Доказ основної теореми альґебри.

Поданий низше доказ теореми про істнування коріня всякого альґебрічного рівнання відріжняється від відомого доказу Cauchy тим, що 1) зводиться до обчислення коріня з довільно малою наперед даною похибкою; 2) для свого переведення потребує з трансцендентного обсягу лиш поняття невимірного числа як безконечного десяткового дроба, поняття границі і поняття тяглости.

Лемма 1. Коли

$$|a_n| < q^n \quad (o < q < 1),$$

то сума

$$s_n = a_1 + a_2 + \qquad + a_n$$

для всіх досить великих вартостий числа n довільно мало відріжняється від певного сталого числа s (отже істнує $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$). Справді

$$|s_{n+k} - s_n| \leqq |a_{n+1}| + \qquad + |a_{n+k}| \leqq \frac{q^{n+1}}{1-q};$$

отже, починаючи з досить великої вартости N числа n, всі s_n відріжняються одно від одного довільно мало. Покладім тепер

$$s_n = s_n' + i.s_n'',$$

де s_n', s_n'' — числа дійсні і напишім s_n' безконечним десятковим дробом, то бачимо, що скількість перших спільних цифер у всіх s_n' при $n > N$ є довільно велика; при необмеженім збільшенню числа N згаданий ряд спільних цифер утворить безконечний десятковий дріб s'. Подібнож із s_n'' повстане безконечний десятковий дріб s''. Тоді $s' + i \quad s''$ буде шуканим числом s.

Лемма 2. Коли функція $f(z)$ є тягла в точці $z = s$ і $f(s_n)$ довільно мало відріжняється від числа A при $|s - s_n|$ досить малім, то

$$f(s) = A,$$

Справді, по самому означенню тяглости, $|f(s_n) - f(s)|$ є число довільно мале одночасно з $|A - f(s_n)|$; отже й ріжниця $A - f(s)$ має абсолютну вартість довільно малу, що, з огляду на незмінність чисел A і $f(s)$, дає

$$f(s) = A.$$

Лемма 3. Коли абсолютні вартости сочинників $a_1, \ldots, a_n$ многочлена

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

менші від певного числа a і абсолютна вартість сочинника a_0 — більша від певного числа α, то для всякого $\varkappa > o$ можна дібрати таке $L > o$, що при

$$|z| \geqq L$$

буде

$$|f(z)| > \varkappa.$$

Справді, для здійснення останньої нерівности досить справдити нерівність:

$$\alpha|z|^n - a(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + |z| + 1) > \varkappa,$$

для чого досить лиш покласти

$$L = \frac{a + \varkappa}{\alpha} + 1.$$

Лемма 4. Коли в точці x вартости многочленів $f(z)$ та $f'(z)$ ріжні від O, то в обсягу точки x є така точка

$$y = x - \delta \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (o < \delta < 1),$$

що

$$|f(y)| < |f(x)|.$$

Справді,

$$(1) \ldots . f(y) = f(x) + (y - x) f'(x) \left[1 + \frac{(y-x) f''(x)}{2!\, f'(x)} + \ldots + \frac{(y - x)^{n-1} f^{(n)}(x)}{n!\, f'(x)}\right];$$

поклавши тепер

$$\Delta = \frac{\delta f(x) f''(x)}{2!\, f'^2(x)} - \frac{\delta^2 f^2(x) f'''(x)}{3!\, f^3(x)} + \ldots \pm \frac{\delta^{n-1} f^{n-1}(x) f^{(n)}(x)}{n!\, f^n(x)},$$

матимемо при досить малім δ:

$$|\Delta| < |f(x)|.$$

А тоді з (1) дістанемо:

$$f(y) = f(x).(1-\delta) + \delta\Delta,$$
$$|f(y)| \leqq |f(x)|.(1-\delta) + \delta|\Delta| < |f(x)|.$$

Теорема. Рівнанне

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \qquad + a_n = o$$

має корінь.

Припустім, що ми вміємо визначити коріні всякого рівнання (n—1)-го ступня. Нехай коріні многочлена $f'(z)$ будуть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ і жаден із них не є корінем многочлена $f(z)$. Тоді, на підставі лемми 4, можна обрати точку ζ_0 так, що

$$|f(\zeta_0)| < |f(\zeta_1)|, |f(\zeta_2)|,$$

і істнують точки ζ, для котрих

$$|f(\zeta)| < |f(\zeta_0)|.$$

Для всякої точки ζ справедливі нерівности

$$|\zeta-\zeta_1|, |\zeta_1-\zeta_2|, \qquad > M, |\zeta| < L$$

(див. лемму 3), де L і M — якісь сталі числа; отже при певнім $\eta > o$ маємо:

$$|f(\zeta)|, \frac{1}{|f'(\zeta)|}, \frac{|f''(\zeta)|}{2!}, \qquad \frac{|f^{(n)}(\zeta)|}{n!} < 2^{\eta}.$$

Нарешті, на підставі тоїж лемми 4, коли ζ' є одна з точок ζ, то для довільного досить великого $p > o$ точка

$$\zeta'' = \zeta' - \frac{1}{2^{4p}} \quad \frac{f(\zeta')}{f'(\zeta')}$$

теж належить до точок ζ; при тім (див. (1))

$$f(\zeta'') = f(\zeta')\left[1 + (\zeta''-\zeta')\frac{f'(\zeta')}{f(\zeta')} + \ldots + \frac{(\zeta''-\zeta')^n}{n!} \quad \frac{f^{(n)}(\zeta')}{f(\zeta')}\right],$$

отже

$$|f(\zeta'')| < |f(\zeta')| \left[1 - \frac{1}{2^{4p}} + \frac{2^{4\eta}}{2^{8p}} + \ldots + \frac{2^{2n\eta}}{2^{4np}}\right],$$

а поклавши $p \geqq \eta + 1$, дістанемо:

$$|f(\zeta'')| < |f(\zeta')| \quad \left[1 - \frac{1}{2^{4p+1}}\right].$$

Переходячи подібнож від точки ζ'' до ζ''', ..., нарешті від $\zeta^{(n)}$ до $\zeta^{(n+1)}$, дістанемо остаточно:

$$(2) \qquad |f(\zeta^{(n+1)})| < |f(\zeta')| \quad \left[1 - \frac{1}{2^{4p+1}}\right]^n$$

$$(3) \qquad \zeta^{(n+1)} = \zeta' - \frac{1}{2^{4p}}\left[\frac{f(\zeta')}{f'(\zeta')} + \frac{f(\zeta'')}{f'(\zeta'')} + \cdots + \frac{f(\zeta^{(n)})}{f'(\zeta^{(n)})}\right].$$

З (2) бачимо, що при досить великім n число $f(\zeta^{(n+1)})$ довільно мало відріжняється від O; а з (3) виявляється істнуванне числа ζ, від котрого всі $\zeta^{(n)}$ при досить великім n відріжняються довільно мало. Отже

$$f(\zeta) = o.$$

Теорему доказано.

Завважмо ще, що при $|f(\zeta')|$ досить малім число ζ довільно мало відріжняється від ζ' (див. (3)). Тому можна мати за доказане, що **при досить малій зміні сочинників многочлена без кратних корінів — довільно мало зміняються й його корінї**, отже що корінї рівнання се тяглї функції його сочинників.

Михайло Кравчук.