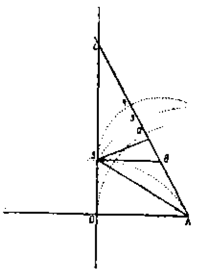
Замітка про обвід кола в неевклідовій ґеометрії.

Придатність для неевклідової ґеометрії звичайного означення обводу кола, як спільної границі обводів вписаних та описаних многокутників, виявляється доводом отсеї теореми, опертої на твердження, що сума кутів трикутника є $\leq 180^{\circ}$:

Теорема: Коли обвід правильного описаного на колі n-кутника є P_n, а обвід правильного вписаного n-кутника p_n, то для всякого n справедлива нерівність:

$$P_{2n} - p_{2n} < \frac{P_n - p_n}{2}.$$



Доказ. Нехай AD_1 є половина боку правильного вписаного в коло n-кутника, $D_1 I$ — нормальна через середину того боку, AI — половина боку правильного описаного n-кутника, AE_1 — бік правильного вписаного q_n-кутника, AB й BE_1 — половини боків правильного описаного q_n-кутника. Теорема буде доведена, коли покажемо, що

$$2AB - AE_1 < \frac{AI - AD_1}{2}. \qquad (1)$$

На простій AI повідзначуймо $AD = AD_1$, $AE = AE_1$, $AF = 2AB$; отже D і E будуть точки перетину простої AI колами, що мають осередок A і лучі відповідно AD_1 і AE_1; F є точка перетину простої AI колом, що має осередок B і луч BE_1.

Із трикутника AE_1D_1 маємо:

$$\sphericalangle E_1AD_1 + \sphericalangle AE_1D_1 \leq 90^{\circ},$$

отже

$$\sphericalangle E_1AI = \sphericalangle AE_1B = 90^{\circ} - \sphericalangle AE_1D_1 \geq \sphericalangle E_1AD_1.$$

На підставі сеї нерівности кутів E_1AI та E_1AD_1 легко показати, що спід C сторча E_1C на просту AI належить до відтинка AD (в ґеометрії Лобачевського C лежить між A і D, в ґеометрії евклідовій C зливається з D).

Порядок точок C, D, E, F, I на простій AI відповідає азбучному порядкови.

Із прямокутного трикутника CE_1F маємо:

$$\sphericalangle CE_1F + \sphericalangle CFE_1 \leqq 90^\circ;$$

легко показати також, що

$$\sphericalangle FE_1I + \sphericalangle CFE_1 = 90^\circ;$$

отже

$$\sphericalangle CE_1F \leqq \sphericalangle FE_1I. \qquad (2)$$

Із прямокутного трикутника CE_1I, на підставі нерівности (2), виводимо, що

$$CF < FI;$$

отже й

$$DF < FI,$$

звідки маємо:

$$DF < \frac{DI}{2},$$

а тоді й

$$EF < \frac{DI}{2},$$

тоб то

$$AF - AE < \frac{AI - AD}{2},$$

нерівність рівноважна з (1).

Михайло Кравчук.