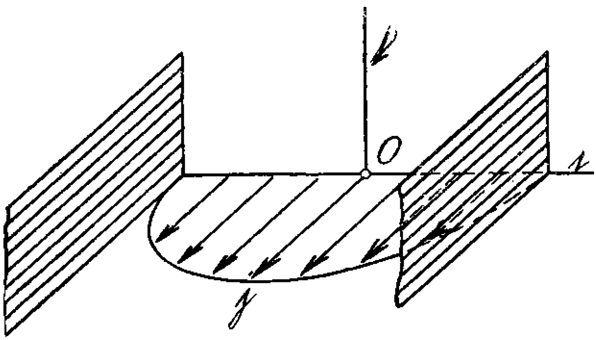
# Обмежені векторові поля.

В розвідці: „Діяда як споріднена трансформація“ (гл. Збірник мат.-природ.-лік. секції т. XXI) подав я спосіб розсліджування векторового поля при помочи діяд; при тім функції, що визначають поле, були все цілі, вимірні і без обмеження, а тим самим і поля були необмежені. Та в теоретичній фізиці стрічаємо на кождім кроці поля, обмежені якимись кривими або поверхнями, тому треба і такими полями зайнятися.

В сій розвідці беру під увагу два найпростійші випадки, які дають нам: ріка і водопровід. Для упрощення задачі приймаю, що ріка має ширину $2a$, а вода пливе на середині найскорше, дальше, що скорість води визначена вектором

$$\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathfrak{j}.$$




Фіг.

Коли кому не подобалобися, що скорість на середині ріки за велика, то може замість $a$ ввести якубудь иншу сталу $k.a$, що однак викличе деяку зложність у проблємі.

Як бачимо, поле обмежене, бо для $|x| > a$ $\mathfrak{v}$ приймає мнимі вартости.

Надто щоби функція була однозначна, обмежуюся до додатних вартостий другого коріня.

Для всіх точок на оси $xx$ лежать кінці вектора $\mathfrak{y}$ на колі о лучу $r = a$.

Для розсліду поля возьмім якийбудь приріст провідного луча в площі $(xz)$

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dz\,\mathfrak{k}.$$

Сей приріст сповняє умову

$$(\mathfrak{y}\; d\mathfrak{r}) = 0,$$

а тоді (cf. Збірник мат.-прир.-лік. секції т. XXI, ст. 118)

$$d\mathfrak{y} = \Phi_{\mathfrak{y}} d\mathfrak{r}$$

$$= [curl\, \mathfrak{y}\; d\mathfrak{r}]$$

а сам

$$curl\, \mathfrak{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathfrak{k}.$$

Коли взяти провідний луч у площі $(xy)$

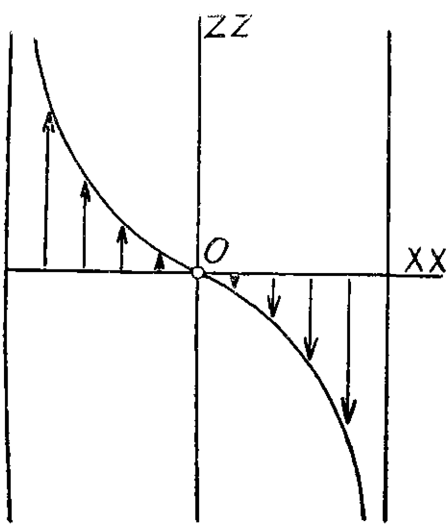
$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j},$$

тоді

$$(curl\, \mathfrak{y}\,.\,\mathfrak{r}) = 0,$$

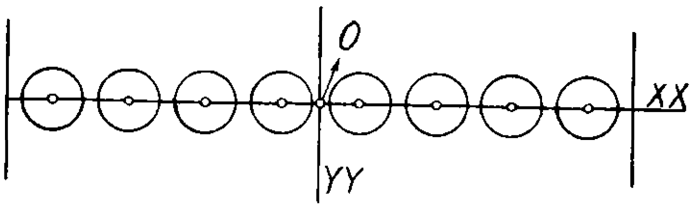
се значить, що в кождій точці поверхні ріки стоїть $curl\, \mathfrak{y}$ до неї прямовісно, при чім величина виру залежить від $x$ і є що до знаку все противна до $x$ (гл. фіґ. 2). З огляду, що $div\, \mathfrak{y} = 0$, тож маємо діло з чисто соленоїдальним полем.

Щоби се поле унагляднити, подумаймо собі такий механічний прилад. На оси $xx$ на цвяхах прикріпляємо ряд кружків так, щоби легко довкола них оберталися. При тім цвяхи стоять до оси $zz$ рівнобіжно.



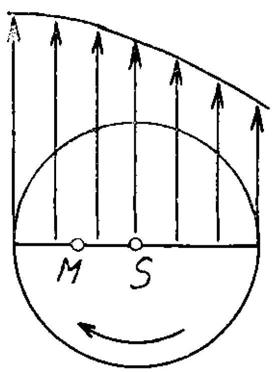

**Фіґ. 2**

В просторі нехай панує вихор, схарактеризований вектором $\mathfrak{v}$. Заложім дальше, що сила ділає пропорціонально до скорости, тоді полеві сили дадуть вислідну, що переходить через точку

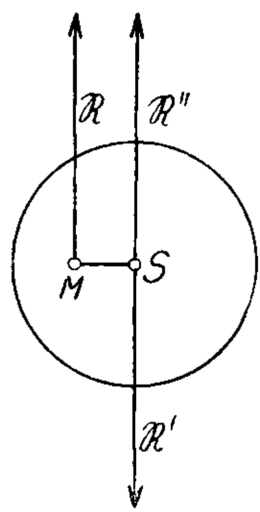



Фіг. 3

*M* поза серединою тяжести кружка *S*. Ся вислідна спричинить оборотовий рух кружка. З розкладу скорости слідує, що кружок, який є на середині, цілком не крутиться, а кружок, що є близше берега, тим сильнійше крутиться.




