

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XXV.

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО і Дра ІВАНА РАКОВСЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XXV.

REDIGIERT VON

Dr. VLADIMIR LEVÝČKYJ u. Dr. JOHANN RAKOVŠKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1926.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ. — INHALT.

	стор.
1. <i>Miron Zarycki</i> . Une méthode d'introduction de la notion de bon ordre dans la Théorie des Ensembles	1—5
2. <i>Georg Polanskyj-Stefan Krukowski</i> . Die erste Paläolithstation in Novosiłka-Kostiukowa (Podolien)	6—27
3. <i>Dr. Stefan Baley</i> . Über schizophrene Einstellungen und Verhaltensweisen	28—45
4. <i>М. Кравчук</i> . Про остачу Lagrange'вого ряду (М. Krawčuk (Krawtchouk). Über das Restglied der Lagrange'schen Reihe)	46—48
5. <i>І. Феценко-Чотівський</i> . Цементованне заліза і сталі борем і берилем (I. Fetschenko-Tschopivskyj. Die Cementation des Eisens und des Stahles mit Bor und Beryllium)	49—71
6. <i>М. Крилов</i> . Спосіб нескінчених визначників у теорії лінійних інтегральних рівнянь (М. Kryloff. Sur la méthode des déterminants infinis dans la théorie des équations intégrales linéaires)	72—81
7. <i>М. Кравчук</i> . Про Green'ове та Stokes'ове перетворення (М. Krawtchouk. Über die Sätze von Green und Stokes)	82—92
8. <i>G. Polanskyj</i> . Nachtrag zur Abhandlung: „Die erste Paläolithstation“	93

Une méthode d'introduction de la notion de bon ordre dans la Théorie des Ensembles.

Par

Miron Zarycki (Léopol).

Je donne dans cette note une définition de bon ordre en termes fondamentaux du système des axiomes de M. Zermelo, à savoir, celui d'ensemble et celui d'élément. Notre définition équivaut aux définitions connues de M. M. Hessenberg¹⁾, Hartogs²⁾, Hausdorff³⁾ et Kuratowski⁴⁾, mais elle est basée sur une idée différente.

I. Soit C un ensemble arbitraire et A un sous-ensemble quelconque de C . Pour tout ensemble A (C je suppose donnée une fonction univoque A^r contenue également dans C).

Je suppose enfin que l'ensemble A^r vérifie les axiomes suivants⁵⁾:

$$\text{I. } \underline{[\sum_i A_i]^r} = \sum_i A_i^r$$

$$\text{II. } \underline{A(A^r)}$$

$$\text{III. } \underline{O^r = O}$$

IV. Tout ensemble non vide A contient un élément a tel que:
 $(a)^r = A^r$

1) Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906

2) Ueber das Problem der Wohlordnung, Mathematische Annalen 76, 1914.

3) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.

4) Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles, Fundamenta Mathematicae II, 1921.

5) $\{A_i\}$ désigne une famille quelconque d'ensembles contenus dans C , i étant un indice variable. $\sum_i A_i$ désigne la somme logique des ensembles A_i . (a) désigne un ensemble d'ont l'élément unique est a .

V. $(a)^r = (b)^r$ implique $a = b$.

2. Pour démontrer l'indépendance des nos axiomes supposons que C est un ensemble composé de trois éléments: 1, 2, 3. Dans chacune de cinq colonnes de la table suivante on trouve une telle définition de l'ensemble A^r , qui remplit tous les axiomes sauf un seul. La dernière colonne prouve que le système de nos axiomes est possible.

	I	II	III	IV	V	
$0^r =$	0	0	(3)	0	0	0
$(1)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
$(2)^r =$	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2)	(1, 2, 3)	(2, 3)
$(3)^r =$	(1, 3)	0	(3)	(3)	(1, 2, 3)	(3)
$(1, 2)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
$(1, 3)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
$(2, 3)^r =$	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(1, 2, 3)	(2, 3)
$(1, 2, 3)^r =$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)

3. L'élément a soit dit le premier élément de A , lorsque $(a)^r = A^r$.

L'ensemble A^r soit dit le reste de A .

L'ensemble ne contenant qu'un seul élément soit dit un ensemble élémentaire.

Théorème 1. Toute classe des restes des ensembles élémentaires contient un élément tel que tout autre reste de la classe en est un sousensemble.

Démonstration:

Il résulte des axiomes IV et V que tout ensemble contient un élément prémier.

Nous avons maintenant:

$$\Sigma_i (a_i)^r = [\Sigma_i (a_i)]^r, \quad (I)$$

$\{(a_i)\}$ étant une classe arbitraire des ensembles élémentaires.

Posons $\Sigma_i (a_i) = N$.

Soit a le premier élément de N . L'élément a étant contenu dans $N = \Sigma_i (a_i)$, il est identique à l'un des éléments a_i .

On obtient à présent:

$$(a)^r = N^r = [\Sigma_i (a_i)]^r = \Sigma_i (a_i)^r.$$

Or, le reste $(a)^r$ est un élément de la classe des restes $\{(a_i)^r\}$ et il est la somme des éléments de cette classe, donc le th. 1. est démontré.

Théorème 2. Toute classe des restes contient un élément tel que tous les restes de cette classe en sont des sous-ensembles.

Démonstration:

Il résulte de l'axiome IV que la classe de tous les restes est identique à la classe des restes des ensembles élémentaires, or le th. 2 résulte immédiatement du th. 1.

Théorème 3. A et B étant deux ensembles arbitraires, on a toujours: $A^r (B^r$ ou $B^r (A^r$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du th. 2.

Théorème 4. A et B étant deux ensembles arbitraires on a toujours: $(A + B)^r = A^r$ ou $(A + B)^r = B^r$.

Démonstration:

Nous avons d'après l'axiome I.: $(A + B)^r = A^r + B^r$. En s'appuyant sur cette relation on déduit du th. 3 le th. 4.

5. Soient maintenant a et b deux éléments différents de C . Posons $a < b$ lorsque $(b)^r (\neq (a)^r$.¹⁾

On démontre sans peine que la relation „<“ ordonne bien l'ensemble C , c'est à dire, qu' elle vérifie les conditions suivantes:

1) elle est transitive

2) elle est asymétrique

3) elle subsiste entre tous deux éléments de C

4) tout sous-ensemble A de C contient un élément a tel que $a < a_i$, a_i étant un élément quelconque de A , différent de a .

Il correspond, par l'hypothèse, à tout élément a de C un reste déterminé, à savoir, le reste $(a)^r$. D'autre part, à tout reste A^r correspond d'après l'ax. IV et V un élément de C , à savoir, le premier élément de A .

Or, l'ensemble C étant bien ordonné, la classe R de tous les restes l'est également.

6. Nous pouvons maintenant démontrer par l'induction transfinie le

Théorème 5: $A^{rr} = A^r$.

Démonstration:

Soit a_1 le premier élément de C .

¹⁾ $M (\neq N$ désigne que l'ensemble M est un vrai sous-ensemble de N .

Nous rémarquons que la relation $a \neq b$ entraîne $(a)^r \neq (b)^r$ (selon l'axiome V).

On obtient $(a_1)^r = C (C^r$ (ax. II.)
 et $C^r (C,$ car tout reste est contenu
 dans C .

Nous avons donc $C^r = C$, et $(a_1)^{rr} = (a_1)^r$.

Donc, le théorème 5. subsiste pour l'ensemble (a_1) et évidemment pour tous les ensembles A tels que $A^r = (a_1)^r$.

Nous démontrerons maintenant. que lorsque le th. 5 subsiste pour tous les ensembles dont l'élément premier est $< a$, il subsiste aussi pour les ensembles contenant a comme l'élément premier l'élément a .

La relation $(a)^r ((A)^{rr}$ résulte de l'axiome II. Or, il suffit de démontrer la relation $(a)^{rr} ((a)^r$.

Supposons que $(a)^r ((\# (a)^{rr}$, c'est à dire, qu'il existe un ensemble N tel que;

$$(a)^{rr} = (a)^r + N, N \# O \text{ et } (a)^r N = O.$$

D'après cette supposition l'ensemble $(a)^r$ aurait un élément premier x différent de a .

Nous aurions: $(x)^r = (a)^{rr}$

$$(x)^r = (a)^r + N,$$

or: $(a)^r ((\# (x)^r$, d'où $x < a$,

donc: $(x)^{rr} = (x)^r$

On obtient maintenant:

$$(x)^r = (a)^r + N$$

$$(x)^r = (x)^{rr} = (a)^{rr} + N^r = (a)^r + N + N^r = (a)^r + N^r \text{ (ax. I, II)}$$

or: $(x)^r = (a)^r$ ou $(x)^r = N^r$ (th. 3)

Mais nous avons par l'hypothèse: $(x)^r = (a)^{rr} \# (a)^r$,

donc: $(x)^r = N^r$.

Il résulte de la relation dernière que l'élément x est le premier élément de N , or: $x \in N$.

Mais x est le premier élément de $(a)^r$, donc: $x \in (a)^r$.

Or, le produit $(a)^r N$ ne peut être vide, comme nous l'avons supposé.

7. L'élément a soit dit l'élément précédent de l'élément b lorsque $a < b$.

Théorème 6. L'ensemble A^r est composé de tous

les éléments de C non précédents l'élément premier de A .

Démonstration:

Soit a le premier élément de A .

1) L'élément a est contenu dans A d'après l'axiome IV.

2) Les deux relations $a < b$ et $(a)^r = A^r$ entraînent: $b \in A^r$.

En effet, nous avons par l'hypothèse: $(b)^r (\neq (a)^r = A^r$.

Mais $b \in (b)^r$ (ax. II), or: $b \in A^r$.

3) Les relations $b < a$ et $(a)^r = A^r$ entraînent: b non $\in A^r$.

Supposons: $b \in A^r$. On obtient: $(b)^r (A^r$.

Mais la relation $M < N$ implique d'après l'axiome I:

$$N^r = (M + N)^r = M^r + N^r, \text{ d'où: } M^r (N^r.$$

Il s'en suit: $(b)^r (A^r = A^r = (a)^r. \quad (\text{th. } 5)$

Mais la relation $(b)^r ((a)^r$ ne peut subsister, parceque nous avons supposé $b < a$.

On voit maintenant que l'ensemble A^r est le reste (au sens de la théorie classique des ensembles bien ordonnés) correspondant au premier élément de l'ensemble A .¹⁾

¹⁾ On trouve quelques remarques concernant l'ensemble A , dans le dernier § de la note: Miron Zarycki: Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, *Fundamenta mathematicae*, Tome VIII.

Die erste Paläolithstation in Novosilka-Kostiukowa (Podolien).

I.

Geologischer Teil.

Schon in den 90 Jahren v. J. sind hie und da die Nachrichten von Paläolithfunden in Podolien aufgetaucht, leider haben sich diese Nachrichten stets als vorzeitig erwiesen. Die westpolnischen Paläolithstationen im Weichselbassin und die ukrainischen im Dniepr- und Don-gebiet waren nur durch einen einzigen, spärlichen Glinianyfund in der Bugniederung überbrückt. Erst im Jahre 1923 hat S. Krukowski in den archäologischen Sammlungen der polnischen Akademie der Wissenschaften in Krakau in dem neolithischen Inventar aus Horodnica (Pokutien, südlich des Dnisterflusses) etliche jungpaläolithische Silexwerkzeuge erkannt. Da aber diese Entdeckung nicht allgemein bekannt geworden ist, so finden wir auch in den neuesten Publikationen¹⁾ keine Nachricht über paläolithische Besiedlung Podoliens. Die vorliegende Arbeit entscheidet das archäologisch wichtige Problem zu Gunsten der paläolithischen Besiedlung Podoliens.

Im August 1922 und 1924 unternahm ich geologisch-morphologische Detailstudien in der Umgebung von Novosilka-Kostiukowa bei Zališćyky in Südpodolien. Die Resultate dieser Beobachtungen sind in I. Heft der „Sammelschrift der physiographischen Kommission der ukrainischen Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg“ niedergelegt²⁾. Mein Zweck war auf Grund eines

¹⁾ Leon Kozłowski: Starsza epoka kamienna w Polsce. Poznańskie Tow. Przyj. Nauk. Prace Komisji archeol. tom I. zes. 1. (1922): deutsch in „Die Eiszeit“ 1925.

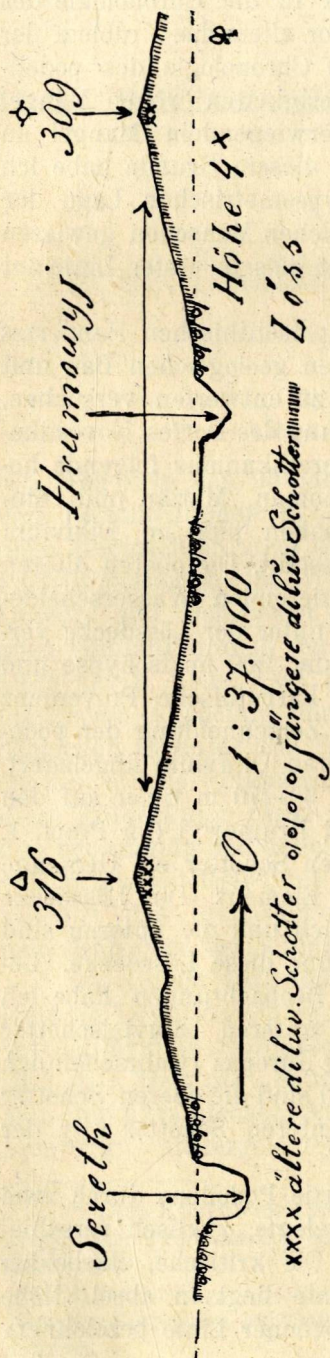
²⁾ Polanskyj: Geolog.-morphol. Beobachtungen in der Umgebung von Novosilka-Kostiukowa bei Zališćyky und das diluviale zyklische Schema von Südpodolien.

Detailstudiums möglichst klaren Einblick in die Chronologie des podolischen Quartärs zu gewinnen und vor allem das Problem der podolischen Kaniontäler aufzuhellen. Die Chronologie des podolischen Diluviums stößt auf große Schwierigkeiten wegen Mangel an Detailstudien und an ebenso schwerwiegendem Mangel an Moränenablagerungen und Fossilien. Aus diesem Grunde habe ich mir die Hoffnung gemacht, aus der hypsometrischen Lage der Wohn- und Lagerplätzen des vorgeschichtlichen Menschen gewissen Nutzen ziehen zu können. Tatsächlich hat dies in erster Linie zur Entdeckung des Paläoliths geführt.

Bevor ich an die Beschreibung des paläolithischen Fundortes herantrete, werde ich in kurzen Worten den geologischen Bau und das morphologische Bild der Umgebung zu entwerfen versuchen.

Die podolische Platte in der Umgebung des Dorfes Novosilka-Kostiukowa zeigt an den Wänden des Serethkanions folgende horizontal aufliegende Schichten: Silur, Cenoman, Miozän und Diluvialablagerungen. Meine Forschungen haben hier im Diluvium zwei Schotterhorizonte und den Löss festgestellt. Die oberen älteren diluvialen Schotter sind auf den kulminierenden Wasserscheidehöhen (im Profil N. 1. xxx \leftarrow \rightarrow xx) unter der Lössdecke verborgen. Diese Schotter liegen oberhalb der 300 m Isohypse und weisen in petrographischer Hinsicht auf karpathische Provenienz hin, sie wurden jedenfalls noch vor der Zerschneidung der podolischen Platte durch den Dnister im älteren Diluvium abgelagert. Die unteren, jüngeren Schotter liegen ca 60—70 m tiefer auf den Schultern des Kaniontales des Sereth und Hrumowyj (im Profil 1. o/o/o/o/o). Petrographisch bilden die unteren Schotter ein Gemenge vom karpathischen und nordpodolischen Element. Die Lössdecke verhüllt die oberen Diluvialschotter gänzlich und die unteren sind nur in nächster Umgebung des Sereth ohne diese Lössdecke. Lediglich auf Grund von morphologischen Beobachtungen habe ich provisorisch die Zeit der Ablagerung der unteren Diluvialschotter in das Maximum der diluvialen Vereisung Europas (wahrscheinlich vorletzte Vereisung) verlegt. Auf jeden Fall sind die oberen Schotter vor der Zertalung Podoliens und die unteren Schotter vor der Löss- und Kanionbildung abgelagert.

Morphologisch wird die südliche Partie Podoliens durch zwei scharf ausgeprägte, vertikal aufeinandergelegte, zyklisch verschiedene Landschaftsformen gekennzeichnet. Die kritische, die beiden morphologischen Elemente trennende Linie liegt in absol. Höhe von ca 250 m (im Profil N. 1. mit unterbrochener Linie bezeichnet),



Profil N. 1.

d. i. im Horizonte der unteren diluvialen Schotter. Unterhalb dieser kritischen Linie haben wir ganz junge Landschaftsformen und zwar steilwändige Kanione mit hängenden Seitentälern der kleinen Zuflüsse; oberhalb dagegen sind ausnahmslos reife, wellige, mit Löss verhüllte Landschaftsformen zu beobachten. Die kleinen Zuflüsse der podolischen Hauptflüsse sowie die Oberläufe der grösseren (z. B. Hrumowyj) stecken noch in den alten, oberen Landschaftsformen.

Auf diesen Beobachtungen und speziell auf der auffallenden Konvergenz stratigraphischer (untere Schotter) und morphologischer (die kritische Linie) Tatsachen fussend, versuchte ich die nachstehende Chronologie des Quartärs Südpodoliens auszubauen:

Im Altdiluvium — Ablagerung der oberen Schotter. Der darauf folgende erste normale Zyklus dauert bis zum Maximum der Vereisung, derselbe hat infolge der ersten Hebung Südpodoliens (ca 70 m) reife Landschaftsformen hervorgebracht. Dann erfolgt die längere Episode des ariden Zyklus, Ablagerung der unteren Schotter der podolischen Hauptflüsse und Kanionbildung des Dnister; Rückzug der Eisdecke gegen Nord Europa, zweite Hebung und Lössablagerungen. Die zweite Hebung Südpodoliens und der zweite normale Zyklus dauern von den letzten Phasen der Vereisung an bis jetzt.

Dieser Zyklus schuf erst die Kanione der podolischen Hauptzu-

flüsse des Dnister hauptsächlich infolge Erosion zur Basis des Dnisters. Die Kanione Podoliens wären also nachglaziale (in Bezug auf das Maximum), junge Formen.

Ich bin mir dessen vollkommen bewusst, dass meine Untersuchungen keinen zwingenden paläontologischen und stratigraphischen Beweis für die Richtigkeit der Datierung der unteren Schotter und somit auch der oben angeführten Chronologie erbracht haben, ich sehe aber vorläufig inbetracht der Morphologie und der hypsometrischen Lage der Schotter keine andere Möglichkeit. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch darauf hinweisen, dass die alpine und westeuropäische Quartärchronologie auf Podolien und Osteuropa vollkommen unanwendbar ist; es lässt sich zum Beispiel kein einziges Ereignis des Quartärs Podoliens in die Penck'sche alpine Chronologie ganz ohne Vorbehalt hineinstellen. Ich bin überzeugt, dass bei dem jetzigen Stand unserer Kenntnisse des podolischen Quartärs vorläufig nur eine reelle Möglichkeit sich darbietet und zwar: die ganze Glazialepoche als ein Ereignis im Sinne der zahlreichen Publikationen von P. Tutkowskyj¹⁾, Lepsius, Geinitz u. a. aufzufassen. An der Einheit der Eiszeiten festhaltend, schliesse ich aber nicht aus, dass die zukünftigen, auf neuen Forschungen basierten Tatsachen eine polyglaziale Gliederung des podolischen Quartärs erlauben werden.

*

Jetzt wenden wir uns aber der Paläolithstellung zu.

Das Dorf Novosiłka-Kostiukowa liegt am Bache Hrumowj, der in den Sereth mündet. Die höchste Erhebung des Terrains westlich vom Dorfe, bildet \triangle 316 (siehe Profil 1); dieselbe bildet einen Teil der Wasserscheideanhöhen zwischen Sereth und Hrumowj. Der \triangle 316 ist im Terrain durch einen vorzeitlichen, bis jetzt nicht untersuchten Kurgan markiert. Die Wasserscheideanhöhen des \triangle 316 bilden eine flache Kuppe, deren Hänge in der nächsten Umgebung von Sereth und Hrumowj in die untere Schotterterrasse (Profil 1) auslaufen. Trotzdem die Hänge des \triangle 316 vollkommen mit Löss verhüllt sind, habe ich dieselben der genauesten Prüfung unterzogen, in der Überzeugung, dass die Geheimnisse des podolischen Quartärs und der rezenten Morphologie teilweise in den Tälern, teils aber in den Wasserscheiden zu ent-

¹⁾ Das postglaziale Klima in Europa und in Nordamerika, die postglazialen Wüsten und die Lössbildung. Comptes Rendus de la XI ses. de congres geolog. internat. (1910) fasc. 1, 359—369.

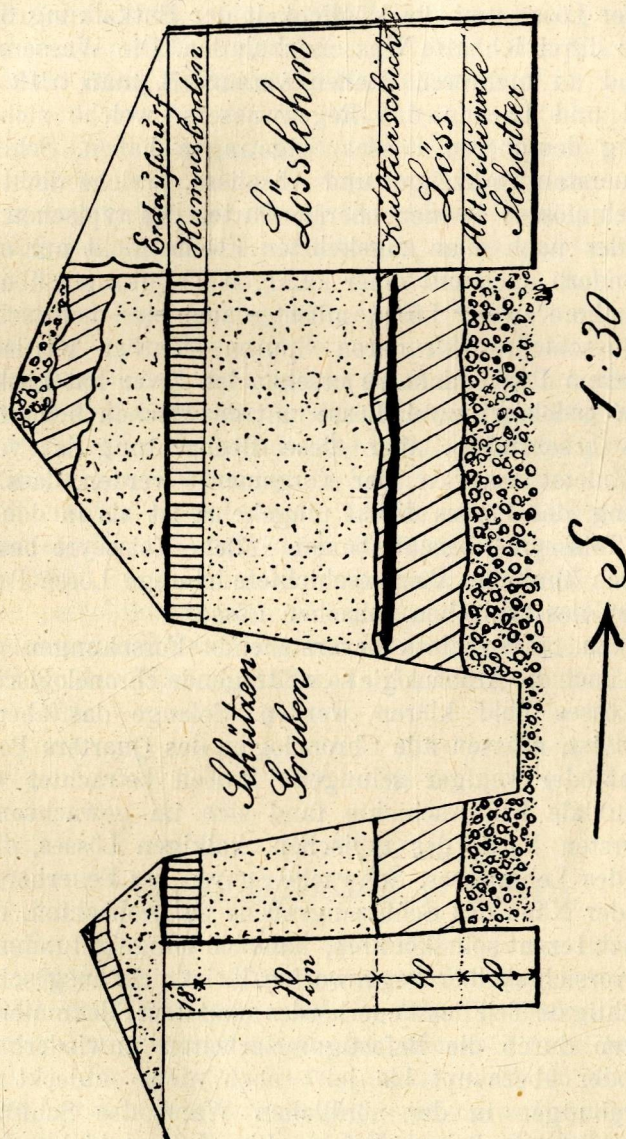
schleiern sind. Die Anhöhen bei \triangle 316 waren derzeit (1922) noch von den Schützen- und Laufgräben der Feldbefestigungen des Weltkrieges durchwühlt. Sie haben nur an zwei Stellen die ganze Lössdecke abgetragen und erlaubten ohne kostspielige Arbeiten in die quartären Schichten auf der Wasserscheide Einsicht zu gewinnen.

Ein noch unverschüttet gebliebener Teil des Schützengrabens dicht an dem \triangle 316 hat hier die ca 1·30 m starke Lössdecke durchgeschlagen. Überall auf der Oberfläche des Erdaufwurfes liegen die herausgehobenen oberen Diluvialschotter. Bereits bei der ersten Untersuchung im J. 1922 habe ich an einer Stelle ca 15 m südöstlich des Kurgans (\triangle 316) im Erdaufwurfe des Schützengrabens drei Silexstücke (Abb. 3—4, 5—6, 17) abgehoben. Ein Hirt hat mir damals erzählt, dass hier mehrere Feuersteine lagen, die von den Bauern zum Feuerschlagen verwendet worden sind. Damals schon auf Grund der intentionellen Bearbeitung der Silexstücke, sowie deren Lagerung und wegen Mangel an jeglichen Spuren der neolithischen Industrie, habe ich angenommen, dass hier eine paläolithische Station ausgegraben wurde. Da ich aber damals gänzlich in den geolog. und geograph. Problemen steckte, legte ich die archäologische Frage zur späteren Bearbeitung ab.

Erst im Sommer 1925 war es mir möglich, die planmässigen Vorarbeiten zur Blosslegung des eventuellen Lagerplatzes des paläolithischen Menschen zu unternehmen. An der Stelle, wo sich im J. 1922 drei Silices und jetzt noch 4 Fragmente fanden, wurden die Grabungen angelegt. Während der Ausräumung des teilweise zugeschütteten Grabens fanden sich im angeschwommenen Boden noch eine Klinge (Abb. 18) und ein Abspliss. Nach der vollendeten Ausräumung zeigte sich an den Wänden gewachsener Boden mit folgenden Ablagerungen:

Im Liegenden altdiluviale Schotter mit rötlichen, stark eisenoxydhaltigen, groben Sanden (Profil 1 u. 2). Diese Schotter gehen in eine 38—40 cm starke Schicht des typischen, äolischen, sehr kalkigen Lösses über. Unter Vergrößerungsglas zeigen sich lauter eckige Quarzpartikelchen, die in einer Kalkhülle stecken. In diesem Löss fand sich nur ein Exemplar von *Succinea oblonga* Drap. Die unterste Partie dieses Lösses enthält Gerölle, die zweifelsohne aus den liegenden Schottern stammen. Den typischen äolischen Löss überdeckt eine 64—70 cm dicke Schicht des entkalkten, lehmigen Lösses (Lehmlöss). Die Salzsäureprobe wies keine Spuren vom Calciumcarbonat aus. Die Quarzpartikelchen sind sehr winzig,

aber doch eckig. Die Farbe dieses Lösses ist dunkel gelb und die Wasserkapazität gross. Das Hängende des ganzen Profils bildet die 18 cm starke Humusdecke.



Profil N. 2.

Die chronologische Stellung des podolischen Lösses ist unsicher und seine Abarten ungenügend ausgeschieden. Jedenfalls bin ich der Meinung, daß es verfrüht wäre, unsere beiden Löss-

schichten als zeitlich verschiedene Bildungen aufzufassen, viel mehr haben wir hier den echten Löss mit einer Art Verlehmungszone. Für solche Auffassung der Dinge spricht der äolische Ursprung beider Lösses und die Möglichkeit der Entkalkung der oberen Schichte durch lebhaftere Wasserzirkulation. Die Wasserscheideanhöhen sind an mehreren Stellen versumpft, man trifft überall auf Tümpel und Lachen des Regenwassers, welche sicher zur Umgestaltung des oberen Lösses beigetragen haben. Schliesslich sind die Feuersteinwerkzeuge und Absplisse, welche dicht unterhalb des Lehmlösses in der oberen Partei des typischen Lösses liegen, an der nach oben zugekehrten Fläche nicht nur ergiebig patiniert, sondern auch mit einer kalkigen Tropfkruste überzogen. Bei der Annahme zweier Lösses, müssten auch eine dazwischen liegende Humusschichte oder deren Spuren sichtbar werden, was aber in unserem Profil nicht zu ersehen ist. Zwar hat Laskarew¹⁾ bei Kameneć podolskyj zwei Lösses mit dazwischen liegender Humusschichte beschrieben, aber diese Beobachtung ist vorläufig vereinzelt. Zuletzt mag es hier vorgemerkt werden, dass unsere Aufsichtung des Lösses direkt umgekehrt ist als in den in Podolien vom Teisseyre²⁾ beschriebenen Fällen. Teisseyre beschreibt petrographisch ähnliche, aber geschichtete lehmige Lösses Podoliens im Liegenden des typischen äolischen Lösses.

