ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XXI.

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

Дра **ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО.**

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XXI.

REDIGIERT VON

Dr. WLADIMIR LEWYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1922.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ.

Стор.
1. *Володимир Кучер.* Теорія зглядности 1—64
2. *Володимир Левицький.* До теорії евольвент 65—76
3. *Никифор Садовський.* Діяда як споріднена трансформація . 77—123
4. *П. В. Данкворт* і *Н. С. Садовський.* Про виріб срібних зеркал 124—134
5. *Роман Цегельський.* Про досліди др. Ірени Паранкевич над елементарним квантом електричности і над фотофорезою 135—140

INHALT.

Seite.
1. *Wladimir Kučer.* Relativitätstheorie 1—64
2. *Wladimir Lewyćkyj.* Zur Theorie der Evolventen . 65—76
3. *Nikefor Sadowśkyj.* Dyade als affine Transformation 77—123
4. *P. W. Dankworth* und *N. S. Sadowśkyj.* Über die Fabrikation der Silberspiegel . . . . 124—134
5. *Roman Cehelśkyj.* Die Arbeiten des Frl. Dr. Irene Parankewytsch über Elementarquanten der Elektrizität und Photophorese 135—140

Теорія зглядности.

Написав

Др. Володимир Кучер.

Вступ.

В часї, коли наука ставляла перші кроки, механїка найшла свій скінчений вираз в законах руху, сформулованих Newton-ом. Згідно признано їм начальне місце посеред законів природи і до них остаточно бажаємо звести всї фізико-хемічні явища. Розвій електромаґнетних теорій підважив ті, що здавали ся незрушимі, підвалини строгого знаня. Революційні стремлїння вдерли ся до области ще менше доступної, до области понятя часу і простору, на яких опирає ся кінематика, чиста наука про рух.

Виразом тих стремлїнь є так звана основа зглядности; уважати єї належить за кульмінацийну точку сего безпримірного розвою понять, який доконав ся у сучасній фізицї.

Електронова теорія H. A. Lorentz-а і з нею нероздільно звязана основа зглядности Einstein-а повстали як вислїд довгих стремлїнь, ведених до витвореня скінченої теорії електромаґнетних явищ, яка булаби позбавлена всяких суперечностий. Без сумнїву світло належить до тих саме явищ. На ґрунтї електромаґнетної теорії світла доконана ся еволюція понять, яка довела до основи зглядности.

Після неї, кожде фізичне явище відбуває ся все після однакових законів у всїх тїлах, які взаїмно пересувають ся з рівномірною скоростію. В наслїдок сего глядач з перебігу фізичного явища ніколи не може виснувати, чи тіло, на якім се явище відбуваєть ся, порушаєть ся чи ні. Творець основи зглядности A. Einstein поділив цілу єї теорію на дві части, а саме на: а) основу фізичної зглядности всїх рівномірних рухів, б) основу фізичної зглядности довільних нерівномірних рухів. Першу назвав Einstein „спеціяльною основою зглядности“, другу знов, до якої належить також теорія ґравітації, назвав „загальною основою зглядности“.

В сій части розправи займемо ся лише питанєм спеціяльної основи зглядности фізичних явищ.

I.

Фізичне уосноване теорії зглядности.

1. Електродинаміка H. Hertz-а і H. A. Lorentz-а.

Теорія Maxwell-а обнимає майже непредвиджену скількість електричних і оптичних явищ. Однак можна все відграничити деякі области, які теорія Maxwell-а поясняє лише при помочи розширених понять і нових гіпотез. Так пр. теорія Maxwell-а не виясняє в строгий спосіб електричних і оптичних явищ тїл в руху; а чейже запримічаємо згадані явища не лише на тїлах в спочинку. Заколоти електричної рівноваги, спричинені рухом матеріяльних тїл, вирівнують ся з найбільшою скоростію у вселенній т. є скоростію світла $c = 3 . 10^{10} \frac{cm}{sec}$. На случай повільного руху тїл, можемо розслїджувати електричні і оптичні явища у них в сей спосіб, немовби они в поодиноких по собі слїдуючих фазах руху спочивали. Так буває в практицї; тодї рівнаня Maxwell-а находять своє приміненє.

Зовсїм інакше представляєть ся справа, коли скорість тїл доходить до границї скорости світла. Електричні і оптичні явища тих тїл залежать не лише від положеня їх, але також від їх скорости. Відповідно до того розширив Hertz теорію Maxwell-а[1]); при тім руководив ся він тим, щоби впроваджувати як найменше нових гіпотез. Подібно як у тїл в спочинку, стараєть ся Hertz схарактеризувати електричний і маґнетний стан на кождім місци простору при помочи одного зложеного вектора електричної і маґнетної сили. Колиб се було можливе, то етер,

---

[1]) H. Hertz: Über die Grundgleich. der Elektrodyn. für bewegte Körper. (Wied. Ann. 41, p. 369, 1890).

сей провідник електромаґнетного поля, мусївби разом з тїлом порушати ся (гіпотеза співдвижимого етеру).

Висновки теорії Hertz-а довели, як показало ся опісля, до поважних суперечностий з досьвідом (пр. досьвід A. Eichenwald-а[1])). Суперечности ті дадуть ся усунути, коли приймемо етер в спочинку, то значить, що рух матеріяльних тїл не тягне з собою етеру (гіпотеза спокійного етеру). Ся гіпотеза показала більшу стійність; она виясняє в повні деякі оптичні явища як пр. аберацію світла неподвижних звізд, яких перед тим не можна було при помочи давнїйших теорій пояснити. Гіпотезу спокійного етеру примінив з сеї саме причини H. A. Lorentz в розширеню теорії Maxwell-а[2]) до електричних і оптичних явищ для тїл в руху. Гіпотеза спокійного етеру затримує рівнання Maxwell-а для етеру та зводить взаїмне дїланє матерії і етеру до одинокого прафеномену: явища руху електричного наряду в етері. Корпускул, осмотрений електричним нарядом, є одиноким лучником між етером а матерією; в наслїдок пересунень корпускулів з їх положеня спочинку повстають діелектричні дїланя; дрогаючий рух корпускулів творить жерело світла.

Теорія Lorentz-а належить до кляси молекулярних теорій; она стоїть в противеньстві до можливо чистого феномельоґічного пониманя Hertz-а; она є тим угольним каменем, на якім заложив Lorentz постулят основи зглядности фізичних явищ.

2. Вплив річного руху землї на електричні і оптичні явища.

а. Електричні явища.

Для розслїдів ріжних електродинамічних теорій для тїл в руху мусимо брати під увагу можливо найбільші скорости тїл. Скорість землї в єї обігу довкола сонця перевисшає всї скорости тїл на земли, які можемо досьвідом зреалїзувати (она виносить 1/10⁴ скорости світла). Тому саме найчастїйше стараємо ся виказати вплив руху землї на електричні і оптичні явища. Рух землї довкола сонця можна в приближеню уважати за прямолінїйний рівномірний рух. Однак при дуже старанно

---

[1]) A. Eichenwald: Die magn. Wirk. bewegter Körper im elektrostat. Felde. (Ann. d. Phys. 11, p. 1, u. 421; 1903).

[2]) H. A. Lorentz: La théorie éléctromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants: (Arch. Néerland. XXV; 1892).

переведених досвідах не осягнемо ще докладної аж до подробиць теорії; позитивних вислїдів з тих досвідів не осягнемо навіть під заложенєм спокійного етеру. Возьмім до сего деякі приміри під увагу.

Рухови тїла, осмотреного електричним нарядом, відповідає електрична струя, яка, після теорії Maxwell-а витворює маґнетне поле рівноважне з маґнетним полем струї у провіднику. Можна би отже сподїватп ся, що наряджене тїло в наслїдок руху землї буде відклонювати маґнетну стрілку; напрям того відклоненя мусївби бути іншим при сходї сонця, а іншим при заходї. Сего однак не було можна викрити досвідом. Аж H. A. Lorentz[1]) виказав, що при тих розважанях поминено найважнїйшу обставину, а саме: Рух землї витворює на маґнетній стрілцї компензаційний наряд, який зносить сподїване відклоненє.

Представмо собі тепер три індукційні цївки, уложені співосево в сей спосіб, щоби напрям руху землї був згідний зі спільною осию цївок. Можна сподївати ся, що в наслїдок перериваня струї в першій і третій цївцї повстане в середній цївцї сильне індукційне дїланє, але о ріжній натузї; бо індукційне дїланє третої цївки при спокійнім етері з огляду на рух землї відбуває довшу дорогу до середної цївки від дійсної дороги; індукційне дїланє знов першої цївки дістаєть ся до середньої коротшою дорогою як в дійсности. Пустім через першу і трету цївку ту саму електричну струю і оберім відступ цївок і напрям струї обох цївок так, щоби при перериваню струї не повставало ніяке індукційне дїланє в середній цївцї. Однак дїланє індукційне мусить виступити у середній цївцї по оберненю цїлого апарату о 180° около спільної осп. Сей досьвід виконаний Des Coudres-ом[2]) видав зовсїм неґативний вислїд.

Відємний вислїд сего і всїх подібних досьвідів промавляє здавало би ся против гіпотези спокійного етеру. Однак H. A. Lorentz[3]) показав, що такий висновок справи не пересуджує. Єго докладно переведена теорія видала вислїд, що рух землї довкола сонця не може мати такого впливу на явища, який ми що йно бачили, де знак явищ зміняєть ся відповідно до на-

---

[1]) H. A. Lorentz: Versuch einer Theorie elektr. u. optisch. Erschein. in bewegten Körpern.

[2]) Des Coudres: Wied. Ann. 38. p. 71, 1889.

[3]) H. A. Lorentz: l. c.

пряму руху землї. Величина впливу руху землї в обох наведених случаях є пропорціональна після Lorentz-а до відношеня скорости землї до скорости сьвітла. Lorentz називає се впливом або ефектом першого ряду. На основі своєї теорії доказав він, що можливий вплив руху землї на явища у тїл, які разом з землею порушають ся, нїколи не є більший як другого ряду, то значить, що найвисше ще квадрат відношеня скорости землї до скорости світла належить брати під увагу. Най скорість землї є v, а скорість світла c, то $\frac{v}{c} = 10^{-4}$. Ефект першого ряду дасть ся ще зовсїм добре обсервувати; але ефект другого ряду $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$ лежить вже поза границями можливої обсервациї. Мало знаємо случаїв з тої области електричних явищ, в яких можнаби заобсервувати ефект другого ряду.

Подамо ту ще примір більш прінціпіяльної натури, який для дальшого розвою поглядів став ся надзвичайно важним.— Возьмім під увагу електрично наряджену кулю, яка зі значною скоростію порушає ся в спокійнім етері. Можнаби запримітити, що лїнії сил, які з боків кулї виходять, не будуть вже прямими лїніями, але закрівленими дещо в зад. В наслїдок сего електричне поле булоби ослаблене перед кулею, а змїцнене за нею. Старі розслїди сего проблєму анґлїйським фізиком Heaviside-ом[1] видали зовсїм інший вислїд. Най куля порушає ся в етері у віднесеню до постійного укладу сорядних зі скоростію v. Завважмо дальше другий співдвижимий з кулею уклад сорядних, який точка за точкою відповідає постійному укладови крім величин в напрямі руху; послїднї побільшають ся і то в сей спосіб, що всї довжини того напряму, які у постійнім укладї виносять 1, в движимім укладї зростають у відношеню $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, де v означає скорість кулї, а c скорість сьвітла. Куля постійного укладу перейшла в движимім укладї на еліпсоїд. Електричний наряд розділить ся тепер на еліпсоїдї після законів електростатики. У значнім віддаленю електричне поле, витворене еліпсоїдом, не много ріжнить ся від поля, витвореного кулею. Електростатичне поле кулї відпові-

---

[1] Heaviside: On the electromagnet. effects due to the motion of electrification through a dielectric. (Phil. Mag. 27, p. 324. 1889).

дає після вислїдів Heaviside-а зовсїм полю елїпсоїда у движимім укладї. А що постійний уклад повстає з движимого укладу через стисненє вимірів в напрямі руху, тому легко можна зобразити собі образ електричного поля кулї в руху. Лїнії сил остають прямими лїніями, але згущають ся в площі, виставленій прямово до напряму руху через осередок кулї; цїле поле лїній сил є симетричне до тої площі. В случаю, коли куля осягнулаби скорість сьвітла, цїле електростатичне поле зберель ся у тій саме площі. Ефект сей визначує квадрат відношеня: $\left(\frac{v}{c}\right)^2$; тому він не зміняєть ся нїяк при зміні напряму руху, то значить, коли v заступимо через $-v$. Се правило розширив H. A. Lorentz[1]) для всїх електростатичних систем.

Тїло отже, яке у співдвижимім укладї відповідає кулї, є в дійсности в постійнім укладї стиснений в напрямі руху елїпсоїд (елїпсоїд Heaviside-а). Співдвижимий уклад і вигляд тїла у тім укладї мають ту лише значінє математичної помічної конструкції.

б. Оптичні явища.

Се, що висше сказали ми о електричних явищах, відносить ся в подібний спосіб також до оптичних явищ. Предметом досьвідів в тій области є викритє впливу на хід світляних лучів при відбиваню, переломаню і деяких інтерференційних явищах. Lorentz доказав також і тут, що у тих явищах виступають лише ефекти другого ряду. При тім послугував ся він дивним, але у наслїдках дуже важним методом.

Приймім, що напрям дороги землї впадає у вісь x укладу сорядних, до якого відносимо всї світляні явища на землї. Сей уклад повинен або порушати ся з тою самою скоростію v, що земля (з огляду на землю спочивати; „співдвижимий“ уклад сорядних) або спочивати супротив обраної постійної звізди („постійний“ уклад сорядних). Наші спостереженя на земських тїлах, на кулї землї відносимо все до „движимого“ укладу сорядних. Електродинамічні рівнания визначають залежність електричних і оптичних явищ від сорядних простору (положенє в просторі) і від часу. Їх належить віднести, подібно як рівнаня механїки, до якогось постійного укладу сорядних. Через відповідну трансформацію сорядних переходимо до нового,

---

[1]) H. A. Lorentz: Versuch einer Theorie etc.

з рухом землї співдвижимого укладу сорядних. В тім укладї електродинамічні рівнання отримують наслїдком трансформації дещо відмінний вигляд від первісного. Здавалоби ся, що явища у движимім укладї інакше відбувають ся як в постійнім укладї. В дійсности справа так не представляєть ся. Lorentz вияснив се в сей спосіб. Він упростив рівнання тим, що абстрагував зовсїм від дїлань другого ряду через опущенє таких членів, які тим дїланям відповідали. Опісля впровадив він для співдвижимого укладу нову рахубу часу, а саме час t заступив величиною t', яку він назвав „місцевим“ часом. Місцевий час є звязаний з сорядною t таким рівнаннєм:

$$t' = t - \frac{vx}{c^2}.$$

В такім разї показуєть ся, що рівнання для електромаґнетних дрогань відзискують свій вигляд. З сего можемо заключити, що ефект впливу руху землї на світляні явища, які заходять на земських тїлах, зникає дійсно у першім рядї. Електричні і оптичні явища на тїлах в руху на землї о ефектах першого ряду відбувають ся так, якби земля була в супочинку.

Ходить тепер о фізичне значінє нововпроваджeного понятя місцевого часу. Від часу t ріжнить ся місцевий час t' величиною: $\frac{vx}{c^2}$, залежною від положеня в просторі. Ріжниця місцевого часу від загального часу є пропорціональна до віддаленя x від початку укладу сорядних в напрямі дороги землї.

Приймім дальше дорогу землї як прямолїнійну і представмо собі, що в означеній хвилї з початку ухладу сорядних $x = o$ виходить світляний луч і по якімсь часї доходить до місця о сорядній x. Питаємо ся, якого часу потребував луч, щоби перебути сю дорогу? Коли явище відбуваєть ся на землї, то глядач постійно уміщений на дорозї землї рахувавби в сей спосіб: Світло зробило дорогу x на землї, але в тім часї також земля посунула ся на своїй дорозї о якусь дорогу d; то щоби зробити цїлу дорогу, потребує луч світла часу:

$$t = \frac{x}{c} + \frac{d}{c},$$

де c означає скорість світла. — Глядачеви знов на земли видаєть ся, що світло зробило лише дорогу x. Коли він не звертав би дальше увагу на рух землї та принимав c як скорість світла, то висше обчислений інтервал часу для него виносив би:

$$t' = \frac{x}{c};$$

він був би о вартість $\frac{d}{c}$ коротшим, як се обчислив глядач з области поза землею. d є короткою дорогою, яку робить земля, в часї якої світло перебігає від $x = o$ до $x = x$; отже:

$$d = t' \, . \, v = \frac{x}{c} \, . \, v,$$

так, що ріжниця інтервалів обох часів виносить:

$$t - t' = \frac{d}{c} = \frac{x \, . \, v}{c^2}.$$

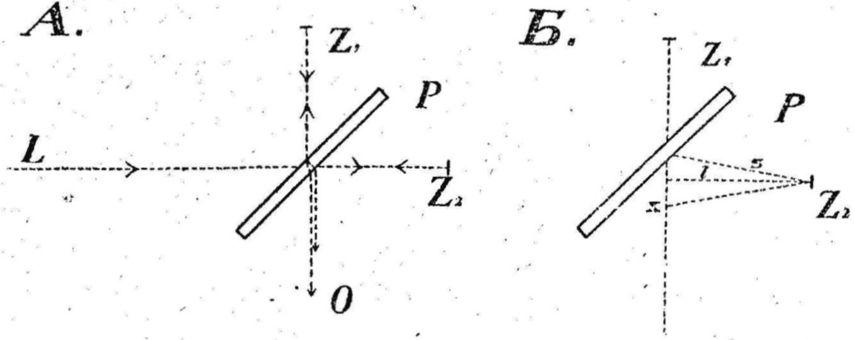
Ми приняли тут мовчки, що час в хвилї висилання світла в місци $x = o$ і часи обох глядачів зовсїм годили ся. А що оба глядачі для того самого інтервалу часу найшли ріжні вартости, то з того показуєть ся, що они оба мірили час після ріжних мірил; та ріжниця мірил є така сама як ріжниця між загальним а місцевим часом. Величина сеї ріжницї є така мала, що не дасть ся у звичайних обсерваціях викрити.