Фіг. 4




Фіг. 5

Колиж $\mathfrak{v}$ означає розпреділеннє скорости частинок води, то кружок пущений свобідно, мусить виконувати на воді два рухи:

а) поступовий здовж ріки з причини вислідної

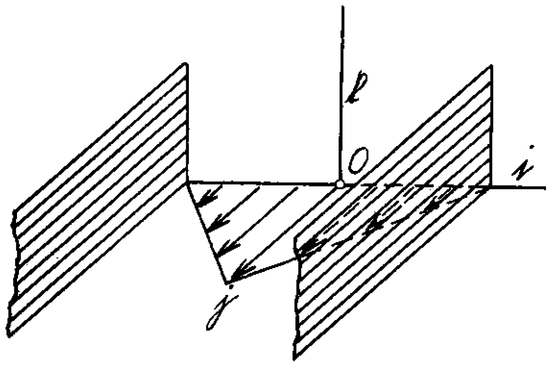
$$\mathfrak{R}''$$

і б) оборотовий, спричинений парою сил

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{R}').$$

Досвід годиться з тими висновками. Остає ще невияснений факт, що кожде округле тіло стремить усе до середини ріки, а подовгасте тіло (палиця, дошка) все стремить до берега. Чоловіка, що втопився, ріка все викидає на беріг.

Перейдім той самий випадок ще раз, принимаючи, що *скорість ріки збільшається* пропорціонально до віддалення від



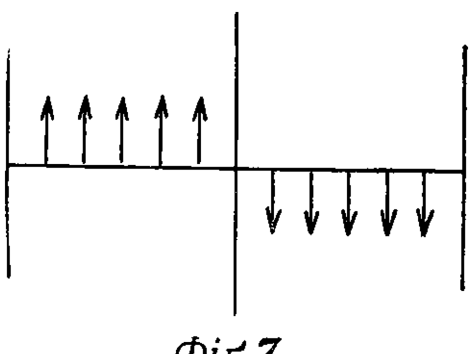

Фіґ. 6

берега аж до найбільшої вартости на середині ріки. В тім випадку вистане обмежитися до розсліду одної половини ріки. Вектор скорости є тоді

$$\mathfrak{v} = (a - x)\,\mathfrak{j}$$

для $$x = (a \ldots 0).$$

Розклад вирів показує, що вир є *const.*, але противного знаку по обох сторонах від середини ріки (гл. фіґ. 7). Під впли-



Фіґ. 7

вом сил, пропорціональних до скорости, кружки крутяться всі з однаковою оборотовою скоростю.

В водопроводах стрічаємо факт, що вода в рурі пливе найскорше в середині рури, а найповільнійше при самій рурі. Який рух виконують частинки води? Щоби сей проблем убрати в математичну форму, а надто щоби його улекшити, зробимо як у попереднім випадку деякі заложення.

Нехай буде скорість схарактеризована вектором

$$\mathfrak{y} = \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}\, \mathfrak{j}$$

і то додатними вартостями кореня.

З функції під коренем видно, що поле обмежене на руру о коловім перекрою $r = a$, при чім вісь рури йде здовж оси $yy$.

Коли

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dz\,\mathfrak{k},$$

то

$$(\mathfrak{y}\; d\mathfrak{r}) = 0,$$

а тимсамим

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \Phi_{\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{r} \\ &= [curl\,\mathfrak{y}\,.\, d\mathfrak{r}], \end{aligned}$$

а сам

$$curl\,\mathfrak{y} = \frac{z}{\sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}}\,\mathfrak{i} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}}\,\mathfrak{k}.$$

Для кождого перекрою, рівнобіжного до площі $(xz)$, лежать кінці векторів на півкулі о лучу $a$.

Коли провідний луч у тім перекрою є

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + z\mathfrak{k},$$

тоді

$$(curl\,\mathfrak{y}\,.\,\mathfrak{r}) = 0,$$

се значить, що вектор $curl\,\mathfrak{y}$ лежить стично до кола в площі перекрою о лучу $r = |\mathfrak{r}| = \sqrt{x^2 + z^2}$. Для усіх точок на його обводі має $curl\,\mathfrak{y}$ ту саму вартість, отже маємо діло з перстеневим виром, який посувається здовж оси $yy$ зі скоростю $\mathfrak{y}$. Рух і силу вирових перстенів характеризують рівнання:

$$\mathfrak{y} = \sqrt{a^2 - r^2}\,\mathfrak{j}$$

$$|\,curl\,\mathfrak{y}\,| = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

З сього розважання бачимо, що частинки води в водопроводах розбиваються на ряд елементарних вирів, при чім лише частинки, які є на оси рури, відбувають чистий поступовий рух. І в тім випадку є $div\ \mathfrak{y} = 0$, поле векторове є знову чисто солєноідальне, безжерельне.

Квестію можна загально поставити: розслідити векторове поле $\mathfrak{y} = \varphi(r)$ і

при умовах а) $div\ \mathfrak{y} = 0$

б) для $r = o$

має бути $\mathfrak{y}$ = maximum,

і в) для $r = a$

має бути $\mathfrak{y}$ = minimum.

Та найцікавійший був би випадок, коли ми могли би дістати функцію $\varphi(r)$ дорогою експериментальною; аж тоді могли би ми зовсім певно відповісти на питаннє: який рух виконують частинки води в водопроводах?

В Тернополи, 18 серпня, 1923.

*Никифор Садовський.*