Es ist zu hoffen, dass bevorstehende Forschungen die für Geologie wie auch die Archäologie so weitragende chronologische Stellung des Lösses bald klären werden. Solange das aber nicht durchgeführt ist, müssen alle Chronologien des Quartärs Podoliens nur als mehr oder weniger gelungene Proben betrachtet werden.

Die diluviale Kulturschichte fand sich im gewachsenen Boden der obersten Partie des typischen, kalkigen Lösses, dicht an der Grenze des Lehmlösses. Schwache Spuren des Feuerherdes waren nur in der Nähe des Schützengrabens zu beobachten, da aber dieselben auch rezent sein könnten, habe ich einige gefundene winzige Kohlen vorsichtshalber weggeworfen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass der wichtigste Teil des Feuerherdes samt dem Silexmaterial und Knochenresten durch die Befestigungsarbeiten unwiederbringlich vernichtet oder überhaupt bis jetzt noch nicht entdeckt worden ist. Die Grabungen in der nördlichen Wand des Schützengrabens waren ohne jeglichen Erfolg. Die Kulturschichte befindet

1) Ласкаревъ. Два яруса лесса.

2) Atlas geolog. Galicji, tekst do zeszytu VIII, 135—140.

sich nur in nördlicher Richtung hier auf einer ca 2 m² großen, abgedeckten Fläche wurden 36 Silexwerkzeuge, Absplisse und deren Bruchstücke gefunden. Sie waren regellos verstreut und mit der patinierten Seite nach oben orientiert. Leider ausser Silexmaterial fanden sich keine anderen Spuren des Menschaufenthaltes, auch keine Spuren von Knochenresten.

Frappant ist bei dieser paläolithischen Stellung von Novosiłka-Kostiukowa die ungewöhnlich hohe hypsometrische direkt kulminierende Lage mit viel zu grosser Entfernung von Wasser. Ich kann vorläufig nur darauf hinweisen, dass die Lage nur in Bezug auf die rezenten Denivelationen, nicht aber auf die des Diluviums frappant ist (Profil 1). Ich nehme an, dass zur Zeit des paläolithischen Jägers von \triangle 316, der Sereth im Niveau der unteren Schotter oder unbedeutend tiefer — geströmt haben müsse.

Während meiner Grabungen besuchte mich in Novosiłka-Kostiukowa Herr Konservator Bohdan Janusz aus Lemberg und war so liebenswürdig, mich mit dem Paläolithforscher Hr. Stefan Krukowski aus Warschau bekannt zu machen, den ich zur Mitarbeit erbeten habe. Leider musste ich plötzlich abreisen und wir konnten die Arbeiten nicht fortführen. Dieselben werden im Sommer 1926 von uns beiden weitergeführt werden.

Die paläolithische Sammlung von Novosiłka-Kostiukowa befindet sich in Aufbewahrung des „Museums der ukrain. Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg“ unter Inventar №№ 17055—17085.

Georg Polanskyj
Lemberg.

II.

Praehistorischer Teil¹⁾.

Diesen Teil habe ich nur auf Ansuchen des Herrn G. Polanskyj geschrieben, der mir zu diesem Zwecke seine Sammlung v. J. 1925 zur Verfügung gestellt hat. Dieselbe ist keineswegs reichhaltig, aus diesem Grunde also, wie auch vermöge der Eigentümlichkeit der vorgefundenen nachstehend zu besprechenden Artefakte, ist es unmöglich darüber bestimmte Behauptungen auszusprechen, vielmehr können nur in betreff der Industrie, der sie angehören, in erster Linie aber bezüglich ihrer Lage in der chro-

¹⁾ Aus dem Polnischen übersetzt von Herrn Georg Rudnyčkyj.

nologischen Skala des Pleistozäns gewisse provisorische Vermutungen ausgesprochen werden. Nichtdestoweniger führe ich alles an, was ich im Material gefunden zu haben glaube, wobei ich hoffe, dass die künftigen fortgesetzten Nachforschungen in Novosilka-Kostiukowa gestatten werden die gegenwärtigen Feststellungen zu berichtigen. Diesen Vorbehalt möchte ich ganz besonders betonen, da es allgemein bekannt ist, wie schwer es ist auch in einem wohlerforschten Landstrich auf Grund einer geringen Anzahl von Artefakten eine Datierung vorzunehmen; desto eher dürfte dies bei einer Station in Osteuropa der Fall sein.

Erklärung der Zeichen in den Textabbildungen.

S — Schlagbuckel oder die Richtung, in der der Schlagbuckel gelegen war.

+ — Verletzungen und Absplitterungen, erzeugt mit eisernem Werkzeug.

— — — Die infolge eines Querbruchs, oder der Schläge bei der Bearbeitung fehlenden Teile.

← — Richtung der Absplitterungen und Retuschen.

Die Zahl der Silexstücke.

Es sind im Ganzen 36 Stück und zwar ganze und beschädigte Werkzeuge, Klingen, Splitter, Abfälle wie auch Fragmente derselben und natürliche Bruchstücke. Aus der ganzen Anzahl lassen sich nur zwei Fragmente zu einem ganzen Instrument und sieben termische Fragmente zu einem natürlichen plattenartigen Rohstücke größeren Umfangs zusammensetzen. Wenn man ferner noch drei andere termische Sprengstücke sowie zehn gänzlich bedeutungslose Kleinabschläge hinzufügt, so vermindert sich die Zahl der wichtigeren Fundstücke auf sechzehn.

Das Rohmaterial.

Das Rohmaterial ist zweifachen Ursprungs. Zum Teil ist das Kreidefeuerstein, wie aus Wolhynien (sogen. süd-östliches Rohmaterial), zum Teil dagegen, wie aus Weiss-Ruthenien (sogen. baltisches Rohmaterial) ebenfalls aus der Kreideformation. Dieses letztere hat ein ganz abweichendes Aussehen, es dürfte demnach nicht ausgeschlossen sein, dass es sich als ein neues, einer bisher unbekanntes Kreideschicht entstammendes Rohmaterial erweisen könnte. Die Rohstücke sind wahrscheinlich in ganzen Knollen

oder größeren termischen Sprengfragmenten aus einer Verwitterungsschicht am Mutterfelsen aufgelesen worden. Darauf wurden die Fundstücke nach der Station gebracht und offenbar erst hier zwecks Erzeugung von Geräten, zu Absplissen und Klingen verarbeitet. Die Station ist also tatsächlich als eine Arbeitsstelle (Atelier) anzusprechen.

Der Typus der Station.

Wenn man die möglicherweise bedeutende Schädigung der Kulturschicht bei der Herstellung der Schützengraben in Betracht zieht, und ferner die Resultate der von H. G. Polanskyj vorgenommenen Probeuntersuchungen berücksichtigt, so dürfte die Annahme nicht fern liegen, das vorliegende Material habe einen Teil eines kleineren, abgesonderten Arbeitsplatzes, eines sg. Flintplatzes gebildet, nicht aber einer umfangreicher Station angehört. Der genannte Flintplatz dürfte zugleich auch wohl ein Überrest einer urzeitlichen Wohnstätte gewesen sein. Den Beweis liefern dazu die von G. Polanskyj erwähnten geringen Reste eines Feuerherdes, die Spuren des Gebrauches von Splintern und Klingen ohne vorherige Bearbeitung (Abbildung 3—4, 5—6, 9—10, 16, 17 und 18), wie auch die Spuren der Umarbeitung und Ausbesserung der eigentlichen Geräte (Abbildung 14—15).

Die Veränderungen, denen die Station unterworfen war.

Die Abstumpfung wie die Abrundung der Arbeitskante bei vielen Artefakten, ferner die bereits nach der Beschaffung und Bearbeitung an Ort und Stelle eingetretene termische Zerstückelung einzelner Exemplare, schliesslich die nahezu gänzliche Zerstörung der Feuerstelle sowie die Abwesenheit (?) von Knochenresten ergeben mit einiger Wahrscheinlichkeit folgende Schlüsse:

1. Nach dem Verlassen der Wohnstätte durch die Bewohner haben die Überreste ganz offen oder in geringer Tiefe unter der Oberfläche einige Zeit gelegen.

2. Im Laufe dieser Zeit sind die einzelnen Feuersteinobjekte infolge von Temperaturveränderungen der Zerstückelung erlegen.

3. Gleichzeitig sind die Knochen und sonstige Küchenabfälle der gänzlichen (?) Zersetzung anheimgefallen, wobei jedoch zu bemerken ist, daß im umlagernden, kalkigen Löss ein Exemplar der *Succinea oblonga* Drap. gefunden wurde.

4. Der kalkhaltige Löss ist nach der erwähnten in der Sedi-
mentierung eingetretenen Unterbrechung vom kalklosen Löss über-
deckt worden (Profil 2).

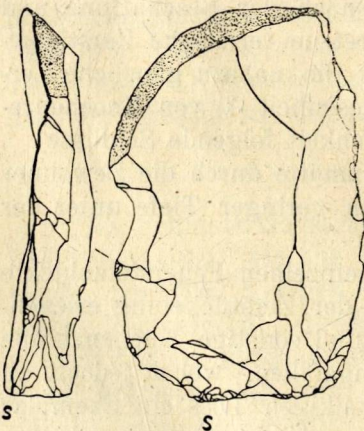
5. Der gesamte oder wenigstens ein Teil des im Kalklöss
enthaltenen und auf Silexstücken abgelagerten Kalkes ist als ein
Illuvium der entkalkten Lössschichte anzusehen.

Der Erhaltungszustand der Silexstücke.

Der Glanz ist mittelmässig, bei allen Fundstücken nahezu
gleich und dürfte sich noch zur Zeit ausgebildet haben, da die
Station bewohnt war. Alle Objekte weisen die Patinierung auf,
bis auf die rezenten Narben und Verletzungen. Im allgemeinen
ist die Patina auf beiden Seiten der Objekte bei der Mehrzahl
derselben ungleichmässig verteilt. Die eine Seite ist vorwiegend
sehr stark und vollständig patiniert, manchmal nahezu verkalkt
(cacholoniert), während dies bei der anderen nur teilweise in Form
von Flecken und Streifen der Fall ist. Der von Herrn Polanskyj
gelieferte Text erklärt zur Genüge eine derartige Verteilung der Pa-
tina dadurch, dass Objekte mit der einen und zwar derjenigen
Seite nach oben gelagert waren, auf der die Patinierung am stärk-
sten hervortritt. Die gesamte Patina, oder wenigstens der überwie-
gende Teil derselben ist offenbar im kalkhaltigen Löss entstanden,
was bekanntlich durchwegs vorzukommen pfllegt.

Unbearbeitete Absplisse.

In der Abbildung 1—2 ist der größte unbearbeitete Abspliss
abgebildet. Der Feuerstein ist von guter Qualität, der Schlagbuckel
unbedeutend und wenig gewölbt. Die
zugehörige Schlagfläche (Basis) ist
schmal und besteht aus Teilen von
drei Negativen, die die Schlagfläche
des Kernes gebildet haben. Diese
Negative sind nicht wie bei den Mou-
stier—Kernstücken vor der Abtren-
nung von dem Kern des betreffen-
den Absplisses entstanden, sondern
noch früher vor der Abtrennung der
Absplisse, deren Negative den obern
Teil des Fundstückes ausmachen.
Der obere und der untere Teil, wie
der Schlagbuckel selbst, weisen da-

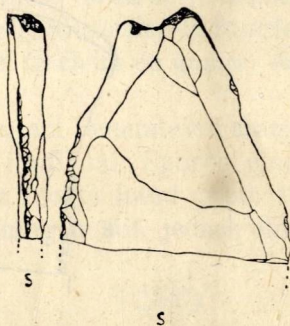


Abbild. 1 und 2, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

rauf hin, dass der Absplass wie auch die vorangegangenen Abspaltungen durch nicht gerade heftige, möglicherweise durch indirekt geführte Schläge erzeugt worden sind. Der Feuersteinkern hat offenbar nur eine Schlagfläche aufzuweisen gehabt.

Abbildung 3—4 zeigt einen flachen, dünnen, zerbrochenen Absplass, dessen Bruch bereits nach der stärksten Patinierung der unteren Seite eingetreten ist. Der Feuerstein ist schlechterer Qualität. Der Absplass ist ziemlich gleichmässig gespalten, ähnlich wie die unter 16, 17 und 19 abgebildeten Klingen. Das Profil ist gerade.

Dieses Stück ist eine Mittelform zwischen den Abspässen und den Klingen der Station. Die Ränder weisen Gebrauchsspuren auf; der Absplass dürfte als Messer gebraucht worden sein, jedoch ohne absichtliche Retuschen.



Abbild. 3—4, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

Nichtabgebildete Abspässe.

Ein Absplass ist beinahe ganz erhalten geblieben. Derselbe ist dick, dreikantig, glatt gespalten mit einem grossen aber sehr niedrigen Schlagbuckel, ohne Schlagkegel. Die Spitze und die Basis sind beschädigt. Der Kern muss nur eine Schlagfläche gehabt haben.

Eine Spitz- und ein Basisteil, die von zwei weiteren Abspässen abgesprengt sind, dürften in der Station selbst noch vor der Patinierung auf termischem Wege zerstückt worden sein. Die Schlagfläche des zweiten Abspässes ist gross, deutlich und unbearbeitet. Gleichfalls bedeutend ist der Schlagbuckel samt dem Schlagkegel. Der erste ist dagegen dick, dreikantig, und war einer der ersten Splitter, die von Mutterknollen abgetrennt worden waren. Beide sind atypisch.

Die aus Abspässen hergestellten Geräte

Abb. 5—6. Das Profil des Abspässes ist bogenförmig, der Basisteil ist bereits nach der stärksten Patinierung der Vorseite weggebrochen. Der Feuerstein ist von guter Qualität. Er stammt von einem kegelförmigen, breiten Kern mit einer, oder von einem asymmetrischen mit zwei oder mehr Schlagflächen. Die Ränder weisen unregelmässige Schärten und Aussplitterungen als Gebrauchsspuren auf, sind aber unbearbeitet geblieben. Die linke



Endspitze (Abb. 5) läuft in einen atypischen Stichel aus. Der Feuerstein ist viel sorgfältiger gespalten als bei dem in der Zeichnung 1—2

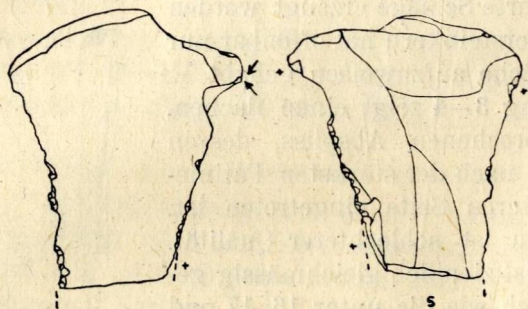


Abb. 5—6, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

abgebildeten Abspliss und kommt eher der bei den unter 16, 17 und 19 abgebildeten Klingen beobachteten Arbeitsmethode nahe.

Abb. 7—8 stellt einen noch vor der Patinierung zerbrochenen Abspliss dar. Das Rohmaterial ist erstklassig. Die gemuschelte Vertiefung links (Abb. 8) ist eine termische Absplitterung vom Mutterknollen, die noch vor dem Transport nach der Station entstanden ist.

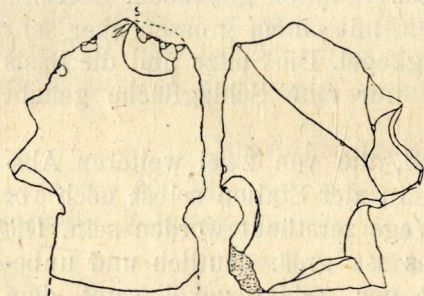


Abb. 7—8, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

Der Abspliss ist offenbar in der Nähe der seitlichen Längskante des Kernstückes abgeschlagen worden. Jene Kante war durch charakteristische zur Längsachse querlaufende Retuschen abgestumpft, ganz wie auf den Kernstücken des Jungpaläolithikums, nur sehr unregelmässig. Teile von drei Negativen solcher Retuschen sind an den

Auszählungen des rechten Randes sichtbar (Abb. 8), während eine grössere die ganze Mitte derselben Zeichnung ausfüllt. Alle vier Negative verlaufen quer zur Längsachse des Absplisses. Der Überrest des Schlagbuckels (Abb. 7) zeigt, dass derselbe gross und gleichmässig, wenn auch nicht besonders hoch war. Die Basis, wie ein Teil des Schlagbuckels sind durch Retuschen, — eine grössere und mehrere kleinere, — abgetragen worden. Dieselben haben diesen Teil des Absplisses in ein ordinäres Hohlmesser (*éclat en gouge*) umgewandelt, welcher zum Teil ein Mitteltypus zwischen den Hohlmessern des Jungpaläolithikums bilden, zu denen zwischen anderen

die Hohlmesser (lames en gouge) aus der spätaurignacien — Loess-Station Poliakoffs in Kostenki (Gouv. Voronesch) und vielleicht auch solche aus der Spätaurignacienstation Predmost (Mähren¹⁾), zuletzt die selten vorkommenden Hohlmesser einiger Tardenoisien-Industrien Polens und andere gehören, als Hohlshaber (raclours en gouge) des Altpaläolithikums Polens und Westeuropas.

Abb. 9—10—11 zeigt einen aus sehr gutem Feuersteinmaterial hergestellten Abspliss mit bogenförmigem Profil mit Spuren eines grossen, aber niedrigen Schlagbuckels. Der rechte Rand (Abb. 10) weist Gebrauchsspuren oder andere Verletzungen auf, jedoch ohne eigentliche Bearbeitung. Der

Basisteil ist in ein Werkzeug folgendermassen umgeformt worden: die Schlagfläche (Abb. 11) ist retuschiert, ja sogar von der oberen Seite nach der unteren und vom rechten Ende nach dem linken zu überretuschiert. Ausserdem ist an der Rückseite von der rechten Kante der Schlagfläche eine längliche, schmale, schräge Retusche (Abb. 10). Diese Retusche hat den Schlagbuckel zerstört und die Schlagnarbe abgeschnitten,

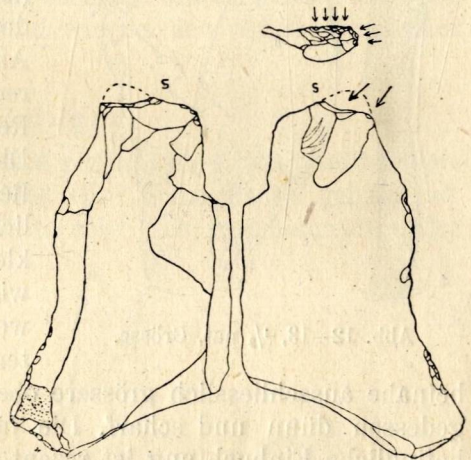


Abb. 9—11, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

wobei der Rest derselben am linken Rande sichtbar geblieben ist. Das Gerät ist demnach als ein misslungenes, unvollendetes Hohlmesser (éclat en gouge) anzusprechen. Die Schlagfläche desselben hat mit der Technik der Mousterien-Absplisse nichts gemeinsames, da alle erwähnten Retuschen jünger sind als die Überreste des Buckels. Die Spitze des Absplisses (oben an der Abb. 9 und 10) besteht aus paar Negativen, die dem bearbeiteten obersten Teile des Kernes, oder einem anderen unbestimmten Teile desselben angehört haben dürfen.

Abb. 12—13 stellt einen Schabmesser mit einem atypischen Kratzer an der Spitze dar. Der Silex ist rau, von einer rissigen Kruste überzogen. Die Schlagfläche — eine einheitliche ebene ter-

¹⁾ L'Abbé H. Breuil. Notes de voyage paléolithique en Europe centrale. II, Les industries paléolithiques du loess de Moravie et Bohême; l'Anthropologie, T. XXXIV, Paris, 1925; S. 529—530, S. 528 u. Fig. 20, Abb. 20, 22.

mische Fläche — ist gross, und zeigt einen halbkreisförmigen Treffpunkt, von dem aus ein Schlagbuckel mit Schlagkegel und einer bedeutenden Schlagnarbe sowie Ausstrahlungen ihren Anfang genommen haben. Der Abspliss ist demnach offenbar durch einen unmittelbaren kräftigen Schlag abgetrennt worden. Die in Zwischenräumen am rechten Rande

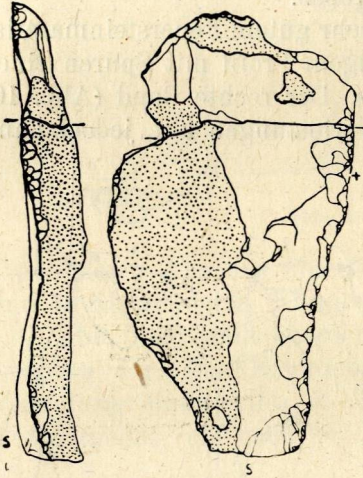


Abb. 12—13, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

beinahe ausschliesslich grössere oberflächliche Retuschen und infolgedessen dünn und scharf. Die in der oberen Hälfte des Randes befindliche Einbuchtung ist rezent.

Abb. 14—15 stellt einen dünnen Abspliss sogar am Basisteil. Vom unbedeutenden Schlagbuckel sind nur Spuren übrig, die Basis

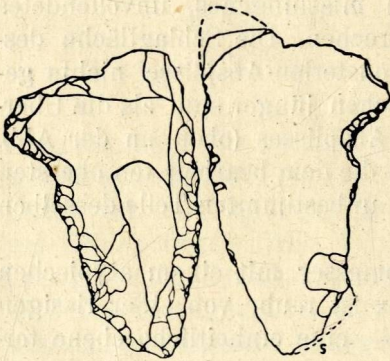


Abb. 14—15, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

ist abgebrochen. Der Abspliss bildet ein zweiseitiges Schabmesser mit einem an dem rechten Rande der Rückseite angebrachten Hohlschaber. Dieser Hohlschaber ist ein Resultat der Umarbeitung. Beide Ränder sind einseitig retuschiert mit Ausnahme von zwei Stellen am linken Rande, was an der Abb. 15 ersichtlich ist. Die Retuschierung ist wenigstens zweimal vorgenommen worden. Das erste Mal oberflächlich wie beim vorigen Gerät, wobei die Retuschen ganz wie dort oberflächlich und von ungleicher Grösse und Form, sowie

wie dort oberflächlich und von ungleicher Grösse und Form, sowie

auch wie es scheint, nur in Zwischenräumen angebracht sind. Die neuen zwecks Nachschärfung der Ränder ausgeführten Retuschen sind kleiner und steiler als die vorigen und erstrecken sich nicht auf die ganze Länge der Ränder. So fehlen sie z. B. am oberen und mittleren Teile des rechten Randes (Abb. 14) und am unteren Teile des linken Randes. Dieses Gerät zeigt wie das vorige die grosse Ähnlichkeit mit den wenig typischen „*éclats retouchés*“ des Altpaläolithikums.

Ausser den geschilderten, aus Absplissen hergestellten Schabmessern ist noch ein nichtillustriertes Bruchstück von einem dritten vorhanden, das den dünnen, nach oben hin breiter werdenden Obertheil bildet. Beide Längsränder sind wie bei den vorigen Fundstück mit Retuschen versehen.

Die Klingen.

Abb. 16 stellt eine dicke und regelmässige Klinge mit Bogenprofil dar, deren Mutterkern bloß eine Schlagfläche gehabt hat. Gutes Rohmaterial. Die Schlagfläche sehr klein und beschädigt. Der

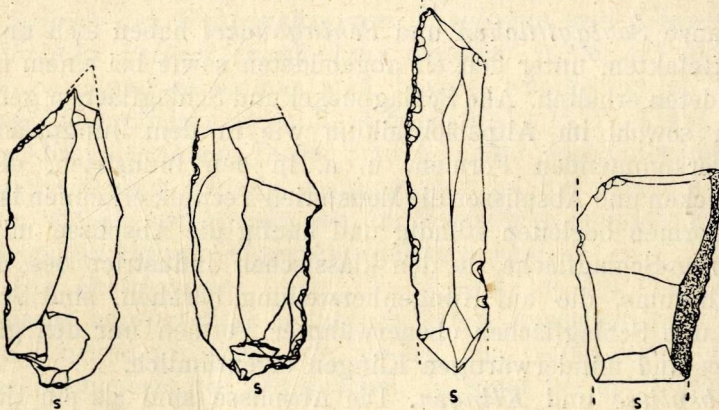


Abb. 16–19, $\frac{1}{2}$ nat. Grösse.

Schlagkegel gross und ziemlich gewölbt. Das Spitzende vor der Patinierung abgebrochen. Am linken Rande der Spitze einige fortlaufende einseitige Mikroretuschen. Die Ränder weisen Gebrauchsspuren auf.

Abb. 17 zeigt die von einem Kernstück mit nur einer Schlagfläche abgespaltene breite und dünne Klinge. Die Spitze vor der Patinierung abgebrochen, das Rohmaterial minderwertig. Die Schlagfläche sehr klein, der Schlagbuckel gleichfalls klein, aber deutlich; das Profil gerade.

Abb. 18. Schlanke, von einem Kern mit zwei gegenüberliegenden Schlagflächen abgespaltene Klinge mit beinahe geradem nur etwas geschweiftem Profil. Feuerstein von guter Qualität. Spitze und Basis vor der Patinierung abgebrochen. Am linken Rande gruppenweise verteilte Mikroretuschen.

Abb. 19. Bruchstück einer dünnen, auf beiden Seiten regelmässig gespalteten Klinge mit leicht bogenartigem Profil. Der Spitz wie auch der Basisteil, vor der Patinierung abgebrochen. Gutes Rohmaterial. Nahezu die ganze Mitte der Vorderseite, ausser den Randpartien werden von zwei grossen querlaufenden Negativen eingenommen, den Überrest von Retuschen, die die Längsseite des Kernstückes abgestumpft haben.

Ein nicht abgebildeter vor der Patinierung abgebrochener Spitzenteil einer Klinge oder eines Absplisses stammt möglicherweise von einem Kern mit zwei gegenüberliegenden Schlagflächen. Das Silexmaterial rau und homogen.

Allgemeine morphologische Eigenschaften der Artefakte in vergleichender Hinsicht.