Глядач на земли порівнує часи при помочи оптичних обсерваций і при тім принимає скорість світла як постійну, тодї покористуєть ся він (строго виражуючи ся) місцевим часом, коли скорість світла на земли ставляє на рівнї зі скоростію світла у вселеннім просторі.

З тих тут начеркнених уваг слїдує, що кождий час, який ми подаємо при помочи оптичних середників, є місцевим часом. Зрозумінєм понятя місцевого часу входимо вже в нову область фізичних проблємів, якими займемо ся в дальших частях розправи. H. A. Lorentz впровадив місцевий час як математичний помічний середник, щоби показати, що ефекти першого ряду в наслїдок руху землї не мають місця, а виступають тут ефекти другого ряду.

Таким саме явищем, що єго ефект є пропорціональний до $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, є інтерференцийний досьвід Michelson-a—Morley-a. Єго ідея походить ще від Maxwell-a, а Michelson[1]) виконав єго по раз перший 1881 року. В шість літ опісля повторив єго ще раз Michelson у спілцї з Morley-ом[2]).

З жерела сьвітла L (фіґ. 1 A) падає луч на скляну, дещо посріблену плитку P уложену під кутом 45° до позему. Одна часть світла відбиваєть ся від неї, іде до зеркала Z, від якого відбиваєть ся, переходить через плитку P і дістаєть ся до люнети обсерватора O. Друга часть луча, який виходить з L, переходить через плитку P, іде до зеркала Z_2; ту відбиваєть ся, вертає до P, де по відбитю впадає також до люнети O. В O слідує інтерференція обох лучів. Представмо собі дальше, що апарат є так уставлений, що напрям луча до зеркала Z_1 впадає в напрям руху землї. — Приймім, що віддаленє $PZ_1 = PZ_2 = l$, то час, якого потребує світло, щоби зробити цілу описану дорогу виносить:



Фіґ. 1.

$$t_1 = \frac{2\,l}{c}, \qquad (1)$$

з застереженєм, що апарат є в супочинку. Коли цїлий систем порушаєть ся враз зі землею рівномірно-поступним рухом зі скоростію v в напрямі Z_1, тодї час, якого потребує перший луч, щоби вернути до P, є:

$$t'_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2\,l\,c}{c^2 - v^2} = \frac{2\,l}{c}\left\{1 + \frac{v^2}{c^2} + \ldots\right\} \qquad (2)$$

---

[1]) Michelson: Amer. Journ. of Science (3) 22, p. 120; 1881.

[2]) Michelson—Morley: Amer. Jourl. of Science (3), 34, p. 333; 1887.

В наслїдок згаданої рівномірної трансляції другий луч від P падати ме на зеркало Z_2 не прямово, але скісно і так само відібеть ся, як бачимо з фіґ. 1 B. Дорога сего луча виносить $2s$, яку він робить в часї:

$$t'_2 = \frac{2s}{c}. \tag{3}$$

З рисунку читаємо, що:

$$s^2 = l^2 + x^2.$$

А що: $x : s = v : c$, тому:

$$s^2 = l^2 + \frac{v^2}{c^2} s^2,$$

а дальше:

$$s = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отже:

$$t'_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2l}{c}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right\} \tag{4}$$

Рівномірно-поступний рух апарату в напрямі Z_1 спричинив часову ріжницю в ходї обох лучів:

$$t'_1 - t'_2 = \frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}. \tag{5}$$

Коли обернемо цїлий апарат о 90°, то лучі PZ_1 і PZ_2 поміняють свої ролї, а як ріжницю часів перебігу дістанемо:

$$t'_1 - t'_2 = -\frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}.$$

Дорога луча PZ_1P в нерухомім етері станеть ся довша, а дорога луча PZ_2P коротша; в наслїдок сего мусить слїдувати пересунене інтерференційних пасків о:

$$\delta = 2\left(\frac{t'_1 - t'_2}{T}\right) = \frac{2l}{cT}\frac{v^2}{c^2} = \frac{2l}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2}, \tag{6}$$

де $\lambda = cT$. — Однак при найбільшій старанности у виконаню досьвіду не удало ся запримітити ніякої зміни в положеню інтерференційних пасків. — Отже досвідом Michelson-а і Morley-а не можна виказати впливу руху землї на земські оптичні явища.

Те саме відносить ся також до інших досвідів, в яких вплив руху землї мусить виступати як ефект другого ряду; пр. досьвід Trouton-a і Noble-a¹) над відклонєм свобідно завішеного, плоского кондензатора при єго наряджeню і розряджeню, і т. п. Всї однак того рода досьвіди дали неґативний вислїд.

3. Гіпотеза Lorentz-a і Fitzgerald-a.

Вислїди висше наведених досьвідів промавляють на перший погляд против теорії супокійного етеру. Але кожда інша теорія натрафляє на трудности при вияснeню аберациї постійних звізд, тому H. A. Lorentz, а незвисимо від него Fitzgerald, постановив пояснити досвід Michelson-a при помочи нової помічної гіпотези.

Ми бачили, що на основі гіпотези супокійного етеру час, потрібний лучеви сьвітла для зробленя дороги l там і з поворотом на земли, (яка порушає ся зі скоростію v), є більший, коли напрям дороги l покриває ся з напрямом дороги землї, як коли l стоїть прямово до дороги землї; та ріжниця після (5) виносить: $\frac{l \cdot v^2}{c^3}$. Досвід Michelson-a показує, що в дійсности такої ріжниці нема. Для виясненя неґативного вислїду досвіду Michelson-a приймають Lorentz і Fitzgerald, що кожде тїло на земли в наслїдок руху землї дізнає незначної контракції і то в сей спосіб: Для глядача поза землею в спочинку видають ся всї тїла на землї скорчені в напрямі руху землї. Є се т. зв. гіпотеза контракції. Про величину сеї контракції можна вносити вже з того, що світло робить там і з поворотом дорогу в напрямі руху землї і прямову до него в рівних часах. Величина поменшеня виміру рівнає ся половинї поданої ріжниці часів помноженій скоростію світла (з опущенєм величин висшого ряду як другий), отже виносить $\frac{l \cdot v^2}{2\,c^2}$. Коли обернемо міру довжини l, яка з початку стояла прямово до напряму дороги землї, рівнобіжно до напряму руху землї, то єї довжина змінить ся на: $l\left(1 - \frac{v^2}{2\,c^2}\right)$.

---

¹) Enzyklopädie der math. Wissensch. V. 14, Nr. 56.

Хоть по думці сеї гіпотези поменшенє довжини у напрямі руху є мале (пр. 1 m скоротить ся лише о $\frac{1}{200000}$ mm), то гіпотеза контракції звучить дещо фантастично і видаєть ся досить довільна. H. Poincaré, по єї оголошеню, узнав єї як гіпотезу ad hoc утворену. Однак по більшім застановленю над гіпотезою контракції позбув ся він сего вражіня. — Висше навели ми математичне правило, яке зводить питанє елєктричного поля наряджeного тїла в рівномірнім руху до звичайного елєктростатичного проблєму. З елєктростатики знаємо елєктричне поле наряджeної кулї. З'образїм собі се ціле поле разом з кулею стиснене в означенім напрямі, і то у відношеню $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, то з кулї отримаємо оборотовий еліпсоїд, а з поля неподвижної кулї — поле еліпсоїда, який порушаєть ся зі скоростію v в напрямі компресії. Коли порівнаємо сю в думці переведену контракцію з контракцією, якої уживаємо до виясненя неґативного вислїду інтерференцийного досвіду Michelson-a, то бачимо, що они обі зовсім годять ся, бо після двочлену Newton-a:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots..$$

Тепер можемо висказати гіпотезу контракції в слїдуючий спосіб: *Всї предмети на землї дізнають в наслїдок руху землї довкола сонця контракції в напрямі руху землї; она що до величини відповідає докладно контракції, яка трансформує кулю у оборотовий еліпсоїд Heaviside-a.*

Маємо тут інтересну звязь між оптичними і елєктричними явищами: Коли приймемо певну контракцію в напрямі руху землї, то глядач на земли не спостерігаєть нїякого впливу руху землї на оптично-кінематичні явища; в наслїдок сеї саме контракції було би неможливе зі землї сконстатувати зміну поля елєктричних піль. Ся звязь не є зовсім случайна, як низше покажеть ся.

Заходить тепер питанє, чи є можливе в якийсь спосіб при помочи обсервації виказати сю контракцію? Мірою довжини в механїчний спосіб сего не можна зробити; бо міра дізнає в напрямі руху землї також тої самої контракції. Порівнанє знов двох прямових мір з собою є також неможливе, бо се можна зробити хиба оптичним інтерференцийним методом; послїдний веде знов до досвіду Michelson-а, якого неґативний вислїд поясняємо якраз при помочи гіпотези контракції. Але непрямими методами можна єї визначити. — При стисканю прозрачного тїла стаєть ся оно подвійно ломляче. Після гіпотези контракції можна сподївати ся подвійного переломаня світла в наслїдок руху землї. Однак вислїд досвідів[1]) у тім напрямі був також неґативний. Те саме відносить ся до іншої проби, а саме зміни опору електричного проводженя. Електричний опір провідника, витягненого прямово до напряму руху землї, мусїв би меншати, колиб ми єго уложили згідно з напрямом дороги землї; бо в наслїдок контракції стаєть ся він коротшим і грубшим[2]).

Неґативний вислїд можна добре вияснити при помочи молекулярних явищ, які у тім питаню відграють ролю. Контракцію, яку приписуємо тїлам в цїли вияснення неґативних вислїдів оптичних явищ на землї, мусимо також приняти для молекулів і електронів. Контракції не може заприміти глядач, що бере участь в руху систему; але спокійний глядач поза системом може єї заприміти при відповідних обставинах. Вислїди отже з гіпотези контракції можна в основі провірити у досвідах над катодовими лучами і лучами β.

З тих висше наведених уваг о електрично-оптичних явищах слїдує, що они є незалежні від стану руху тїл, на яких они відбувають ся. У математичній формі звучить се: коли електродинамічні рівнаня перетрансформуємо до укладу віднесеня, який порушаєть ся прямолїнійно і рівномірно, то вигляд їх зовсїм остає незмінений.

Се було якраз вислїдом праць H. A. Lorentz-а. Однак Einstein пішов за думкою Lorentz-а ще дальше; він розширив сю незалежність електродинамічних рівнань також і на рівнаня механіки та взагалї цїлої фізики. Після гіпотези Einstein-а кожде фізичне явище відбуваєть ся після однакових законів на всїх тїлах, які пересувають ся взаїмно з рівномірною скоростію. В наслїдок сего глядач

---

[1]) Rayleigh: Does motion through the aether cause double refraction? (Phil. Mag. (6), 4, p. 678; 1902).

Brace: Phil. Mag. (6), 7, p. 317; 1904.

[2]) Trouton and Rankine: Lond. Roy. Soc. Proc. A. 80, p. 420; 1908.

з перебігу фізичного явища не може ніколи виснувати, чи тіло, на якім явище відбуваєть ся, порушаєть ся або ні. Ся думка стала ся вихідною точкою теорії зглядности фізичних явищ, яка викликала ревізію понять часу і простору.

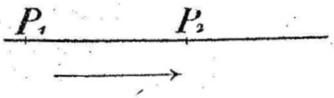
4. Постуляти теорії зглядности.

Після Einstein-а основа зглядности опираєть ся на двох постулятах. Перший з них звучить: Нема ніякого способу до викритя безглядного руху. Понятє безглядного руху є в своїй сути спірне, бо лучить ся оно з понятєм порожного простору. В фізичнім значіню однак рух в етері можемо уважати за рух безглядний, бо етер, як висше ми приняли, находить ся в супочинку зглядом тіл, які в нім порушають ся. Але і в тім значіню істнованя безглядного руху не мож доказати, бо у фізичних явищах розріжняємо все лише рухи одних матеріяльних укладів зглядом других. Коли два уклади порушають ся зглядом себе рівномірним рухом по прямій лінії, то можемо все приняти, що оден або другий уклад находить ся в супочинку.

Загальнїйше можна сформулувати перший постулят ось так: Явища природи відбувають ся після зовсїм тотожних законів в двох укладах, які відбувають зглядом себе рівномірний рух по прямій лінії. Се однак не вистарчає, бо сему постулятови перечить якраз заложенє теорії Lorentz-а о неподвижности етеру; луч світла розходить ся з постійною скоростію в нерухомім етері: є се отже безглядний рух.

Перший постулят мусить бути доповнений другим, який можна виповісти в сей спосіб: Фізичний час минає так, що скорість світла є все однакова для всїх обсерваторів, які зглядом себе або зглядом жерел світла відбувають рух прямолїнійний і рівномірний. Після сего постуляту неможливо ствердити ріжниць руху зглядом луча світла, отже є він в згоді з досьвідом Michelson-a—Morley-a.

Важний є спосіб, що при помочи єго доконуєть ся помір скорости світла. — Представмо собі, що маємо два годинники, уставлені в точках P_1 і P_2 (фіґ. 2) на дорозї світляного луча.



Фіґ. 2.

Означім через t_1 і t_2 часи появи світла в тих точках, а через s віддалене між ними. Годинники вказують фізичний час правильний, коли вартість квота $\frac{s}{t_2 - t_1}$ буде величиною постійною, яку означимо як висше через c.

II.

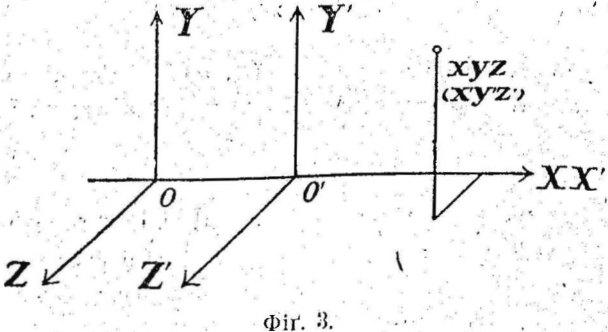
Специяльна теорія зглядности.

1. Рівнання руху клясичної механіки.

Вже в клясичній механіці стрічаємо ся з основою зглядности. Рівнання руху нютонівської механіки відносять ся до безглядно недвижимого простору, а також Lagrange говорить про постійний уклад сорядних в просторі. Коли матеріяльна точка о масі m порушаєть ся в просторі під діланем сили $\mathfrak{F}$, з прискоренем $\mathfrak{a}$, то звязь між тими величинами є подана рівнанем:

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{F}. \tag{7}$$

Рівнаннє се задержує свій вигляд без огляду на се, чи ми відносимо єго до постійного укладу сорядних, чи до укладу, що порушаєть ся рівномірним рухом. Най $(x\,y\,z)$ представляє постійний прямокутний уклад осий сорядних (фіґ. 3); зглядом него порушаєть ся рівномірно уклад $(x'\,y'\,z')$ рівнобіжно до оси x зі скоростію v так, що час t' подвижного укладу годить ся з часом t постійного укладу; тоді:



Фіґ. 3.

$$\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \qquad (8)$$

Повисші рівнання творять трансформацийний систем Галїлея. Складові скорости матеріяльної точки в новім укладї дістанемо через упохіднене сорядних зі згляду на час t', отже:

$$\mathfrak{w}'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v = \mathfrak{w}_x - v,$$

$$\mathfrak{w}'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = \mathfrak{w}_y,$$

$$\mathfrak{w}_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = \mathfrak{w}_z.$$

Сей систем можемо звести до одного векторового рівнання:

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{w} - v, \qquad (9)$$

яке містить вже в собі теореми додаваня скоростий. Коли дальше зріжничкуємо рівнання (9) з огляду на t', дістанемо трансформацийне рівнанне прискореня:

$$\dot{\mathfrak{w}}' = \frac{d\mathfrak{w}'}{dt'} = \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \dot{\mathfrak{w}}. \qquad (9a)$$

Напишім рівнанне (7) для поодиноких сорядних:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathfrak{F}_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathfrak{F}_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathfrak{F}_z, \end{aligned} \qquad (10)$$

то бачимо, що з огляду на (9а) лїва сторона тих рівнань остає незмінена навіть по виконаню на них трансформації (8). Із сего слідує, що:

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}, \qquad (10a)$$

де $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}$ означає силу подвижного згл. постійного укладу.

Рівнання (10) і (10а) через трансформацію (8) „переходять самі в себе“ або они є незмінні з огляду на трансформацію (8). Сю незмінність виразимо в сей спосіб: Коли основні рівнання механіки є важні в однім обранім укладї сорядних, то задержують они свою важність також в іншім укладї, до якого можна перейти з першого укладу через ґалілєївську трансформацію. Є се основа зглядности клясичної механіки.

2. Кулисті филї.

Точка $(x_0\ y_0\ z_0)$ якогось однородного і ізотропного осередка є жерелом певного дрогаючого руху, який розходить ся в кулистих филях в просторі. Здовж луча r поступають на переміну кулисті згущеня і розрідженя, яких осередком є $(x_0\ y_0\ z_0)$. Теорія описує такий рух при помочи системи частинних рівнань ріжничкових другого ряду для ріжниць сорядних; послїдні відповідають віддаленям дрогаючих частинок від їх положеня рівноваги.

