 3)^r =$	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(1, 2, 3)	(2, 3)
$(1, 2, 3)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)

3. L'élément a soit dit le premier élément de A, lorsque $(a)^r = A^r$.

L'ensemble A^r soit dit le reste de A.

L'ensemble ne contenant qu'un seul élément soit dit un ensemble élémentaire.

Théorème 1. Toute classe des restes des ensembles élémentaires contient un élément tel que tout autre reste de la classe en est un sousensemble.

Démonstration:

Il résulte des axiomes IV et V que tout ensemble contient un élément prémier.

Nous avons maintenant:

$$\sum_i (a_i)^r = [\sum_i (a_i)]^r, \tag{I}$$

$\{(a_i)\}$ étant une classe arbitraire des ensembles élémentaires.

Posons $\sum_i (a_i) = N$.

Soit a le premier élément de N. L'élément a étant contenu dans $N = \sum_i (a_i)$, il est identique à l'un des éléments a_i.

On obtient à présent:

$$(a)^r = N^r = [\sum_i (a_i)]^r = \sum_i (a_i)^r.$$

Or, le reste $(a)^r$ est un élément de la classe des restes $\{(a_i)^r\}$ et il est la somme des éléments de cette classe, donc le th. 1. est démontré.

Théorème 2. *Toute classe des restes contient un élément tel que tous les restes de cette classe en sont des sous-ensembles.*

Démonstration:

Il résulte de l'axiome IV que la classe de tous les restes est identique à la classe des restes des ensembles élémentaires, or le th. 2 résulte immédiatement du th. 1.

Théorème 3. *A et B étant deux ensembles arbitraires, on a toujours: $A^r \subset B^r$ ou $B^r \subset A^r$.*

Ce théorème est une consequence immediate du th. 2.

Théorème 4. *A et B etant deux ensembles arbitraires on a toujours: $(A+B)^r = A^r$ ou $(A+B)^r = B^r$.*

Démonstration:

Nous avons d' après l'axiome I.: $(A+B)^r = A^r + B^r$. En s'appuyant sur cette rélation on déduit du th. 3 le th. 4.

5. Soient maintenant a et b deux éléments differents de C. Posons $a < b$ lorsque $(b)^r \subset\!\!\!\!\neq (a)^r$.[1])

On démontre sans peine que la rélation „$<$" ordonne bien l'ensemble C, c'est à dire, qu' elle vérifie les conditions suivantes:

1) elle est transitive

2) elle est asymmétrique

3) elle subsiste entre tous deux éléments de C

4) tout sous-ensemble A de C contient un élément a tel que $a < a_i$, a_i étant un élément quelconque de A, different de a.

Il correspond, par l'hypothèse, à tout élément a de C un reste détérminé, à savoir, le reste $(a)^r$. D'autre part, à tout reste A^r correspond d'après l'ax. IV et V un élément de C, à savoir, le premier élément de A.

Or, l'ensemble C étant bien ordonné, la classe R de tous les restes l'est également.

6. Nous pouvons maintenant démontrer par l'induction transfinie le

Théorème 5: $A^{rr} = A^r$.

Démonstration:

Soit a_1 le prémier élément de C.

---

1) $M \subset\!\!\!\!\neq N$ désigne que l'ensemble M est un vrai sous-ensemble de N. Nous rémarquons que la rélation $a \neq b$ entraîne $(a)^r \neq (b)^r$ (selon l'axiome V).

*

On obtient $(a_1)^r = C (C^r$ (ax. II.)

et $C^r (C,$ car tout reste est contenu dans C.

Nous avons donc $C^r = C$, et $(a_1)^{rr} = (a_1)^r$.

Donc, le théorème 5. subsiste pour l'ensemble (a_1) et evidémment pour tous les ensembles A tels que $A^r = (a_1)^r$.

Nous démontrerons maintenant. que lorsque le th. 5 subsiste pour tous les ensembles dont l'élément premier est $< a$, il subsiste aussi pour les ensembles contenants comme l'élément premier l'élément a.

La rélation $(a)^r ((A)^{rr}$ résulte de l'axiome II. Or, il suffit de démontrer la rélation $(a)^{rr} ((a)^r$.

Supposons que $(a)^r (\# (a)^{rr}$, c'est à dire, qu'il existe un ensemble N tel que;

$$(a)^{rr} = (a)^r + N,\ N \# O \text{ et } (a)^r N = O.$$

D'après cette supposition l'ensemble $(a)^r$ aurait un élément premier x différent de a.

Nous aurions: $(x)^r = (a)^{rr}$

$(x)^r = (a)^r + N,$

or: $(a)^r (\# (x)^r$, d'où $x < a$,

donc: $(x)^{rr} = (x)^r$

On obtient maintenant:

$$(x)^r = (a)^r + N$$

$$(x)^r = (x)^{rr} = (a)^{rr} + N^r = (a)^r + N + N^r = (a)^r + N^r \quad \text{(ax. I, II)}$$

or: $(x)^r = (a)^r$ ou $(x)^r = N^r$ (th. 3)

Mais nous avons par l'hypothèse: $(x)^r = (a)^{rr} \# (a)^r$,

donc: $(x)^r = N^r$.

Il résulte de la rélation dernière que l'elément x est le premier élément de N, or: $x \varepsilon N$.

Mais x est le premier élément de $(a)^r$, donc: $x \varepsilon (a)^r$.

Or, le produit $(a)^r N$ ne peut être vide, comme nous l'avons supposé.

7. L'element a soit dit l'élément précedent de l'élément b lorsque $a < b$.

Théorème 6. L'ensemble A^r est composé de tous les éléments de C non précédents l'élément premier de A.

Démonstration:

Soit a le prémier élément de A.

1) L'élément a est contenu dans A d'après l'axiome IV.

2) Les deux rélations $a < b$ et $(a)^r = A^r$ entraînent: $b \varepsilon A^r$.

En effet, nous avons par l'hypothèse: $(b)^r (\# (a)^r = A^r$.

Mais $b \varepsilon (b)^r$ (ax. II), or: $b \varepsilon A^r$.

3) Les rélations $b < a$ et $(a)^r = A^r$ entraînent: b non ε A^r.

Supposons: $b \varepsilon A^r$. On obtient: $(b)^r (A^r$.

Mais la rélation $M < N$ implique d'après l'axiome I:

$$N^r = (M + N)^r = M^r + N^r, \text{ d'où: } M^r (N^r.$$

Il s'en suit: $(b)^r (A^{rr} = A^r = (a)^r$. (th. 5)

Mais la rélation $(b)^r ((a)^r$ ne peut subsister, parceque nous avons supposé $b < a$.

On voit maintenant que l'ensemble A^r est le reste (au sens de la théorie classique des ensembles bien ordonnés) correspondant au prémier élément de l'ensemble A.[1])

---

[1]) On trouve quelques remarques concernantes l'ensemble A_r dans le dernier § de la note: Miron Zarycki: Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fundamenta mathematicae, Tome VIII.