Ganze *Schlagflächen* und *Schlagbuckel* haben sich nur bei vier Artefakten, unter den elf abgebildeten sowie bei einem nicht-abgebildeten erhalten. Alle Schlagbuckel und Schlagflächen gehören zu den sowohl im Altpaläolithikum wie in dem Jungpaläolithikum vorkommenden Formen, u. a. in den Industrien, die zu Kernstücken und Absplissen die Mousterien-Technik erkennen lassen. Diese Formen begleiten ständig und häufig die 'Absplisse' mit der Mousterien-Schlagfläche. In den klassischen Industrien des Jungpaläolithikums, die auf Klingenherstellung beruhen, sind Schlagbuckel und Schlagflächen obenerwählter Formen nur den groben Abfällen und minderwärtigen Klingen eigentümlich.

Absplisse und *Klingen*. Die Absplisse sind als ein Ganzes betrachtet von den typischen Mousterien-Formen ganz abweichend, nach der Spitze zu werden sie oft breiter (Abb. 5—6, 9—10) und dicker (Abb. 1—2, 5—6, 9—10, 12—13, 14—15). Ein Teil derselben, wenn nicht alle, sind vielleicht Abfälle, die bei der Produktion der Klingen entstanden sind. Die Profile sind bogenförmig und nur bei einem Fundstück (Abb. 3) gerade, wie bei den drei Klingen (Abb. 17, 18). Keineswegs fehlt es jedoch nicht an den beschriebenen Formen in vielen Industrien des Altpaläolithikums, wo sie als atypische Formen auftreten. Der Habitus der Absplisse und der Klingen ähnelt im Großen und Ganzen demjenigen des Jungpaläolithikums.

Der Unterschied besteht nur in der schwerfälligeren Art und Weise, in der das vorliegende Material bearbeitet worden ist. Die physischen Eigenschaften des Rohmaterials haben dazu nicht beigetragen.

Nuclei. Auf die Beschaffenheit der Feuersteinkerne selbst kann nur auf Grund der Absplisse und der Klingen geschlossen werden. So ist in erster Linie als sicher anzunehmen, dass die Kerne nicht scheibenförmig gewesen sind. Die Absplisse scheinen darauf hinzuweisen, dass sie von grossen und kurzen, dabei unregelmässigen und nach der Schlagfläche zu sich verbreitenden, also mehr weniger kegelförmigen Kernen abgespalten worden sind. Die Lage der Schlagflächen jener Kerne ist je nachdem geändert worden. Ausserdem sind auch länglich geformte Kerne verwendet worden, die mehr weniger klotzförmig und mit einer oder zwei an den Endpunkten der Längsachse gelegenen Schlagflächen versehen waren. Die Seitenränder solcher Kerne waren ähnlich wie bei den Kernen des Jungpaläolithikums abgestumpft gewesen (Abb. 1—2, 7—8 und 19). Aus den Kernen dieser zweiten Art wurden die obengeschilderten Klingen und einige Absplisse, wie die auf Abb. 1—2, 3—4 und 7—8 abgebildeten Fundstücke, hergestellt.

Spuren des Gebrauches von Absplissen und Klingen ohne absichtliche Retuschierung. Dass dieselben in der Art und Weise zur Verwendung gekommen sind, beweist wenigstens ein Teil der an den Längsrändern (Abb. 3—4, 5—6, 9—10, 16, 17 u. 18) befindlichen Aussplitterungen. Diesen Spuren kommt jedoch in bezug auf die Charakterisierung keinerlei positiver Wert zu, insbesondere in einer Station wie die vorliegende, wo die Silexstücke eine lange Zeit der äusseren Einwirkung ausgesetzt gewesen sind.

Die Schabmesser (Abb. 12—13 und 14—15). Die an den Absplissen angebrachten Retuschen haben denselben keinerlei typische Umrisse verliehen, wie sie bei den retuschierten Klingen (*lames retouchées*) des Aurignacien, ja sogar bei den Geräten des Altpaläolithikums, wie bei gewissen aus dünneren Absplissen hergestellten Schabern, Sägen und s. w. vorzukommen pflegen. Die Retuschen der vorliegenden folgen ziemlich genau den ursprünglichen Umrissen seiner natürlichen Absplisse.

Dieser Amorphismus der aus Absplissen hergestellten Schaber, sowie die oben besprochenen Eigentümlichkeiten der Retuschen finden sich häufig in den Industrien des Altpaläolithikums, doch ermöglichen sie keinerlei Datierung vorzunehmen. Dagegen werden derartige Werkzeuge im Jungpaläolithikum nicht angetroffen, mit Ausnahme von seltenen und gänzlich abgesonderten Fällen.

Stichel. Der Pseudostichel (Abb. 5 an dem rechten Spitzende) ist eine atypische und gleichgültige Form, die samt verwandten, amorphen Artefakten im älteren Paläolithikum häufiger auftritt als im jüngeren.

Hohlmesser. Die Messer „en gouge“ (Abb. 7—8 vollendet und Abb. 9—11 unvollendet). Der vollendete Hohlmesser (éclat en gouge; Abb. 7—8) ist in Anbetracht seiner Unregelmässigkeit und schwach angedeuteter Winkeligkeit seines Hauptteils, wohl auch deshalb, weil er aus einem Abspliss angefertigt, eher ähnlich im obenerwähnten Teil den Hohlschabern (racloirs en gouge) des Altpaläolithikums. Er nähert sich zu den meisten Formen der spätaurignacien Hohlmesser (lames en gouge) durch das Fehlen der Retuschierung der Längsränder.

Versuch einer Charakteristik der Industrie.

Nur unter dem am Anfang der vorliegenden Arbeit angemerkten Vorbehalt lässt sich über diese Industrie einiges sagen.

Die charakteristischen Merkmale der von Hrn. G. Polansky aufgedeckten Industrie können demnach nur provisorisch festgestellt werden und zwar wie folgt:

1. Die Grundlage der Produktion sind Absplisse und Klingen.
2. Die Kerne sind gross, unregelmässig und kommen den kegel- und klotzförmigen mit einer oder zwei Schlagflächen am nächsten. Von diesen wie von jenen sind unterschiedlos sowohl Absplisse wie Klingen abgeschlagen worden. Die Kerne zeigen im Grunde genommen den gleichen Bau wie die gewöhnlichsten Kerne des Jungpaläolithikums, nur die Ausführung ist unregelmässiger und schwerfälliger als bei diesen. Ausserdem waren diese im Allgemeinen kürzer, als die anderen.
3. Die Absplisse sind breit, mit mehr oder weniger bogenförmigem Profil und werden häufig nach der Spitze zu breiter.
4. Die Klingen sind schwerfälliger und unregelmässiger als die klassischen Klingen des jüngeren Paläolithikums.
5. Der aus Abspliss hergestellte Hohlmesser (éclat en gouge) ist von einer undeziierter Form, wie ein Mitteltypus zwischen Hohlschabern (racloirs en gouge) des Altpaläolithikums und Hohlmessern (lames en gouge) einiger Spätaurignacien-Industrien Mittel- und Osteuropas (Predmost, Kostenki u. a.).
6. Die aus Absplissen hergestellten Schabmesser sind in der Form ihrer Umrisse amorphis.
7. Der mit Wahrscheinlichkeit anzunehmende ausschliessliche

oder überwiegende Gebrauch von Absplissen zur Herstellung von Werkzeugen mit Hilfe von absichtlichen Retuschen.

8. Der mit Wahrscheinlichkeit anzunehmende ausschliessliche oder überwiegende Gebrauch von Klingen als Messer ohne vorherige absichtliche Retuschierung der Ränder.

9. Der wahrscheinliche Mangel an typischen Elementen des Altpaläolithikums.

Die morphologische und genetische Zugehörigkeit der Industrie.

Aus den letztangeführten Feststellungen ergeben sich zwei Alternativen. Entweder bilden die Fundstücke vom J. 1925 einen untergeordneten Abfallsteil einer der wahren Aurignacien-Industrien, oder aber einen Nichtabfallsteil einer neuen Industrie, die viel primitiver erscheint als die Komplexe Ost- und Mitteleuropas, welche man morphologisch im Allgemeinen mit dem Aurignacien zu bezeichnen pflegt. Ich bin geneigt, dieser zweiten Ansicht hinzutreten.

Wenn nun eine derartige Annahme richtig ist, so wäre vom morphologischen Standpunkte aus das oben erwähnte Inventar, wenn auch provisorisch und nur in allgemeinsten Umrissen jener Gruppe von verschiedenartigen obgleich seltenen Übergangsindustrien beizuzählen, die zwischen dem älteren und dem jüngeren Paläolithikum liegen. Die dieser Gruppe angehörenden Industrien sind voneinander derart morphologisch und genetisch verschieden, dass nur als einziges Bindeglied zwischen ihnen jener Übergangscharakter bestand, welcher in verschiedenen Graden und Arten ausgedrückt ist, wie auch die obere Altersgrenze dieser Industrien, für welche wir für Westeuropa das Ende des Frühaurignacien-Industrien Frankreichs annehmen können. Streng genommen lassen sich die beschriebenen Artefakte, als wahrscheinlicher industrieller Komplex, keiner bekannten wichtigsten Übergangsindustrien zuteilen, weder von der Boutmy-Muchembled in Montières-lès-Amiens¹⁾ (die stratigraphisch älter ist als die älteste Moustier-Industrie Nordfrankreichs und interglaziale Fauna zeigt) noch der Präcapsien-Industrie von El Sotillo²⁾ (die älter ist als das Spätacheuléen), noch zeigen

¹⁾ V. Comont. Moustérien à faune chaude dans la vallée de la Somme a Montières-lès-Amiens; Congr. Intern. d'Anthrop. et d'Archéol. Préhist., XIV session, t. I, p. 291—300.

²⁾ José Pérez de Barradas. Nuevas civilizaciones del paleolitico del Madrid; Butletti de l'Associacio Catalana d'Antropologia, Etnologia i Prehistoria, vol. segon, fasc. I, Barcelona, 1924.

sie irgendwelche Ähnlichkeiten mit den aus derselben Station stammenden Ibero-Mauritanischer Industrie, Aurignacienelementen.

Die vorliegenden Artefakte haben gleichermassen nichts Gemeinsames mit der aus Fitz-James (Oise) stammenden Industrie, noch mit der Prondniker Industrie (Aus der Höhle „Ciemna“ bei Ojców), die unbedingt dem älteren Paläolithikum angehören, obgleich sie gewisse Formen des Jungpaläolithikums besitzen.

In Ermangelung genauer Analogien zwischen den obengenannten oder sonst anderen Industrien und den Silexstücken aus Novosiłka Kostiukowa, halte ich diese letzteren bedingt für eine ganz neue, besondere Industrie, oder einen Teil derselben. Ferner vermute ich, dass zwischen dieser neuen Industrie und den gewissen Typen, besonders den Hohlmessern (*lames en gouge*) von den Spätaurignacien-Stationen Kostenki (Poliakofs) und Predmost, und dem korrekt ausgeführten Hohlmesser (*éclat en gouge*) von Czystopady¹⁾ (Wolhynien, Bezirk Brody; diese Station kann älter sein als die Spätaurignacien-Industrie) ein morphologischer und deshalb genetischer Zusammenhang anzunehmen ist.

Schliesslich scheint die Industrie der ersten Station von Novosiłka Kostiukowa eine neue Präaurignacien-Industrie, in jedem Falle aber eine philogenetisch ältere, als die Spätaurignacien-Industrien zu sein, und mit verwandten doch jüngeren Industrien (Kostenki, Predmost u. a.) eine neue territoriale Gruppe Mitteleuropas, hauptsächlich aber Osteuropas zu bilden.

Diese Gruppe ist in solcher Beziehung zur paläolithischen Kunst, dass sie mit der Hauptverbreitung der osteuropäischen geometrischen und figuralen schematisch-decorativen Motiven (H. Breuil u. H. Obermaier) der Spätaurignacien Kulturen übereinstimmt.

Die chronologische Zugehörigkeit.

Die chronologische Zugehörigkeit kann vor der Feststellung des Zusammenhanges zwischen dem die Silexstücke bedeckenden

¹⁾ Dieses Werkzeug befindet sich im Museum Dzieduszycki in Lemberg; Katalognummer 114. Herr J. Bryk behauptete v. J. 1925, dass es das einzige Silex-artefakt aus Czystopady, welches sich in diesem Museum befindet, ist. Sich auf diese Behauptung als eine genaue berufend, verbessere ich die Meinung G. u. A. de Mortillet, als dass es ein „*éclat du type Levallois*“ sein sollte. Das Silex N. 114 hat nichts Gemeinsames mit dem Abspliss Levallois; es ist einfach ein gutgeformtes Hohlmesser (*éclat en gouge*). Siehe: G. et A. de Mortillet. *Le pré-historique, origine et antiquité de l'homme*; 3-e éditions, Paris; S. 619, — wo man von der geographischen Ausbreitung der Moustérien-Kultur spricht: „Dzieduszycki possède de son coté un grand éclat du type Levallois provenant des alluvions de Chystopady, près de Brody“.

verlehmten sowie dem kalkhaltigem Löss, in dessen oberstem Teil die Silexstücke eingebettet gewesen sind, und den auf dem Höhenabhang die Station umlagernden Lössarten nicht bestimmt werden.

Beide Lössen sind sehr dünn und zeigen keinerlei charakteristische Faciesbildung, welche ihnen Plätze, die denselben in der idealen stratigraphischen Lösslagerung zukommt, verleihen könnte.

Nur das, was über die Veränderungen, denen die Station nach dem Verlassen derselben durch die Einwohner (Seite 15) gesagt werden konnte, gibt bei der Datierung in betreff der oberen Altersgrenze der Station einige Winke. Die in der Auftragung des Löss eingetretene Unterbrechung, während der die Silexstücke auf das gleiche Niveau gebracht, einige auf termischem Wege zerstückt, die Feuerstelle zerstört und die Knochen zersetzt, sind wohl geeignet, die Vermutung aufkommen zu lassen, dass die Industrie von Novosilka Kostjukowa zum wenigsten älter ist als der Jung-Aurignacienlöss.

Über die untere Altersgrenze der Station lässt sich auf Grund der Lagerungsverhältnisse nichts Bestimmtes behaupten.

Die hypsometrische Lage der Station im Verhältnis zur Kanionschulter des Sereth (Profil 1) kann ebenfalls beweisen, dass die Novosilka-Industrie viel altertümlicher ist, als die Spätaurignacien-Industrien, obgleich gegenwärtiger Zustand des praehistorisch-geologischen Wissens von Podolien auf keine normale Wertschätzung dieser wichtigen und interessanten Situation machen lässt.

*

Zum Schluss möchte ich noch meinen oben geäußerten Vorbehalt aufs nachdrücklichste wiederholen.

1. Das beschriebene Material könnte wohl auch nur einen Abfallteil eines Inventars bilden.

2. Ist sehr unzählig.

3. Liegt an der Schwelle Osteuropas, dessen paläolithische Vergangenheit trotz sich mehrender Funde noch dunkel und voll von Überraschungen ist.

Auf diese Umstände möchte ich das meiste Gewicht legen und zwar zu dem Zwecke, um jederzeit von meiner zweiten, die morphologische Bedeutung der Industrie von Novosilka K. betreffenden Meinung Abstand nehmen zu dürfen, falls sich dieselbe als falsch erweisen sollte, und einer anderen — warscheinlich der ersten Meinung — beitreten zu können.

Stefan Krukowski

Jänner und März d. J. 1926.

Præhistorische Anstalt d. Anthropologischen Instituts. Gesellschaft der Wissenschaften in Warschau. Strasse Śniadeckich Nr. 8.

Über schizophrene Einstellungen und Verhaltensweisen.

(Bemerkungen zu einem Artikel E. Minkowskis).

1. Einleitende Bemerkungen.

E. Minkowski hat neulich in einem in den „Annales médico-psychologiques“ publizierten Artikel den Versuch gemacht, den Begriff der „schizophrenen Attitüden“ („les attitudes schizopreniques“) in die französische Psychiatrie einzuführen¹⁾. In der psychopathologischen Phänomenologie sollte demselben, nach seiner Meinung, ein besonderer Platz zugewiesen werden. Es lasse sich nämlich manches, was im Bilde der Schizophrenie zum Vorschein kommt, und für dasselbe auch wesentlich ist, am besten als eine besondere „Attitude“ auffassen. Erläuternd spricht Minkowski in demselben Sinne von „façon d'être“ und „comportement“²⁾.

Das französische Wort „Attitude“ ist nicht leicht zu übersetzen, wenn man nicht den auch in deutscher Sprache gangbaren Terminus „Attitüde“ gebrauchen will. Jedenfalls steht der Begriff der Attitüde im Sinne Minkowski's demjenigen nahe, was man in der deutschen Sprache als „Verhaltensweise“ respektive als „Einstellung“ zu bezeichnen pflegt. Die Begriffe der „Einstellung“ und der „Verhaltensweise“ sind nicht identisch; der erste meint eher eine Disposition, der zweite dagegen etwas Aktuelles. Es liegt aber auch beiden etwas Gemeinsames zugrunde, wodurch sie z. B. in einen Gegensatz zur „Vorstellung“ gebracht werden können. In diesem Sinne verwendet beide Begriffe unter anderen Betz, wobei er sie, was für uns von Wichtigkeit ist, der „Attitüde“ gleichstellt. So sagt er z. B.: „Und dieses Verhalten, diese Reaktion, diese Attitüde will ich hinfort immer mit dem Wort Einstellung bezeichnen, im Gegensatz zur Vorstellung...“³⁾.

¹⁾ E. Minkowski. Les regrets morbides. Annales médico-psychologiques. Bd. 12. Jahr 1925.

²⁾ Ibid. S. 345.

³⁾ W. Betz. Vorstellung und Einstellung. Archiv f. d. ges. Psychologie Bd. 17. S. 270.

Es ist hier nicht unsere Absicht die erwähnten Begriffe einer logischen Zergliederung zu unterziehen und ihren feinen Differenzen nachzugehen. Für unsere Zwecke wird es genügen sie in dem etwas unbestimmten Sinne zu verwenden, der durch das Sprachgefühl umgrenzt ist. Diejenigen, welchen eine genauere Präzisierung dieser Begriffe erforderlich scheint, verweisen wir auf die einschlägigen Arbeiten von Kries¹⁾ und Betz²⁾. So beruft sich auch Minkowski bezüglich einer genaueren Analyse des Begriffes „Attitude“ auf die diesbezüglichen Ausführungen von Binet und Simon.

Dasjenige, worauf es hier ankommt, sind nicht die Termini und deren strenge Definitionen, sondern die Forschungsrichtung, der Gesichtspunkt, unter dem psychopathische Erscheinungen gesehen und geprüft werden. Zwar hat man seit jeher die „Verhaltensweisen“ und die „Einstellungen“ der psychisch Kranken, insbesondere der Schizophrenen, beschrieben und analysiert ohne besonderen Vermerk, dass das analysierte keine „Idee“, keine „Vorstellung“ sei, sondern eben eine „Einstellung“ respektive eine „Verhaltensweise“. So ist z. B. die Echopraxie und die Echolalie eine solche längst bekannte „Verhaltensweise“ der Kranken, die sichtlich darauf „eingestellt“ sind, das Perzipierte nachzuahmen³⁾.

Das Studium von schizophrenen Verhaltensweisen führt kein Novum in die Psychiatrie ein. Es kann sich aber jemand zum methodologischen Princip stellen, solche Erscheinungen bei der Schizophrenie besonders aufzusuchen und sie einer systematischer wemöglich experimenteller Prüfung zu unterziehen. Er kann dabei die Hoffnung haben, dass sich manches Neue und Wesentliche gerade auf diesem Gebiete werde finden lassen. Man kann der Meinung sein, das Studium der krankhaften Verhaltensweisen könnte in mancher Hinsicht fruchtbarer werden als dasjenige der krankhaften „Ideen“. Wie oft bildet denn gerade das eventuell stumme Verhalten der Kranken dasjenige Moment, welches uns die Schizophrenie mit voller Bestimmtheit zu diagnostizieren gestattet, wogegen das Fahnden nach krankhaften „Ideen“ uns ganz im Stiche lässt.

1) I. v. Kries. Über die Natur gewisser, mit den psych. Vergängen verknüpften Gehirnvorgänge. Zeitschrift f. Psychologie. Bd. 8. J. 1895.

2) o. c.

3) Minkowski selbst würde die Echopraxie und Echolalie sowie die gleich zu besprechende „Ambivalenz“ nicht den „Attituden“ zurechnen, da er diesen Begriff zu eng fasst. Wenn er die „Attitüde“ dem „Symptom“ gegenüberstellt, so hat er darin nicht Recht. Denn es kann sehr wohl auch eine „Attitüde“ zum „Symptom“ der Krankheit werden.

Man muss nicht gerade ein Anhänger des „Formalismus“ geschweige denn des „Behaviorismus“ in der Psychiatrie sein, um einzusehen, dass „Einstellungen“ und „Verhaltensweisen“ der Kranken oft das Zentrale und eigentlich Charakteristische des Krankheitsbildes ausmachen und es zu einem einheitlichen Ganzen gestalten beim wechselnden „Inhalt“. Man ist aber vielleicht etwas zu wenig diesen mehr „formalen“ Bestandteilen der Psychose nachgegangen, hat zu wenig ihre Struktur, ihren Verlauf, ihre Abarten beschrieben und geprüft und fertigte sie zu rasch mit irgend einer „Erklärung“ ab.

Welcher Psychiater hat nicht immer wieder Gelegenheit gehabt über die merkwürdige Verhaltensweise der Schizophrenen zu staunen, die z. B. flehentlich um einen Schluck Wasser bitten, im Moment aber, wo ihnen dasselbe geboten wird, es unter einem nichtigen Vorwand zurückweisen. Beispiele dieses wunderlichen Benehmens findet man öfters in der psychiatrischen Lehrbüchern, so die Kranken Bleulers, welche das Öffnen einer Tür dringend verlangen, aber von der einmal offen gelassenen Tür keinen Gebrauch machen. Bleuler nennt das Phänomen „Ambivalenz“¹⁾ und definiert es als „die Neigung der schizophrenen Psyche, die verschiedensten Psychismen zugleich mit negativem und positivem Vorzeichen zu versehen“²⁾. Es ist aber klar, dass dasjenige, was Bleuler sagt, eigentlich keine Definition, sondern schon eine Art von Erklärung oder wenigstens Interpretation darstellt. Dasjenige, was sich wirklich beobachten lässt, ist ein besonderes Benehmen des Kranken. Er verlangt Wasser und nimmt das angebotene nicht an. Er versucht die Tür zu öffnen, geht aber, wenn diese offen ist, nicht hinaus. Dies ist das Feststehende. Wie ihm aber dabei innerlich zugeht, ob er wirklich zu gleicher Zeit dasselbe wollen und nicht wollen, lieben und hassen, glauben und nicht glauben kann, ist schwer auszudenken und bleibt nur hypothetisch. Und ob sich die Erscheinung letzten Endes auf die „Dissoziation“ zurückführen und so begreifen lässt, das ist eine noch schwierigere Frage. Man muss bekennen, man steht vom Verständnis des Phänomens noch ziemlich weit. Man kann aber die Erscheinung lange studieren ohne sich genötigt zu fühlen, sie irgendwie gleich erklären zu müssen. Ist ein solcher Kranker nur einem bestimmten Gegenstand gegenüber ambivalent oder bildet die Ambivalenz immer eine allgemeinere Verhaltensweise? Sind die beiden Pole des

1) Respektive „Ambitendenz“.

2) Dementia praecox oder die Gruppe der Schizophrenien. S. 43.

Gegensatzes einander wirklich gleichwertig, oder ist wenigsten der eine von ihnen unecht? So z. B. verlangt der erwähnte Kranke Wasser, weil er wirklich Durst empfindet und bedeutet somit die Absage eine echte Überwindung des Triebes, oder verlangt er das Wasser nur so, weil es ihm eben in den Sinn gekommen ist? Ist dieses Wasser nicht überhaupt nur „symbolisch“ zu verstehen? Steht nicht die „ambivalente“ Einstellung oft der spielerischen Einstellung der Kranken nahe? Vielleicht spielt nur eigentlich der Kranke, der sich immer und immer bemüht, die Tür zu öffnen. Öffnet man sie ihm aber, dann ist er böse sein Spiel verdorben zu finden. Ich hatte beim Beobachten der Ja- und Nein-Einstellung der Kranken manchmal den Eindruck, dass dieselbe wirklich dem Spiel näher stand als der echten Ambivalenz im Sinne Bleulers. Und so liegt vor dem Beobachter in dieser Richtung noch ein weites Feld, auf dem wahrscheinlich noch Vieles zu suchen und zu finden ist.

Ähnliches gilt für eine andere Verhaltensweise, die bei den Kranken täglich zu beobachten ist, das Sichauskleiden¹⁾. Man kennt das Phänomen, man hat vielfach versucht, es zu erklären, es ist aber eigentlich wenig studiert worden. Die Kranken sind in der Regel nicht imstande, die Gründe ihres Benehmens zu explizieren. Um so eher könnte es von Bedeutung sein, nach den anderen Verhaltensweisen dieser Kranken zu fahnden, denen dasselbe beizuordnen wäre. Wie verhält sich der betreffende Kranke, der das Hemd vom Leibe reisst, einem beliebigen Gegenstand gegenüber, dessen er habhaft wird? Zerreisst er dieselben ähnlich wie seine Kleidung? Versucht er nicht vielleicht, wenn dieselben mit irgend etwas umwickelt sind, dieselben ihrer Hülle zu entkleiden? Ist er nicht bestrebt auch vom Bett, auf dem er liegt, alles Abnehmbare herunterzureissen? Bleibt der Kranke nach dem Ausziehen nackt, oder hüllt er sich in etwas, z. B. in das Bettuch ein? Nur im Rahmen eines grösseren Komplexes von Verhaltensweisen, die sich gegenseitig ablösen und miteinander verquicken, kann die eine von ihnen richtig eingeschätzt und verstanden werden. Die theoretische Umgrenzung eines solchen Komplexes und dessen

¹⁾ Man wird natürlich einwenden können, es wäre zu gekünstelt das Sichauskleiden eine „Verhaltensweise“ zu nennen, da sich die Erscheinung ganz einfach als eine Handlung bezeichnen lässt. Der Einwand ist nicht unberechtigt, obwohl die Grenzen der Begriffe fließend sind. Aus Gründen, die erst später gültig gemacht werden können, sollen auch solche „Handlungen“ in die Untersuchung mit einbezogen werden.

eventuelle experimentelle Durchprüfung für jeden besonderen Fall muss zum Postulat erhoben werden.

Es liegt mir die Anmassung fern, den anderen die methodologischen Grundsätze vorzuschreiben. Es soll ein jeder die Grundsätze, deren Wert er preist, vor allem zu den seinigen machen. Ich interessierte mich nun für die „Verhaltensweisen“ der psychisch Kranken lange, bevor mir Minkowski's Artikel in die Hände kam. Dies geschah aus dem Grunde, weil das Problem der „Urteilsgefühle“, um dessen Lösung auch ich mich seinerzeit bemüht hatte¹⁾, mich zwang, den Begriffen der Einstellung und der Verhaltensweise näher zu treten. Es lag nun nahe, diese der allgemeinen Psychologie entnommenen Termini, auch auf die psychopathischen Erscheinungen anzuwenden. So fand ich bei Minkowski nur eine willkommene Stütze meiner Überzeugung, obwohl sich seine „Attitude“ nicht genau mit demjenigen deckt, was wir da als „Verhaltensweise“ untersuchen möchten.