Досвід учить, що мимо рівномірного, прямолїнійного руху зі скоростію v згаданого осередка дрогаючий рух буде розходити ся все у кулистих филях. Явище се виразимо математично в сей спосіб: Рівнаннє кулї з осередком (x_0, y_0, z_0) о лучи r у віднесеню до постійного укладу сорядних в просторі (x, y, z) звучить:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Приймім, що кулиста филя розходить ся зі скоростію u, тодї:

$$r=u(t-t_0).$$

В наслїдок сего попереднє рівнаннє кулї отримає вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=u^2(t-t_0)^2. \qquad (11)$$

Коли приміньмо трансформацію (8):

$$x=x'+vt,\quad y=y',\quad z=z',\quad t=t',$$

і завважимо, що осередок дрогаючого руху (x_0, y_0, z_0) бере також участь у рівномірній трансляції, то рівнаннє (11) кулистої филї переходить само в себе, бо маємо:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-u^2(t-t_0)^2\equiv$$
$$\equiv(x'-x'_0)^2+(y'-y'_0)^2+(z'-z'_0)^2-u^2(t'-t'_0)^2. \qquad (12)$$

Отже рівнання (11) кулистої филї є незмінними з огляду на трансформацію Ґалїлея, коли она зміняє сорядні точок середника як також сорядні осередка дрогаючого руху. Але в случаю, коли осередок филї не має тої самої трансляційної скорости, що середник, тодї рівнане (12) не буде важне, отже незмінність на трансформацію (8) перестає істнувати. Слїдувати се може пр. коли зі спокійного воздуха виходять звукові филї в сей спосіб, що жерело їх порушаєть ся, або противно.

3. Кінематика.

а. Трансформація Lorentz-а.

Електродинаміка тїл в руху і оптичні явища, як неґативний вислїд досьвіду Michelson-а і Morley-а, аберація постійних звізд, досьвід Trouton—Noble-а і т. п. вказують, що основ зглядности клясичної механїки до них примінити не можна; рівнання електродинаміки і оптики не є незмінні з огляду на трансформацію (8). Тут мусимо оглянути ся за іншим системом трансформаційних взорів, які визначувалиб рівномірну трансляцію одного електродинамічного укладу зглядом другого, а дальше трансформували величину

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2$$

саму в себе в сей сдосіб, щоби жерело світла (x_0, y_0, z_0, t_0) не брало участи в трансформації.

Другий постулят буде сповнений тим, що приймаємо $x_0=y_0=z_0=0$ і $x'_0=0$, $y'_0=z_0=0$. Коли дальше заложимо, що жерело світла находить ся у спільнім початку обох укладів, недвижимого S (x, y, z, t) і движимого S' (x', y', z', t'), тодї $t_0=t'_0=0$.

Перший постулят, щоби трансформація, в наслїдок якої:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2, \quad (13)$$

визначувала рівномірний поступний рух зі скоростію v укладу S' зглядом S, буде сповнений, коли сорядні движимого укладу, або загальнійше, їх лінійні функції, будуть ріжнити ся від сорядних недвижимого укладу о певні величини, пропорціональні до часу t'. В случаю $t=t'$ отрималиб ми знов трансформацію (8). Сей случай не доведе в тих розважанях до ніяких вислїдів у стремлїнях до нових трансформаційних взорів. Для визначеня звязи між часами t і t' укладів S і S', треба приняти їх як четверті сорядні укладів та подати спосіб їх трансформованя. Рівнання нової трансформації мусять відзначати ся вкінци тим, що кождому скінченому системови вартостий $x, y, z, t,$ мусить відповідати однозначно скінчений систем вартостий x', y', z', t' і навідворот. З того слїдуєть, що рівнання мусять бути лінїйні такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
x &= a_{11}\, x' + a_{12}\, y' + a_{13}\, z' + a_{14}\, t', \\
y &= a_{21}\, x' + a_{22}\, y' + a_{23}\, z' + a_{24}\, t', \\
z &= a_{31}\, x' + a_{32}\, y' + a_{33}\, z' + a_{34}\, t', \\
t &= a_{41}\, x' + a_{42}\, y' + a_{43}\, z' + a_{44}\, t',
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

де сочинники a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ залежать лише від величини і напряму v і то в сей спосіб, щоби рівнаннє (13) було тотожно сповнене. Систем взорів (14) називаєть ся трансформацією H. A. Lorentz-a. Рівнання ті задержують свою важність для сорядних часу і простору, тобто для „світа“ як виражаєть ся Г. Мінковскі[1]). На тім якраз постуляті опираєть ся основа зглядности; а сей постулят називає Мінковскі „постулятом світа“.

По вставленю вартостий (14) у ліву сторону рівнання (13) і по порівнаню сочинників при степенях і добутках x', y', z', t' дістанемо слїдуючих $6 + 4 = 10$ реляцій:

$$
\begin{aligned}
& a^2_{1i} + a^2_{2i} + a^2_{3i} - c^2\, a^2_{4i} = 1, \quad \text{де: } i = 1, 2, 3, \\
& a^2_{14} + a^2_{24} + a^2_{34} - c^2\, a^2_{44} = -c^2, \\
& a_{1i}\, a_{1k} + a_{2i}\, a_{2k} + a_{3i}\, a_{3k} - c^2\, a_{4i}\, a_{4k} = 0,
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

коли: $i \gtrless k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$

Послїдні реляції (15) є доповненєм лінїйних рівнань (14); разом творять они найзагальнїйшу ґрупу субституцій, яка примінена до квадратної форми $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ переводить єї саму в себе. Детермінантом сеї ґрупи є $| a_{ik} | = \pm 1$; задержуємо однак горішний знак. По зріжничкованю рівнань (14) і узглядненю взорів (15) дістанемо таку звязь:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2\, dt'^2. \quad (16)$$

Приймім, що розважаємо світляне явище в укладї S', який порушаєть ся рівномірно зі скоростію v в сей спосіб, що напрям руху слїдує в напрямі оси x', отже рівнобіжно до оси x укладу S. Тодї $y = y'$ і $z = z'$, а тотожність (13) зведеть ся до:

$$x^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 - c^2 t'^2. \quad (17)$$

---

[1]) H. Minkowski: Raum und Zeit, 1909.

А ся звязь наступить, коли у ліву сторону (17) поставимо:

$$x = a_{11} x' + a_{14} t', \qquad t = a_{41} x' + a_{44} t'. \tag{17a}$$

З порівнаня сочинників при степенях x' і t' в рівнанню (17) по підставленю вартостий (17a) дістанемо три реляції:

$$a^2_{11} - c^3 a^2_{41} = 1,$$
$$a^2_{14} - c^2 a^2_{44} = - c^2,$$
$$a_{11} a_{14} - c^2 a_{41} a_{44} = 0.$$

З тих реляцій слідує:

$$c^4 a^2_{41} a^2_{44} = (a^2_{11} - 1)(a^2_{14} + c^2) = a^2_{11} a^2_{14}. \tag{18}$$

Положім дальше:

$$a_{11} = \sigma, \quad a_{14} = \sigma v,$$

то з огляду на (18) дістанемо:

$$\sigma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

отже:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тепер легко визначимо a_{41} і a_{44}, а саме:

$$a_{41} = \frac{\sigma v}{c^2}, \quad a_{44} = \sigma.$$

З огляду на се рівнаня (17a) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Розбір фізичного змісту взорів (19) полишаємо на разі на пізнійше. На перший погляд запримічаємо, що взори зглядности клясичної механіки (8) є спеціяльним случаєм взорів (19), а саме: коли скорість світла c приймемо як нескінчено велику $c = \infty$, тоді взори (19) переходять на:

$$x = x' + vt', \quad t = t'.$$

Введім дальше для часів t, t' в обох укладах іншу одиницю як секунда; а саме приймім:

$$t \text{ місто } ct \text{ і } t' \text{ місто } ct'; \tag{20}$$

місто секунди принимаємо одиницю c разів меншу, в якій луч світла перебігає одиницю довжини ($1\,cm$, коли $c = 3.10^{10}\,cm\,sec^{-1}$). Величина v як скорість є того самого виміру, що c, тож для одноцільности напишемо дальше:

$$v \text{ місто } \frac{v}{c}\,^{1)}. \tag{20a}$$

З огляду на (20 і 20a) переходить σ на:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}};$$

а місто рівнання (17) дістанемо:

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2, \tag{21}$$

а взори (19) певейдуть на взори:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ y &= y', \quad z = z', \\ t &= \frac{t' + vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \tag{21a}$$

З огляду на рівновартісність обох системів S і S' можна зі сорядних укладу S дістати сорядні укладу S', лише знак при v мусимо змінити на противний, бо уклад S має зглядом укладу S' скорість $-v$ рівнобіжно до оси x'. Отримаємо отже:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \tag{21б}$$

---

1) A. Brill: Mechanik raumerfüllender Massen, 1909. Art. 53 ff.

Зі взорів (21а) і (21б) читаємо, що може висказати глядач недвижимого укладу $S\ (x,\ t)$, о відношеню своїх даних простору і часу до анальоґічних величин движимого укладу; навпаки поучають они глядача движимого укладу $S'\ (x',\ t')$ о відношеню его даних x', t' до анальоґічних величин недвижимого укладу.

Коли зріжничкуємо величини (21а) і узглянимо послїдне вираження для σ, дістанемо:

$$dx'^2 - dt'^2 = dx^2 - dt^2\,; \tag{22}$$

з сего скористаємо пізнїйше.

Додаймо тепер до (21б) рівнозначну звязь між x', t' а x'', t'', а v заступім через v', яке подібно як v є < 1. Тодї по елїмінації x', t' дістанемо;

$$x'' = \sigma\sigma' \{(1 + vv')\, z - (v + v')\, t\},$$

$$t'' = \sigma\sigma' \{(1 + vv')\, t - (v + v')\, x\}.$$

У тих взорах приходить:

на місце v — $[v] = \dfrac{v + v'}{1 + vv'},$

„ „ σ — $[\sigma] = \sigma\sigma' (1 + vv'),$

де $[v] < 1$, а

$$[\sigma]^2\, (1 - [v]^2) = 1.$$

Передовсїм маємо для $v = - v'$: $x'' = x$, $t'' = t$, що відповідає переходови знов до сорядних $(x,\ t)$. З того слїдує, що зложені дві трансформації Lorentz-а дають знов анальоґічну нову трансформацію.

б. Виміри довжин і часу в теорії зглядности.

Розважмо тепер фізичне значіннє математичних взорів попередного уступа. Представмо собі отже ще раз уклади сорядних $S\ (x,\ y,\ z,\ t)$ і $S'\ (x',\ y',\ z',\ t')$, які зглядом себе порушають ся рівномірним прямолїнїйним рухом зі скоростію v. В часї $t = t' = 0$ оба початки укладів S і S' спадають на себе, бо також $x' = x = 0$. По часї t' початок движимого укладу O' (фіґ. 3) віддалив ся від O о довжину, яку дістанемо з (21б), коли положимо $x' = 0$. Тодї маємо:

$$x = vt,$$

з чого слїдує, що O' порушає ся від O рівномірно зі скоростію v здовж оси x в додатну сторону. — Навпаки початок укладу $S - O$ віддаляє ся від O' у відємнім напрямі, бо з (21а) для $x = 0$ слїдує:

$$x' = - vt'.$$

В тім случаю модерна теорія зглядности годить ся з давнїйшою клясичної механїки. Ріжниця заходить однак у відношеню обох укладів S і S' до себе в сучаснїй теориї зглядности, а саме в сїй обставині, що при переходї з движимого укладу до недвижимого і на відворот всї виміри довжин як також часу зміняють ся, а величина сеї змінности залежить від їх зглядної скорости v.

В самій річи: Глядач, який находить ся в початку $x = o$ постійного укладу S, приписує заприміченому ним явищу движимого укладу S' час:

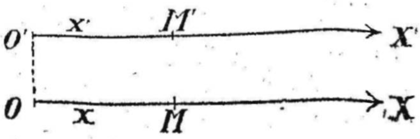
$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

що слїдує зі взору (21б) для $x = o$. А що $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, тому видає ся єму, що годинник, який порушає ся зі скоростію v, опізняє ся у відношеню $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в порівнанню з годинником, який не відбуває ніякого руху. І противно: з (21а) слїдує, що глядач в початку движимого укладу сорядних $x' = O$ оцїнює для явищ недвижимого укладу S час:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то значить, що годинник недвижимого укладу спізняє ся також у відношеню $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ для глядача укладу S'.

Подібно стоїть справа з виміром довжин. Віддалене точки M' на оси x' укладу S' від початку укладу $O' - x'$ (фіґ. 4)



Фіг. 4.

оціняє глядач недвижимого укладу S після (21б) для $t = o$ як:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

се означає сповидне скорочене обсервованої довжини x супротив дійсної $x' = O'M'$. Знов для глядача движимого укладу S' видається ся після (21а) в хвилї $t' = 0$ постійного укладу:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

що означає сповидне скорочене довжини x' супротив віддаленя x. З того слїдує: Виміри тїла рівнобіжно до напряму руху видають ся все більші глядачам співдвижимого укладу як іншого укладу. Коли отже штаба зі спочинку перейде в рівномірний рух зі скоростію v (без допливу тепла і в порожнім просторі), тодї корчить ся она у відношеню $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Отже для глядача в якімнебудь з двох укладів, які зглядом себе остають в рівномірнім руху, видається ся, що хід чужого годинника є повільнїйший, а чужа довжина скорочує ся.

Виміри прямові до напряму руху y, z, не підлягають нїяким змінам.

Останні твердженя є висновком ріжнородного применення представленя часу ріжними глядачами, що відбувають зглядом себе рух. Оправдують они гіпотезу Fitzgerald-а і Lorentz-а, поставлену ще перед сучасною теорією зглядности для вияснення неґативного вислїду інтерференцийного досвіду Michelson-а і Morley-а. В дійсности є они дуже конечні для теорії досвіду в недвижимім укладї. Коли саме скорочує ся в руху віддалене PZ_1 (фіґ. 1 A) в напрямі руху на довжину $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, тоді після (2) і (4):

$$t'_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = t'_2.$$

При скруті апарату, в наслідок чого PZ_1 і PZ_2 міняють свої ролї, не виступає нїяке пересунене інтерференцийних пружків.

Відповідно до контракції в напрямі руху змінить ся також обем тїла V. А що в кождім укладі $\frac{V}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ рівнаєть ся обемови V_0 в движимім укладі, то рівнання:

$$\frac{V}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{V'}{\sqrt{c^2-v^2}} \qquad (23)$$

служить як взір для перерахованя для обему тїла, яке з огляду на уклад S має скорість v, з огляду знов на S' — скорість v'.

Дальшим вислїдом контракції є се, що вигляд тїла з ріжних укладів, ріжно осуджаєть ся. Пр. тїло, котре в якімсь движимім укладї має вигляд кулї, видаєть ся у всїх інших укладах як сплощений оборотовий елїпсоїд.

Годить ся однак зазначити, що скорочення, якого дізнає предмет в напрямі руху; відносить ся все до глядача, який находить ся в супочинку в недвижимім укладї. Колиж знов він разом із своїм мірилом буде також порушати ся рівномірним рухом, то скороченя сего він не в силї буде запримітити; єго мірило корчить ся тодї також у тім самім відношеню. Є се вислїдом сформулованя основи зглядности, що впливу руху не можна сконстатувати, бо в противнім разї міг би бути рух уважаний як беззглядний.

Також рівночасність для обох укладів S, S' є ріжна. Представмо собі, що в кінцевих точках дороги $x = OM$ (фіґ. 4) недвижимого укладу находять ся два глядачі O і M; коло них пересувають ся кінцеві точки O', M' дороги $x' = O'M'$ движимого укладу, які в тій самій хвилї t замічають оба глядачі O і M; они записують на своїх годинниках сей час. Так само в двох кінцевих точках O', M' дороги $O'M'$ движимого укладу находять ся два глядачі, які знов на своїх годинниках нотують той самий час. — Однак зі взору (21б) довідуємо ся, що ті чотири годинники не будуть показувати того самого часу, бо: коли годинники в O, M, O' показують час: $t = t' = 0$, то годинник в M' вказувати-ме час:

$$t' = -\frac{vx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отже явище, яке для глядачів в O і M виступає як рівночасне, не може бути таким також для O' і M'.

Також рівнобіжник скоростий тратить своє значіне в релятивістичній кінематиці. Коли сорядні матеріяльної точки укладу S, x, y, z є функціями часу t, то складові скоростий тої точки є:

$$\mathfrak{w}_x = \frac{dx}{dt}, \quad \mathfrak{w}_y = \frac{dy}{dt}, \quad \mathfrak{w}_z = \frac{dz}{dt}.$$

Відповідно в движимім укладі маємо:

$$\mathfrak{w}'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad \mathfrak{w}'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad \mathfrak{w}'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Зі взорів (21б) слідує (коли приймемо знов секунду як одиницю часу):

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt'},$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'},$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dt'},$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тими рівнанями послужимо ся до визначеня складових $\mathfrak{w}'$, а саме:

$$\mathfrak{w}'_x = \frac{\mathfrak{w}_x - v}{1 - \frac{v\mathfrak{w}_x}{c^2}},$$

$$\mathfrak{w}'_y = \frac{\mathfrak{w}_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v\mathfrak{w}_x}{c^2}},$$

$$\mathfrak{w}'_z = \frac{\mathfrak{w}_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v\mathfrak{w}_x}{c^2}}, \tag{24}$$

або навідворот, коли $\mathfrak{w}'$ заступимо через $\mathfrak{w}$, дістанемо:

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\mathfrak{w}'_x + v}{1 + \frac{v\mathfrak{w}'_x}{c^2}},$$

$$\mathfrak{w}_y = \frac{\mathfrak{w}'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\mathfrak{w}'_x}{c^2}}, \tag{24a}$$

$$\mathfrak{w}_z = \frac{\mathfrak{w}'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\mathfrak{w}'_x}{c^2}}.$$

Коли помножимо складові в напрямі y і z з рівнань (24) і (24а) з собою, то дістанемо:

$$\left(1 - \frac{v\mathfrak{w}_x}{c^2}\right)\left(1 + \frac{v\mathfrak{w}'_x}{c^2}\right) = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \tag{24б}$$

Піднесім дальше рівнаня (24) до другої степени і додаймо, а $v\mathfrak{w}_x$ і $v\mathfrak{w}'_x$, що там приходять, заступім скалярними добутками $(\mathfrak{v}\mathfrak{w})$, $(\mathfrak{v}\mathfrak{w}')$, то дістанемо:

$$\frac{c^2 - w^2}{c^2 - (\mathfrak{v}\mathfrak{w})} = \frac{c^2 - w'^2}{c^2 + (\mathfrak{v}\mathfrak{w}')}.$$

Назначім через ϑ' кут, який заключає скорість $\mathfrak{w}'$ з осію x, тоді напрям скорости $\mathfrak{w}'$ визначує:

$$tg\,\vartheta' = \frac{\sqrt{\mathfrak{w}'^2_y + \mathfrak{w}'^2_z}}{\mathfrak{w}'_x};$$

послідна реляція получена з (24а) подає величину скорости w:

$$w^2 = \frac{w'^2 + v^2 + 2\,w'\,v\,\cos\vartheta' - \left(\frac{w'\,v}{c}\sin\vartheta'\right)^2}{\left(1 + \frac{w'\,v}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2}. \qquad (24г)$$

Ті рівнання вказують, як з огляду на уклад S скорости $\mathfrak{v}$ і $\mathfrak{w}$ складають ся; они обнимають славну теорему додаваня скоростий Einstein-а[1]).

Треба тут однак запримітити, що скорість $\mathfrak{w}'$ відносить ся до іншого укладу як $\mathfrak{v}$. В случаю, коли обі скорости відносять ся до того самого укладу, тоді звичайне правило додаваня векторів зберігає свою важність.

Дивне при тім, що обі скорости, які маємо додати, не виступають рівноправно. Коли пр. $\mathfrak{w}'$ є рівнобіжне до y, а $\mathfrak{v}$ як до тепер до x, а маємо додати $\mathfrak{w}'$ до $\mathfrak{v}$, то після (24а):

$$\mathfrak{w}_{1x} = v, \qquad \mathfrak{w}_{1y} = w'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

коли знов противно додаємо $\mathfrak{v}$ до $\mathfrak{w}'$, тоді:

$$\mathfrak{w}_{2x} = v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \mathfrak{w}_{2y} = w'.$$

Однак безглядна вартість w в обох случаях є після (24г) та сама.

З рівнань (24) і (24а) бачимо, що основи складаня скоростий клясичної механіки (рівнобіжник скоростий) тратять свою важність в кінематиці основи зглядности. Відклоненя рівнань (24) від клясичної механіки не є значні, коли ходить о скорости далекі від скорости світла. При скоростях дуже великих, які вже входять в границю скорости світла (лучі катодові, ситові, лучі радіоактивних тіл), рівнання (24) представляють вже певний інтерес.

Приймім, що $\mathfrak{w}'$ має напрям оси x', тобто: $\mathfrak{w}'_y = \mathfrak{w}'_z = o$, тоді для скорости в укладі S дістанемо:

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{w}' + v}{1 + \frac{\mathfrak{w}'v}{c^2}}.$$

---

[1]) A. Einstein: Jahrbuch für Radioaktivität u. Elektronik, 1907, (4), 411.

Коли $\mathfrak{w}'$ доходить до скорости світла, то значить, коли тіло в укладі S' порушаєть ся мало що не зі скоростію світла, то мимо сего неможливо дати єму в укладі S скорість, яка була би більша від скорости світла, навіть тоді, коли весь уклад S' порушаєть ся з доволї великою скоростію v (але $v < c$). Бо положім в граничнім случаю:

$$lim\, \mathfrak{w}' = c$$

і:

$$lim\, v = c,$$

то у віднесеню до укладу S дістанемо вислїдну скорість:

$$\mathfrak{w} = \frac{c + c}{1 + \frac{c \,.\, c}{c^2}} = \frac{2\,c}{2} = c.$$

З сего слїдує, що через зложенє скоростий, які перед тим не були більші від скорости світла, не можна нїколи дістати скорости, котра перевисшала би скорість світла.

Einstein[1]) доказав в своїй кінематицї, що було би неможливе принимати скорости, які перед супорпозицією перевисшалиб скорість світла. Най якесь тїло або явище в укладі S' порушаєть ся зі скоростію $\mathfrak{w}'$, яка перевисшає скорість світла c. Після теореми додаваня скоростий (24a) визначимо скорість в укладі S рівнанєм:

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{w}' + v}{1 + \frac{\mathfrak{w}'v}{c^2}},$$

або коли уклад S' порушаєть ся зглядом укладу S зі скоростію $-v$:

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{w}' - v}{1 - \frac{\mathfrak{w}'v}{c^2}}.$$

Щоби отже з точки $x = o$ дістати ся до точки $x = a$, потребувало би тїло або явище часу:

$$t = \frac{a}{\mathfrak{w}} = a\,\frac{1 - \frac{\mathfrak{w}'v}{c^2}}{\mathfrak{w}' - v}.$$

---

[1]) A. Einstein, l. c.

Після заложеня $\mathfrak{w} > c$, отже $\frac{\mathfrak{w}'}{c} > 1$. А що $v < c$, то можна все осягнути, щоби $\frac{\mathfrak{w}'}{c} . \frac{v}{c} > 1$; тоді τ буде мати відємну вартість. Відємне τ означало би, що тіло або явище скорше осягнуло $x = a$, чим $x = 0$, що є неможливе.

Отже основа зглядности виключає всї скорости, які перевисшалиб скорість світла; послїдна є найбільшою з усїх скоростий, яку тїла або явища в природї можуть посїдати.

В кінематиці основи зглядности найшло дуже наглядне вияснене явище аберації постійних звізд. Також пересунене дугових лїній в спектрах постійних звізд, яке відповідає основі Doppler-а, виясняє теорема складаня скоростий. Се пересунене походить від сповидної зміни числа дрогань висиланого світла. Дальше досвід Fizeau стверджує вповні правдивість теореми Einstein-а.

В досвідї Fizeau[1]) маємо до дїла з інтерференцією двох світляних лучів, з яких оден переходить через пливучу тїч згідно з напрямом єї руху, а другий в противнім напрямі. Після основи додаваня скоростий клясичної механіки глядач твердив би, що фази світла розходять ся з вислїдною скоростію:

$$w = \frac{c}{n} \pm v,$$

де n є сочинником переломаня світла, а v скоростію течи. Однак досвідний взір Fizeau є інший, а саме:

$$w = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

який не стоїть в згодї з основою додаваня скоростий механїки Newton-а.

Приймім, що світло у даній течі розходить ся зі скоростію w'; то після взорів додаваня скоростий (24a) релятивістичної кінематики отримаємо як вислїдну скорість обох фаз світла:

$$w = \frac{w' \pm v}{1 + \frac{w'v}{c^2}};$$

---

[1]) H. Fizeau, C. R. 33. p. 349, 1851.

а що $\frac{w'v}{c^2}$ є в порівнаню до 1 мале, то можна написати:

$$w = (w' + v)\left(1 - \frac{w'v}{c^2}\right).$$

Коли помножимо і вставимо за w' вартість $\frac{c}{n}$, дістанемо:

$$w = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

де знов $\frac{w'v}{c^2}$ як мале в порівнаню до 1 пропускаємо.

Отже досвід Fizeau рішив в користь модерної теорії зглядности: він стоїть у повній згоді з теоремою додаваня скоростий релятивістичної кінематики. Недавно поновлений досвід Zeemann-ом виказав згідність досвіду з теорією на 1%.

в. Мінковского ґеометрична інтерпретація трансформації Lorentz-а.

Основа зглядности сформульована А. Н. Lorentz-ом рівнанями (19) зг. (21а) і (21б) обнимає в собі цїлу теорію зглядности; всї висновки з неї дають ся випровадити з трансформацій Lorentz-а. Однак математична форма їх є менше елеґантна і недогідна, а головно тому, що при кождім векторі складову рівнобіжну до скорости $\mathfrak{v}$ треба інакше визначувати, як складову прямову до $\mathfrak{v}$. Герман Мінковскі[1]) подав ґеометричну інтерпретацію рівнань Lorentz-а і надав їм гарний математичний вигляд.

Кожде явище у вселенній визначують три сорядні укладу x, y, z. А що час t мусить також зміняти ся, тому треба приняти єго як четверту сорядну t. Коли так, то фізичні явища після основи зглядности треба розважати у чотировимірнім укладі простору—часу. До сего у фізицї ми не звикли, однак не повинно оно нас страхати, бо ходить тут лише о символїчне представленє деяких аналїтичних відношень між чотирма змінними x, y, z, t. Такий уклад простору-часу називає ся „світом“; як „сорядні світа“ вибираємо сорядні простору x, y, z і сорядну часу:

$$u = ct. \tag{25}$$

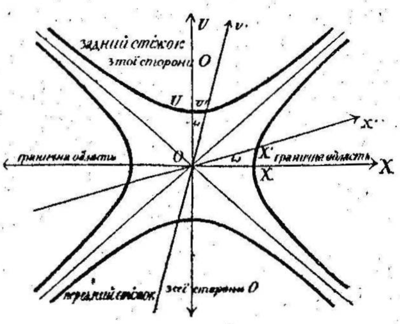
---

[1]) H. Minkowski: l. c.; M. Laue: Relativitätsprinzip, I. Aufl. p. 46.

Оси x, y, z стоять до себе прямово; вісь u є також прямова до осий x, y, z, то значить, в площи (xu) творять x і u прямовий уклад сорядних; то саме відносить ся також до площ $(y\,u)$ і $(z\,u)$. Маємо отже шість парами до себе прямово уложених площ сорядних і чотири до себе прямових, тривимірних просторів сорядних. Точку (x, y, z, u) такого укладу простору часу називаємо світовою точкою; она представляє явище, яке відбуває ся в місци x, y, z в часї $t = \frac{u}{c}$.

Для кождої матеріяльної точки сорядні простору є функціями часу; в сей спосіб згадана точка визначує у світї криву лінію — „світову лінію“. Для рівномірного руху зі скоростію w є она прямою лінією, якої кут наклоненя до оси u є $arc\,tg\,\frac{w}{c}$; а що $w < c$, тому все $arc\,tg\,\frac{w}{c} < \frac{\pi}{4}$. Взагалї світова лінія є довільна крива лінія, якої наклонене до оси u не осягає висше поданої вартости.

В спеціяльнім случаю, коли вісь x' порушає ся рівномірним поступним рухом рівнобіжно до оси x зі скоростію v, трансформація відбуває ся лише в площи (xu). Площу xu



Фіґ. 5.

обираємо за образову площу (фіґ. 5). На тій площи рисуємо рівнобічні гіперболї:

$$x^2 - u^2 = -1, \tag{26}$$

$$x^2 - u^2 = +1, \tag{26а}$$

як також пару їх асимптом:

$$x^2 - u^2 = 0 \tag{26б}$$

З зерової точки O ведемо пряму до довільно вибраної точки U' на галузи гіперболї, для якої $u > 0$; так само до вибраної точки X' на галузи гіперболї $x > 0$ ведемо пряму; однак X' обираємо так, щоби асимптота $x = u$ була двосічною кута між прямими u' і x', то значить, що прямі u' і x' творять спряжені проміри гіперболї (26).

Як точка U' впаде на точку U, то пряма u' накриє вісь u; тодї також пряма x' накриє вісь x. Трансформація Lorentz-а (19) зг. (21 а, б) полягає на тім, що уживаємо як осий сорядних u' і x' місто u і x, а як одиниць довжини OU' і OX' місто OU і OX.

Прямі OU' і OX' мають рівнання:

$$x = \beta u, \qquad u = \beta x,$$

де $|\beta| < 1$. Сорядні точки U' і X' після рівнань (26) і (26а) є:

$$\begin{aligned} u_{u'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad & x_{u'} &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ u_{x'} &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad & x_{x'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{26в}$$

В укладї S' повинна заходити така звязь:

$$u'_{u'} = x_{x'} = 1, \qquad u'_{x'} = x'_{u'} = 0.$$

В сей спосіб є однозначно визначені чотири постійні, які виступають при лінійній трансформації x, u на x' u': тодї рівнання трансформаційні мусять мати вигляд:

$$x' = \frac{x - \beta u}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad u' = \frac{u - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{27}$$

після (25) переходять они на (19), коли положимо:

$$\beta = \frac{v}{c}. \tag{28}$$

Вираженя $x^2 - u^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ остають незмінні при субституції (27). Рівнання обох гіпербол і їх пар асимптот мають той сам вигляд так в укладї S, як також в укладї S'. Кут ω визначуємо при помочи реляції:

$$tg\, \omega = \beta = \frac{v}{c}. \tag{29}$$

До кождої світової точки W на площи (ux), для котрої $u^2 > x^2$, можна повести часову вісь, з напрямом $\overrightarrow{OW}$, коли $u > 0$, з напрямом знов $\overrightarrow{WO}$, коли $u < 0$; бо все до OW можна дібрати оден спряжений промір як вісь x'. На відворот можна кожду світову точку W, для котрої $u^2 < x^2$, зробити „рівночасною“ з точкою O, коли доберемо пряму OW з відповідним напрямом до оси x' і відповідний спряжений промір до оси u'.

Для представленя загальної трансформації Lorentz-а, де уклад сорядних x, y, z може мати ріжний напрям до зглядної скорости v, треба її подати у чотирох вимірах. Тоді місто гіперболь дістанемо двоповолоковий гіперболїчний простір:

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^3 = -1 \qquad (30)$$

та одноповолоковий гіперболїчний простір:

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = +1, \qquad (30а)$$

які асимптотично дотикає стіжковий простір:

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0. \qquad (30б)$$

Гіперболї зі своїми асимптотами (фіґ. 5) є перерізами тих тривимірних просторів площею (ux).

Оберім тепер на додатній поволоці двоповолокового гіперболїчного простору (30) довільну точку U' о сорядних $x_{u'}$, $y_{u'}$, $z_{u'}$, $u_{u'}$, і поведім до неї з точки O пряму. Опісля збудуймо простір проміра спряженого, до проміра OU':

$$xx_{u'} + yy_{u'} + zz_{u'} - uu_{u'} = 0, \qquad (30в)$$

який перетинає одноповолоковий простір гіперболїчний (30а) в еліпсоїдї. Коли U' накриєть ся з вершком U першого гіперболїчного простору, тодї $u = 0$, простір спряженого проміру перейде у простір (xyz), а еліпсоїд переходить в кулю:

$$x^3 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (30г)$$

а всї відтинки, поведені з O до точок на кулї (30г) мають рівну довжину 1; куля (30г) є вимірною поверхнею для відтинків в просторі (xyz). Загальна отже трансформація Lorentz-а полягаєть у слідуючім: Місто прямої OU як оси u і відтинка OU як одиниці, а дальше місто простору (xyz) з кулею (30г) як вимірною поверхнею, обираємо пряму OU' з одиничним відтинком OU' за вісь u' і простір $(x'\ y'\ z')$ єї спряженого проміру з висше поданим еліпсоїдом як вимірною поверхнею для простору $(x'\ y'\ z')$. Рівнаннє сего еліпсоїда повинно бути:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Щоби се доказати, то виконаймо на укладї x', y', z' такі зміни, щоби вираженє $x'^2 + y'^2 + z'^2$ остало незмінним; те саме повинно також відносити ся до вираженя $x'^2 + y'^2 + z'^2 - u^2$. Се можна осягнути в сей спосіб, що пряма, яка повстає з пересічи простору $(x'\ y'\ z')$ з площею поведеною через u і u', буде осию x-ів. Через анальоґічний скрут укладу сорядних x, y, z привертаємо вісь x в ту саму площу. Тодї отримаємо ті самі відношеня як на рисунку 5; OX' і OU' стали після конструкції спряженими промірами гіперболї $x^2 - u^2 = -1$, а що вираженє $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ є незмінне супротив висше поданої спеціяльної трансформації, тому ті розважаня відносять ся також до що йно описаної узагальненої трансформації, яка є нїчо иншого як трансформація Lorentz-а. Маємо тілько управнених укладів, кілько точок находить ся в додатній поволоцї гіперболічного простору (30), тобто: ∞^3. Скорість обох укладів зглядом себе визначуємо при помочи кута ω між осями u а u' після взору (29).

Стіжковий простір ділить сьвіт на три части:

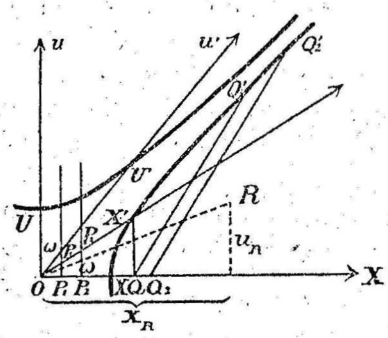
1. $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$, $u > 0$. До кождої точки W сеї области можна повести вісь часу о напрямі $\overrightarrow{OW}$; она обнимає світові точки „з сеї сторони від точки O“, то значить, ті точки, які у всіх управнених укладах є пізнїйшими від точки O.

2. $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$, $u < 0$. Світові точки сеї области лежать „з тої сторони від точки O“, бо они у всіх укладах є раньшими від точки O. До кождої з тих точок можна повести вісь часу о напрямі $\overrightarrow{WO}$.