Eine systematische Übersicht aller Arten von „Einstellungen“ und „Verhaltensweisen“, die für die Schizophrenie pathognomonisch sind, liegt nicht im Plane dieser Arbeit. Sie bezweckt nur über einen Teil der Beobachtungen und Versuche, welche einige bei Schizophrenen öfters vorfindbaren Verhaltensweisen zum Gegenstand haben, vorläufig zu berichten.

2. Über „intellektuell-affektive“ Verhaltensweisen.

Minkowski unterscheidet zwei Arten von „Attitüden“: die rein intellektuellen und die intellektuell-affektiven. Zur ersten Gruppe gehört z. B. die „Attitüde des Fragens“ („l'attitude interrogative“) und der „krankhafte Rationalismus“ („rationalisme morbide“), der zweiten dagegen werden eingerechnet „das krankhafte Schmollen“ („bouderie morbide“), „das krankhafte Träumen“ („rêverie morbide“ und „das krankhafte Bedauern“ („les regrets morbides“). Man wundert sich gleich, dass die motorischen Attitüden dabei keine Berücksichtigung finden. Ohne aber diesen Punkt weiter zu urgieren, wollen wir die von ihm als „idéo-affectiv“ bezeichneten Verhaltensweisen näher ins Auge fassen, um darüber einige Bemerkungen auszusprechen.

Dass der schizophrene Prozess im Anfangsstadium oft das Gemütsleben der Kranken aufrüttelt, ist eine vielfach diskutierte Erscheinung, die manchmal auch diagnostische Schwierigkeiten

¹⁾ Über Urteilsgefühle. Lemberg 1916. Verlag der Ševčenko-Gesellschaft.

mit sich bringt. Man konstatiert, dass das schizophrene Krankheitsbild mit depressiver Verstimmung oder manischer Erregung einsetzen kann. In diesem Sinne lässt Kahlbaum die Katatonie mit melancholischen Symptomen anfangen. So spricht man andererseits von der melancholischen *Dementia praecox*¹⁾. Das schwierige Problem der „Mischpsychosen“ hat in diesen Erscheinungen seinen Ausgangspunkt. Wenn aber sogar „echte“ Manie und Melancholie kein immer gleiches Bild präsentieren (so steht zum Beispiel der heiteren Manie eine „zornige“ und „nörgelnde“ zur Seite), so gilt dasselbe in viel höheren Masse für die „manischen“ und „melancholischen“ Episoden der Schizophrenie.

Es lässt sich nicht bestreiten, dass manche dieser affektiven Episoden den echten manischen und melancholischen Zuständen wesensverwandt, eventuell sogar mit denselben identisch sind. Die Mehrzahl zeigt aber eine besondere Struktur. Erstens ist die Gefühlsskala, in der sich die Kranken da ausleben können, viel breiter als bei der Manie-Melancholie. Nicht nur Freude und Trauer, Zorn und Angst, sondern alle anderen Gefühlsnüancen können einzeln oder in gegenseitiger Verflechtung respektive Abwechslung dem Krankheitsbild für längere Zeit hindurch ihre Färbung ausdrücken. So z. B. das Gefühl des Staunens (den Kranken erscheint alles rätselhaft und wunderbar), das Unheimlichkeitsgefühl und der Ekel. Das letzte Gefühl scheint sich am liebsten mit Angst zu vergesellschaften. Einen meiner Kranken verfolgte es zu gleicher Zeit in seinen Erinnerungen, in seinen Halluzinationen und Nachts träumen (Würmer, die in einer klebrigen Masse auf der Glans des Penis herumkriechen, Schlangen, die er im Bette hinter dem Rücken zu spüren meint u. s. w.). Es handelt sich da oft um Gefühlserlebnisse, die den Normalen schwer zugänglich und nacherlebbar sind, uns aber manchmal auch von den Psychasthenikern geschildert werden, denjenigen nämlich, die der Schizophrenie nahestehen. So das Gefühl des Wirrwarrs, der Unordnung.

Es ist vielleicht irreführend, dass man diese ganze Mannigfaltigkeit der Gefühlsqualitäten mit dem Namen der depressiven und manischen Zustände belegt und so den Eindruck einer Gleichartigkeit erweckt, die gar nicht vorhanden ist. Einen Zustand z. B., in dem die Gefühle des Ekels und des Wirrwarrs die dauernde

¹⁾ G. Halberstadt. La démence précoce mélancolique. *Revue neurologique*. Bd. 11. S. 718. — Kraepelin spricht im gleichen Sinne von der „depressiven Verblödung“ und Bleuler von den depressiven und manischen Zuständen bei der Schizophrenie.

Grundnote bilden, kann man natürlich, wenn man will, depressiv nennen. Und doch ist er weit davon entfernt, was man gewöhnlich unter Depression versteht. Das psychologisch Interessante an der Schizophrenie ist eben dies, dass sie die verschiedensten emotionalen Komponenten des menschlichen Seelenlebens einmal zur Allgemeinherrschaft erheben kann.

Zweitens ist die Beziehung der Gefühle zu den intellektuellen Psychismen (Vorstellungen, Urteilen) in diesen affektiven Episoden der Schizophrenie in der Regel eine andere als in den echten manisch-melancholischen Zuständen. Da das Gefüge der intellektuellen Elemente und Funktionen durch den schizophrenen Prozess in sich selbst mehr gelockert ist, kann die plastische Wirkung der emotionalen Stimmung auf die Sphäre des Intellektes dadurch viel stärker werden. Es gelingt den Gefühlen infolge des verminderten Widerstandes des Intellektes leichter, die Vorstellungen und Urteile in Dienst zu nehmen und sich in ihnen zu objektivieren. Die erwähnten Episoden gestalten sich eben dadurch zu „ideo-affektiven“, wie sich Minkowski ausdrückt.

So begnügt sich das Angstgefühl solcher Kranken in der Regel nicht mit vagen Ahnungen und Vermutungen, wie es oft bei der Neurose und der Melancholie der Fall ist, sondern findet sich bald einen konkreten Inhalt, eine bestimmte Idee. Verbindet sich die Angst mit Grauen, so wird auch der Inhalt entsprechend ins Grauenhafte umgestaltet. (Der Kranke weiss, dass man ihn und seine Angehörigen martern wird, dass ihnen die Nägel ausgerissen werden sollen, dass man sie zerstückeln will u. s. w.).

Ein weiteres Moment, welches die Struktur dieser Episoden öfters mitbedingt, ist die Spieleinstellung. Toulouse und Schiff sprechen vom Eintreten eines „Spielsydroms“ im Verlaufe mancher Manien¹⁾. Mag dasselbe auch am Boden der Manie zum Vorschein treten, so ist dessen Rolle bei der Schizophrenie gewiss von grösserer Wichtigkeit. Aber nicht nur auf das motorische Spiel kommt es da an, welches die Schizophrenen so oft mit nie ermüdendem Fleiss treiben, sondern auf das Spiel mit „Ideen“. Ich meine eben dasjenige, was die genannten Autoren als „activité mentale de jeu“ bezeichnen. Schon die Einstellung auf Reimen, deren sich die Spieleinstellung so gerne als Vehikel bedient, bringt den Kranken dazu, auch mit Ideen zu „jonglieren“. Man sieht, wie leicht es ihm in

¹⁾ E. Toulouse et P. Schiff. Syndrome de jeu et activité mentale de jeu. Revue neurologique. Mai 1925. S. 695. (Sitzungsbericht).

der Regel fällt, dieselben mit Gewalt der Reimeinstellung unterzuordnen. Der Kranke selbst nimmt aber nicht ganz ernst den Inhalt solcher Produktionen. So bewegen sich auch die Ideen, welche den emotionalen Einstellungen entspringen, in einer besonderen Sphäre, die nicht diejenige der Wirklichkeit zu sein braucht. Es ist ein Spiel mit Vorstellungen, denen der Wirklichkeitsakzent nur in einem gewissen immer wechselnden Grade verliehen wird. Der volle Glaube an die Wirklichkeit ist nur ein Grenzfall, sofern die Geisteskraft des Kranken noch überhaupt imstande ist, dieses hohe Niveau der psychischen Synthese zu erschwingen. Die Spannung der geistigen Kräfte lässt nach der Meinung der beiden erwähnten Autoren bei diesem „Spielsyndrom“ so weit nach, dass das Individuum auf niedrigere Entwicklungsstufe, diejenige des Kindes regrediert, auf der zwischen Wirklichkeit und Phantasie keine festen Grenzen bestehen.

Auch dieser Umstand macht es den Gefühlen leichter, sich ein intellektuelles Korrelat zu verschaffen und so auch bei geringerer Intensität sich zu aktualisieren. Es wird dadurch aber auch das Band, welches beide zusammenhält, lockerer werden müssen. Wenn also manche Kranke, wie Bleuler bemerkt, über ihre eigenen depressiven Gedanken lachen können, dann muss dies nicht notwendigerweise durch eine Spaltung der Seele oder durch eine Schwächung der Affekte erklärt werden. Die Spielregeln sind nicht so ernst zu nehmen, wie diejenigen der Wirklichkeit. Auch sind das überhaupt andere Regeln.

Die Spieleinstellung macht auch oft die Maniertheit des Gefühlsausdrucks verständlich. Grollt zum Beispiel der Kranke über ein Unrecht, das ihm vermeintlich widerfahren ist, und glaubt er selbst nicht recht an dieses Unrecht, so kann auch der Groll kein echter sein. Das Pathos der Entrüstungsworte klingt hohl, die Geste der Empörung erscheint künstlich; und dies macht eben die Maniere aus.

Diese Momente bedingen die Struktur der intellektuell-affektiven Bilder der Schizophrenie. Es interessieren uns hier aber nicht diejenigen Fälle, wo die Halluzinationen und Wahnideen das Bild beherrschen, sondern solche, in denen eine besondere intellektuell-affektive Einstellung respektive Verhaltensweise für sich selbst die psychische Situation am eindeutigsten charakterisiert.

In Anbetracht der erwähnten Mannigfaltigkeit der Gefühlsqualitäten, welche der schizophrene Prozess zur Prävalenz bringen kann, bilden auch diese Verhaltensweisen eine bunte Mannigfaltigkeit.

tigkeit. Es kommen aber manche häufiger vor als die anderen und diese verdienen es deskriptiv fixiert zu werden. Darin scheint uns Minkowski recht zu haben. So möchte auch ich an dieser Stelle zwei Typen solcher Verhaltensweisen, wie ich sie beobachten konnte, an konkreten Beispielen demonstrieren.

Das erste Beispiel betrifft die schizophrene ironische Einstellung. Das manche Schizophrene gerne ironisieren, wurde schon öfters bemerkt. Es hängt dies gewiss zusammen mit der „klügelnden“ Einstellung, dem „krankhaften Rationalismus“ zusammen, welche Minkowski als Beispiel eine schizophrene „Attitude“ anführt. Denn die Ironie, obwohl immer von einem Gefühl getragen, erheischt eine ausgesprochene Mitwirkung des Intellektes.

Was macht aber die Ironie der Schizophrenen zu einer schizophrenen Ironie? Sie kann schizophren sein in dem Sinne, dass eben der schizophrene Prozess eine latente Disposition des kranken Individuums zum Ironisieren aktualisiert. Sie trägt aber abgesehen davon in der Regel in sich selbst, d. h. in ihrer Struktur, Merkmale, die sie zu einer schizophrenen stempeln.

Ich konnte vor einigen Monaten bei einer Kranken in der Nervenabteilung des allgemeinen Krankenhauses in Lemberg folgendes eigentümliches Verhalten beobachten. Die Kranke sprach wenig und ungerne, so dass man nur selten eine Antwort von ihr hören konnte. So bekam man auf die Fragen nach der zeitlich-räumlichen Orientierung, und ob sie krank sei, niemals (während des dreimonatlichen Aufenthaltes auf der Abteilung) eine Antwort. Auch folgte sie nicht den Anordnungen der Ärzte. Auch mit dem Essen gab es zeitweise grosse Schwierigkeiten (einen Monat hindurch musste die Kranke mit Sonde ernährt werden). Servierte die Pflegerin der Kranken das Essen, so nahm sie einfach keine Notiz davon ohne irgend welche Begründung oder Rechtfertigung. Versuchte ich, die Kranke zum Essen zu überreden, so bekam ich oft keine Antwort. Manchmal aber reagierte sie auf meine Worte in einer eigentümlichen Weise. So wenn ich sagte: „Essen Sie doch!“ erwiderte die Kranke: „Ich werde essen. Ich werde überhaupt alles tun, was Sie verlangen. Verlangen Sie noch mehr, ich tue es“. Wenn ich ihr aber gleich nach diesen Worten das Essen anbot, nahm sie nichts davon, ohne dies irgendwie zu motivieren; sie schwieg, wenn ich sie über die Gründe ihrer Inkonsequenz befragte. Dies wiederholte sich einige Male. Ähnlich benahm sich die Kranke, wenn ich sie bat, mit mir in das Untersuchungszimmer zu gehen. Ihre Antwort lautete: „Ich gehe gleich. Ich gehe überall,

wohin sie nur wollen. Sie haben doch das Recht da zu befehlen. Auch in den Keller können sie mich führen. Ich werde Ihnen folgen“. Nach diesen Worten ging aber die Kranke nicht, ohne ein Wort weiter zu sagen. Fasste ich sie an der Hand und versuchte sie mitzuführen, dann machte sie einen verbissenen Gesichtsausdruck und wehrte sich mit aller Kraft dagegen. Auch dies wiederholte sich einige Male mit fast stereotyper Ähnlichkeit.

Wir haben da wiederum das Beispiel eines Ja- und Nein-Verhaltens. Kann es als Ausdruck einer Ambivalenz aufgefasst werden? Sicherlich nicht. Es ist ein Zeichen der Ironie, ein Produkt der ironischen Einstellung der Kranken dem Arzte gegenüber. Es trägt aber diese Ironie deutlich die Züge des Krankhaften, Schizophrenen.

Das Benehmen der Kranken lässt sich nun mit deren sonstigen Verhaltensweisen gut in Einklang bringen. Ihre Einstellung der Umgebung gegenüber war abwechselnd einmal diejenige der entschiedsten aktiven Ablehnung (die „Trotzeinstellung“) und ein andermal diejenige des passiven Sichgewährenlassens. Sie war einmal negativistisch; nichts liess sie willig mit sich geschehen. Die Einführung der Nährsonde musste einen heftigen Widerstand überwinden. An anderen Tagen dagegen liess sie alles mit sich tun. Sie nahm zwar selbst kein Essen, liess sich aber willig den Schlauch in den Magen einführen. Sie urinierte auch nicht von selbst, liess sich aber ohne Widerstand kateterisieren. Einmal weinte sie, jammerte und schrie mit heulender Stimme ununterbrochen einige Stunde so heftig, dass man schliesslich durch ein Narkotikum die Kranke beruhigen musste, manchmal dagegen (freilich viel seltener) lachte sie laut ohne wahrnehmbaren Grund. Einmal machte sie sich auch über ihre Nachbarin lustig, indem sie dieselbe wegen ihres Namens verspottete.

So pendelte die Kranke immer zwischen zwei entgegengesetzten Polen, ohne sie zu einem Ausgleich bringen zu können. In ihrer Ironie begegneten sich beide Pole, aber so zu sagen nicht mit gleichem Ernst. Sie liess alles mit sich machen, aber nicht wirklich, sondern sie spielte nur mit diesem Gedanken, und sie widersetzte sich dem Willen des Arztes mit vollem Ernst. Es war ein Scherz und ein bitterer Hohn, ein Spott über den Arzt und ein Protest gegen das Schicksal. Die Kranke soll vor der Krankheit viel Kummer gehabt haben; zuerst wegen des Bräutigams, der ihr untreu wurde und zweitens wegen Zwistigkeiten mit der Familie in Vermögensangelegenheiten. Ihre Ironie konnte also dadurch

motiviert sein wie auch das Weinen und Lachen. Dieser Grund konnte aber nur vermutet werden, denn die Kranke selbst wollte mit dem Arzte über dieses Thema niemals sprechen.

Das zweite Beispiel, das wir hier anführen wollen, betrifft diejenige Einstellung, deren Kundgebungen man mit den Ausdrücken: „Groll“, „Mürrischsein“, „Schelten“ andeuten könnte. Einen einzigen passenden Namen dafür zu finden ist schwer. Es handelt sich da nicht um heftige Wut- und Zornausbrüche, die natürlich auch bei Schizophrenen vorkommen können, sondern um eine eigenartige prothrahierte nörgelnde Einstellung, die durchgängig keine starken Gefühlsparoxysmen produziert, dafür aber eine leichte Ansprechbarkeit und starke Aktualisationstendenz aufweist.

Das Nörgeln kommt bekanntlich auch bei der Manie vor, man beobachtet es gelegentlich auch bei Fieberdelirien; dasjenige der Schizophrenie hat aber öfters einen anderen Charakter. Das manische Nörgeln geht vom Herzen aus und ist immer vom Willen geleitet, mit der Umgebung den Kontakt zu erhalten; der Manische nörgelt, da er ernstlich überzeugt ist, dass ihm Unrecht geschehe. Der Schizophrene scheint viel eher die Motive seiner Unzufriedenheit nicht ganz ernst zu nehmen. Auch ist das Nörgeln bei ihm mehr die Waffe des „Autismus“, ein Mittel, den anderen den Verkehr mit ihm zu verleiden. Es bildet oft die allgemeine Einstellung des Kranken der Aussenwelt gegenüber. So geschieht manchmal, dass der Kranke, sich selbst überlassen, in ganz ruhiger, selbstgenügsamer Stimmung irgend etwas treibt, was ihm eine Satisfaktion zu bereiten scheint. Tritt aber jemand an ihn heran, dann macht er gleich ein unzufriedenes Gesicht und findet rasch etwas, vorüber er ungehalten werden kann. Und wenn irgend ein Bedürfnis ihn selbst zwingt, die Sphäre der Selbstgenügsamkeit zu durchbrechen und sich an die Umgebung zu wenden, so macht er es in einem mürrisch befehlenden Ton. Das, was er verlangt, wird dargestellt als etwas, was nur durch die Vernachlässigung seitens anderer nicht längst schon geschehen ist.

Ich konnte diese Verhaltensweise u. A. gut bei einem 25-jährigen Mädchen beobachten, welches gleich nach Ausbruch des ersten Schubs in das hiesige Spital gebracht wurde. Sie lag allein in einem Zimmer und dies sagte ihr sichtlich am meisten zu. Niemals verlangte sie, dass jemand zu ihr komme, weder vom Pflegepersonal noch von der Familie. War niemand sonst im Zimmer, dann war sie fast immer mit irgend etwas „beschäftigt“. So zog sie z. B. die Matratzen von den Betten herunter (es standen

zwei Betten in diesem Zimmer), machte sich aus ihnen ein Lager am Fussboden, legte sich darauf und sprach laut zu sich selbst oder sang (sie besuchte vor dem Ausbruch der Krankheit das Konservatorium), wobei sie Wortspielereien trieb und öfters reimte. Kam nun jemand ins Zimmer, dann machte sie gleich einen grimmen Gesichtsansdruck und wandte sich vom Eintretenden ab; manchmal deckte sie sich auch dabei den Kopf mit der Bettdecke zu. Redete man sie an, dann bekam man von ihr oft keine Antwort, oder sie fertigte den Fragenden mit irgend einer kurzen, im mürrischen Tone gesprochenen Bemerkung ab. Nur selten war es möglich, von ihr direkt manches über ihre inneren Erlebnisse zu erfahren (sie meinte manchmal, irgend jemand werde sie ermorden¹⁾). Es kommt zum Beispiel die Mutter der Kranken zu Besuch und setzt sich neben ihr am Bettrand. Die Kranke sieht es, scheint aber keine Notiz davon zu nehmen. „Warum reichen sie der Mutter die Hand nicht?“ frage ich. „Man kann jemand auch im Geiste grüssen“ antwortet sie mürrisch und bleibt weiterhin stumm. Ich betrete ein andermal das Krankenzimmer; die Kranke erwiedert nicht meinen Gruss, sie fixiert mich nur einige Zeit mit grimmigen Gesichtsansdruck. Dann sagt sie im scharfen befehlenden Ton: „Die Dame, die dort im Nebenzimmer liegt, hat Honig. Ich muss auch Honig haben. Lassen Sie mir auch Honig geben, aber gleich“. (Die Behauptung der Kranken war unrichtig; niemand von den Kranken hatte Honig bekommen). Als ich nun der Kranken den Vorschlag machte, mit mir hinzugehen und sich zu überzeugen, dass sie sich geirrt hatte, ging sie nicht darauf ein, sondern wandte sich von mir ab und schwieg. Hatte die Kranke wirklich Appetit, dann bat sie nicht ums Essen, sondern sie schimpfte: „Das Essen, das meine Mutter mir ins Spital zugeschickt hatte, ist schon lange da (die Behauptung der Kranken war falsch); warum lässt man mich hungern“.

Man konnte sich aber des Eindrucks nicht erwehren, die Kranke wisse es irgendwie, dass sie keinen echten Grund zum zürnen hätte und spiele nur eine ihr bequeme Rolle. Sie wüsste, dass ihr Groll von aussen her nicht recht motiviert sei, und darum klinge ihre Entrüstung nicht echt, sondern künstlich pathetisch. Es gelang auch manchmal die Kranke gewissermassen zu überrumpeln und sie aus ihrer Rolle zu bringen. So trat einmal eine Ärztin, die die Kranke bis jetzt nicht gekannt hatte, rasch

¹⁾ Die Kranke ist auch wirklich später von ihrem Bruder „aus Mitleid“ erschossen worden.

an dieselbe heran und sagte in einem scherzenden aber herzlichen Ton: „Guten Tag Fräulein W. Reichen sie mir doch die Hand zum Gruss“. Die Kranke, welche in der Regel niemand die Hand reichte, schien nun einmal aus der Fassung zu kommen. Der grimmige Gesichtsansdruck verschwand, sie wurde sichtlich verlegen, und sagte dann in einem Tone, als ob sie sich vor sich selbst entschuldigen wollte: „Ja, wirklich, meine Hand ist heute zufälligerweise rein“, worauf sie ihre Hand zum Gruss entgegenstreckte.

Das Benehmen der Kranken hat etwas Gemeinsames mit den von Borel als „bouderie morbide“¹⁾ beschriebenen Fällen, stellt aber im Ganzen einen besonderen Typus dar.

So schafft sich der schizophrene Kranke einen besonderen „Stil“ des Verhaltens, der eine konstante nicht immer leicht zu beschreibende Gefühlslage in verschiedenen Varianten zum Ausdruck bringt. Und trotz im Ganzen launenhaften und unberechenbaren Benehmens zeigen die Kranken in dieser Hinsicht eine merkwürdige Konstanz.

3. Über „handlungsartige“ Verhaltensweisen.

Unter den verschiedenartigen Verhaltensweisen der Schizophrenen gibt es noch eine, von Minkowski nicht berücksichtigte Gruppe, bei der nicht die wörtlichen Äusserungen der Kranken sondern ihr „Tun“ (respektive Nicht-Tun) auf dem ersten Plan steht. Oft ist übrigens dieses Tun das Einzige, was sich bei dem Kranken beobachten lässt, wenn nämlich seine Verhaltensweise ganz „stumm“ ist. Von einem Tun im Sinne einer „Handlung“ kann man da manchmal nur im erweiterten Sinne des Wortes sprechen. So wenn ein stumm hinbrütender Kranker den ihm vorgezeigten Gegenstand eine längere Zeit fixiert, als wäre er von ihm „magnetisch“ angezogen (ohne etwas dazu weder spontan noch auf Befragen zu sagen), so ist das eine bestimmte Verhaltensweise, die für seinen psychischen Zustand charakteristisch ist, eigentlich aber keine „Handlung“. Oder wenn der Kranke einen ihm gezeigten Gegenstand selbst nicht in die Hand nimmt, ihn aber, wenn derselbe einmal in die Hand geschoben wird, dennoch mit den Fingern festhält, ohne sich aber weiter um den Gegenstand zu kümmern, so kann man da, wenn man will, von einer „Instinktivhandlung“ sprechen. Das Charakteristische dabei ist aber nicht, dass der Kranke den Gegenstand in der Hand hält, sondern,

¹⁾ A. Borel. Réveurs et boudeurs morbids. Journal de psychologie. J. 1925.

dass er sich die Mühe gibt, ihn festzuhalten, obwohl ihn derselbe offenbar gleichgültig lässt und er damit nichts Weiteres anfängt. Es liegt da also eine besondere Verhaltensweise des Kranken vor, die sowohl durch positive wie auch durch negative Momente gekennzeichnet ist.

Charakteristisch für eine Verhaltensweise kann also nicht nur dasjenige sein, was der Kranke tut, sondern auch dasjenige, was er unter gegebenen Umständen zu tun versäumt. So, wenn der Kranke auf einzelne hinter seinem Rücken plötzlich vernehmbare laute Knallgeräusche so reagiert, dass er sie z. B. laut rechnet, ohne aber sich umzudrehen und nach deren Ursache zu spähen (Ausfall einer „Instinktivhandlung“).

Die „handlungsartigen“ Verhaltensweisen weisen für den Forscher den Vorteil auf, dass sie sich oft auch da provozieren und experimentell beeinflussen lassen, wo der mündliche Kontakt mit dem Kranken gänzlich aufgehoben ist. Leider gibt es aber bis jetzt keine Tests, die überall in Krankenhäusern eingebürgert, bei jeder Krankenuntersuchung berücksichtigt und in allen diesbezüglichen Krankengeschichten vermerkt eine entsprechend breite und feste Grundlage zur theoretischen Bearbeitung dieser Verhaltensweisen und deren praktischen Verwendung bei Differentialdiagnose bilden könnten¹⁾.

In der Absicht, diese „handlungsartigen“ Verhaltensweisen der Kranken kennen zu lernen, habe ich mir vorgenommen, jedem psychisch Kranken meiner Beobachtung, mit dem ein richtiger sprachlicher Kontakt unmöglich war, eine gewisse Anzahl von immer gleichen Gegenständen auf immer gleiche Art zu präsentieren und das Verhalten der Kranken denselben gegenüber zu notieren. Es waren dies teils Gebrauchsgegenstände (eine zugekorkte Flasche mit Flüssigkeit gefüllt, eine kleine Schachtel), hauptsächlich aber Spielsachen (ein Gummiball, eine kleine gekleidete Puppe, winziges Küchengeschirr). Dies alles wurde dem Kranken in einer Glasschale zusammen präsentiert in einer solchen Entfernung, dass er die Gegenstände leicht in die Hand nehmen konnte. Es wurde dabei kein Wort gesprochen (auch bei den Kranken, die auf Zurufe reagierten) und nur dafür gesorgt, dass der Kranke

¹⁾ Die Wichtigkeit der Verhaltensweisen und Einstellungen in der Struktur mancher nicht schizophrener Psychosen betont Grüntal in seiner in Zeitschr. f. d. ges. Neur. u. Psych. Bd. 92. veröffentlichten Arbeit über „Einstellungsstörungen“. Auch Homburger sieht gerade in besonderen „Verhaltensweisen“ das Charakteristische mancher Psychopathieformen (Psychopathologie des Kindesalters).

dieselben in Sicht bekam. Griff der Kranke nicht zu, dann wurden ihm die Gegenstände einzeln in die Nähe der rechten Hand gelegt. Fasste er auch dann keinen Gegenstand mit der Hand, so wurde ihm einer derselben in die Hand geschoben. Am zweiten, eventuell am dritten Tag wurde die Probe in gleicher Weise wiederholt.