3. $u^2 < x^2 + y^2 + z^2$. З точок сеї „міжграничної области“ можна три точки довільно зробити рівночасними з точкою O, бо они визначають разом з O простір на площи, який зі спряженим єму проміром з огляду на гіперболічний простір (30) творить управнений уклад віднесеня. В тих укладах мають згадані три точки з точкою O спільний час $t = \dfrac{u}{c} = 0$.

В самім стіжковім просторі (30б) розріжняємо „передний стіжок“, для якого $u > o$, і „задний стіжок“ для $u < 0$. Перший стіжок обнимає такі світові точки, які представляють нам явища, яких діланя розходять ся зі скоростію світла; з них деякі доходять також до точки $x = o$, $y = o$, $z = o$ в часі $t = o$. — Задний стіжок представляє нам збір явищ, які можуть відбувати ся аж тоді, коли діланя явищ першого стіжка трафляють точку O. Отже точки передного стіжка „висилають світло до O“, точки задного стіжка „принимають світло від O“.

Вернім тепер знов до спеціяльної трансформациї (27). Кінцеві точки недвижимої штаби в постійнім укладі S описують прямолінійні, до оси u рівнобіжні світові лінії $P_1P'_1$ і $P_2P'_2$ (фіґ. 6). Відношенє $\frac{P_1P_2}{OX}$ подає її довжину l_0 в спочинку. Зауважмо дальше в движимім укладі S' другу штабу, то сві-



Фіґ. 6.

тові лінії її кінцевих точок творять прямі $Q_1Q'_1$ і $Q_2Q'_2$ рівнобіжні до оси u', а її довжину l_0 в спочинку виразимо відношенєм $\frac{Q'_1Q'_2}{OX'}$. Довжина першої штаби в укладі S' виносить $l' = \frac{P'_1P'_2}{OX'}$, бо $\frac{OP'_1}{OX'}$ і $\frac{OP'_2}{OX'}$ є сорядними (x') її кінцевих точок для рівної вартости t', (пр. 0). Довжина другої штаби в укладі S є аналоґічно $l = \frac{Q_1Q_2}{OX}$. Але після (26в):

$$\frac{OX'}{OX} = \sqrt{x^2_{x'} + u^2_{x'}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}},$$

а дальше після (29) і рис. 6:

$$\frac{P'_1 P'_2}{P_1 P_2} = \frac{1}{cos\,\omega} = \sqrt{1+\beta^2},$$

$$\frac{Q_1 Q_2}{Q'_1 Q'_2} = \frac{OQ_1}{OQ'_1} = \frac{sin\,O\,Q'_1 Q_1}{sin\,O\,Q_1 Q'_1} = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-2\omega\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)} = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Отже для першої штаби маємо:

$$\frac{l'}{l_0} = \frac{P'_1 P'_2}{OX'} \cdot \frac{OX}{P_1 P_2} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (31)$$

а для другої штаби:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{Q_1 Q_2}{OX} \cdot \frac{OX'}{Q'_1 Q'_2} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (31a)$$

Дістали ми отже потверджене правила попереднього уступу, що глядачеви, у співдвижимім укладі видаєть ся тіло все довше, як глядачеви якогонебудь іншого укладу. З рисунку (6) бачимо, що:

$$Q'_1 Q'_2 : OX' = P_1 P_2 : OX'$$

отже $Q_1 Q_2 < P_1 P_2$.

Най світові точки O і R на рисунку 6 представляють дві матеріяльні точки A і B в спочинку, в недвижимім укладі S; з першої точки A в часі t $(=0)$ виходить якийсь рід фізичного діланя, яке в часі $t_{\text{к}}$ осягає точку B. Приймім дальше, що скорість розходженя сего діланя w перевисшає скорість світла c, тоді було би:

$$u_{\text{к}} = c\,t_{\text{к}} = |\,x_{\text{к}}\,|\,\frac{c}{w} < |\,x_{\text{к}}\,|\,,$$

а R належалоб до міжграничної области разом з O. В такім разі можливі були би управнені уклади, в яких подібно як S' було би $u'_{\text{к}} < 0$, то значить, що R було би вчаснійше від O; отже діланє наспіло би до B скорше, чим повстала єго причина в A.

З тих ґеометричних розважувань бачимо, що неможлива є скорість, яка перевисшала би скорість світла. Всї світові точки, які впливають причиново на точку O, лежать з тої сторони точки O або на заднім стіжку від O (порівн. фіґ. 5), всї знов світові точки, від яких може уділити ся точці *O* такий вплив, лежать з сеї сторони точки *O* або на переднім стіжку від *O*. Точки міжграничної области не можуть знов ніколи стояти з точкою *O* у причиновій звязи.

г. Сорядні простору і часу.

Для переглядного образу відношень, обнятих трансформацією Lorentz-a, представмо величини x, t як прямокутні сорядні на образовій площи, а опісля випровадім з них значіне величини x', t'. Впровадьмо кут ω в той спосіб, щоби після (20a):

$$v = tg\, \omega, \tag{32}$$

отже:

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad \sin\omega = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}};$$

з того дістанемо:

$$\cos^2\omega - \sin^2\omega = \frac{1-v^2}{1+v^2} = \frac{1}{\varkappa^2},$$

де:
$$\varkappa = \sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}}. \tag{33}$$

Тоді: $\sigma = \varkappa \cos\omega, \quad \sigma v = \varkappa \sin\omega,$

а взори (21a) переходять на:

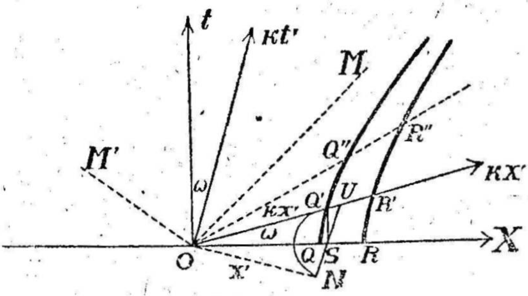
$$\begin{aligned} x &= \varkappa x' \cos\omega + \varkappa t' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \\ t &= \varkappa x' \sin\omega + \varkappa t' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \end{aligned} \tag{34}$$

з відверненєм:

$$\begin{aligned} \varkappa x' \cos 2\omega &= x \cos\omega - t \sin\omega \\ \varkappa t' \cos 2\omega &= - x \sin\omega + t \cos\omega. \end{aligned} \tag{34a}$$

Маємо отже два уклади сорядних $\Sigma = (x, t)$ і $\Sigma' = (\varkappa x', \varkappa t')$. Приймім, що уклад Σ є прямокутний; єго сорядні подають нам захованє (x, t) пр. якоїсь точки, яка порушаєть ся здовж оси X недвижимого укладу S. Най Σ' представляє скісний уклад; єго сорядні подають знов захованє (x', t') згаданої точки зглядом движимого укладу S'. Тоді взори (34) означають перехід з прямокутного укладу Σ до скосокутного укладу Σ'. В укладі Σ' не виступають виразно x', t', але лише їх побільшення $\varkappa x'$, $\varkappa t'$.

Зі взорів (34) слїдує, що оси схісного укладу є наклонені до осий прямокутного укладу під кутом ω і $-\omega$. Пара осий $\varkappa X'$ і $\varkappa T'$ є спряженими промірами кождої рівнобічної гіперболї, якої асимптотами є двосїчні OM і OM' прямокутного укладу (фіґ. 7).



Фіґ. 7.

Щоби з віддаленя $OQ' = \varkappa x'$ якоїсь точки на оси $\varkappa X'$ найти само x', будуємо через точку Q' рівнобічну гіперболю, якої асимптотами є двосїчні OM і OM'. Она відтинає на оси x відтинок $OQ = x'$, що отримаємо зі слїдуючої конструкції: З точки Q' ведемо до оси x прямову, яка трафляє її в точці S; около S як осередка зачеркуємо лучем $SQ' = \varkappa x' . \cos \varphi$ коло, а опісля провадимо до него з точки O стичну до $N - ON$; тодї:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{SN}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{SQ'}^2 = \varkappa^2 x^2 \ (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) = x'^2,$$

отже: $ON = OQ = x'$.

Коли противно x, t є сорядними точки Q' на рівнобічній гіперболї о оси $x' = OQ$, а в тій точцї вісь $t' = 0$, то з огляду на:

$$\frac{x}{t} = tg\, \omega = v$$

і з огляду на (21):

$$x^2 - t^2 = x'^2$$

маємо:

$$\overline{OQ'}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SQ'}^2 = x^2 + t^2 = (x^2 - t^2) \frac{1 + v^2}{1 - v^2} = \varkappa^2 x'^2,$$

що мали ми доказати.

На тій фіґурі можна провірити твердження о просторі і часї релятивістичної кінематики. Так пр. зі становиска прямокутного укладу сорядних Σ має точка Q сорядні x, t, з огляду знов на скісний уклад Σ' єї сорядними є $\varkappa x'$, 0, де $x' = OQ < < x = OS$.

Положене, яке займає постійно з недвижимим укладом звязана дорога $OM = x$ (фіґ. 4), представляєть ся на образовій площи при помочи рівнобіжних відтинків до $x = OS$ (фіґ. 7), де точка O порушаєть ся здовж оси t. Від хвилї $t' = 0$ почавши переступають точки совгаючого ся відтинка OS по черзї вісь $\varkappa X'$ укладу Σ' між O а Q' і видають ся глядачеви в укладї S' як рівночасні. Він має враженє, що відтинок $\varkappa x$ спадає на відтинок $OQ' = \varkappa x'$ або, що на $x = OS$ спадає $x' = OQ$.

Дальше бачимо, що зі становиска укладу Σ' точки O і Q' мають той самий час $t' = O$; зі становиска же укладу Σ точка O має час $t = 0$, а точка Q' — час $t = SQ' = \dfrac{vx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ і т. д.

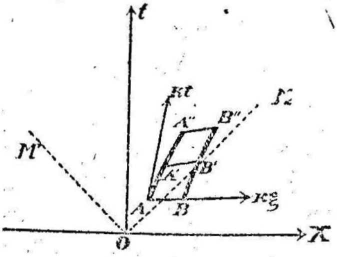
Як до образової площі (x, t) додамо ще дві сорядні y (y'), z (z') прямові між собою і до x, t, то отримаємо чотировимірний образовий простір; він буде мати знов оден прямокутний уклад сорядних Σ і оден в части скісний уклад Σ'. Положеню матеріяльної (не образової) точки x, y $(= y')$, z $(= z')$ у віднесеню до прямокутного укладу сорядних S звичайного простору в часї t, відповідає точка x, y, z, t у віднесеню до укладу Σ чотировимірного простору як образова точка або світова точка після Мінковского. Тій точцї движимого укладу S' з рівномірною скоростію $\mathfrak{v}$ зглядом укладу S, у звичайнім просторі відповідає в скіснім укладї Σ' сорядні x', y', z', t' в чотировимірнім просторі.

ґ. Світова лінїя матеріяльної точки; її місцевий час.

Матеріяльна точка m порушаєть ся у звичайнім просторі здовж оси x прямокутного укладу сорядних S. Рухови єї на образовій площи чотировимірного простору Σ відповідає після Мінковского світова лінїя; єї стична в якім небудь місци (x, t) подає скорість точки m $\dfrac{dx}{dt}$ в укладї S в часї t.

Скорість $\mathfrak{v}$ укладу S' з огляду на уклад S не може переходити границї 1, бо в такім случаю сочинники трансформації (21) були би мнимі. Приймім отже, що скорість точки m $|\mathfrak{w}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ приймає в укладї S горішну границю 1. Тоді, в случаю $\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, світова лінія точки m на ніякім місци не є більше наклонена до оси x як двосїчна OM першої чвертки (фіґ. 7). З тої самої фіґури бачимо, що також зглядні скорости $\frac{dx'}{dt'}$, $\frac{dx''}{dt''}$, і т. д. точки m з огляду на уклади S', S'', і т. д. мусять бути менші від 1. Отже до кождого елементу світової лінії можна все дібрати скісний уклад сорядних в той спосіб, що его вісь t' є рівнобіжна до стичної світової лінії в тім місци; тоді точка m з огляду на відповідний уклад S' хвилево находить ся у спочинку. Після Мінковского звели ми точку m до спочинку введенем укладу сорядних Σ'.

Най крива $AA'A''$..... (фіґ. 8) представляє світову лінію матеріяльної точки m, яка порушаєть ся здовж оси x тривимірного укладу сорядних S. Поведім в точці A (x, t) стичну до кривої $AA'A''$... і оберім єї за вісь часу τ нового скісного



Фіґ. 8.

укладу сорядних (ξ, τ). В скіснім укладі знов виступати будуть побільшеня сорядних $\varkappa\xi$, $\varkappa\tau$. Сорядні ξ і τ визначимо при помочи анальоґії до взорів (21б), отже:

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\tau = \frac{-vx + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (35)$$

де $v = \frac{dx}{dt}$. При помочи сорядних (35) укладу Σ' трансформуємо матеріяльну точку m до спочинку. По зріжничкованю рівнань

(35) і узглядненю, що в місци A: $\xi = o$, $\tau = o$, $\frac{d\xi}{d\tau} = o$ отримаємо взір анальоґічний до (21):

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2,$$

або:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \tag{36}$$

Коли впровадимо якийнебудь інший скісний уклад Σ', то виражене на dt остане незмінне, а саме:

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2}; \tag{36a}$$

отже виражене на елемент часу $d\tau$ є величиною независимою від вибору укладу сорядних. Мінковскі називає елемент часу сьвітової лінії $d\tau$ — елементом „питомого (місцевого) часу“ τ матеріяльної точки. Вартість єго для світової лінії буде:

$$\tau = \int d\tau. \tag{37}$$

Лінійний елемент світової лінії, мірений в укладі Σ, є звязаний з елементом $d\tau$ рівнанєм:

$$ds = dt \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 + v^2}$$

або:

$$ds = d\tau \sqrt{\frac{1 + v^2}{1 - v^2}} = \varkappa \, d\tau.$$

Вісь $A\varkappa\xi$ є спряженим напрямом до стичної $A\varkappa\tau$ у віднесеню до пари двосічних OM і OM'. Коли отже $A\varkappa\tau$ і $A\varkappa\xi$ оберемо за оси укладу сорядних, тоді рівночасно з точкою A всї точки прямої $A\varkappa\xi$ трансформують ся до спочинку. Приймім, що се заходить в кождій точці світової лінії $AA'A''\ldots$ і відповідно для всїх точок на прямих рівнобіжних до $A\varkappa\xi$, то значить, на $A'\varkappa'\xi'$, $A''\varkappa''\xi''$, і т. д. Перенесім дальше на $A\varkappa\xi$, $A'\varkappa'\xi'$, і т. д. рівні відтинки $AB = A'B' =$ і т. д. у відповідній до напряму поділці, так що $\varkappa AB = \varkappa' A'B' =$ і т. д., то дістанемо знов світову лінію $BB'B''\ldots$ Положенє точок світової лінії $BB'B''\ldots$ залежати-ме від змін, які заходити-муть в лінії $AA'A''\ldots$ Точки кривої $BB'B''\ldots$ є немов цїпко звязані з точкою A.

Розберім тепер отсе питанє: до обраних світових лінїй в площи (xt) укладу Σ найти рух приналежної матеріяльної точки здовж оси x у тривимірнім просторі і навідворот. Істнують світові лінїї укладу Σ з прикметами, що глядач, нерозлучно звязаний зі згаданою матеріяльною точкою не спостерігає ніяких змін так що до місця як і часу, а противно знов кождий глядач нерозлучно звязаний з укладом S або S' тривимірного простору сю зміну спостерігає. Коли у взорах:

$$x = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t = \frac{\tau - v\xi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

приймемо ξ і τ як постійні величини, а v як змінну, то оба повисші взори представляють шукану світову лінїю. Через елімінацію v отримуємо рівнанє:

$$x^2 - t^2 = \xi^2 - \tau^2,$$

яке представляє рівнобічну гіперболю $QQ'Q''\ldots$ або $RR'R''\ldots$ (фіґ. 7); її асимптотами є двосїчні OM і OM'; она є світовою лінїєю для матеріяльної точки, що порушаєть ся здовж оси x укладу S рухом рівномірно прискореним.

д. Рух матеріяльної точки по кривій лінїї.

Розважання двох попередних уступів можна вповні приміпити до світової лінїї матеріяльної точки m, яка порушаєть ся зі змінною скоростію по довільній кривій лінїї. В чотировимірнім просторі для прямокутного укладу сорядних Σ (x, y, z, t) образом сего руху є світова лінїя $AA'A''\ldots$, якої кут нахиленя до оси t не перевисшає 45^0, бо після заложеня попередного уступа $|\mathfrak{w}| < 1$, отже також: $\frac{dx}{dt} < 1$, $\frac{dy}{dt} < 1$, $\frac{dz}{dt} < 1$. Оберім знов точку A (x, y, z, t) за початок укладу сорядних і поведім до світової лінїї в точцї A стичну і оберім єї за вісь $\varkappa\tau$ скісного укладу, то простір (ξ, η, ζ) є спряжений до оси $\varkappa\tau$ з огляду на тривимірний стіжок з вершковим кутом 45^0. Укладови (ξ, η, ζ, τ) в чотировимірнім просторі відповідає в тривимірнім просторі уклад S. Тодї точка m з огляду на уклад S

находить ся в спочинку. Узглянім дальше, що в точці $\xi = \eta = \zeta = \tau = o$ також:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau} = 0,$$

то з рівнання (16) в тім случаю отримаємо:

$$d\tau^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = dt^2 (1 - |\mathfrak{w}|^2), \qquad (38)$$

де $\mathfrak{w}$ є скоростію точки m у віднесеню до укладу S тривимірного простору, отже:

$$|\,\mathfrak{w}\,|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \qquad (38a)$$

З рівнаня (38) слїдує звязь:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -1, \qquad (39)$$

з якої опісля низше скористаємо.

Коли $d\tau$ є часовий елемент світової лїнії матеріяльної точки m в точці A, а її питомий час:

$$\tau = \int d\tau,$$

то з рівнань (36), (36а) і (38) слїдує:

$$\tau = \int dt\sqrt{1 - |\mathfrak{w}|^2} = \int dt'\sqrt{1 - |\mathfrak{w}'|^2} = \int dt''\sqrt{1 - |\mathfrak{w}''|^2} = \text{і т. д.} \qquad (40)$$

де:

$$\left.\begin{aligned} |\mathfrak{w}'|^2 &= \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2, \\ |\mathfrak{w}''|^2 &= \left(\frac{dx''}{dt''}\right)^2 + \left(\frac{dy''}{dt''}\right)^2 + \left(\frac{dz''}{dt''}\right)^2, \text{ і т. д.} \end{aligned}\right\} \qquad (40a)$$

є скорости точки m, подані у віднесеню до інших укладів сорядних S', S'', і т. д. у тривимірних просторах, які порушають ся рівномірно і прямолінійно зглядом себе.

З рівнаня (40) слїдує, що питомий час τ не залежить від добору укладів віднесеня, отже є він незмінною величиною з огляду на трансформацію Lorentz-а.

Тому звичайно впроваджують ся τ як змінну незалежну та відносить рух матеріяльної точки m до питомого часу τ. Тодї перші і другі похідні величин x, y, z, t з огляду на τ трансформують ся так само як самі сорядні x, y, z, t; они, подібно як сорядні x, y, z, t творять складові певного рода чотировимірного вектора; повну анальоґію до них у тривимірнім просторі творили би: скорість і прискорене, однак в случаю, коли t заступимо через $t\sqrt{-1}$; в такий спосіб впровадили би ми мнимий чотировимірний простір.

е. Загальна трансформація Lorentz-a і її ґеометричне значіння.

Вернім знов до взорів загальної трансформації Lorentz-a (14) і зіставмо сочинники a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, які там виступають, подібно як у (15) зі зміною, що скорість c відповідно до заложень передпослїдного уступу напишемо рівну одиниці, тодї отримаємо:

$$a^2_{1i} + a^2_{2i} + a^2_{3i} = 1, \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$a^2_{14} + a^2_{24} + a^2_{34} - a_{44} = -1, \qquad (41)$$

$$a_{1i}\, a_{1k} + a_{2i}\, a_{2k} + a_{3i}\, a_{3k} - a_{4i}\, a_{4k} = 0. \quad (i, k = 1, 2, 3, 4; \ i \gtrless k)$$

Їх визначник $| a_{ik} | = +1$. Приймім тепер можливість рівномірного руху укладу S' у трох напрямах осий сорядних зі скоростями v_x, v_y, v_z з огляду на постійний уклад S. Тодї сочинник σ перейде через анальоґію на:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2_x - v^2_y - v^2_z}}.$$

З сочинників a_{ik} дістанемо найзагальнїйші вартости сочинників b_{ik}, які сповняють рівнання (41), коли положимо:

$$b_{i4} = b_{4i} = a_{4i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$b_{ik} = a_{1k}\, \alpha_i + a_{2k}\, \beta_i + a_{3k}\, \gamma_i,$$

де 9 величин α, β, γ є сочинниками ортоґональної субституції у тривимірнім просторі, отже мусять сповняти 6 рівнань:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1,$$

$$\alpha_i\, \alpha_k + \beta_i\, \beta_k + \gamma_i\, \gamma_k = 0,$$

де $i \gtrless k$, $i, k = 1, 2, 3$. Приймім дальше:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1,$$

а всї інші α, β, γ рівні зеро, а опісля положім $v_y = v_z = 0$, $v_x = v$, тодї b_{ik} переходять на систем сочинників рівнань (21a).

З трансформацийних взорів (14) можна отримати звязь між прямокутним (згл. скісним) укладом Σ а скісним (згл. иншим скісним) укладом Σ' у чотировимірнім просторі; при тім напрям осий сорядних скісних укладів є все спряжений зі стіжковим тровимірним простором:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0. \tag{42}$$

Положім саме для $i = 1, 2, 3, 4$:

$$a_{1i} = \mu_i a_i, \quad a_{2i} = \mu_i b_i, \quad a_{3i} = \mu_i c_i, \quad a_{4i} = \mu_i d_i, \tag{43}$$

де:

$$\mu_i^2 = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 + a_{4i}^2, \tag{44}$$

а дальше:

$$\mu_1 x' = \xi', \quad \mu_2 y' = \eta', \quad \mu_3 z' = \zeta', \quad \mu_4 t' = \tau', \tag{45}$$

тоді лінійний систем рівнань (14) переходить в слідуючий систем:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3 \zeta' + a_4 \tau', \\ y &= b_1 \xi' + b_2 \eta' + b_3 \zeta' + b_4 \tau', \\ z &= c_1 \xi' + c_2 \eta' + c_3 \zeta' + c_4 \tau', \\ t &= d_1 \xi' + d_2 \eta' + d_3 \zeta' + d_4 \tau', \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

де сочинники a_i, b_i, c_i, d_i є звязані з собою в сей спосіб:

$$\begin{aligned} &a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \\ &a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Систем рівнань (46) представляє нам *перехід з одного скісного укладу сорядних в чотировимірнім просторі в инший*. Від разу запримітити тут можна, що як оси сорядних не виступають тут як самі x', y', z', t', лише як їх побільшення $\mu_1 x'$, $\mu_2 y'$, $\mu^3 z'$, $\mu_4 t'$. З рівнань (47) довідуємо ся, що 4 напрями (a_i, b_i, c_i, d_i) є парами спряжені з огляду на тривимірний стіжковий простір другого ряду:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

бо они представляють узагальнене знаної подібної звязи для 3 напрямів у віднесеню до поверхні другого ряду тривимірного простору¹).

---

¹) Salmon-Fiedler, Analyt. Geometr. d. Raumes, I. Aufl. p. 110.

4. Динаміка.

а. Прискорення, сила.

Дотеперішні наші розважаня обмежали ся лише до понять довжини і часу нової релятивістичної механїки. Модифікація тих понять потягає за собою зміну також інших основних понять динаміки, а саме понять маси, прискореня і сили. Вправдї ті зміни, яким треба піддати згадані поняття, щоби рівнання руху супротив трансформації Lorentz-а були незмінні, є так невеликі, що в практичнім ужитю не мають они майже ніякого значіня, однак ся обставина ще не звільняє нас від ревізії цїлої механїки важких тїл з нової точки релятивістичної теорії. Послїдна якраз таку ревізію основних законів клясичної механїки перевела та надала їм новий вигляд.

В тих розважанях ограничимо ся лише до матеріяльної точки, яка свобідно порушаєть ся у просторі.

Другий аксіом клясичної механїки подає звязь між силою а прискоренєм в той спосіб, що виступаючий там чинник „маса“ є постійною величиною в просторі і часї. Сей аксіом тратить свою важність, коли приймати-мем для руху скорости, які доходять границї скорости світла. Такі скорости виступають при рухах електронів і йонів. Досвіди[1] виказують, що у тім случаю звязь між силою а прискоренєм не є постійною величиною в просторі і часї, але функцією скорости. З огляду на те питання маси і прискореня у релятивістичній динаміцї улягло основній зміні.

З'образім собі матеріяльну точку m, яка порушаєть ся в прямокутнім постійнім або в рівномірно-прямолїнійно движимім укладї сорядних S тривимірного простору в часї t з скоростію $\mathfrak{w}$ о довільнім напрямі. Най рух сей відбуваєть ся під дїланєм сили $\mathfrak{F}$ зі складовими $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$. Такий рід сили називаєть ся у релятивістичній динаміцї „силою Мінковского“. Сила $\mathfrak{F}$ не є тут пропорціональна до звичайного прискореня як в клясичній динаміцї, але є она пропорціональна до „питомого прискорення“ $\mathfrak{a}$ точки m. Питоме прискорення[2] представляє

---

[1] W. Kaufmann, Gött. Nachr. (Math.-phys. Kl.) 1901. p. 143; 1902, p. 291; 1903, p. 90; Ann. d. Phys. 1906 (19) p. 487,

A. H. Bucherer, Phys. Ztsch. 1908. (9) p. 755.

E. Hupka, Ann. d. Phys. 1910, (31) p. 169.

[2] G. Herglotz, Eine relativ. Mechanik... Ann. d. Phys. 1911, (4), 36.

нам вектор, якого складовими є другі похідні сорядних x, y, z точки m з огляду на її питомий час τ, а то.:

$$\mathfrak{a} = \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \ \frac{d^2y}{d\tau^2}, \ \frac{d^2z}{d\tau^2}\right), \qquad (48)$$

де знов:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - |\mathfrak{w}|^2}.$$

Жадаємо тепер, щоби рух точки m в укладі S в часі t визначувало векторове рівнаннє:

$$\mathfrak{F} = m\,\mathfrak{a}. \qquad (49)$$

Чинник m у тім рівнанню, який виступає як постійна величина, називаєть ся „масою в спочинку“ або „масою Мінковского“ точки m.

До тих трох рівнань, на які розпадаєть ся рівнаннє (49), додати ще треба слідуюче:

$$m\frac{d^2t}{d\tau^2} = \mathfrak{F}_t. \qquad (50)$$

Се рівнання дефінїює величину $\mathfrak{F}_t$, независиму від $\mathfrak{F}$. Єго значіннє зрозуміємо так: Най величина $\mathfrak{A}$ представляє чотири величини в сей спосіб:

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \ \frac{d^2y}{d\tau^2}, \ \frac{d^2z}{d\tau^2}, \ \frac{d^2t}{d\tau^2}\right). \qquad (51)$$

Піддаймо тепер трансформації Lorentz-а сорядні x, y, z, t точки світової лїнії приналежні до m в прямокутнім укладі Σ чотировимірного простору. Знаємо дальше, що питомий час τ є незмінний з огляду на трансформацію Lorentz-а (36a), тому по трансформації систем похідних $\mathfrak{A}$ переходить у систем інших чотирох похідних:

$$\mathfrak{A}' = \left(\frac{d^2x'}{d\tau^2}, \ \frac{d^2y'}{d\tau^2}, \ \frac{d^2z'}{d\tau^2}, \ \frac{d^2t'}{d\tau^2}\right),$$

зовсім так само, як сорядні x, y, z, t переходять в x', y', z', t'. Послїдні сорядні належать до укладу S', який з огляду на уклад S тривимірного простору порушаєть ся зі скоростію (v_x, v_y, v_z). У віднесенню до укладу S' ділає на точку m сила $\mathfrak{F}'$ зі складовими $\mathfrak{F}_{x'}$, $\mathfrak{F}_{y'}$, $\mathfrak{F}_{z'}$. До тих складових долучити ще треба складову $\mathfrak{F}_{t'}$, визначену рівнаннєм:

$$\mathfrak{F}_{t'} = m\frac{d^2t}{d\tau}.$$

З огляду на уклади S і S' отримали ми два системи сил:

$$(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z, \mathfrak{F}_t) = \mathfrak{F}$$

і:

$$(\mathfrak{F}_{x'}, \mathfrak{F}_{y'}, \mathfrak{F}_{z'}, \mathfrak{F}_{t'}) = \mathfrak{F}'.$$

Завдяки трансформації Lorentz-a, переходить (x, y, z, t) на (x', y', z', t'), $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, отже також систем $\mathfrak{F}$ переходить на $\mathfrak{F}'$. В наслїдок такої дефініції сили Мінковского переходить звязь:

$$\mathfrak{F} = m\,\mathfrak{A} \tag{52}$$

на:

$$\mathfrak{F}' = m\,\mathfrak{A}',$$

або explicite систем рівнань руху:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{d\tau^2} &= \mathfrak{F}_x \\ m\frac{d^2y}{d\tau^2} &= \mathfrak{F}_y \\ m\frac{d^2z}{d\tau^2} &= \mathfrak{F}_z \\ m\frac{d^2t}{d\tau^2} &= \mathfrak{F}_t \end{aligned} \tag{53}$$

переходить на рівноважний систем для сорядних x', y', z', t'.

З тих розважань бачимо, що чотировимірні величини релятивістичної механїки: прискорене $\mathfrak{A}$ та сила $\mathfrak{F}$ є незмінними величинами з огляду на трансформацію Lorentz-a. На тих саме основах опираєть ся динаміка матеріяльної точки m в теорії зглядности.

6. Енерґія, маса.

З'образїм собі рух матеріяльної точки m в тривимірнім укладї сорядних S зі скоростію $\mathfrak{w}$, тодї:

$$|\mathfrak{w}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{54}$$

З рівнання (38) дістанемо:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \varkappa.$$

Утворім дальше перші і другі похідні сорядних x, y, z з огляду на питомий час τ, помножім їх відповідно з собою і додаймо, то одержимо:

$$\frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{dy}{d\tau}\frac{d^2y}{d\tau^2}+\frac{dz}{d\tau}\frac{d^2z}{d\tau^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right\}=$$
$$=\frac{d}{d\tau}\frac{|\mathfrak{w}|^2\cdot\varkappa}{2}.$$

Помножім знов рівнання системy (53) по черзі через $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, $-\frac{dt}{d\tau}$ і додаймо, то дістанемо:

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{(v^2-1)\varkappa^2}{2}=\mathfrak{F}_x\frac{dx}{d\tau}+\mathfrak{F}_y\frac{dy}{d\tau}+\mathfrak{F}_z\frac{dz}{d\tau}-\mathfrak{F}_t\frac{dt}{d\tau}.$$

Ліва сторона сеї рівности є зером, отже отримаємо по упорядкованю:

$$m\,d\frac{dt}{d\tau}=\mathfrak{F}_t\,d\tau=\frac{\mathfrak{F}_x}{\varkappa}dx+\frac{\mathfrak{F}_y}{\varkappa}dy+\frac{\mathfrak{F}_z}{\varkappa}dz=dE \qquad (55)$$

Ріжничку dE називаємо приростом потенціяльної енерґії, обчисленої в укладі S. З другої сторони з рівнання (53) маємо:

$$dE=\frac{m}{2}\,d\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right\} \qquad (56)$$

як приріст кінетичної енерґії. З реляций (55) і (56) бачимо, що послідне рівнання системy (53) виражає нам нічо інше як закон збереженя енерґії. — Однак у рівнанню потенціяльної енерґії (55) не виступає сила $\mathfrak{F}$, лише $\frac{\mathfrak{F}}{\varkappa}$; її називаємо „нютенівскою силою“:

$$\mathfrak{P}=\frac{\mathfrak{F}}{\varkappa}=\mathfrak{F}\sqrt{1-|\mathfrak{w}|^2}, \qquad (57)$$

зі складовими:

$$\mathfrak{P}_x=\mathfrak{F}_x\sqrt{1-|\mathfrak{w}|^2},$$
$$\mathfrak{P}_y=\mathfrak{F}_y\sqrt{1-|\mathfrak{w}|^2},$$
$$\mathfrak{P}_z=\mathfrak{F}_z\sqrt{1-|\mathfrak{w}|^2}.$$

В наслідок сего рівнання на означене сили (49) у релятивістичній динаміці прийме вигляд:

$$\frac{m}{\varkappa}\,\mathfrak{a}=\mathfrak{P}. \tag{58}$$

Се векторове рівнання як також рівнаннє (49) є вислїдом чотировимірного відношення (52), яке саме є узагальненєм другого динамічного аксіому Newton-a. — А що:

$$\frac{m}{\varkappa}\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{m}{\varkappa}\frac{d}{d\tau}\left(\varkappa\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(m\varkappa\frac{dx}{dt}\right),$$

то рівнання (58) розпадає ся у слїдуючі три складові:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_x&=\frac{d}{dt}\left(m\varkappa\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt}\right),\\ \mathfrak{P}_y&=\frac{d}{dt}\left(m\varkappa\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(M\frac{dy}{dt}\right),\\ \mathfrak{P}_z&=\frac{d}{dt}\left(m\varkappa\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(M\frac{dz}{dt}\right),\end{aligned} \tag{58а}$$

де сочинник:

$$m\varkappa=\frac{m}{\sqrt{1-|\mathfrak{w}|^2}}=M \tag{58б}$$

називає ся після H. A. Lorentz-a „звичайною масою“ матеріяльної точки m в противеньстві до маси в спочинку m. Впровадьмо тепер до тих рівнань знов секунду як одиницю часу, отже подібно як у (20) і (20а) заступимо:

$$t \text{ через } \frac{t}{c},\ |\mathfrak{w}| \text{ через } \frac{|\mathfrak{w}|}{c},\ \text{а } \varkappa \text{ через } \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}$$

і рівночасно:

$$\mathfrak{P} \text{ через } \frac{\mathfrak{P}}{c^2},\ \text{а } \mathfrak{F} \text{ через } \frac{\mathfrak{F}}{c^2},$$

то побачимо, що взори (58а) не зміняють взагалї свого вигляду. Виражене на звичайну масу (58б) прийме вигляд:

$$M=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}, \tag{58в}$$

коли місто $|\mathfrak{w}|^2$ напишемо w^2. В случаю $c=\infty$ переходять рівнання руху релятивістичної динаміки (58а) у рівнання руху клясичної механїки (10); взори (58а) остають знов незмінні;

тоді сочинник $\varkappa = 1$, а маса M приймає постійну вартість, чого вимагає клясична механіка.