Ich werde über die Ergebnisse dieser Versuche, die noch nicht abgeschlossen sind, später berichten und dabei auch zum Vergleich dasjenige berücksichtigen, was mir von ähnlichen Untersuchungen anderer bekannt ist. Vorläufig will ich nur davon manches mitteilen, was mir geeignet scheint, die Eigenartigkeit der handlungsartigen Verhaltensweise bei Schizophrenen zu charakterisieren.

Erstens muss festgestellt werden, dass man bei dieser Methode sehr oft seitens solcher Kranken eine positive Reaktion bekommt, bei denen man es von vornherein eigentlich nicht erwarten würde. Viele Kranke, von denen kein Wort zu hören ist, und die sich scheinbar für nichts interessieren, strecken gleich die Hand nach irgend einem der präsentierten Gegenstände¹⁾. Autistische Kranke zeigen in der Regel dabei keine Verwunderung, kein Staunen und keine Freude, sie verfahren den Gegenständen gegenüber nur „handlungsmässig“. Die kleine Schachtel wird dabei in der Regel gleich geöffnet (eventuell mit Hilfe von Zähnen), wobei über das Leersein derselben keine Enttäuschung geäußert wird. Die Flasche wird entkorkt und es wird eventuell an ihr gerochen.

Das sind Verhaltensweisen, die uns gewissermassen als „normale“ anmuten. Es ist interessant, wie manche Kranke dabei bedacht sind, der Eigenart der Gegenstände gerecht zu werden. So wird das winzige etwa 4 cm lange Messerchen zart am Griff gefasst und nicht an der „scharfen“ Knnte. Dies geschieht aber nicht immer. Der Kranke nimmt den Gegenstand in die Hand und macht dabei etwas, was mit dessen üblicher Verwendung nichts Gemeinsames hat. So bekommt man ziemlich oft zu sehen, wie der beliebige Gegenstand z. B. der Ball an verschiedene Gegenden des Körpers sukzessive gepresst wird (häufig an die Brust, manchmal auch an die Genitalien oder an den Nabel).

¹⁾ Meine Versuche wurden bis jetzt hauptsächlich an weiblichen Kranken durchgeführt.

Diese „auteerotische“ Verhaltensweise zeigt Übergänge zu einer „magischen“; so erklärte später eine Kranke, welche die Flasche an den Nabel drückte, auf diese Weise die Schlange aus ihrem Bauch herauszulocken. Verfügt man nicht über wörtliche Äusserungen der Kranken, dann ist die Zuweisung einer einzelnen Handlung in eine bestimmte dieser Gruppen oft unmöglich. Oder der Kranke ist destruktiv eingestellt. Er versucht jeden Gegenstand, den er in die Hände bekommt, zu zerdrücken oder zu zerreißen.

Es ist nicht meine Absicht, alle bei diesem Versuch feststellbaren Arten von „Handlungen“ aufzuzählen und zu ordnen. Es soll da nur folgendes vermerkt werden, das dieselben im Ganzen charakterisiert. So bilden in der Regel die Verhaltensweisen eines jeden Kranken in dieser Sphäre ein System, das eine einheitliche Struktur aufweist. Diese Struktur weist oft eine bemerkenswerte Beharrungstendenz auf. Die Einstellung den präsentierten Gegenständen gegenüber, die der Kranke an einem Versuchstag bekundet, ändert sich oft in den nächsten Tagen sehr wenig, so dass man das Bild der „photographischen Treue“ der Verhaltensweise zu sehen bekommt. Die Verhaltensweise des Kranken offenbart einen eigentümlichen, persönlichen „Stil“, an dem er durch eine längere Zeitspanne festhält.

Nehmen wir ein Beispiel. Einer schizophrenen Kranken, die ganz mutistisch ist, sich selbst überlassen Bewegungstereotypien treibt, auf Zuruf sowie auf starke Geräusche in keinerlei merklicher Weise reagiert, mit der also scheinbar jeder Kontakt abgebrochen scheint, werden die erwähnten Gegenstände vorgelegt. Sie greift gleich nach dem Ball, nimmt ihn in die Hand und drückt ihn an die Herzgrube, dann an den Bauch und zuletzt an die Genitalien. Nachher nimmt sie den Ball vom eignen Körper weg, umschliesst ihn mit den Fingern der rechten Hand und drückt ihn mit aller Kraft zusammen.

Versucht man ihr den Ball aus der Hand zu nehmen, dann drückt sie ihn umso fester. Wird er ihr aber mit Gewalt entrissen, so kümmert sie sich um ihn nicht mehr. Gibt man ihr nun die Puppe, so wiederholt sich das Gleiche mit der Abänderung, dass der eigene Körper jetzt kürzer damit „abgetastet“ wird. Wegen der Schwierigkeit, die von der Kranken genommenen Gegenstände wieder zu erhalten, werden an diesem Tage der Kranken die anderen Gegenstände nicht mehr präsentiert. Am nächsten Tage wird der Versuch mit denselben Gegenständen wiederholt. Und

wiederum wird der Ball in die Hand genommen, der Körper damit abgetastet und dann zerdrückt. Die Probe, der Kranken den Ball zu entreissen, trifft auf Widerstand. Dasselbe geschieht mit der Puppe.

Eine andere Kranke nimmt an einem Tage den Ball in die Hand, schleudert ihn gleich zu Boden und versucht dann ihn zu fangen. Die Puppe aber stellt sie mit den Füßen auf die eigene Stirn und macht dort mit derselben balancierende Bewegungen. Am zweiten Tag greift sie ganz ähnlich nach dem Ball und schleudert ihn zu Boden. Was nun die Puppe anbelangt, so unterliegt die Verhaltensweise von gestern nur einer kleinen Abänderung, welche durch die Änderung der Umstände verständlich ist. Am vorigen Tage lag die Kranke während des Versuches; es bildete also die Stirn eine horizontale Fläche, auf der die Puppe aufrecht stehen konnte. Am zweiten Tag dagegen sass die Kranke; es war also die Stirn zum Aufrechtstellen der Puppe nicht mehr geeignet. Die Kranke verwendet jetzt also nicht die Stirn, sondern den linken Vorderarm als Postierungsfläche für die Puppe, wo nun mit derselben ganz gleich wie gestern balancierende Bewegungen ausgeführt werden.

Wiederum eine andere Kranke ist am ersten Versuchstage bemüht, die Puppe zu entkleiden, wobei dies am Hals der Puppe angefangen wird. Beim nächsten Versuch tut sie genau das Gleiche auf die gleiche Art.

Zwei Momente müssen dabei, wie schon erwähnt, hervorgehoben werden. Erstens: Provoziert man bei einem Kranken eine Reihe von „Handlungen“, so kommt darin oft eine bestimmte, einheitliche Verhaltensweise zum Vorschein. Es offenbart sich dabei eine eigenartige Einstellung (respektive ein System von Einstellungen), welche allen diesen „Handlungen“ einen spezifischen Charakter, einen „Stil“ verleiht. Und zweitens: Die Einstellung und somit auch die Verhaltensweise weist eine bedeutende Festigkeit auf, die ihr erlaubt sich länger zu behaupten. Diesen beiden Momenten tut keinen Abbruch die Tatsache, dass das Spezifische eines solchen Systems von Einstellungen einer genaueren Präzisierung und Benennung manchmal grosse Schwierigkeiten bietet¹⁾.

¹⁾ Dass man bei verschiedenen spontanen „Handlungen“ der Schizophrenen, deren Sinn uns unverständlich ist (z. B. das Sichauskleiden), vor allem nach der allgemeineren Einstellung fahnden soll, denen diese Handlungen entspringen, war das Postulat, welches wir schon früher formulierten.

Es liegt da also etwas ähnliches vor, wie wir es in der intellektuell-affektiven Sphäre beobachten konnten. Den intellektuellen und den intellektuell-affektiven Verhaltensweisen und Einstellungen der Schizophrenen sind also die „handlungsartigen“ zur Seite zu stellen, mit denen sie wesensverwandt sein können. Ihr Studium ist umso lohnender als sie, wie es sich zeigt, den experimentellen Methoden nicht allzuschwer zugänglich sind.



Про остачу Lagrange'вого ряду.

[М. Kravčuk: Über das Restglied der Lagrange'schen Reihe.]

Остачу Lagrange'вого ряду:

$$(1) \quad F(x) = F(a) + \frac{t}{1!} F'(a) \varphi(a) + \frac{t^2}{2!} [F'(a) \varphi^2(a)]' + \dots + \\ + \frac{t^n}{n!} [F'(a) \varphi^n(a)]^{(n-1)} + R_{n+1},$$

де x в корінь рівняння

$$x = a + t \varphi(x),$$

представив Чебишев у формі:

$$(2) \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} [F'(x) (t\varphi(x) + a - y)^n] dx,$$

де по виконанні дії $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ треба покласти $y = x$. Золотарев дав иншу формулу:

$$(3) \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_a^x F'(x) (t\varphi(x) + a - y)^n dx.$$

Користаючи з тих самих засобів, що й згадані два автори, ми доведемо, що

$$(4) \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-p}}{d\alpha^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} [F'(x) (t\varphi(x) + a - y)^n] dx,$$

де по виконанні дії $\frac{\partial^p}{\partial x^p}$ треба покласти $y = x$.

Нам доведеться послугуватися наступним взором частинної інтеграції:

$$(5) \quad \int F(x, y) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \int F(x, y) dx - \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int F(x, y) dx \right] \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi,$$

що його легко перевірити диференціацією. Тут x та y є функції незалежних змінних ξ, \dots ; перший та третій інтеграл береться по змінному ξ , другий є частинний інтеграл по змінному x .

З допомогою взору (5), взявши $\xi = x$, $y = a - x$, напишемо:

$$(6) \quad \int_a^x \frac{\partial^n}{\partial x^p} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] dx = \left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] \right]_a^x + n \int_a^x \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] dx.$$

Коли $p \leq n$, то (6) можна написати так:

$$(7) \quad n! \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n \right] dx - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-1} \right] dx = -\frac{t^n}{n!} \left[F'(a)\varphi^n(a) \right]^{(p-1)}$$

Подібномж маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-1} \right] dx - \\ & - \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x \frac{\partial^{p-2}}{\partial x^{p-2}} \left[F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-2} \right] dx = \\ & = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[F'(a)\varphi^{n-1}(a) \right]^{(p-2)} \\ (7_1) \quad & \frac{1}{(n-p+1)!} \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left[F'(x)t\varphi(x) + a - y)^{n-p+1} \right] dx - \\ & - \frac{1}{(n-p)!} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^{n-p} dx = -\frac{t^{n-p}}{(n-p)!} F'(a)\varphi^{n-p+1}(a). \end{aligned}$$

Додавши рівності (7) та (7₁), дістанемо:

$$(8) \quad \frac{1}{(n-p)!} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p} dx - \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} F'(a)\varphi^{n-p+1}(a) - \\ - \frac{t^{n-p+1}}{(n-p+1)!} \left[F'(a)\varphi^{n-p}(a) \right]' - \dots - \frac{t^n}{n!} \left[F'(a)\varphi^n(a) \right]^{(p-1)} = \\ = \frac{1}{n!} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n \right] dx.$$

А що, з огляду на поданий вислід Золотарева, маємо:

$$(9) \quad \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p} dx = \\ = F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-p} \frac{t^k}{k!} \left[F'(a)\varphi^k(a) \right]^{(k-1)}$$

то, здиференціювавши рівність (8) $n-p$ разів по a , переведемо її на

$$(10) \quad F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} \left[F'(a)\varphi^k(a) \right]^{(k-1)} + \\ + \frac{1}{n!} \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n \right] dx,$$

що й малося довести.

Коли в (10) покласти $p=0$, то остача (4) дістане форму (3), а коли взяти $p=n$, то вона перейде на (2).

Résumé.

Ist x die Wurzel der Gleichung

$$x = a + t\varphi(x),$$

so kann das Restglied der Reihe:

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} \left[F'(a)\varphi^k(a) \right]^{(k-1)} + R_{n+1}$$

in folgender Form:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n \right] dx \quad (p \leq n, y = x)$$

dargestellt werden.

Цементованне заліза і сталі бором і берилем.

(Prof. I. Fetschenko-Tschopivskyj. Die Cementation des Eisens und des Stahles mit Bor und Beryllium).

А. Цементуванне заліза й сталі бором.

І.

Подібно тому як в нинішні часи увесь науковий, технічний і промисловий загал сильно цікавиться теорією та практикою легких сплавів, так років з двадцять тому назад загальну увагу техніки і промисловости зосередковували на собі сталі сплавів, які тільки що тоді вийшли зі стадії експериментів і почали застосовуватися на широку скалю у практичному життю.

Між численними домішками, які додавали до заліза в цілях уліпшення його властивостей, час від часу зустрічався й бор. Для того були певні причини. А між такими причинами, може чи не на найпершому місці, були фізичні і хемічні властивости самого бору, що в періодичній системі займає місце побіч вугля, а особливо хемічні властивости обох сих першнів, що дуже подібні між собою. Звідти логічним було припущення, що сплав Fe—В будуть подібні до сплавів Fe—С принаймні під зглядом своїх механічних властивостей. Тим більше, що H. Moissan і Charpy ще в 1890 році замітили, що м'яка сталь, що містила у собі 0,17% С та 0,58% В, виказала в стані кутім й випаленім $R = 46 \text{ kg/mm}^2$ і $A = 11\%$, а в стані гартуванім від 900° мала $R = 120 \text{ kg/mm}^2$ і $A = 2,7\%$ і в той-же час не стратила спосібности до механічної обробки на зимно. Пізнійше L. Guillet в 1907 році працював з боровими сталями, що містили у собі $C = 0,2-0,6\%$ та $B = 0,2-1,5\%$ і установив між иншим, що сталь з 0,22% С та 0,46% В в стані випаленім при 900° , а за тим загартуванна від 850° виказала ось такі механічні властивости:

В стані випаленім		В стані гартованім	
Границя пластичности kg/mm^2 (P)	20,2		100
Розривне напруження kg/mm^2 (R)	39,6		147,5
Видовження в % (A)	27		6,5
Звуження в % (C)	55		30,6
Твердість kg/mm^2 (H)	105		311

Пізнійше проф. М. Чижевський та І. Михаловський порівняли твердість по Brinell'ю стопів Fe—C зі стопами Fe—B в стані випаленім і отримали такі результати:

Стопи Fe—B

Майже чисте залізо		86	kg/mm^2
те саме залізо + 0,40% B		108,5	"
" " " + 0,73 "		175,0	"
" " " + 1,21 "		227,0	"
" " " + 1,93 "		242,5	"
" " " + 3,26 "		318,0	"
" " " + 4,32 "		510,0	"

Стопи Fe—C

Майже чисте залізо		86	kg/mm^2
те саме залізо + 0,2 % C =		108,5	"
" " " + 0,6 "		175	"
" " " + 0,91 "		227	"
" " " + 1,25 "		286	"
" " " + 1,73 "		271	"
" " " + 1,90 "		239	"
" " " + 2,27 "		184	"

Як відомо, більші ступні твердості в стопах Fe—C можна отримати лише після гартовання (maximum около 700 kg/mm^2 при завартості 0,8% C). Між тим як стопи Fe—B виказували вже в негартованім стані значно ширші перспективи що до осягнення великих ступнів твердості!...

Правда, проти надмірного оптимізму в усім напрямі промовляли деякі факти. Так наприклад було відомо, що враз зі зростом твердості в борових сталях сильно зростає крихкість і то в більшій степені ніж в звичайних сталях зі зростом завартості вугля. Засим відомо було, що бор, подібно як крем виділяв зі стопів Fe—C вугіль в елементарнім стані. На цій підставі трудно було без застережень передбачати якісь надзвичайні наслідки улпшення властивості сталей від додавання до них бору. Однак були важні факти і за: відомо було, що борові

сталі склонні в меншій степені до творення усадових ям, засим бор легко стоплюється з залізом і в стані плинним редукує окиси; на цій підставі стопи Fe—В до деякого степеня служать як дез-оксидатори. Далі — стопи Fe—В відпорні на ділання деяких концентрованих kwasів, напр. відпорні на діланне HCl, а почасті й H₂SO₄, однак мало відпорні на HNO₃. Що до впливу бору на механічні властивості сталей, то відоме було, що малі додатки бору збільшують міцність матеріялу (R), ще в більшій мірі його твердість (H), але рівночасно зростає його крихкість (U) і в значно більшій мірі й скорше ніж під впливом домішок вугля. Однакож, наслідки гартовання борових сталей є значно вищі ніж в звичайних сталях під впливом домішок вугля. Ковальність борових сталей вже при завартоці 0,2% В сильно обнижується і часто вже легкий раптовий удар молотом під час обрібки матеріялу на зимно викликує повстанне щілин.

II.

Фізико-хемічні та термічні відносини між залізом, бором і вуглем в потрійних стопах Fe—В—С приймаємо на основі потрійного укладу Fe—Fe₂В—Fe₃С в опрацьованню R. Vogel'a і проф. G. Tammann'a (1922); тут варто зазначити, що останні виходили з праць попередних авторів, а саме — G. Hannesen'a (1914) та М. Чижевського і А. Гердта (1915).

Вичерк (фіг. I) представляє потрійний уклад Fe—Fe₂В—Fe₃С по R. Vogel'ю і G. Tammann'у. Точка R' є точкою потрійної евтектики і відповідає складови Fe=95,8%; C=1,5%; B=2,7% та має температуру топливості = 1100° C. До цієї точки потрійної евтектики сходяться лінії подвійних евтектик:

1) E₁R', що відповідає евтектиці, яка складається з кристалів твердого розтвору бору і вугля в „γ“-залізі і із твердого розтвору хемічної сполуки Fe₂В і карбіда заліза (Fe₃С).

2) E₂R', що відповідає евтектиці, яка складається з кристалів твердого розтвору бору й вугля в „γ“-залізі і хемічної сполуки Fe₂В.

3) E₃R' — евтектики, що складається з кристалів твердого розтвору бориду Fe₂В в карбіді заліза з одного боку і бориду Fe₂В з другого боку.

Перша крива має найвисшу точку ціннення E₁=1145, друга E₂=1165; третя E₃=1155 і всі вони сходяться в R'=1100°.

При дальшій остиганню стопів богатих в тверді розтвори: бору та вугля в „γ“-залізі, а опісля Fe₂В в карбіді заліза,

вже в твердому стані в наслідок обниження розпускаємості заходять додаткові виділення надмірних кількостей Fe_2B а зглядно Fe_3C аж до тих пір, поки позісталий твердий розтвір не осягне складу потрібної евтектоїдальної мішанини, тобто складу „бор-перліта“, що відповідає точці S' з хемічним складом $C=1,0\%$; $B=1,0\%$; $Fe=98,0\%$. Тоді при сталій температурі $= 690^\circ C$ твориться потрібна евтектоїдальна мішанина „бор-перліт“, що складається з 8-ми частей граничного твердого розтвору бору в „ α “ — залізі (з $0,08\% B$), з 3-х частей граничного твердого розтвору Fe_2B в карбіді заліза, що відповідає на вичерку точці означеній буквою Z' і складови: $C=5,5\%$; $B=1,4\%$; $Fe=93,1\%$ і нарешті з 1 части бориду (Fe_2B), що містить у собі $B=8,8\%$.

Подвійний уклад $Fe-B$ виказує існування досить широкого обсягу твердих розтворів бора в „ γ “ - залізі, котрі в міру обниження температури розширюються і осягають своє граничне максимум при температурі 760° , що відповідає точці P_2 . Звідси можна зробити висновок, що подвійний уклад $Fe-B$ представляє сприяючі умови для позитивних об'явів дифузії бора в „ γ “ — залізі а рівнож, можна булоб передбачити, що практично може бути доконаним процес наборовування, тоб-то процес цементації бором.

Вслід за W. Rozenhein'ом, Z. Jeffries'ом, R. Archer'ом і S. U. Hoyt'ом ми припускаємо, що при повставанню твердих розтворів в металю розпушальнику розтворюються виключно лиш первні, а не хемічні сполуки. Те значить, що всяка хемічна сполука перед переходом у твердий розтвір насамперед дисоціює і опісля розтворюється вже в дисоціованім стані¹⁾. Тоді процес наборовування буде полягати на тім, що бор розпускається в „ γ “ - залізі. Звідси означається температурний обсяг практичного виконання цього процесу; очевидно процес наборовування буде мати місце між точками J (1165°) і U (906°). Механізм такого розпущення бору в твердій фазі „ γ “ - залізо ми розуміємо в такий спосіб: атоми заліза, що знаходяться на поверхні об'єкта, що підлягає наборовуванню, не є так сильно звязані силами спійности як атоми ввнутри самого металю²⁾. Тоді як кожен атом, що знаходиться в середині, підлягає притягальним впливам усіх окружаючих його сусідних атомів, то атом на поверхні металю має ще деякі сили спійности не вповні наси-

1) Див. мою „Будова металів“ Львів 1926, § 27, стор. 63—64. та § 24 стор. 53—57.

2) Див. „Будова металю“ § 3, рис. № 5.

чені. Як що тільки зовнішні обставини (тісний контакт, відповідна температура) сприятимуть тому, аби атом бору ставби в найближчому сусідстві вільної поверхні заліза (яка предназначена до наборювання), то увійдуть в силу міжатомові притягаючі сили між атомом бора і атомами заліза (в силу закону контрастості — між різнородними атомами притягаючі сили є більші ніж між однаковими!) і атом бора стане вже нероздільною складовою частиною нової простірної сітки. В цій новій простірній сітці атоми „ γ “ - заліза грають ролю розпушальника, а атоми бору займають одно, згідно більше місць в простірній сітці „ γ “ - заліза¹⁾. І як тільки викінчиться геометрична будова простірної сітки одного елемента твердого розтвору бору в „ γ “ - залізі, то згідно з гіпотезою Z. Jeffries'a (1924) вступають в силу „сили дифузії“ (сили проникання), що їх розмір та активність залежить від різниці концентрацій зовнішньої і низше находячихся верств, та від степеня рухливости атомів. Засим, під впливом цих „сил дифузії“ наступає процес проникання бору внутр металічного обекта. Ми розуміємо цей процес так, як то нами вже описано в „Будові металю“ на стор. 59—63 в § 26, себ то як ротативне совганне атомів бора внутри тісно уложених атомів простірної сітки „ γ “ - заліза. Таке обьяснення поступового просування чужих атомів бора внутр твердої тісно один обік другого уложеної громади атомів в умовах дуже незначної змінности пораметрів простірної сітки та її високої відпорности проти усякого рода деформуєчих зусиль, як нам здається є одиноко можливе. Циклічне порушанне атомів, що відбувається одночасово у всіх верствах металю, вимагає найменшої затрати сил, необхідних для змін положення атомів в щільній простірній сітці твердого розтвору. Зрозуміло, що в міру зросту температури, тоб-то — в міру зросту рухливости атомів такий процес совгання набирає щораз більшої інтензивности. Остання залежить від степеня плястичности металю розпушальника, тоб то від кристалюграфічного уложення його простірної сітки та від степеня контрастості самих атомів. Чим більше подібні самі до себе атоми, тим менші можливости для явищ дифузії одного металю в другім; атоми-ізотопи так подібні один до другого, що не викликають ніякої зміни в простірній сітці і бракує між ними потрібної контрастості, яка моглаб урухомити совганне колюмн, тоб-то викликати обяви дифузії.

¹⁾ Тамже § 22.

Характерні фізико-хімічні властивості первнів, що до їх взаємних укладів між собою ми зараз переходимо, є ось такі:

	Ве	В	С		Fe
			алмаз	графіт	
питомий тягар	1,85	2,5	2,12	3,52	7,1
атомовий тягар	9,02	10,9	12		55,84
атомовий об'єм	4,8	4,4	3,42		7,1
температура топлення	1278°	2400°	около 3600°		1528°

Звідси слідує, що „контрастивість“ між атомами заліза з одного боку, та атомами вугля, бору й берилію з другого боку є значна, а тому слід сподіватися значної інтензивності в об'явах сил дифузії в цілях оборотного порушення колуи атомів і при тім більш інтензивно в „ γ “ - залізі ніж в „ α “ - залізі, тому що розпукальність бора в „ γ “ - залізі є значна, а розпукальність бора в „ α “ - залізі є дуже незначна, як то слідує з подвійного укладу залізо-бор.

Засим повстає питання, яких структуральних форм треба булоб сподіватися в результаті більших або меньших степенів наборовування? З напрямку простої UP_2 (фіг. I) робимо висновок, що розпускальність бору в „ γ “ - залізі зростає в міру обниження температури (оборотно тому, що заходить в укладі Fe—C). Напрямок простої UP_2 показує, що альотропова переміна „ γ “ \rightarrow „ α “ - залізо відбувається що раз при низших t -ах, в міру збільшення кількості розпущеного в „ γ “ - залізі бору і то в такім степені, що при завартости бору = 3,5% альотропова переміна „ γ “ \rightarrow „ α “ відбувається при 760°. В цій t -рі твориться потріиний евтектоїд „бор-перліт“.

Механізм проникання бору в залізо є слідуочий: при температурах від 900° до 1100° бор легко переходить в твердий розтвір „ γ “ - заліза. В міру обниження t -ри здовж простої UP_2 виділяються кришталі твердого розтвору бору в „ α “ - залізі о змінній завартости бору від 0% при 906° до 0,08% при 760°. З осталої кількості розтвору бору в „ γ “ - залізі утворюється при сталій t -рі 760° евтектоїд (бор-перліт), що складається з кришталів граничного твердого розтвору бору (0,08%) в „ α “ - залізі і хімічної сполуки Fe_2B . На цій підставі ми приходимо до висновку, що залізо набороване в t -ах од 900° та вище, а опісля повільно охолоджене до звичайних t -ур буде складатися з таких верств слідуочих по черзі з обводу до центра:

1) евтектоїдальної о сталій завартости бору = 3,5%; при трохи міцнійших степенях наборовування повинна виступити верства надевтектична, що складатиметься з кристалів Fe_2B оточених евтектоїдальною мішаниною; 2) підевтектоїдальної, в котрій зерна граничного твердого розтвору бору в „ α “-залізі розсіпані в масі евтектоїду. Кількість зерен граничного твердого розтвору і їх розмір буде що раз збільшуватися в міру поступовання від зовнішньої евтектоїдальної верстви — до середини; 3) верстви, що складається виключно з кристалів твердого розтвору бору в „ α “-залізі; 4) верстви мішаних кристалів твердого розтвору бору в „ α “-залізі о змінній завартости бору від 0,08% і менше і 5) чистого заліза. В залежності від t —ри, часу тривання процесу, тоб-то, в залежності від того, в яких кількостях удалося розтворити бор в зовнішній верстві „ γ “-заліза, можуть повстати по черзі або всі вище зазначені верстви, або, щонайменш — верства підевтектоїдальна з наступним послідовним переходом до чистого заліза.