Приймім тепер, що матеріяльна точка m порушає ся здовж оси x укладу сорядних S. Тоді в хвилі t маємо:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dy}{at} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

а рівнання (58а) в тім часі виглядають:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_x &= \frac{d}{dt}\left(m\varkappa\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{1-v^2}} = m\varkappa^3\frac{d^2x}{dt^2}, \\
\mathfrak{P}_y &= \frac{d}{dt}\left(m\varkappa\frac{dy}{dt}\right) = m\varkappa\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad (59) \\
\mathfrak{P}_z &= \frac{d}{dl}\left(m\varkappa\frac{dz}{dt}\right) = m\varkappa\frac{d^2z}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Зазначуємо при тім, що уклид S відносить ся до звичайного тривимірного простору.

Коли рівнання (59) інтерпретувати хочемо зі становиска клясичної механіки, то бачимо, що сочинник маси залежить від скорости v точки m зглядом укладу S і то в сей спосіб, що іншу вартість прибирає для прискореня в напрямі руху, а іншу для прискореня в прямовім напрямі до напряму руху[1]). В першім случаю вартість того сочинника називає ся „поздовжною масою“:

$$m_l = m\varkappa^3 = M\varkappa^2 = \frac{m}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}},$$

в другім знов случаю називає ся „поперечною масою“:

$$m_t = m\varkappa = M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

коли одиницею часу є секунда.

---

[1]) M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. 1905, p. 191, Ann. d. Phys. 1903 (10) p. 105.
W. Kaufmann, l. c.
H. A. Bucherer, l. c.
E. Hupka, l. c.

З погляду знов релятивістичної механіки обі маси матеріяльної точки є величинами, які зростають зі зростом зглядної скорости v точки m. Коли скорість точки зближаєть ся до скорости світла c, тодї обі маси ростуть неограничено, а вартости їх в тім случаю мало що ріжнять ся від себе. З тих розважувань слїдує знов висше доказаний закон основи зглядности, що границею всяких можливих скоростий у світї є скорість світла.

Заходить тепер питанє, як представляєть ся у релятивістичній динаміцї закон збереженя маси і закон збереженя енерґії[1]). — З рівнання (55) слїдує, що приріст кінетичної енерґії:

$$dE = md\frac{dt}{d\tau} = md\varkappa = dM;$$

а що:

$$dM = d\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

отже:

$$dE = d\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поділїм дальше обі сторони рівнання (55) через c^2, то дістанемо:

$$\frac{dE}{c^2} = \frac{1}{\varkappa c^2}(\mathfrak{F}_x\,dx + \mathfrak{F}_y\,dy + \mathfrak{F}_z\,dz);$$

тодї:

$$dE = c^2dM = c^2d\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{60}$$

Дістали ми несподіваний вислїд, а саме: *приріст або убуток на кінетичній енерґії, якого дізнає матеріяльна точка, є звязаний з приростом або убутком поперечної („звичайної") маси*; сей приріст зг.

---

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. 1905, (18) p. 639; 1906, (20) p. 627; 1907, (23) p. 371;
G. Nordström, Phys. Ztschr. 10. 681, 1909; 11, 440, 1910;
M. Abraham, Phys. Ztschr. 10, 737, 1909; 11, 527, 1910;
M. Laue, Ann. d. Phys. (28) 436, 1909.

убуток з огляду на чинник c^2 є для всїх скоростий, які не можуть йти в порівнанне зі скоростію світла, дуже незначною величиною.

Коли з'інтеґруємо взір (60) і розвинемо в ряд, то дістанемо взір на енерґію кінетичну матеріяльної точки m:

$$E = mc^2 + \frac{m}{z}v^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots\ldots$$

Першого члена того ряду mc^2, де не виступає скорість матеріяльної точки v, не можна брати під розвагу, коли ходить о залежність енерґії матеріяльної точки від скорости; єго не бачимо також у взорі на енерґію у клясичній механїцї. Однак як опісля побачимо, має він прінціпіяльне значіння у релятивістичній механїцї. Клясична механїка узглядняє лише другий член $\frac{m}{z}v^2$. Третий член $\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}$ в порівнанню до другого числа є все дуже малий, бо $\frac{v^2}{c^2}$ є малим дробом в порівнаню до 1; тому він не мати-ме великого впливу на вартість енерґії, отже можна єго пропустити. Се саме відносить ся і до прочих слїдуючих членів.

Після основи зглядности, на вступі сформулованої, закон збереження енерґії повинен задержати своє значіння не лише у віднесеню до укладу сорядних S, але також у віднесеню до кождого укладу сорядних S', який з огляду на S порушає ся прямолінїйно і рівномірно зі скоростію v. При переході з укладу S до укладу S' є міродатною, як знаємо, трансформація Lorentz-а.

З тих саме преміс в лучбі з основними рівнанями електродинаміки Maxwell-а слїдує: Тїло, яке порушаєть ся зі скоростію v, приймає у формі проміньованя енерґію E_0; крім того, без огляду на зміну скорости, єго енерґія дізнає приросту о вартости:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

з огляду на движимий уклад S'.

В наслїдок сего отримаємо вираженє на кінетичну енерґію тїла:

$$E = \frac{\left(m + \frac{E_0}{c^2}\right) c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тїло має отже таку саму енерґію, яку мало би тїло о масї $m + \frac{E_0}{c^2}$. Можна отже сказати, що принята тїлом енерґія E_0 спричиняє приріст безвладної маси тїла о $\frac{E_0}{c^2}$; безвладна маса тїла перестала мати значінє безглядно постійної величини, але она зміняєть ся зі зміною енерґії тїла. З того вносимо, що маса і енерґія є однородними величинами. Безвладна маса якогось системи тїл може бути якраз мірою єго енерґії. Закон збереженя маси системи тїл покриваєть ся отже з законом збереженя енерґії; він відносить ся лише до системів, яких енерґія не зміняєть ся. Взагалї закон збереженя маси є спеціяльним случаєм закона збереженя енерґії, який став ся тим самим універсальною основою фізики.

Напишім дальше взір на енерґію у формі:

$$E = \frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то бачимо, що часть енерґії mc^2 нїчого іншого не представляє як тільки енерґію, яку тїло посїдало ще перед тим, нїм приняло енерґію E_0. Ся часть енерґії не залежить від скорости тїла; она є вартостію внутрішної енерґії.

З того маємо висновок, що кожда маса тїла, як здаєть ся, стоїть в звязи з істнованєм внутрішної енерґії у великій скількости: mc^2. Однак та велика вартість внутрішної енерґії не повинна нас дивувати, від коли ми пізнали радіоактивні тїла. Явища радіоактивности відслонили нам великі засоби енерґії, які криють ся у тайнах матерії. Тому можемо сміло твердити, що у всїх хемічних атомах істнують великі засоби енерґії.

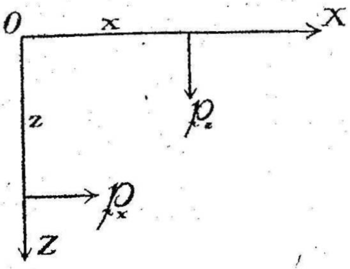
в. Два приміри.

1. Статика[1]). Маємо кутову підойму о рівних раменах, які стоять до себе прямово. Довжини тих рамен є x і z і мають

---

[1]) M. Laue, Ber. d. D. phys. Ges. 13, 1911.
P. Epstein, Ann. d. Phys. 36, (4), 1911.

згідний напрям з осями X і Z прямокутного укладу сорядних S в спочинку (фіґ. 9). На кінцях рамен x і z находять ся матеріяльні точки о масі в спочинку m; на них ділають прямово до рамен дві ньютенівські сили $\mathfrak{P}_x$ і $\mathfrak{P}_z$. В тім случаю цілий



Фіґ. 9.

уклад находить ся в рівновазї. Інший уклад S' порушаєть ся зглядом S зі скоростію v в напрямі відємної оси X. Заходить питанє, чи в віднесеню до укладу S' рівновага буде захована?

Річ не змінить ся, коли будемо уважати місто укладу S — уклад S' як постійний, уклад знов S разом з підоймою як движимий зі скоростію v у напрямі додатної оси X.

Як умову рівноваги у віднесеню до укладу S маємо:

$$x \mathfrak{P}_z - z \mathfrak{P}_x = 0. \tag{61}$$

З рівнаня (57) слїдує, що з огляду на (61) також і для сил Мінковского у відповідних напрямах мусить заходити та сама умова рівноваги, отже:

$$x \mathfrak{F}_z - z \mathfrak{F}_x = 0. \tag{61a}$$

Сили $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_z$ трансформують ся на $\mathfrak{F}_{x'}$, $\mathfrak{F}_{z'}$ так само як сорядні x, z на сорядні x', z', тому рівнаннє (61a) трансформуєть ся на:

$$x' \mathfrak{F}_{z'} - z' \mathfrak{F}_{x'} = 0;$$

послїдне знов з огляду на (57) є рівноважне з умовою:

$$x' \mathfrak{P}_{z'} - z' \mathfrak{P}_{x'} = 0.$$

Рівновага у віднесеню до укладу S' полягає на аналоґічних умовах як у віднесеню до укладу S.

2. Динаміка[1]). Най матеріяльна точка о масі в спочинку m порушаєть ся під діланєм постійної ньютенівської сили $\mathfrak{P}$.

---

[1] A. Brill: l. c.

Як напрям руху оберім додатну вісь X укладу сорядних S. Тодї:

$$\mathfrak{P}_x = m\gamma,$$

$$\mathfrak{P}_y = \mathfrak{P}_z = 0,$$

де γ є постійною величиною. Коли послїдні реляції узглядиемо у взорах (58а) і з'інтеґруємо їх, то отримаємо:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma(t-t_0),$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-v^2}} = a,$$

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-v^2}} = b,$$

де a, b, t_0 є постійні інтеґрованя. Положім дальше $t_0 = 0$, тодї як інтеґрали тих рівнань дістанемо:

$$\sin hyp\, \gamma(y-y_0) = \sin hyp\, \gamma(z-z_0) = \frac{\gamma t}{H},$$

$$[\gamma(x-x_0)+H]^2 = H^2 + \gamma^2 t^2,$$

де:

$$H^2 = 1 + a^2 + b^2,$$

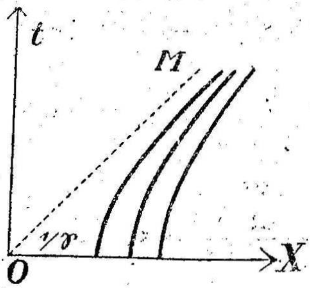
а x_0, y_0, z_0 є сорядні початкового положеня точки m. Положім ще $a = b = 0$, $y_0 = z_0 = 0$, то рух відбуваєть ся у напрямі оси X; єго розвязка прийме вигляд:

$$\left(x - x_0 + \frac{1}{\gamma^2}\right)^2 - t^2 = \frac{1}{\gamma^2},$$

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Приналежна світова лїнія на образовій площи чотировимірного простору є рівнобічна гіперболя, що її довжина оси виносить $\frac{1}{\gamma}$.

Представмо собі тепер систем матеріяльних точок $m = 1$, розділених здовж оси x тривимірного простору пр. $x_0 = 1, 2, 3,...$; на кожду з них ділає сила, яка надає їм прискореня γ; в часї $t = 0$ находять ся точки в спочинку; то їх світовими лініями є рівнобічні гіперболї о осях $\frac{1}{\gamma}$ (фіґ. 10). Однак рух їх не буде відбувати ся так немов би они були цїпко з собою злучені. Бо до сего було би пожадане, щоби в нїякім часї якінебудь дві точки систему не мали нїякої зглядної скорости



Фіґ. 10.

в напрямі лїнії, що їх лучить. Але очивидно нема такої прямої, яка трафлялаб обі гіперболї в тім самім часї та була рівночасно рівнобіжна і спряжена до напряму прямої лучної; сею прямою з тими вимогами може бути лише вісь x. З того слїдує, що нїякі дві точки систему на оси x не дають ся рівночасно трансформувати в стан спочинку, з виїмком стану для $t = 0$, коли всї точки оси x є в станї спочинку.

III.

Закінчення.

1. Відношення основи зглядности до етеру.

Консеквентне переведене теорії зглядности вимагає після Einstein-а зірваня з гіпотезою етеру, як осередка, який проводить електромаґнетні филї і забуреня. Колиб етер істнував, то посїдалиб ми якийсь спосіб доказу єго істнованя, пр. при помочи помірів скорости тїл зглядом того осередка. Основа зглядности перечить, як висше ми бачили, можливости подібного поміру[1]).

Етер, як провідник филь світляних, тепляних, електричних явищ і т. д. є злишний; випадає хиба знов вернути до давної емісийної теорії Newton-а і до „actio in distans“. Після теорії зглядности скорість такого дїланя не може розходити ся з безконечно великою скоростію, лише зі скоростію світла c. З того погляду построїв W. Ritz[2]) теорію світла, подібну до емісийної теорії Newton-а, однак передвчасна смерть перервала єму розпочате дїло.

Мусимо отже приняти, що електромаґнетна енерґія істнує і розходить ся в просторі у формі утворів з собою безпосередно не звязаних, подібних під тим зглядом до частинок матерії. Подаємо однак сей вислїд науки з застереженем, бо много є учених, які працюють навіть над теорією зглядности, але повисшого погляду на етер не принимають. Тут передусім зазначити треба славне імя H. A. Lorentz-а.

---

[1]) A. Einstein, Vortrag auf Salzburg. Naturforsch. Versam. 1909.

[2]) W. Ritz, Oeuvres complétes, Paris 1911. Art. XVIII. XX.

Однак вже вчаснійше I. I. Thomson висказав на основі деяких досвідів думку, що електромаґнетна филя не є тягла, але посїдає структуровий вигляд. Також M. Planck в своїй теорії проміньованя був приневолений впровадити гіпотезу елементів — квантів енерґії.

Будучність вияснить всї нові з'ображеня, які разом з теорією зглядности, в части незалежно від неї, увійшли до науки.

2. Критичні уваги.

Годї заперечити, що спекуляції модерної фізики вказують на безглядну смілість, з якою лучить ся докладна льоґічна конструкція. Дають они нове свідоцтво сили і свіжости людської думки. Але рівночасно трівожить нас її руйнуюча діяльність. Серед так много руїн щож остає постійного запитав H. Poincaré.

В самій річи змодифіковано до дна інтуіції простору і часу, відкинено основу збереженя маси і висновки її, заквестіоновано істнованє етеру; се мабуть вистарчить, щоби поставити у сумнів наукові закони. Може видавати ся, що теоретична праця в строгій науції є будованєм палат на леді, що наукові систематп не мають в дійсности трівких основ; то, що нинї з накладом праці збудувала людська думка, завтра буде збурене.

Однак сей песимізм повинен бути в значній мірі зредукований. — Перш усього нема зовсїм бесїди про беззглядне відкинене основ, якими до тепер кермувала ся наука. Закон збереженя маси і закони клясичної механїки можуть бути примінені у всїх случаях, в яких оставали они в згоді з досвідом. Є они в певних умовах правдиві, але не мають загального значіня. В сучасній фізиці дійшли ми до таких ґруп явищ, які не дають ся уняти в дотеперішні форми. Для їх зрозуміня творимо ширші понятя; не значить се, що старі закони гинуть; противно — остають, але як случаї, що відповідають означеним умовам загальнійших законів.

Єсьмо свідками як з великим розмахом розширюєть ся наукова думка, а не — як банкрутують єї провідні кличі. З резиґнацією мусимо ожидати, що й нові закони також не вистарчать у будучности, але значить се лише, що не дійшли ми ще до абсолюту.

Мимо того маємо почутє, що основа зглядности через узалежненє простору і часу, величини маси і взорів механїки від руху укладу сорядних відобрала строгій думцї опертє о дїйсність. Все, як видавати ся може, прибирає інший вигляд, коли улягає змінї стан спочинку або руху тїл в окруженю зглядом глядача. Тимчасом підложем змінности мусить бути щось тривалого; людське пізнанє повинно все заспокоїти се вимаганє. Застановім ся отже, що є незмінне в світї явищ з точки зріня основи зглядности.

Бачили ми вже, що виказуючи зглядність простору і часу, основа зглядности називає полученє їх „світом чотировимірним“ і приписуєть єму безуслівне істнованє. Беззглядною постійною є скорість світла або взагалї скорість електромаґнетних филь. Опісля основні рівнання електромаґнетного поля Maxwell-а у формі, яку надав їм H. A. Lorentz в електроновій теорії, зберігають свій вигляд, коли виконаємо трансформацію сорядних (14). Виражають они отже незмінні звязи між явищами природи. Основа збереженя енерґії остає також ненарушена в теорії зглядности. На конець основу збереженя маси, яка представляла для людського ума незнищимість матерії, заступає основа збереженя електричности. Елементарний наряд електрону або йону, який обираємо за одиницю, не гине і не творить ся, є він незмінником матерії. Нинїшня наука предвиджуєть, що матерія не є нїчо інше, як збір ріжних укладів, збудованих з атомів електричности.

З тих поданих незмінників виходить на яву якраз напрям еволюції сучасної фізики. Є се новий погляд на світ фізико-хемічних явищ, званий електромаґнетним; є се стремлїннє до відбудови матеріяльного світа при помочи понять з наук електричности.

У Львові, дня 1. мая 1919.

Resume.

Relativitätstheorie von Wołodymyr Kučer.

Die Entwickelung der elektrodynamischen und optischen Probleme für bewegte Körper bilden die experimentellen Grundlagen für das Relativitätsprinzip. Die Theorie dieser Probleme zeigt, wie das Relativitätsprinzip als Produkt der natürlichen Entwickelung wissenschaftlicher Anschauungen entstand. — Ausgehend von der Forderung, daß bei verschiedenen rasch bewegten Medien Kugelwellen wieder Kugelwellen bleiben, gleichviel welcher Art die Erregungsquelle ist, wird das System der Lorentz Einsteinschen Transformationsformeln — auch in der von Minkowski verlangten allgemeinen Gestalt — aufgestellt und erörtert. Man bekommt also die dem Relativitätsprinzip entsprechende Fassung der Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes und einige für den Begriff der Masse und des Prinzip's der Erhaltung der Masse und Energie sich ergebende Folgerungen. Kritische Betrachtungen über spezielle Relativitätstheorie schlüssen den ersten Teil der Abhandlung.