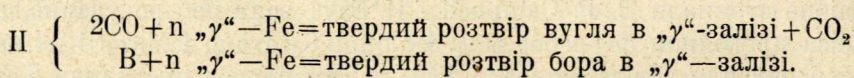
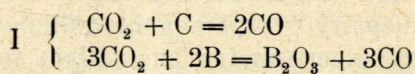
III.

Проф. М. Чижевський (Томск) в 1915 році оголосив цікаву працю о цементуванню заліза борем. Він брав м'яке залізо, висвердлював в нім дірку, яку заповнював аморфним борем або порошком стопу $Fe-B$ (з 19% B) і закорковував залізним чопом. Затим грів це залізо в електричній печі при t —рі 950° і отримувал наборовану верству завтовшки в один міліметр. Контроля під мікроскопом виявила, що наборована верства складалася з периферії з чистого бор-перліту о характерній „ялинковій“ будові, засим йшла верства підевтектоїдальна. Щось подібне отримали Т. Р. Campbell і Н. Fay; вони наборовування заліза проводили ферроборем, а Італійці Paravano і Mazetti до наборовування заліза уживали BCl_3 , а сам процес провадили в атмосфері водня. Вони твердять, що набороване залізо з верствою наборовання в 0,3 mm було так тверде з поверхні, що драпало скло (як діамант!)

Ми провадили свої досліди наборовування м'якого заліза, оточуючи його аморфним борем; аморфний бор добули за допомогою знаної методи Н. Moissan'a, т. є. діланнем магнезу на B_2O_3 . Наш аморфний бор містив у собі деякі кількості SiO_2 , TiO_2 , около 1,6% вогкості і газових частин, а окрім того невеликі кількості надборанів магнезу.

Спорідненність бору до кисня в тих високих т—ах, в котрих нормально відбувається процес наборовування, є надзвичайна. Наші перші проби, що ми їх провадили в звичайній атмосфері навіть без вільного допливу повітря зовні, виказали, що вже в т—рі около 750° бор горить спокійним темно-блакитним пірофосфоричним полум'ям. Цілком зрозуміло, що всі проби наборовування в т—ах до 950°, не виказали жадного ефекту наборовування; лиш по чотирьох-годиннім наборовуванню при т—рі 1000°, при умові що залізний об'єкт, що наборовувався, був глибоко загрузений в бор, ми зауважили з долішньої части цього об'єкта сліди наборовування на глибину около 0,025 мм. В тім випадку ми сконстатували, що бор, згораючи з поверхні додав грубу верству зліплених окисів бору, котрі перешкаджали дальшому доступови кисня в глибину, а тому коштом долішньої верстви неокисленого бору й відбулося оце часткове наборовування.

Пошукуючи за відповідним оточенням ми пробували провадити наборовування в атмосфері повітря, CO, CO₂, CH₄, N₂, H₂, світільного газу, а нарешті — в порожні. При цім okazaлося, що практично наборовування має місце лише в атмосфері водня, а ще ліпше — в порожні. В разі-ж, коли застосовували як атмосферу газу, що містили в собі вугіль, одночасово заходили обидва процеси: наугляння і наборовування. Цей комбінований процес поверхневого утвердіння м'якого заліза в деяких технологічних випадках може мати, як нам здається, практичне значіння. При цім заходять такі реакції:



Наслідки наборовування контролювалися під мікроскопом. З цією метою приготовляли ми поперечний шліф та на матовому шклі фотографічної камери мікроскопу при сталім побільшенню міряли глибину наборованої верстви. Результати таких помірив уявляють з себе суб'єктивне пересічне кількох помірив. Різниця між мінімум і максимум глибокості наборовування бувала значна, а в низше наведених таблицях ми подаємо границі тих коливань:

Таблиця І.

Вплив оточення на результати наборовування при $t - \text{рі } 1000^\circ$ протягом 4 годин.

Оточення	Пересічна глибина наборованої верстви в мм.	У в а г а
Повітря	0,025	Бор з поверхні і на значну глиbokість окислився
Пара водна	—	Бор сильно окиснений; при виході з печі водень запалювався
CO	0,019	Одночасово відбувалося науглення; науглена верства виносила 1,260 мм.
CO ₂	0,025	Науглення на глиbokість 1,39 мм.
Світільний газ	0,031	Науглення слабе на глиbokість 0,756 мм.
CH ₄	0,038	Науглення на глиbokість 0,945 мм.
N ₂	0,050	
H ₂	0,114	
Порожня	0,250	Див. мікрофотографія № 1, побільшення 100.

Перші сліди видимі під мікроскопом додатнього перебігу процесу наборовування виявляються у постаті кристалів нової фази, яка відзначається або ажурною різьбою своєї будови (фот. № 1), або оригінальною постаттю трикутників звернених гострим кутом в глибину заліза (мікрофот. № 2 поб. 150). Ця нова фаза відрізняється від маси заліза своєю твердістю, а почасти й барвою. В мікроскопі вона легко відрізняється без попереднього ділання на шліф реактивами, бо попереднє полірування поверхні шліфу вже надає цим твердим складникам відповідний релєф. На фот. № 2 частина горішня від барєра з трикутників складається з однородного твердого граничного розтвору бору в „ α ”-залізі, того самого, з якого складається й саме тіло трикутників. Долішня частина — складається з початку з мішаних кристалів о невеличкій змінній завартости бору в „ α ”-залізі, які, що далі до центру пробки — все зменьшують свою завартість бору і з рєштою — непомітно й плавно переходять в чисте залізо. Переходи цих мішаних кристалів до чистого „ α ”-заліза виявити в м'яккім залізі нам не удалося; лише в сталях многостопових (хромових, нікелевих і хромонікелевих) удається зловити відповідну структуральну різницю. Тому, всі наші мікроскопові

поміри, що їх наводимо низше, мають умовне значіння, вони окреслюють лише грубість тих наборованих верств заліза, які відрізняються своєю будовою від „ α ” - заліза і мішаних кристалів твердого розтвору бора в „ α ” - залізі о завартости меншій ніж 0,08% В.

IV.

Як наслідок попередніх дослідів відповідного оточення в цілях досягнення додатних результатів наборовування, впливала конечність проведення процесу наборовування або в атмосфері водня, або в порожні. Звідси виникає низка перешкод практичного, головне техноложічного, а рівнож і економічного характеру. Впрочім одні й другі моглиб бути успішно поборені і оправдані якби тільки продукт, що получаемо після відповідного наборовування отримав фактично отамті цінні властивости, про котрі многообіцюче реклямували дехто з попередніх дослідників. З метою виявити фактичний стан річей ми й розпочали дальші досліді над впливом температури на наслідки наборовування заліза в атмосфері водня й в порожні при однаковім протягу тревання процесу = 4 години. Результати цих дослідів уміщені в таблиці II.

Таблиця II.

Т-ра	Глибина наборовування в мм.					
	мягке залізо: С=0,075—0,080%			Сталь о завартости С=0,87—0,97%		
	мініма	максіма	правдоподобна пересічна	мініма	максіма	правдоподобна пересічна
А) В атмосфері водня						
900°	0,000	0,045	0,025	0,000	0,010	0,00
950	0,040	0,090	0,045	0,009	0,020	0,01
1000°	0,070	0,146	0,114	0,025	0,050	0,04
1050	0,105	0,204	0,160	0,040	0,127	0,10
1100	0,080	0,210	0,140	0,060	0,440	0,22
В) В порожні						
950	0,00	0,05	0,03	0,00	0,04	0,02 ²⁾
975	0,10	0,20	0,12	0,06	0,10	0,06 ²⁾
1000	0,10	0,50	0,26	0,15	0,50	0,30 ²⁾
1020	0,30	1,00	0,60	0,30	1,20	0,80 ²⁾
1040	0,70	1,40	0,90	0,80	1,50	1,10 ²⁾
1060	0,60	2,00	1,60			
1080	0,60	1,60	1,00 ¹⁾			
1100	0,40	1,00	0,80 ³⁾			
				на скрізь; з поверхні обтопилося.		

Порівнюючи розміри в таблиці II значіння для мініма й максіма кидається у очи часами величезна різниця між ними. Конечно, одною з причин є неоднорідність в глибині наборованої верстви. Однак головною причиною є величезна крихість евтектоїдальної і підевтектоїдальної верств. Фот. № 3 поб. 50 представляє евтектоїдальну та підевтектоїдальну верстви. На цій фотографії добре представлена колійність верств від обводу до центра. Рівнож з лівого боку видно, як зовнішня евтектоїдальна верства відколюється. На фот. № 4 поб. 50 видно, що зовнішня верства вже цілком відділилася від поверхні пробки; рівнож видно, як окремі зерна твердого граничного розтвору бора в „ α “-залізі, що були оточені евтектоїдом, помалу відходять від цілого і що площами лупливості являються прослойки евтектоїда. Фот. № 5, поб. 100 представляє випадок, коли ціла горішня верства вже відкололася, а в долині денед зустрічаються сфероїдальні каплі та тоненькі жилки евтектоїда. Фот. № 6, поб. 200 представляє будову подвійного евтектоїда (бор-перліта).

Процес наборовування інструментальних (вуглястих) сталей з більшою завагістю вугля (около 1%) пробігає з такою самою швидкістю, однак структуральні відносини, що укладаються при процесі наборовування, досить скомпліковані. Бор входячи в сталь утворює потрійний твердий розтвір бора в „ γ “, а зглядно „ α “-залізі та потрійний твердий розтвір бора в Fe_3C . Тому, перше вражіння над мікроскопом таке, ніби бор входить в високовуглясту сталь по прожилкам цементиту (див. фот. № 7, поб. 500). Засим, коли наборована верства значно пошириться, тоді структура сеї наборованої верстви по витравлінню поверхні шліфа представляє вигляд, як показує фот. № 8, поб. 50. На початку

1) Промір (діаметр) пробки зменшився приблизно на 30%.

2) З обводу в наборованій верстві зауважено відвуглення. Скількість перліту щораз меншає від центра пробки в напрямку до обводу.

3) Пробка сильно надтопила і покрилася згори грубою корою, яка складається з грубих зерен граничного розтвору бору в „ α “-залізі, слабо зцементованих між собою евтектоїдом „бор-перлітом“ (фот. № 4).

4) Сильно помітне відвуглення. див. фот. № 6 поб. 50. Центральна частина пробки складається з грубих перлітових зерен оточених ясною ферритовою сіткою, в котрій видно перебігаючу тоненьку верстовку (прожилку) крихкого потрійного евтектоїда. Ця прожилка, як видно, біжить здовж границь кристалів.

Йде евтектоїдальна верства, якої на фот. 8 майже не видно; вона дуже крихка й майже все відколося. Ми покажемо її окремо на фот. № 9, поб. 200. Далі йде підевтектоїдальна верства, засим верства майже сплосних потрійних твердих розтворів, яка робить вражіння, ніби відбулося явище відвуглення. Цьому вражінню підпомагає й дальший вигляд структури в напрямку глибини пробки з все збільшуючоюся кількістю перліта (подвійного евтектоїда $Fe-C$) і зі зменьшуючоюся кількістю твердого потрійного розтвору бору й вугля в „ α “—залізі. Тут ми находимо й причину тої надзвичайної крихкості наборованих сталей. Тоненькі прожилки потрійного крихкого евтектоїда простягаються глибоко внутр металю; розділюють внутр металічної пробки на більші конгльомерати кришталів. Досить відносно незначних механічних зусиль (ударів), аби відділити отсі конгльомерати один за другим від цілого. Тепер робиться зрозумілим, чому стопи $Fe-B$ так легко зпорошковуються.

Цілий перебіг процесу наборовування високовуглястих (інструментальних) сталей ми уявляємо собі так: Бор на поверхні в високих t -ах процесу переходить в твердий розтвір „ γ “—заліза і утворює потрійний твердий розтвір бору й вугля в „ γ “—залізі. При більших завартостях бору може утворитися потрійна евтектична мішанина, що відповідає на потрійному вичерку $Fe-Fe_3C-Fe_2B$ точці „R“. Підчас повільного охолодження з сего потрійного розтвору виділяється надмір Fe_2B ; рівнож виділюється Fe_2B і з твердого розтвору сього бориду Fe_2B в карбіді заліза Fe_3C . На случай присутности потрійної евтектики о складі R заходить враз з охолодженням стопу виділення надмірних скількостей Fe_2B з обох вище зазначених нетревалих складників цієї потрійної евтектичної мішанини аж до тих скількостей, з яких врешті, при температурі повстання евтектоїда (690°) утворюється потрійний бор-перліт, тревалий при звичайних температурах.

В разі, коли завартість вугля і бору кожного з окрема буде більша як 1%, то прожилки потрійного евтектоїда будуть оточати криштали (конгльомерати кришталів) граничного твердого розтвору Fe_2B в Fe_3C (Z") і криштали хемічної сполуки Fe_2B . В разі меньших завартостей вугля та потрійна евтектоїдальна мішанина („потрійний бор-перліт“) буде оточати криштали граничного розтвору бора в „ α “—залізі, а при надмірі бора — більш як 3,5%, буде видно розкидані по полю шліфа криштали Fe_2B .

З вищенаведеного робимо такі висновки:

1) Процес наборовування нормально відбувається тільки в порожні; в атмосфері повітря бор вигарує ще перед розпочатком процесу наборовування. В атмосфері водня процес наборовування заходить слабше, та ще слабше — в атмосфері газів, що містять в своєму складі вугіль. В таких випадках побіч наборовування одночасово відбувається й науглевне; сей комбінований випадок в деяких технологічних випадках може мати практичне застосування.

2) Ефект процесу наборовування залежить від температури; початок дифузії бору в „ γ “—залізо відповідає практично й теоретично температурі альотропової переміни „ α “—„ γ “. Зріст широкости наборованої верстви відбувається більш менш пропорціонально аж до температури около 1050°; при вищих температурах цей зріст виступає що раз швидше. Однак точности помірів наборованих верств під мікроскопом перешкаджає крихкість тих верств, що мають своїм структуральним складником евтектоїд, чи то подвійний, чи то потрійний; ці верстви легко відколюються і пропадають для помірів вже при найменшій механічній тиску на них, н. пр. при розпилюванні, при приготуванню шліфа і т. п.

3) Залежність від часу тривання процесу наборовування рівнож не є лінійною; в міру зросту часу тривання процесу наборовування швидкість дифузії бора в залізо все зменшується і то в тим більшій степені, чим низшою є температура наборовування; в цім впливі, як нам здається, відіграє поважну ролю ослабленне контакту між бором та залізом, а засим й ослабленне концентрації бора в борнім порошку.

4) Присутність вугля в залізі ставить ніби опір входженню бора в твердий розтвір „ γ “ - залізо.

5) Енергічне наборовування звязане з появленнем евтектоїда не лиш не поліпшує механічних властивостей заліза й сталі, але противно, допроваджує до ослаблення спійности окремих конгломератів цілого металічного агрегата а передусім обводних верств, які при цім легко лушчаться і відпадають від цілого. Певний *raison d'être* можуть мати лише слабкі степені наборовування, на невелику глибокість (около 1 mm) та при сорозмірно невисокій температурі (нижче 980—1000°).

6) Бор не тільки дезоксидує залізо, а разом і відвугляє. Однак оце відвугленне є лише видиме: фактично вугіль в по-

лученню з борем утворює новий металографічний складник — твердий розтвір бора її вугля в залізі.

V.

Залізо, вже при завартоості бору 0,005%, по загартованню значно підносило свою твердість в порівнянні з матеріалом, що не заключав бору. Однак в випалених сталях, навіть при завартоості 0,08% бору збільшення твердості не було зауважено; принаймні так твердять R. Vogel і G. Tammann (Z. f. anorg. Chem. 1922, 225).

Наші досліди над твердістю наборованого заліза в стані випаленім і гартованім приводять до цікавих для практики результатів, які підтверджують висновки R. Vogel'я та G. Tammann'a. За температуру випалювання ми приймали 920°, тобто температуру о 30° вищу від температури альотропової переміни „ α “— „ γ “ в залізі, що було уживане до наборовування. Твердість в скалі Brinell'a окреслювалася при обтяженню 750 kg на кульку о промірі 5 mm; конечно твердість залежить від грубості наборованої поверхні, як то ясно впливає з таблиці III.

Таблиця III.

Т—ра процесу наборовування	Грубість наборованої верстви в mm	В стані випаленім		В стані гартованім	
		твердість в kg/mm ²	приріст твердості в kg/mm ²	твердість в kg/mm ²	приріст твердості в kg/mm ²
—	Чисте залізо	84	—	139	—
960°—4 год.	Набороване на 0,05 m/m	106,5	22,5	171	32
1000	„ 0,26	109	25	178	39
1040	„ 0,90	109	25	228	89
1080	„ 1,00	109	25	285	146
1120	„ 0,80 ¹⁾	113	29	321	182
1160	„ 0,70 ¹⁾	118	34	375	236

¹⁾ Поверхнева верства цілком відкололася; тому грубість наборованої верстви оказалась менша, ніж треба було сподіватися при цій вищій температурі наборовування.

Для порівняння наводимо тут додатково в таблиці IV зріст твердості того-ж самого рода м'якого заліза, оцентованого (наугленого) в ріжних умовах на ріжну глибину в стані випаленім та в стані загартованім.

Таблиця IV.

		В стані випаленім		В стані гартованім	
		твердість в kg/mm ²	приріст твердо- сти в kg/mm ²	твердість в kg/mm ²	приріст твердо- сти в kg/mm ²
—	Чисте залізо	84	—	139	—
1	Залізо, оцментоване вуглем на глибину 0,7 mm	171	87	341	202
2	" " 0,8 "	196,5	112,5	417	278
3	" " 1,3 "	207	123	444	305
4	" " 1,4 "	228	144	513	374
5	" " 1,4 "	216	132	444	305
6	" " 1,8 "	241,5	157,5	555	414
7	" " 2,6 "	255	171	513	374
8	" " 2,8 "	255	171	513	374
9	" " 2,4 "	285	201	555	414

В пробках означених 1 і 3 оцментована верства складалася лише з підевтектоїдальної будови; в пробках 2, 4 і 6 верхня корка складалася на початку з чистої евтектоїдальної верстви (перліта), а засим — підевтектоїдальної. Ці пробки виказали надзвичайний зріст твердості в стані гартованім. Решта пробок 5, 7, 8 і 9 мали всі три верстви: наевтектоїдальну (цементитову), евтектоїдальну (перлітову) та підевтектоїдальну (перліт + ферритову).

Порівняння результатів наборовування з результатами наугляння (чистої цементациї) не промовляє на користь першого процесу! Однак, звернемося тепер до порівняння під зглядом твердості наслідків наборовування м'якого заліза та вуглястої (інструментальної) стали.

Таблиця V.

	м'яке залізо (C = 0,09%)		Сталь (C = 0,90%)	
	твердість в стані випален.	твердість в стані гартов.	твердість в стані випален.	твердість в стані гартов.
Залізо (сталь) ненабо-				
роване	84	139	241,5	600
Набороване про-	109	178	285	714
тягом 4-ох	109	228	285	714
годин	109	285	301,5	714

Отже, в відношенні до інструментальних сталей о завартости вугля около одного відсотка, т. є тих сталей, які по гартованню дають найбільшу твердість (гарденіт в евтектоїдальних гартованих сталях!), дістаємо в наслідок поміркованого наборовування ще більшу твердість. Цей факт може бути використаний для практики. Обік слід звернути увагу на те, що зріст твердості від наборовування в високовуглястій сталі не є такий показний; останнє підтверджує наш попередний висновок, що вугіль становить в залізі ніби опір проти проникнення бору в залізо!

Перехід твердого розтвору бора в „ α “ - залізі в твердий розтвір бору в „ γ “ - залізо (при огріванню) і повстаннє з останнього підчас гартовання мартензиту не представляє великих труднощів. Однак евтектоїд „бор-перліт“, або, що більш правильно, хемічна сполука Fe_2B , тоб-то один зі складників евтектоїдальної мішанини, цілком не переходить в твердий розтвір „ γ “ - заліза, та в гартованих сталях зістається в своїх характерних структуральних формах, див. фот. № 9 та 10, поб. 150, порівнай з фот. 3, 4, 5. Цей власне складник надає наборованій поверхні, як в стані випаленім так і в стані гартованім надзвичайну крихкість і псує високі технольоґічні здібности наборованого матеріялу.

Наборована верства високовуглястих сталей по загартванню виказує анальоґічне явище. Тому тепер цілком зрозуміло, що цілковитий перебіг наборовування чи то м'якого заліза, чи то вуглястої сталі мусить відбуватися в той спосіб, щоби уникнути повставання з обводу отаких крихких складників. Єдине раціональне застосування процесу наборовування може бути тільки в таких випадках, коли ми припинимо процес в момент повстання з обводу такої концентрації, якаб вистарчила на повстаннє лиш граничного твердого розтвору бору в „ α “ - залізі (без евтектоїдальних прожилків!). Такий спосіб наборовування ґварантує нам жадане утврденнє і не викличе тих фатальних обявів крихкості та луцення, що нерозривно сліднують разом з появленнєм з обводу евтектоїда хочаб навіть у формі тонких прожилків у підевтектичній верстві.

Рівнож, вслід за R. Vogel'ем та G. Tamman'ом нам належить підтвердити великий степєнь інертности (малий степєнь атомової рухливості) не тільки хемічної сполуки Fe_2B , а рівнож і всіх твердих розтворів бора в залізі та бора й вугля в залізі підчас змагань установити рівновагу дорогою випалювання (уєднороднення твердого розтвору), що неґативно впливає на пов-

ставання й чистоту металюграфічних складників. Однак, при малих степенях наборовування ця безвладність (інертність) в значній мірі підносить спроможність до утворення стопів через гартованні¹⁾.

Б. Цементування заліза й стали берилем.

I.

Бериль (Be) — легкий метал, кольору трохи темнішого від кольору срібра, легший від глину й крему і лише трошки тяжший від магнезу, однак мало подібний по своїм властивостям і до глину і до магнезу. Бериль значно твердший від глину й магнезу (твердості глину: магнезу: берилу відносяться як 20 : 29 : 65) і то так, що рисує скло і є в звичайних температурах крихкий незалежно від степеня його чистоти. Атомовий об'єм берилу (4,8) є близький до атомових об'ємів бора (4,4) та вугля (3,42). Звідси логічним було зробити припущення про його додатну здібність, подібно вуглю і бору, дифундувати внутр простірної сітки заліза, тим більше, що подвійний уклад Fe—Be є в значній мірі подібний до укладу Fe—C, особливо в обсягу існування „γ“ - заліза.

До недавніх часів бериль був дорогим металем; однак нині бериль значно подешевів і найде собі ширше застосування в легких стопах Al—Be.

Зпорошкований бериль на повітрі згоряє зі значним світляним ефектом. Однак в більших кавалках, навіть в умовах високого підогрівання бериль є тревалий. При високих температурах на поверхні берилу утворюється лише верстовка окису берилу, яка охороняє нижче лежачі верстви від дальшого окиснення повітрем. Рівнож бериль не розкладає води; у воді бериль лише покривається тонкою охоронною варстовкою гідроксиду.

Подвійний уклад Fe—Be був опрацьований в 1915 році G. Oosterhold'ом до завартості 27,1% ваг. Be (70% ат.) і представлений на фіг. ч. II. З цього вичерку слідую, що розпускаємість берилу в „γ“—залізі є досить значна і досягає своє максімум при t—рі 1155°, тоб-то в t—рі повстання евтектики.

Евтектика Fe—Be відповідає завартості Be = 9,2% ваг.

¹⁾ Порівняй гіпотезу Z. Jeffries'a і R. Archer'a — „The Science of Metals“ стор. 395—396 New-York, 1924.

(38,4% ат.) і складається з граничного твердого розтвору берилію в „ γ “ - залізі о завартості 6,5% ваг. (29,9% ат.) берилію і хемічної сполуки FeBe_2 , що містить 66,6 ат. % Be. Температура топлення FeBe_2 лежить около 1400—1450°.

В міру обниження т—ри гранична розпускармість берилія в „ γ “ - залізі декілько обнижується і при температурі 650° вона осягає 24% ат. берилія. При цій температурі твердий розтвір берилія в „ γ “ - залізі розпадається враз з повстаннем евтектоїда (бериль-перліту), що складається з „ α “ - заліза (або граничного твердого розтвору берилія в „ α “ - залізі о малій завартості берилія) та хемічної сполуки FeBe_2 . Магнетна переміна заліза в стопах Fe—Be обнижується до 170°.

Процеси, які заходять в стопах Fe—Be підчас альотропової переіни заліза „ γ “ \rightarrow „ α “, обслідувані G. Oesterhold'ом не так детально, аби рахувати оце питання цілком розвязаним. На основі наших дослідів над наберильовуванням заліза здається підтверджується майже повна нерозпускармість берилія в „ α “ - залізі. Однак, є можливе, що, подібно як в „ α “ - залізі вугіль розпускарміється в незначних скількостях (до 0,05%); подібно тому як і бор розпускарміється в „ α “ - залізі до завартості 0,08%, то так і бериль посідає якусь незначну граничну розпускармість в „ α “ - залізі. Однак безсумнівно, що бериль подібно борови сприяє переходови вугля в твердий розтвір „ α “ - залізо, що низше ми підтвердімо низкою відповідних дослідів і мікрофотографій.

Вже з тої простої причини, що бериль є досить рідкий метал і отримання його рівнож не є таке просте й легке, трудно зараз передбачати більше або менше промислове й практичне застосування подвійних стопів берилія з иньшими металами, хоча біжуча американська література, як ми вище згадували, вже принесла відомости про значне улєкшення способу промислового отримання металічного берилія та про широкі горизонти для берилія в галузі легких стопів Al—Be. Низше наведеним дослідам ми надаємо більше теоретичне значіння, а то по причині їх анальоїї з процесом навугління та процесом наборовування заліза.

Як ми вже висше згадували, подвійний уклад Fe—Be представляє багато анальоїї з укладом Fe—C. По своїм атомовім обемови гексагоналний бериль стоїть досить близько до кубічного вугля. Окрім того один і другий посідають значні степені розпускарміости в „ γ “ - залізі і дуже малий стєпень розпускарміости (майже повна нерозпускармість!) в „ α “ - залізі, а малі

атомові їх об'єми (берилія = 4,8; вугля = 3,4) в порівнянні з залізом (7,1) визначають значний ступінь контрастності, що сприяє проходженню атомів вугля (берилія) через стислу простірну сітку „ γ ”-заліза чи то дорогою заміщення відповідних атомів в простірній сітці металю розпуцальника („ γ ”-заліза) з послідовними ротаційними оборотами-совганнями, як то подає сучасна теорія повставання твердих розтворів, чи то дорогою безпосереднього блукання оцих малих атомів в міжатомових просторах простірної сітки „ γ ”-заліза. Як в одному так і в другому випадках слідалоб сподіватися позитивних результатів в процесі поверхневого наберильовування заліза, що впрочім і найшло повне підтвердження в наших дослідах, яких результати подаємо низше.

II.

Для своїх робіт ми користалися берилевим порошком отриманим від фірми E. Merck (Beryllium metallicum pulverisatum). Спроби безпосереднього наберильовування заліза в повітрі, як і треба було сподіватися, доправидали лише до негатиивних результатів з тої причини (ми її згадували вище), що спорошкований бериль при дотику з повітрєм в високих температурах легко окиснюється, Тому свої досліди ми перепроваридали в порожні, аналогічно як і в дослідах з наборованням заліза.

Після декількох пробних пошуківань ми зупинилися на такій методі ведення процесу берилізації. З мягкого заліза ($C = 0,095\%$) ми заготовляли лодочки з плоским дном (фрезованням) глибиною в 5 mm, шириною = 10 mm та довжиною = 35 mm. Цю лодочку наповнювали порошком берилія, а з гори на гвінтах приходила припліфована плоска кришка. Такі скринки, наладовані порошком берилія, уміщалися в печі Negeus'a сконструованій так як це звикле прийнято робити в цілях утримання в середній порцеляновій рурі порожні¹⁾. Після закінчення процесу нагрівання і по охолодженню печі до кімнатних температур така пробка відкривалася, бічні стінки лодочки згєбьовувалися, а долішна і горішня наберильовані поверхні, після дослідження одної половини на твердість методом Brinnell'a в стані випаренім, а другої — в стані гартованім, поступали до мета-

¹⁾ Деталі дивись моя вступна праця: „Cementacja borem zelaza, niklu i kobaltu“. Prace Akademji Górnicej w Krakowie, zeszyt 5. 1925. Kraków.

льографічного аналізу. За температуру гартованоя ми приймали 920—930°, себто по 30—40° вищу від A_3 для даного заліза.

Глибина берилізації мірялася як звичайно на матовому склі фотографічної камери мікроскопа при побільшенні 100.

У всіх випадках додатнього перебігу процесу берилізації ми мали з обводу наберильовану верству у виді твердого розтвору берилія в „ α ” - залізі, в котрім в формі розкиданих то тут то там коротких палочок був втиснений новий метальографічний складник ($FeBe_2$) в кількостях змінних і все зменьшуючихся від певного максимум з обводу в напрямку до середини пробки. Засим слідовала переходова верства чистого твердого розтвору берилія в „ α ” - залізі, в котрій місцями знаходилися більші або менші гнізда евтектоїдальної будови. Фот. № 12, поб. 75 представляє загальний вигляд наберильованої поверхні. З обводу знаходиться надевтектична верства, яка на фот. № 13 представлена в більшому побільшенні ($\times 300$). Ця остання фотографія дає ясне уявлення про початково іглістий характер паличок хемічної сполуки $FeBe_2$, яка в міру зменьшення завартости берилія в наберильованій поверхні переходить в кропковану форму, а засим — зникає, даючи місце евтектоїдальним скупченням. Характер цих останніх (бериль-перліт) показаний на фот. № 14, поб. 450. Будова бериль-перліту нагадує звичайний перліт в вуглястих сталях, добре випалений, хіба лише трохи дрібніший. Окремі скупчення цього бериль-перліту лучаться між собою тонісенькими доріжками — границями кристалів твердого розтвору. Цікаво замітити, що напрямність майже усіх кристалів твердого розтвору берилію в „ α ” - залізі виказує напрямок, в якому заходить дифузія берилію в залізо. Оці ланцюхи, які лучать між собою окремі гнізда евтектоїдальних скупчінь (див. фот. № 12) губляться десь в середині матеріяла підданого наберильовуванню на границі наберильованої верстви.

Наберильована верства виглядає так, ніби вона була обезвуглена. Тут ми зустрічаємося з явищем аналогічним як і при наборовуванню, себто з позірною децементациєю. Як нам видається правдоподібним, вугіль і бериль в певних кількостях позістають в твердім розтворі „ α ” - заліза; останний складає основну масу наберильованої верстви.

Глибина наберильованої верстви конечно залежить від усіх впливових чинників, що кермують конечним ефектом дифузії в твердім стані в напрямку від поверхні внутр простірної сітки метала-розпушальника. Такими чинниками, окрім фізичної кон-

трастовости між атомами того первя, що дифундуе і первя, що розтворае, будуть: температура, час і різниця концентрацій (міцність карборизатора). Низше наведена таблиця, в котрій уміщені результати наших дослідів, цілком стверджує вище наведене.

Протяг наберильовування в усіх досвідах тревав 4 год., включаючи час розогрівання печи і час остигання.

Таблиця VI.

Т-ра	Глибокість наберильовування в mm		
	мінімум	максімум	правдоподібна пересічна
I. М'яке залізо з завартістю 0,095% С.			
920	0,04	0,06	0,05
960	0,10	0,18	0,14
1000	0,15	0,25	0,20
1040	0,25	0,35	0,30
1080	0,36	0,48	0,42
1120	0,50	0,70	0,60
1160	0,70	0,90	0,80
II. Сталь вугляста з завартістю С = 0,9%			
960°	0,00	0,08	0,06
1000°	0,08	0,20	0,13
1040	0,15	0,34	0,20
1080	0,24	0,42	0,36

При наберильовуванні вуглястої стали (вуглесталь) твориться з обводу надевтектоїдальна верства, в котрій на тлі потрійного евтектоїда розкидані кришталки якогось хемічного сполучення темно-шарої барви. Потрійний уклад Fe—Fe—C ще цілком не досліджений і наші спостереження базуються лише на підставі тих образів, які відкрив нам мікроскоп на протравленій пробці наберильованої твердої (вуглястої) стали. Окрім цих зазначених двох складників: хемічної сполуки і потрійного евтектоїна, на фот. № 15, поб. 150 і фот. № 16, поб. 450 можна спостерігти білі плямки розтвору сталого, очевидно берилію й вугля в „ α ”-залізі.

Слід на цім місці занотувати ще таке цікаве фізичне явище: підчас натиску кульки апарата Brinell'a на наберильовану

поверхню уху виразно чує характерне — скрипінне кристалів наберильованої поверхні, які деформуються від натискаючої кульки — скрип дуже подібний до того, яке уху наше відмічає при згинанню паличок цини (Sn), кадму (Cd) або цинку (Zn). Тон скрипіння наберильованої поверхні, як нам видавалося, був більш голосний і більш різкий ніж у цини. Вся околиця відтиску кульки Brinell'a зістала поріпана, а щілинки розходилися сферично; сфера поширення цих рис простягається на значнішу віддаль від самого відтиску від кульки Brinell'a, а напрямок цих щілин йде в глибину металю (див. фот. № 17) очевидно здовж тих границь кристалів, які на наберильованій поверхні зазначилися в напрямку від периферії до центру.

Твердість наберильованої верстви о стані випаленім та в стані гартованім ми означали методю Brinell'a при обтяженню кульки в 5m/m проміром тягарем в 750 kg. Результати цих дослідів уміщені в таблиці VII.

Таблиця VII.

	В стані випаленім		В стані гартованім	
	твердість в kg/mm ²	приріст твердості в kg/mm ²	твердість в kg/mm ²	приріст твердості в kg/mm ²
I. М'яке залізо				
Залізо ненаберильоване	84	—	139	—
„ наберильоване на глибину 0,05 mm	111	27	156	17
„ „ 0,14 „	115,5	31,5	163,5	24 5
„ „ 0,20 „	118	34	171	32
„ „ 0,30 „	139	55	188	49
„ „ 0,42 „	146	62	192	59
„ „ 0,60 „	156,8	72,5	248	109
„ „ 0,80 „	208	124	276	137
II. Сталь вугляста				
(вуглесталь)				
Сталь ненаберильована	241,5	—	—	—
Сталь наберильована на глибину 0,06 mm	255	14	600	—
„ „ 0,13 „	268,5	27	600	—
„ „ 0,20 „	285	43,5	600	—
„ „ 0,36 „	301,5	60	600	—

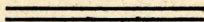
По загартованню наберильована поверхня приймає структуральний вид однородного твердого розтвору. Ця верхня верста твердого розтвору перерізується радіально з напрямованнем від периферії до центру границями кристалів, див. фот. № 18 поб. 65 та порівняй з фот. № 12. Лише зі самого краю голкоподібний FeBe_2 не цілком перейшов до твердого розтвору і частково позістав у формі дрібних кульок. Така мішана верста є крихка й легко відколюється. По загартованню в твердін розтворі (див. фот. № 18) повстають лінії совгання і близнячі утвори (Zwillingsbildungen).

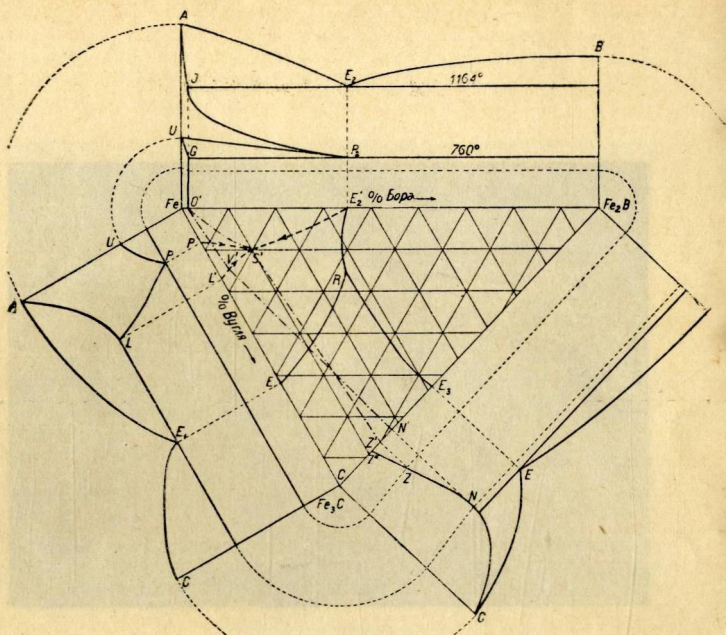
В сталях високовуглястих удається лише частково перепровадити надмір берилію й вугля в твердий розтвір; надмір якихось можливо подвійних карбідів позістає нерозтвореним (фот. № 19, поб. 150).

На основі повище наведених експериментів трудно передбачити бодай якесь практичне значіння процесу наберильовування заліза й стали в твердін стані. Однак вище наведені досліди є цікаві з теоретичного погляду. Вони розширяють наші відомости про перебіг процесу дифузії в твердін стані і дають доказ, що на підставі теоретичного аналізу властивостей берилія й заліза та деяких аналогій у властивостях берилія з борем та вуглем можна було передбачити характер перебігу процесу берилізації заздалегідь і такого рода передбачення отримали в наших дослідах цілковите підтвердження.

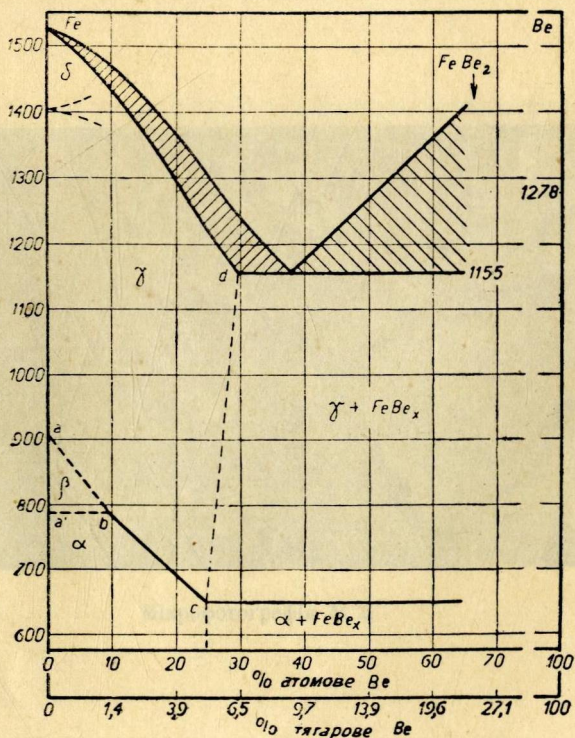
Краків, Червень 1926. Металлографічна лабораторія Гірничої Академії.

Bemerkung: Ein ausführlicher Bericht erscheint demnächst in den Sitzungsberichten der math. naturw. Sektion Heft IV. in der deutschen Sprache.





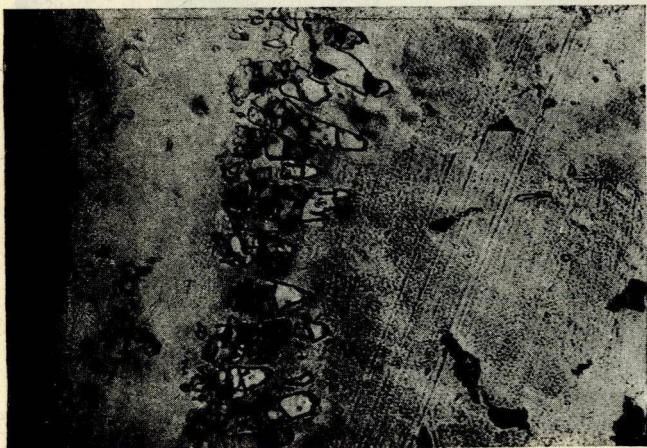
Фиг. ч. I.



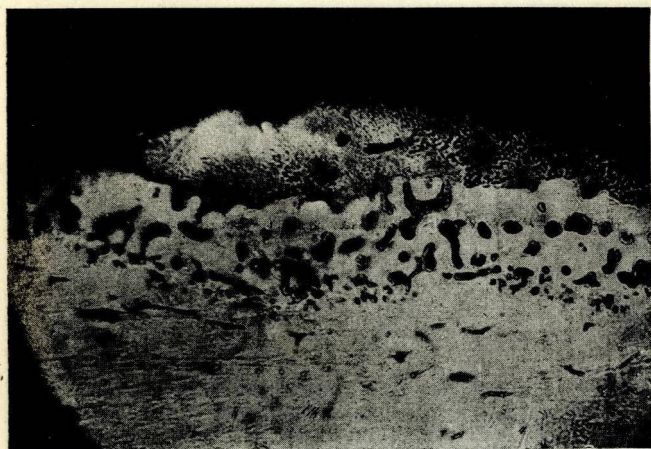
Фиг. ч. II.



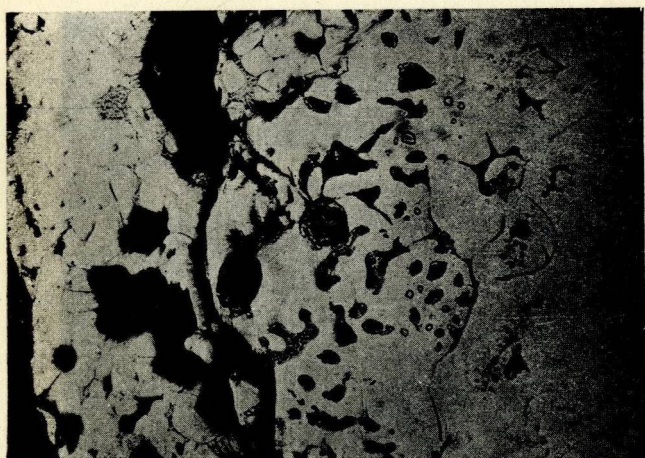
Мікрофотографія № 1.



Мікрофотографія № 2.



Мікрофотографія № 3.



Мікрофотографія № 4.

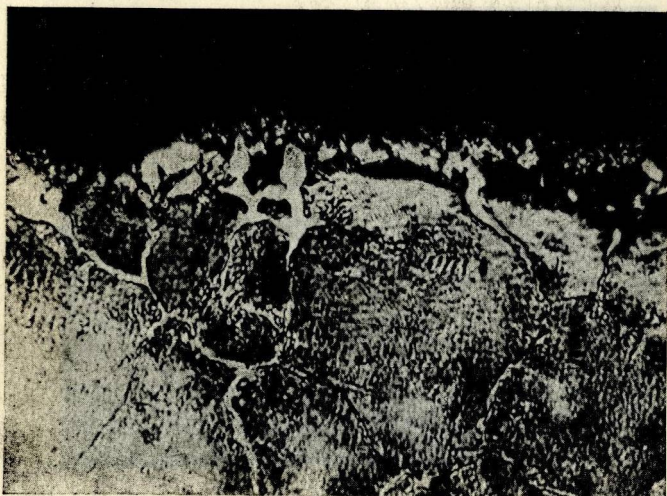


Мікрофотографія № 5.

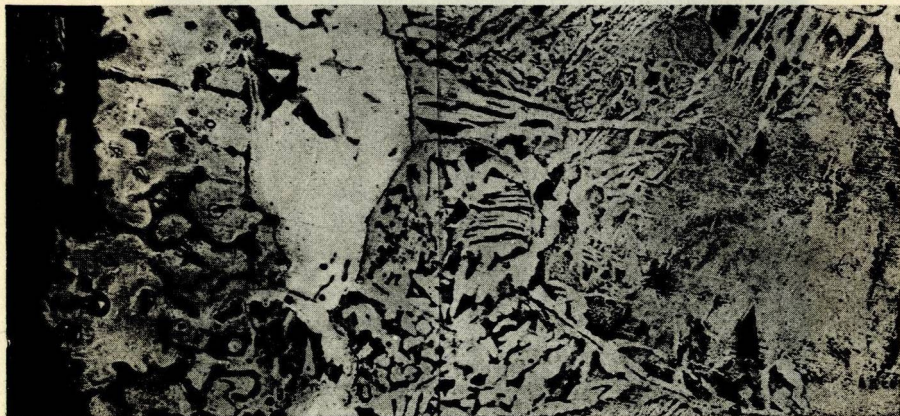
Мікрофотографія № 5.



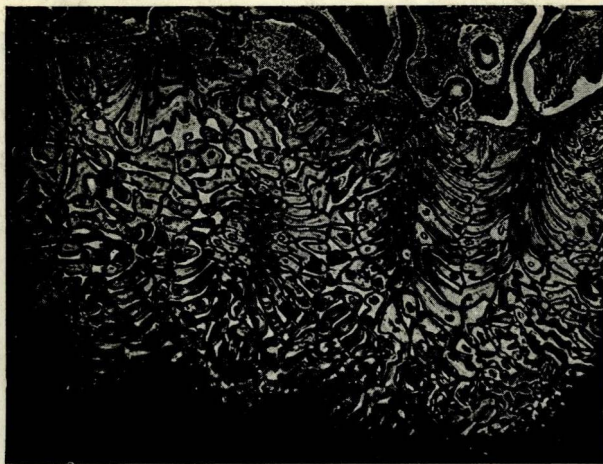
Мікрофотографія № 6.



Мікрофотографія № 7.



Мікрофотографія № 8.



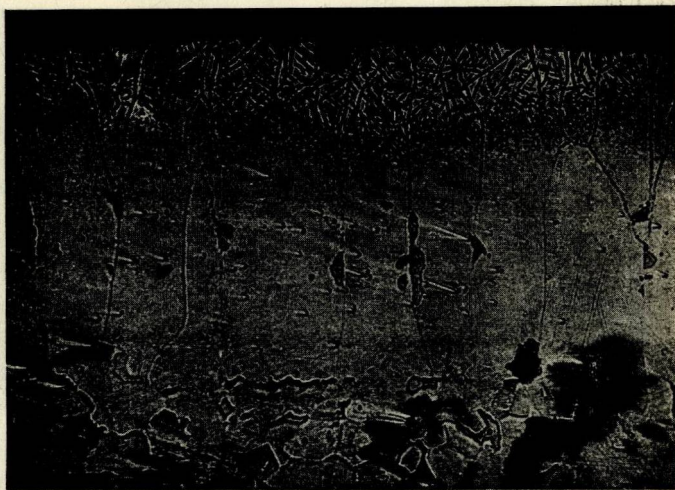
Мікрофотографія № 9.



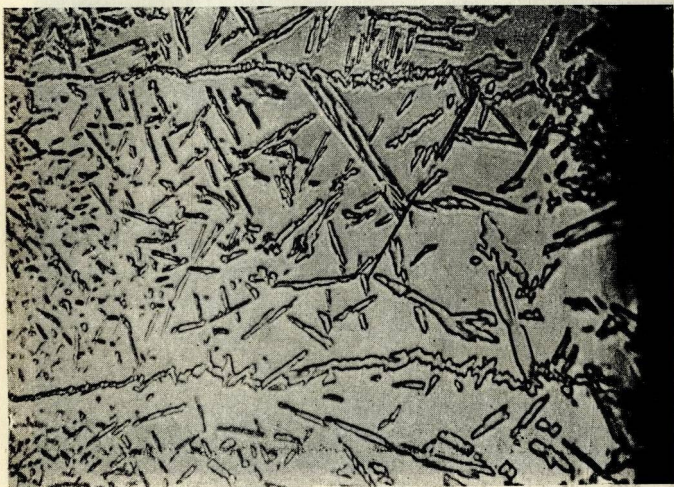
Мікрофотографія № 10.



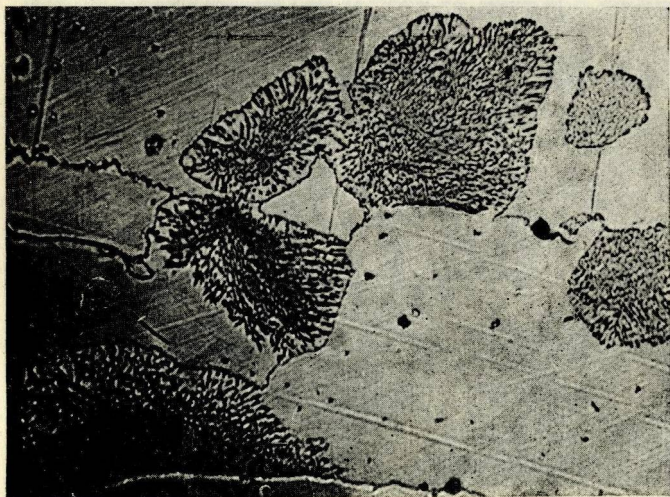
Мікрофотографія № 11.



Мікрофотографія № 12.



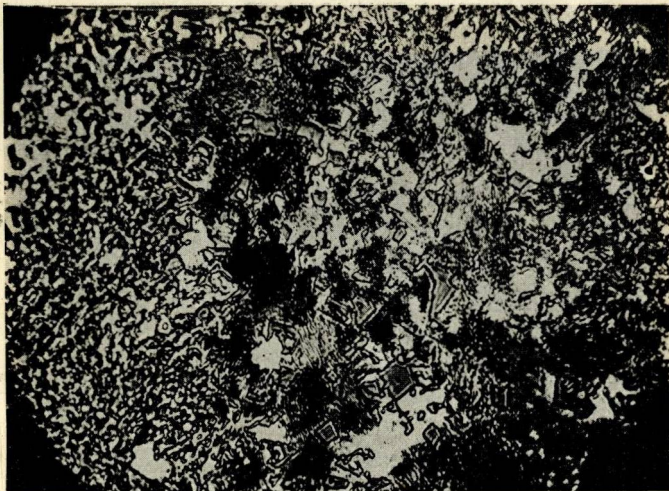
Мікрофотографія № 13.



Мікрофотографія № 14.



Мікрофотографія № 15.



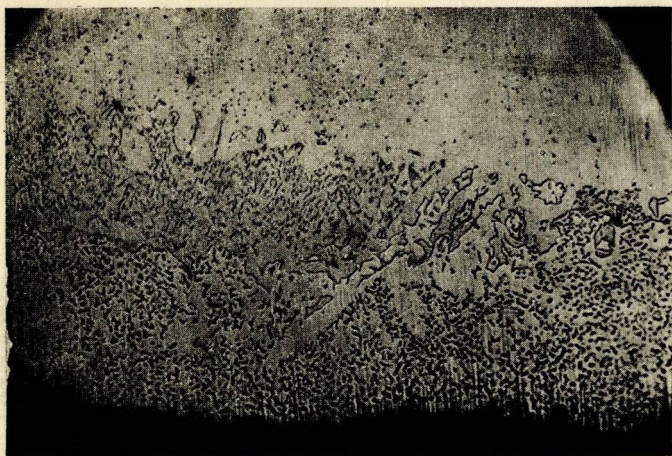
Мікрофотографія № 16.



Мікрофотографія № 17.



Мікрофотографія № 18.



Мікрофотографія № 19.



Спосіб нескінчених визначників у теорії лінійних інтегральних рівнянь.

Sur la méthode de déterminants infinis dans la théorie des équations intégrales linéaires

par *Nicolas Kryloff*, membre de l' Académie des Sciences d' Ukraine.



У цій роботі нам доведеться скористуватися з наступних вислідів Н. von Koch'a.

Нескінчений визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1+a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаємо абсолютно збіжним, коли збігається абсолютно так нескінчений добуток:

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} (1+a_{ii}),$$

як і сума з усіх добутоків, що повстають із M через усі можливі переставлення других значків. Для абсолютної збіжності визначника Δ досить збіжності рядів:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}| \quad \text{та} \quad \sum_{i, k=0}^{\infty} a_{ik}^2.$$

*) Ця робота є один із параграфів II розділу ширшої роботи, що тепер друкується в „Annales de la Faculté des Sciences de l' Université de Toulouse“.

Коли справджені умови (I), то

$$\Delta = \Delta_{ii} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \Delta_{ik} = \Delta_{tk} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \Delta_{ik},$$

де Δ_{ik} є підвизначник, що відповідає елементові a_{ik} , а також

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n,$$

де

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1+a_{nn} \end{vmatrix};$$

окрім того, тоді абсолютно збігаються й усі підвизначники визначника Δ і суми:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_{ik})^2 \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta_{ik})^2.$$

Нарешті, коли елементи визначника Δ є голоморфні функції скінченного числа комплексних аргументів, а умови (I) справджуються в певнім замкненім обсягу зміни тих аргументів, то визначник Δ та всі його підвизначники є теж голоморфні функції і Δ_n одностайно іде до Δ^1 .

Із теорії нескінчених систем лівійних рівнянь відзначимо тут наступні висліди Н. von Kocha.

Коли, при істнуванні умов (I), система

$$(II) \quad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

має таку розвязку, що сума

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

збігається і не є нуль (далі тільки такі розвязки й розглядатимемо), то

$$\Delta \neq 0$$

і навпаки.

¹⁾ Див. Н. von Koch, Sur un théorème de Hilbert, Math. Ann. 59, стр. 266—283.

Коли

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix}$$

є відмінний від нуля підвизначник r -го ступня і притім усі підвизначники нижчого ступня є нулі, то найзагальнійша розв'язка системи (II) є

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k \end{pmatrix} x_{k_r}$$

($k = 1, 2, \dots$), де величини

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$$

є довільні.

Щоб система рівнянь

$$(III) \quad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

мала єдину певну розв'язку, треба і досить, щоб

$$\sum_1^{\infty} c_i^2$$

збігалася, і щоб

$$\Delta \neq 0.$$

По цих попередніх увагах звертаємося до нашої задачі.

Як відомо, довід збіжності Ritz'ового способу наближеного розв'язання диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь математичної фізики звичайно базується на певних нерівностях, що їх повинні справджувати дані функції задачі¹⁾. Ми маємо тут на меті позбутися цих обмежень у випадку інтегрального рівняння типу Fredholm'a:

$$(1) \quad u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX = f(x)$$

з допомогою вище поданих теорем із теорії нескінчених визначників та нескінчених систем лінійних рівнянь.

Як відомо, Ritz'ів спосіб для рівняння (1) зводиться на визначення сучинників $a_i^{(m)}$ скінченної суми:

¹⁾ Пор. зпр. мою роботу „Про різні узагальнення Ritz'ового методу та методу найм. квадрат. для набл. інтегр. рівнянь матем. фізики“ (Труди Ф.-М. Відділу УАН, т. III, вип. 2, 1926).

$$(2) \quad u_m = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \psi_i(x),$$

де $[\psi_i(x)]$ є система функцій ортогональна і нормована, із умов:

$$(3) \quad \int_0^1 \left[u_m + k \int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX - f(x) \right] \psi_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

і до доводу, що

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m.$$

Натоміть ми замість (2) візьмемо

$$(4) \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(x);$$

та сучинники a_i визначатимемо з умов:

$$(5) \quad \int_0^1 \left[u + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX - f(x) \right] \psi_i(x) dx = 0.$$

Зазначивши

$$b_{ie} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_e(X) dx dX,$$

бачимо, що визначник системи лінійних рівнянь (3) є

$$(6) \quad D^{(n)}(k) = \begin{vmatrix} kb_{11} + 1 & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & kb_{22} + 1 & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & kb_{nn} + 1 \end{vmatrix},$$

а визначник системи (5) є

$$(7) \quad D(k) = \begin{vmatrix} kb_{11} + 1 & b_{12} \dots & b_{1n} \dots \\ b_{21} & kb_{22} + 1 \dots & b_{2n} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & kb_{nn} + 1 \dots \end{vmatrix}.$$

Тепер доведемо збіжність рядів

$$(8) \quad \sum_{i, e} b_{ie}^2 \quad \text{та} \quad (9) \quad \sum_i |b_{ii}|.$$

На підставі дослідів Hilbert'a¹⁾,

$$\sum_{i, e} b_{ie}^2 = \sum_{i, e} \left[\int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_e(X) dx dX \right]^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left[\lambda(x, X) \right]^2 dx dX,$$

що доводить збіжності ряду (8).

Завваживши тепер, що

$$b_{ii} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_i(X) dx dX$$

і припустивши, що $\lambda(x, X)$ є вислід ітерації якогось симетричного зерна (ядра) $K(x, X)$, отже

$$(10) \quad \lambda(x, X) = \int_0^1 K(x, y) K(y, X) dy,$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) K(y, X) \psi_i(x) \psi_i(X) dx dy dX = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx \right]^2 dy = \sum_j c_{ij}^2, \end{aligned}$$

де

$$c_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy$$

є очевидно сучинник Fourier'a функції

$$\int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx.$$

Із очевидної рівності

$$\sum_i |b_{ii}| = \sum_{i, j} c_{ij}^2$$

випливає збіжність ряду (9), для чого досить лише у (8) замінити $\lambda(x, X)$ на $K(x, X)$. Ясно нпр., що коли $\lambda(x, y)$ має форму

$$\sum_{\lambda=1}^p \alpha_\lambda(x) \beta_\lambda(y),$$

¹⁾ Hilbert, Grundzüge ein. allg. Theorie der lin. Integralgleichungen. ст. 445.

де системи $\alpha_\lambda(x)$, $\beta_\lambda(x)$ є біортогональні та нормальні, то умова (10) справджується, бо тоді зерно (ядро) не міняється від ітерації¹⁾.

Завважмо ще, що міркування тут наведені лишаються, з незначними змінами, правдиві, коли

$$\lambda(x, X) = \int_0^1 K_1(x, y) K_2(y, X) dy,$$

де K_1 та K_2 є функції симетричні. Справді рівняння замкненості дає:

$$(11) \quad b_{ii} = \sum_j c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)},$$

де

$$c_{ij}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy; \quad c_{ij}^{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy;$$

застосувавши до (11) нерівність Cauchy, дістанемо збіжність ряду (9), бо ряди

$$\sum_{i, j} c_{ij}^{(1)2} \quad \sum_{i, j} c_{ij}^{(2)2}$$

збігаються з огляду на симетричність функцій K_1 та K_2 .

Отож бачимо, що визначник (7) є абсолютно збіжний, а система рівнянь (5) при умові $f(x) = 0$ розв'язується що до невідомих a_i .

Окрім того $D(k)$ та всі його підвизначники є цілі трансцендентні функції параметра k , а рівняння

$$D(k) = 0$$

має безліч дійсних додатних корінів:

$$k_1, k_2, \dots;$$

коли k дорівнює одному з них k_s , то хоч один із підвизначників $D_{ir}(k_s)$ не є нуль, і система (5) має розв'язку:

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n : \dots = D_{11}(k_s) : D_{12}(k_s) : \dots;$$

відповідна „особлива“ функція $\varphi_s(x)$ напишеться в наступній формі:

¹⁾ Vivanti, Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari, сr. 180–182.

$$\varphi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{in}(k_s) \psi_n(x),$$

де значок i довільний при умові, що хоч один із визначників $D_{ir}(k_s)$ не є нуль. Щоб довести всі ці твердження, досить завважити, що з огляду на збіжність суми

$$\sum_1^{\infty} a_i^2$$

(згідно з дослідями Н. von Koch'a), можна, помноживши рівняння (5) відповідно на d_i (де d_i є сучинник Fourier'a „довільної“ функції, що стає нулем у точках 0 та 1) застосувати рівняння замкнености та основну лемму варіаційного числення; звідси й вийде, що $\varphi_s(x)$ є „особлива“ функція, а k_s особлива вартість параметру, отже дійсна й додатна з огляду на симетричність і додатність $\lambda(x, X)$.

Тепер для доводу Ritz'ового способу (див. рівн. (3) та визначник (6)) покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} | \varphi_s(x) - \varphi_s^{(n)}(x) | = 0,$$

де $\varphi_s(x)$ справджує рівняння

$$\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX = 0,$$

отже й умови

$$(12) \quad \int_0^1 \left[\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \infty),$$

а $\varphi_s^{(n)}$ — умови:

$$(13) \quad \int_0^1 \left[\varphi_s^{(n)}(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0, \quad \text{коли } i \leq n,$$

і окрім того умови:

$$(14) \quad \int_0^1 \left[\varphi_s^{(n)}(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx = \\ = -k_s \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx, \quad \text{коли } i > n.$$

Комбінуючи (12), (13) та (14), дістанемо:

$$\int_0^1 \left\{ \left[\varphi_s(x) - \varphi_s^{(n)}(x) \right] + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \left[\varphi_s(X) - \varphi_s^{(n)}(X) \right] dX \right\} \psi_i(x) dx =$$

$$= \begin{cases} (k_s - k_s^{(n)}) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{коли } i \leq n \\ -k_s \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{коли } i > n, \end{cases}$$

а звідси:

$$(15) \quad \varphi_s^{(n)}(x) - \varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \left[\varphi_s(X) - \varphi_s^{(n)}(X) \right] dX =$$

$$= \varphi_s^{(n)} + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX = R_n(x),$$

де

$$(16) \quad R_n = \sum_{i=1}^n (k_s - k_s^{(n)}) \psi_i(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX \right] \psi_i(x) dx +$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty} k_s \psi_i(x) \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx.$$

Алеж остача тригонометричного розвинення функції, що справджує Lipschitz'ову умову (з сучинником λ), може бути обмежена виразом $\frac{A\lambda}{n}$ ($A = const$), як довів D. Jackson¹⁾, і хоч функція

$$\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX$$

залежить від n , її Lipschitz'ів сучинник напевно не залежить від n , коли нпр.

$$\int_0^1 \left[\lambda_x^1(x, X) \right]^2 dX$$

¹⁾ Transactions of the Am. Math. Soc. 1912.

Про Green'ове та Stokes'ове перетворення.

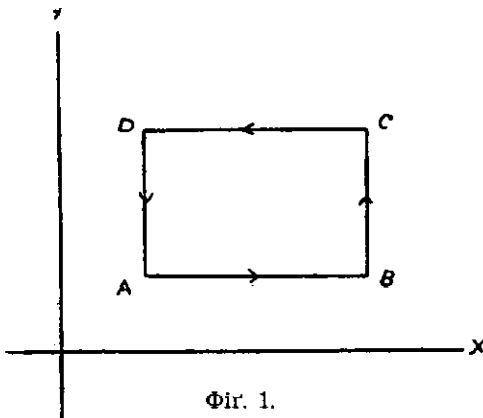
[Über die Sätze von Green und Stokes von M. Krawtchouk].

І. Перетворення криволінійного інтеграла в подвійний на площі.

Із різних способів доводу рівності

$$(1) \quad \int_C [P(x, y)dy - Q(x, y)dx] = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy,$$

де C є замкнений контур без кратних точок, а S — обмежена ним частина площі XY , наступний спосіб, гадаємо, має деякі переваги завдяки ширині тих обмежних умов, що він їх потребує, та відповідності фізичному змістові твердження, що може бути висловлений так: потік вектора (P, Q) через плоский контур C дорівнює розбігові того вектора на полі S цього контура. При тім припускаємо, що функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають суцільні похідні $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$ скрізь на полі S (але можуть їх не мати на контурі C), а самі $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є суцільні на полі S разом із контуром C (отже на множині точок $S+C$) — перша що до змінного x , друга — що до змінного y .



Фіг. 1.

Нехай тим часом контур C є прямокутник $ABCD$ (див. фіг. 1), що має боки рівнобіжні координатним осям, притім

нехай $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$ існують і є суцільні не тільки на полі S цього контура, але й на множині $S+C$. Тоді, з огляду на те, що на боках AB та CD буде $dy=0$, маємо:

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dy &= \int_{BC} P dy + \int_{DA} P dy = \int_{BC} P dy - \int_{AD} P dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} P dy \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial x} dy dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial x} dx dy, \end{aligned}$$

де x_1 — абсциса точок A та D , x_2 — абсциса точок B та C , y_1 — ордината точок A та B , y_2 — ордината точок C та D .

Так само для контура $ABCD$ можна довести, що

$$\int_C Q(x, y) dx = - \int_S \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy.$$

Отже звір (1) доведено для зазначеного частинного випадку. Далі ясно, що він тим самим є доведений для всякого поля S_1 , що разом зі своїм обводом C_1 належить до загального поля S в (1) і складається з довільної кількості прямокутників, які мають боки рівнобіжні координатним осям (див. фіг. 2).

Отже, щоб довести теорему у випадку довільного контура C , треба лише показати, що різниця (див. фіг. 2)

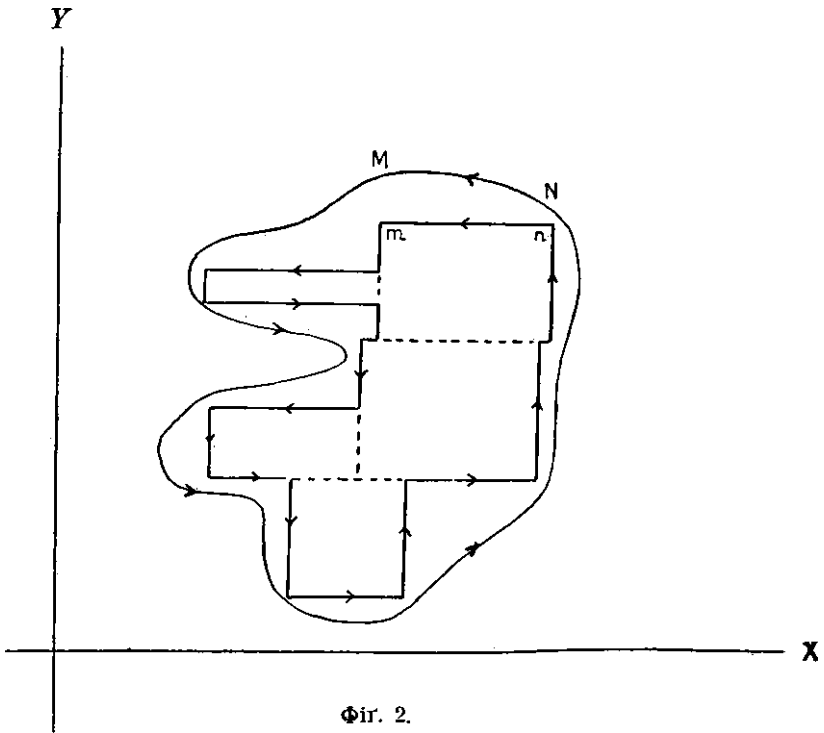
$$\int_C (P dy - Q dx) - \int_{C_1} (P dy - Q dx)$$

іде до нуля, коли до нуля йде віддаль між контурами C та C_1 , взята так у напрямі осі X -ів, як і в напрямі осі Y -ів. А для цього досить завважити, що нпр. величина

$$\left| \int_{MN} Q dx - \int_{mn} Q dx \right|$$

(див. фіг. 2), де частину MN обводу C та частину mn обводу C_1 узято так, що вони мають спільну проєкцію на осі X -ів, не перевищує добутку з довжини mn та з найбільшої вартости функції

$$T = | Q(x, y') - Q(x, y'') |,$$



Фиг. 2.

де (x, y') є довільна точка дуги MN , а (x, y'') — точка з тою самою абсцисою на відтинку mn ; далі, повторивши що до функції $Q(x, y)$, з очевидними відмінностями, відомий Weierstrass'ів довід одностайної суцільності суцільної функції в замкненім обсягу, дістанемо, що T одностайно йде до нуля разом із величиною $|y' - y''|$. Отож йде до нуля й

$$\left| \int_C Q dx - \int_{C_1} Q dx \right|,$$

як що C має обмежену довжину.

Подібні міркування можна навести й що до величини

$$\left| \int_C P dy - \int_{C_1} P dy \right|.$$

Рівність (1) доведена.

Зовсім подібно можна довести й рівність

$$(2) \quad \int_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

як що функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають на полі S суцільні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а самі $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є суцільні на множині точок $S+C$ — перша що до змінного y та друга що до змінного x . Зміст рівності (2) можна висловити так: робота вектора (P, Q) на плоскій контурі C дорівнює його вирові на полі S того контура.

Взір (1) є т. зв. Green'ове перетворення на площі, а взір (2) — перетворення Stokes'ове.

2. Поглиблення попередніх вислідів.

Самий довід попереднього параграфу показує, що рівність

$$(3) \quad \int_C Q(x, y)dx = - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy$$

лишиться правдива, коли подані там обмежні умови змінити так:

1. Замість вимоги, щоб довжина C існувала, можна взяти лише вимогу, щоб сума боків контура C_1 , рівнобіжних осі X -ів, була обмежена (отже нпр. у жадній точці контур C може не мати дотичної, ба навіть C може не мати певної довжини в узагальненім розумінні¹⁾).

2. Замість фактично використаної в доводі вимоги, щоб крива C квадрувалася, отже щоб поле S мало певну величину, як границю величини поля S_1 , можна, не вимагаючи навіть суцільності кривої C , обмежитися вимогою, щоб існував такий контур серед контурів C_1 , який майже скрізь бувби довільно близький до C .

Окрім того, в рівності (3) інтеграли можна брати в Lebesgue'овім розумінні, замінивши поле S його осередньою мірою, а існування та суцільності похідної $\frac{\partial Q}{\partial y}$ вимагати не скрізь, а майже скрізь на полі S .

¹⁾ Про узагальнене поняття довжини кривої див. нпр. роботу Scheffer'a в Acta Mathematica. t. 5.

3. Застосування до функцій комплексного змінного.

Доведімо помічну теорему:

Коли функція $u(x, y, \dots)$ має перші похідні по всіх змінних в усіх точках обсягу S та є одностайно суцільна в цім обсягу, то ті похідні є самі одностайно суцільні в обсягу S .

Обмежуючися випадком двох незалежних змінних, маємо довести рівність:

$$\lim_{h, k=0} \left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) \right| = 0.$$

Для цього покажімо вперед, що

$$(4) \quad \left| u'_x(x, y) - \frac{u(x+H, y) - u(x, y)}{H} \right| < \frac{E_n}{2},$$

де

$$E_n \rightarrow 0, \quad \text{коли} \quad H \rightarrow 0$$

і E_n не залежить від вибору точки (x, y) в обсягу S , аби лише й точка $(x+H, y)$ до нього належала. Використовуючи знов ту саму Weierstrass'ову думку, припустімо, що остання нерівність неправдива, отже що, хоч якеб мале не брати $|H|$, все знайдуться на S такі точки (x, y) , що в них буде

$$\left| u'_x(x, y) - \frac{u(x+H, y) - u(x, y)}{H} \right| \geq E > 0,$$

де E є якась стала величина. Тоді те саме можна твердити і про одну (що найменше) з довільного числа яких-небудь частин, на які поділимо S ; ділячи цю частину на дрібніші частки і повторюючи це міркування без кінця, прийдемо до висновку, що нерівність (4) є неправдива в якійсь певній граничній точці (point limite) обсягу S , що можливо лише тоді, коли ця точка не належить до S .¹⁾

Отож, коли точки $(x+h, y+k)$ та $(x+h+H, y+k)$ належать до S , то (4) дає:

$$\left| u'_x(x+h, y+k) - \frac{u(x+h+H, y+k) - u(x+h, y+k)}{H} \right| < \frac{E_n}{2}.$$

Комбінуючи останню нерівність із (4), легко дістанемо:

¹⁾ Пор. замітку E. Goursat в Transactions of the American Math. Society I, 1900. Він доводить ту саму нерівність (4) (для випадку, коли u є функція комплексного змінного), беручи замкнений обсяг S .

$$(5) \quad \left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) - \frac{u(x+h+H, y+k) - u(x+H, y)}{H} + \frac{u(x+h, y+k) - u(x, y)}{H} \right| < E_n.$$

А що, з огляду на суцільність функції u можна числа $|h|$ та $|k|$ взяти такі малі, щоб було:

$$\left| u(x+h, y+k) - u(x, y) \right| < \frac{|H|^2}{2}$$

в усіх точках обсягу S , то (5) дає:

$$\left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) \right| < E_n + |H|,$$

що й доводить теорему.

Припустімо тепер, що у функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ параграфу 1 існують одночасно всі перші похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}$$

в усіх точках обсягу S , а самі функції є суцільні на множині точок $S+C$. Тоді одночасно будуть правдиві обидва взори (1) та (2), отже й рівність:

$$\begin{aligned} - \int_C (Pdy - Qdx) + i \int_C (Pdx + Qdy) &= - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ i \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

бо похідні від P та Q , як доведено, є суцільні в усіх точках поля S .

Остання рівність дає узагальнення основної теореми з теорії функцій комплексного змінного, т. зв. теореми Cauchy-Goursat:

Коли функція

$$f(z) = Q(x, y) + iP(x, y)$$

комплексного змінного

$$z = x + iy$$

має похідну

$$f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} - i \frac{\partial Q}{\partial y}$$

в усякій осередній точці обсягу S і є суцільна на множині точок $S+C$, де C є границя поля S , то

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Узагальнення полягає в тім, що не вимагається існування похідної $f'(z)$ на контурі C , і що твердження лишається правдиве при поширених умовах параграфу 2.

4. Green'ове перетворення в просторі.

У тривимірнім просторі рівність подібна до взору (1) є

$$(6) \iint_S (Pdydz + Qdzdx + Rdx dy) = \iiint_V \left(\pm \frac{\partial P}{\partial x} \pm \frac{\partial Q}{\partial y} \pm \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

де V є якийсь обмежений об'єм, а S — його поверхня. Тут ізнов припускаємо, що в осеред об'єму V функції P , Q , R змінних x , y , z мають суцільні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z},$$

а на множині точок $V+S$ самі функції P , Q та R суцільні — перша що до змінного x , друга що до y і третя що до z .

Перший довід рівності (6). Міркуваннями подібними до тих, що подано при доводі рівності (1), легко довести, що коли V є об'єм рівнобіжностінника, якого стіни є рівнобіжні координатним площам, причім $\frac{\partial P}{\partial x}$ існує і є суцільна також і на поверхні S цього рівнобіжностінника, то

$$\iint_S Pdydz = \pm \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

Так само

$$\iint_{S_1} Pdydz = \pm \iiint_{V_1} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz,$$

де V_1 є об'єм складений із рівнобіжностінників, що мають стіни рівнобіжні координатним площам і цілком належать до об'єму V в (6), а S_1 — його поверхня.

Нарешті граничний перехід, коли точки поверхні S_1 нескінченно зближуються до S , доведе рівність (6) у випадку:

$$Q = \text{const}, \quad R = \text{const}.$$

Повторюючи подібні міркування що до функцій Q та R доведемо (6) цілком.

Узагальнення обмежних умов що до множин точок V та S , а також що до функцій P, Q, R , подібні до тих, що дано в параграфі 2, зробити не трудно.

Другий довід рівності (6). Обмежмося тут тим випадком, коли проста рівнобіжна осі Z -ів може мати з поверхнею S не більше як дві спільні точки. Визначмо на S криву $C(z)$ умовою:

$$z = \text{const};$$

ця крива є замкнена. Тоді

$$(7) \quad \iint_S Pdydz = \int_{z=z_0}^{z_1} \left(\int_{C(z)} Pdy \right) dz,$$

де z_0 є найменша, а z_1 — найбільша з координат z точок поверхні S . З другого боку, на підставі взору (1), маємо:

$$\int_{C(z)} Pdy = \iint_{S(z)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy,$$

де $S(z)$ є поле плоскої кривої $C(z)$; а тоді (7) перепишеться так:

$$\iint_S Pdydz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\iint_{S(z)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy \right) dz;$$

ця рівність є, очевидно, тотожна з

$$\iint_S Pdydz = \iiint_V \pm \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz.$$

Не спиняємося тут над тим, як до цього доводу пристосувати узагальнення параграфу 2.

5. Stokes'ове перетворення в просторі.

Для простору тривимірного рівність, подібна до рівності (2), є

$$(8) \quad \int_C (Pdx + Qdy + Rdz) = \\ = \iint_S \left[\pm \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dydz \pm \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dzdx \pm \right. \\ \left. \pm \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy \right],$$

де C є замкнена просторова крива без кратних точок, а S — яканебудь обмежена нею поверхня. Припускаємо, що в усіх осередніх точках поверхні S функції P , Q та R змінних x , y , z мають суцільні похідні:

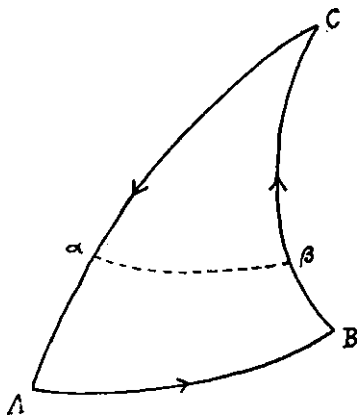
$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y},$$

а самі P , Q та R є суцільні на поверхні S разом із її границею C , тоб то на множині точок $S + C$.

Перший довід рівності (8). Дове́дімо (8) тим часом для випадку, коли контур C є криволінійний трикутник, що цілком складається з осередніх точок множини S , причім його боки визначаються рівняннями:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0$$

(див. фіг. 3). Нехай проти боку



Фіг. 3.

$$x = x_0$$

лежить вершок $A (x_1, y_0, z_0)$, проти боку

$$y = y_0$$

вершок $B (x_0, y_1, z_0)$ і проти боку

$$z = z_0$$

вершок $C (x_0, y_0, z_1)$; окрім того, нехай $\alpha\beta$ є лінія перерізу поля цього трикутника площею

$$z = const.$$

З огляду на те, що на лінії BC змінне x не міняється, маємо:

$$\int_{BC} Pdx = 0;$$

Отже

$$(9) \quad \int_{\text{обвід } ABC} Pdx = \int_{AB} Pdx - \int_{AC} Pdx.$$

Далі очевидно

$$(10) \quad \int_{AB} Pdx = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{\alpha\beta} Pdx \right) dz = \pm \iint_{\text{поле } ABC} \frac{\partial P}{\partial z} dx dz.$$

Так само

$$(11) \quad \int_{AC} Pdx = \pm \iint_{\text{поле } ABC} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Отже рівність (9), з допомогою (10) та (11), переходить у

$$\int_{\text{обвід } AB} Pdx = \pm \iint_{\text{поле } ABC} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right).$$

Повторивши подібні міркування що до

$$\int Pdy \quad \text{та} \quad \int Rdz$$

доведемо Stokes'ову теорему для випадку, коли крива C є ABC .

Загальний випадок знов доводиться подібно до того, як у параграфі 1. Заповнюємо поверхню S із такою малою недо-стачою, як хочемо, криволінійними трикутниками типу ABC ; це можна зробити нпр. так: поділити поверхню S на смуги рядом рівнобіжних площ

$$z = \text{const},$$

а тоді кожну смугу поділити на трикутники, поперемінно роз-різуючи її то площею

$$x = \text{const},$$

то площею

$$y = \text{const}$$

та належно добираючи за всяким разом числову вартість const . Нехай спільна поверхня цих трикутників є S_1 , а її границя C_1 . Тоді, на підставі того, що в цім параграфі доведено, маємо:

$$\int_{C_1} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \iint_{S_1} \left[\pm \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dy dz \pm \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dz dx \pm \right. \\ \left. \pm \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy \right],$$

а звідси, з допомогою такого самого граничного переходу, як у параграфі 1, прийдемо до (8).

Узагальнення параграфу 2, з відповідними змінами, поширюються й на взір (8).

Другий довід рівности (8). Обмежмося тут випадком, коли не тільки крива C , але й її проєкції на координатних площях XY та XZ не мають кратних точок; нехай ці проєкції є C_x та C_y , а поля ними обмежені S_x та S_y . Тоді

$$(12) \quad \int_C P dx = \int_C P dx = \pm \iint_{S_x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

де похідну $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)$ треба брати, памятаючи, що z є функція від x та y ; отож (12) можемо переписати так:

$$\int_C P dx = \pm \iint_{S_x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \pm \iint_{S_x} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \pm \iint_{S_x} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx.$$

Останній інтеграл на правій стороні візьмімо вперед по змінному y ($x = const$), а тоді по змінному x ; тоді попередня рівність остаточно напишеться так:

$$\int_C P dx = \iint_{S_x} \left(\pm \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \pm \frac{\partial P}{\partial z} dx dz \right),$$

чого й досить для доводу рівности (8).

Цей довід не так легко надається до взагальнень, про які говорено в першій довіді.

Nachtrag zur Abhandlung: „Die erste Paläolithstation“.

Nach dem Abschluss des Druckes der obigen Arbeit stoss ich bei meinen fortgesetzten Forschungen im galizischen Südpodolien auf äusserst wichtige Funde, die mich veranlassen, auf Grund dieser neuen, bis jetzt unbekanntenen Tatsachen eine polyglaziale Einteilung des podolischen Diluviums aufzustellen.

Die Entdeckung und Untersuchung der jungpaläolithischen Lössstationem ermöglichen eine Ausscheidung und chronologische Einordnung der podolischen Löss vorzunehmen, die ihrerseits für den Ausbau der diluvialen Chronologie Podoliens eine weitere wichtige Grundlage bilden kann.

Die fortgesetzten Grabungen auf der Höhe \triangle 316 haben in allgemeinen Umrissen die chronologische Zugehörigkeit der beiden Löss-Schichten aufgeklärt. Einen Teil der Ergebnisse meiner letztvorgenommenen Untersuchungen werde ich nächstens in „Wiadości-archeologiczne“ in polnischer Sprache (mit dem französischen Resumé) veröffentlichen, eine ausführliche Bearbeitung aller im J. 1926 durchgeführten Forschungen erscheint im Frühjahr 1927 in den Publikationen der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg.

Lemberg, im September 1926.