До теорії евольвент.

Написав

Др. Володимир Левицький.

(Zur Theorie der Evolventen von Dr. Wladimir Lewyckyj).

Наколи евольвента є $f(xy) = 0$ (1), то єї еволюта має — як відомо — рівнаннє $\varphi(\xi\eta) = 0$, яке є вислїдом елімінації з рівнання 1) і рівнань:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad \eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \qquad 2)$$

На відворот до рівнання евольвенти дійдем через елїмінацію ξ і η з рівнань 2) і рівнання $\varphi(\xi\eta) = 0$. Дістанемо тодї ріжничкове рівнаннє евольвенти, яке є взагалї тяжке до зінтеґрованя.

В нинїшній розвідці розслїджую кілька случаїв розвязки ріжничкового рівнання евольвенти, які можуть представити інтерес і з огляду на інтеґрованє тих рівнань і з огляду на одержані типи евольвент.

I.

1. Приймім, що еволюта є прямою лїнїєю о рівнанню:

$$\eta = a\xi + b \qquad 3),$$

тодї ріжничкове рівнаннє евольвенти є після 2):

$$ax - \frac{ay'}{y''}(1 + y'^2) + b = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \qquad 4)$$

або:

$$ax = y + \frac{1}{y''}(1 + ay' + y'^2 + ay'^3) - b.$$

Зріжничкуймо се рівнаннє, то дістанемо:

$$a = y' + \frac{1}{y''^2}\left\{y''(2y'y''+ay''+3ay'^2y'') - y'''(1+y'^2+ay'+ay'^3)\right\}.$$

Звідси слїдує:

$$ay''^2 = 3y'y''^2 + ay''^2 + 3ay'^2y''^2 - y'''(1 + y'^2)(1 + ay')$$

або через редукцію:

$$3y'y''^2(1 + ay') = y'''(1 + y'^2)(1 + ay').$$

З сего виходить, що або:

$$1 + ay' = 0 \qquad 5) \qquad \text{або:} \quad 3y'y''^2 = y'''(1 + y'^2). \qquad 6)$$

З рівнання 5) слїдуєть:

$$y' = -\frac{1}{a} \quad \text{т. є.} \quad y = -\frac{x}{a} + c \qquad 7)$$

значить ся евольвента є в сїм случаю *прямою, прямовісною до еволюти*. Евольвенти творять жмут ∞^1 прямих, рівнобіжних до себе.

Ріжничкове рівнаннє 6) дасть:

$$\frac{3y'y''}{1 + y'^2} = \frac{y'''}{y''}.$$

Через інтеґрованє дістанемо:

$$log\, y'' = \frac{3}{2}\, log\,(1 + y'^2) + log\, c_1$$

т. є.

$$y'' = c_1\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

або:

$$y''^2 = c_1^2\,(1 + y'^2)^3. \qquad 8)$$

Щоби зінтеґрувати се рівнаннє, покладім:

$$y' = tg\varphi, \qquad y'' = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{cos^2\varphi},$$

отже:

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}{cos^4\varphi} = \frac{c_1^2}{cos^6\varphi}.$$

З відси:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{c_1}{cos\,\varphi},$$

отже:

$$\pm\, sin\,\varphi = c_1 x + c_2.$$

А що:

$$tg\varphi = \frac{sin\varphi}{\sqrt{1 - sin^2\varphi}}, \quad \text{т. є.} \quad tg\varphi = \frac{\pm(c_1x + c_2)}{\sqrt{1-(c_1x + c_2)^2}},$$

то дістанемо:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{c_1x + c_2}{\sqrt{1-(c_1x + c_2)^2}}.$$

Інтеґрал сего рівнання дає:

$$y = \mp\frac{1}{c_1}\sqrt{1-(c_1x + c_2)^2} + c_3,$$

отже рівнаннє евольвенти буде:

$$(c_1y - c_1c_3)^2 + (c_1x + c_2)^2 = 1. \qquad 9)$$

Є се **рівнаннє кола.** Наколи вставимо в рівнаннє 4) вартости на y, y', y'', дістанемо між постійними звязь:

$$c_1c_3 = bc_1 - ac_2,$$

з чого слідує, що рівнаннє 9) має в дійсности лиш дві постійні, отже рівнаннє 9) представляє жмут ∞^2 колес.

2. Пошукаймо евольвенти для осий сорядних.

Для оси $\eta\eta$ еволюта є $\xi = 0$, а тоді після 2) ріжничкове рівнаннє евольвенти є:

$$x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = 0.$$

Через зріжничкованє дістанемо;

$$1 = \frac{y''(y'' + 3y'^2y'') - y'''(1 + y'^2)y''}{y''^2}$$

або:

$$y'(3y'y''^2 - y''' - y'''y'^2) = 0.$$

Звідси слідує або:

$y' = 0$, т. є. $y = Const$ (прямі рівнобіжні до оси xx)

або:

$$3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2) = 0.$$

Се є рівнаннє 6), отже і в сїм случаю дістанемо жмут ∞^2 евольвент, що є колами.

Для оси $\xi\xi$ еволюта є $\eta = 0$, а ріжничкове рівнаннє евольвенти є:

$$y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = 0$$

або:

$$yy'' + 1 + y'^2 = 0. \qquad 10)$$

Через зріжничкованє дістанемо:

$$3y'y'' + yy''' = 0,$$

т. є.

$$\frac{3y'}{y} + \frac{y'''}{y''} = 0.$$

З відси слідує:

$$3\,log\,y + log\,y'' = log\,c_1 \qquad 11)$$

або:

$$y^3 y'' = c_1.$$

А що після 10)

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}, \text{ то:}$$

$$y^2(1 + y'^2) = -c_1$$

або:

$$(y\,y')^2 = -(y^2 + c_1)$$

$$y\,y' = \pm\, i\sqrt{y^2 + c_1}.$$

Покладім: $y^2 + c_1 = t^2$, $y = \pm\sqrt{t^2 - c_1}$, $y' = \pm\dfrac{t\dfrac{dt}{dx}}{\sqrt{t^2 - c_1}}$,

то дістанемо:

$$y\,y' = t\frac{dt}{dx} \quad \text{або:}$$

$$\pm\, i\,t = t\frac{dt}{dx}, \quad \text{т. є.} \quad \frac{dt}{dx} = \pm\, i$$

$$t = \pm\, ix + c_2,$$

отже:

$$y = \pm\sqrt{(c_2 \pm i\,x)^2 - c_1}$$

а звідси:

$$x^2 + y^2 \mp 2c_2\,i\,x = c_2{}^2 - c_1.$$

Се є жмут мнимих колес. Щоби они були дійсні, мусіло би бути $c_2 = 0$. Тоді однак:

$$x^2 + y^2 = -c_1.$$

Се є також мниме коло, бо c_1 не може бути відємне, так як тоді в рівнанню 11) $log\,c_1$ бувби числом мнимим. c_1 не може бути й 0 ($x^2 + y^2 = 0$ — початок сорядних), бо тоді

$$log\,c_1 = -\infty.$$

II.

Приймім тепер, що еволюта є гіперболею о рівнанню, віднесенім до асимптот, т. є.:

$$\xi\eta = c.$$

Тоді з рівнання 2) слідуєть:

$$\left[x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right]\left[y + \frac{1}{y''}(1+y'^2)\right] = c$$

або:

$$x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) = \frac{c\,y''}{1+y'^2+y\,y''}.$$

Через зріжничкованє дістанемо:

$$1 - \frac{y''(y''+3y'^2y'') - y'''(1+y'^2)y'}{y''^2} = \frac{cy'''(1+y'^2+y\,y'') - c\,y''(3y'y''+y\,y''')}{(1+y'^2+y\,y'')^2}$$

або по упорядкованню:

$$\frac{y'''y'(1+y'^2)}{y''^2} - 3y'^2 - \frac{c\,y'''(1+y'^2)}{(1+y'^2+y\,y'')^2} = -\frac{3c\,y'y''^2}{(1+y'^2+y\,y'')^2}$$

с. є.:

$$y'''(1+y'^2)\left[\frac{y'}{y''^2} - \frac{c}{(1+y'^2+y\,y'')^2}\right] = 3y'\left[y' - \frac{c\,y''^2}{(1+y'^2+y\,y'')^2}\right]$$

або:

$$y'''(1+y'^2)\left[\frac{y'}{y''^2} - \frac{c}{(1+y'^2+y\,y'')^2}\right] = 3y'y''^2\left[\frac{y'}{y''^2} - \frac{c}{(1+y'^2+y\,y'')^2}\right].$$

Звідси дістанемо два ріжничкові рівнання:

$$y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0 \qquad 12)$$

с. є.:

$$3y'y''^2 = y'''(1+y'^2)$$

і:

$$\frac{y'}{y''^2} = \frac{c}{(1+y'^2+y\,y'')^2} \qquad 13)$$

Рівнаннє 12) є вже нам звісне; оно дає жмут ∞^2 евольвент, що є колами.

Розслідім тепер рівнаннє 13); напишім єго в виді:

$$y' = \frac{c\,y''^2}{(1+y\,y''+y'^2)^2}.$$

А що:

$$(1 + y y'' + y'^2) = \frac{d}{dx}(x + y y'),$$

то дістанемо:

$$\left[\frac{d}{dx}(x + y y')\right]^2 = \frac{c y''^2}{y'}$$

або:

$$\frac{d}{dx}(x + y y') = \frac{a y''}{\sqrt{y'}} \qquad 14)$$

де:

$$a = \pm \sqrt{c}.$$

А що:

$$\frac{y''}{\sqrt{y'}} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{y'}),$$

то дістанемо:

$$\frac{d}{dx}(x + y y') = a \frac{d}{dx}(2\sqrt{y'}),$$

а по зінтеґрованю:

$$x + y y' = 2 a \sqrt{y'} + b \qquad 15)$$

де b є постійна інтеґрації.

Щоби розвязати рівнаннє 15), напишім єго в формі:

$$y = -\frac{x}{y'} + \left(\frac{b}{y'} + \frac{2a}{\sqrt{y'}}\right) = -\frac{x}{p} + \left(\frac{b}{p} + \frac{2a}{\sqrt{p}}\right),$$

де:

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Положім: $-\frac{1}{p} = \varphi(p), \quad \frac{b}{p} + \frac{2a}{\sqrt{p}} = \psi(p),$

то рівнаннє 15) прийме вид:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \qquad 16)$$

Є се ріжничкове рівнаннє Lagrange'a.

Зріжничкуймо єго що до x, то дістанемо:

$$p = \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}.$$

Звідси:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p) \,.\, x}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

А що:
$$\varphi'(p) = p^{-2}, \quad \psi'(p) = -bp^{-2} - ap^{-\frac{3}{2}},$$
$$p - \varphi(p) = p + \frac{1}{p} = \frac{p^2+1}{p},$$
то дістанемо:
$$\frac{dx}{dp} = \frac{px}{p^2(p^2+1)} - \frac{p}{p^2+1}\left(\frac{b}{p^2} + \frac{a}{p^{3/2}}\right)$$
або:
$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p(p^2+1)} - \frac{b+ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}$$
т. є.:
$$\frac{dx}{dp} = I(p).x + Z(p), \qquad 17)$$
де:
$$I(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}, \quad Z(p) = -\frac{b+ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}.$$

Рівнання 17) є рівнання лінійного типу, отже після форми **Euler'а** його інтеґрал має вид:
$$x = Ce^{-\int I(p)dp} - e^{-\int I(p)dp}\int Z(p)e^{\int I(p)dp}dp, \qquad 18)$$
де C є постійна інтеґрованя.

Інтеґрал:
$$\int I(p)dp = \int\frac{dp}{p(p^2+1)} = \int\frac{dp}{p} - \int\frac{p\,dp}{p^2+1} =$$
$$= log\, c_1 + log\, p - \frac{1}{2}log(p^2+1) = log\frac{c_1 p}{\sqrt{(p^2+1)}}$$
(c_1 постійна інтеґрованя); в виду того:
$$e^{-\int I(p)dp} = \frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p}.$$

Інтеґрал:
$$\int Z(p)e^{\int I(p)dp}dp = -\int\frac{b+ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}\,\frac{c_1 p}{\sqrt{p^2+1}}\,dp =$$
$$= -c_1\int\frac{b+ap^{\frac{1}{2}}}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}\,dp =$$

$$= - bc_1 \int \frac{dp}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}} - ac_1 \int \frac{p^{\frac{1}{2}} dp}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}.$$

Інтеґрал:

$$I_1 = \int \frac{dp}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}$$ перейде через субституцію:

$$p = tg\varphi, \quad dp = \frac{d\varphi}{cos^2 \varphi}, \quad p^2 + 1 = sec^2 \varphi = \frac{1}{cos^2 \varphi}$$

на інтеґрал:

$$I_1 = \int cos\,\varphi\, d\varphi = sin\,\varphi + c_2 = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} + c_2 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + c_2.$$

Інтеґрал:

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{p}\, dp}{\sqrt{(p^2+1)^3}} = \int p^{\frac{1}{2}} (1+p^2)^{-\frac{3}{2}} dp$$

переходить через підставлене $p = q^2$ на інтеґрал:

$$I_2 = 2 \int q^2 (1+q^4)^{-\frac{3}{2}} dq.$$

Є се біноміяльний інтеґрал Eulera.

А що ані сума виложників: $\frac{m+1}{n}$, ані $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$, де $m = 2$, $n = 4$, $\frac{p}{q} = -\frac{3}{2}$, не є числом цілим, тому після дослідів Чебишева не можна звести сего інтеґрала до вимірної форми.

Щоби розслідити характер сего інтеґрала, вставмо: $p = tg\varphi$, $dp = \frac{d\varphi}{cos^2\varphi}$, тоді:

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{tg\,\varphi}}{sec^3\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \int (sin\,\varphi\, cos\,\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{sin\, 2\varphi}\, d\varphi.$$

А коли вставимо: $sin\, 2\varphi = z$, дістанемо:

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{z}{1-z^2}} dz.$$

Підставмо тепер $z = \frac{1}{s}$, то в легкий спосіб дістанемо:

$$I_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{s^3-s}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{4s^3-4s}}.$$

Напишім I_2 в виді:

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{4s^3-g_2\,s-g_3}}$$

то бачимо, що I_3 є *еліптичним інтеґралом* третого рода в формі Weierstrass'a, де g_2 і g_3 є незмінниками функції $s=p(u)$. Притім $g_2=4$, $g_3=0$. А що:

$$g_2 = 2\left(e_1^2+e_2^2+e_3^2\right), \qquad g_3 = 4e_1\,e_2\,e_3,$$

де $$e_1 = p(\omega), \qquad e_2 = p(\omega+\omega'), \qquad e_3 = p(\omega')$$

(ω і ω' півперіоди функції p), то в виду сего:

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=2$$

$$e_1\,e_2\,e_3 = 0.$$

Приймім, що $e_3=0$, тоді: $e_2=\sqrt{2-e_1^2}$, а тоді модул Jacobi виносить:

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{\sqrt{2-e_1^2}}{e_1}.$$

і можна інтеґрал I_2 перемінити через відповідне перетворене на еліптичний інтеґрал Legendre'a або Jacobi. Се однак не входить в обсяг теперішних наших розслідів.

Так як:

$$s=\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin 2\varphi}=\frac{1}{2\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{1+tg^2\varphi}{2\,tg\varphi}=\frac{1+p^2}{2p},$$

то:

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1+p^2}{2p}\right).$$

В виду сего формула 18) прийме вид:

$$x = C\frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p} - \frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p}\left[-bc_1\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - bc_1c_2 + \frac{ac_1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1+p^2}{2p}\right)\right]$$

або:

$$x = \frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p}\left\{\frac{b\,c_1 p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ac_1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1+p^2}{2p}\right)+C_1\right\} \qquad 19)$$

де: $C_1 = C + b\,c_1\,c_2$.

Скомбінуймо сю форму з формулою 16), т. є.

$$y = -\frac{x}{p} + \frac{b}{p} + \frac{2a}{\sqrt{p}},$$

то з послїдного рівнання вийде:

$$p = \frac{2a^2 + (b-x)y \pm 2a\sqrt{a^2 + (b-x)y}}{y^2},$$

а коли се вставимо в рівнаннє 19), дістанемо на рівнаннє евольвенти загальну форму:

$$G(x, y, b, c, C_1) = 0. \qquad 20)$$

Се є жмут ∞^3 евольвент для гіперболї $\xi\eta = c$. Як з повисших розслїдів видно, є се переступні криві з огляду на еліптичний інтеґрал.

Очивидно для иньших кривих вийдуть ріжничкові рівнання евольвент єще більше скомплїковані, а їх розвязка буде взагалї дуже тяжка до переведення.

III.

Возьмім загальне рівнаннє еволюти у видї:

$$\eta = \Phi(\xi),$$

де:

$$\eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2), \quad \xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2),$$

тодї ріжничкове рівнаннє евольвенти є:

$$y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = \Phi\left[x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)\right].$$

Зріжничкуймо се рівнаннє, то дістанемо:

$$y' + \frac{2y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)}{y''^2} =$$

$$= \Phi'\left[x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right].\left\{1 - \frac{y''^2(1+y'^2) + 2y'^2y''^2 - y'''y'(1+y'^2)}{y''^2}\right\},$$

або по впорядкованню:

$$3y'y''^2 - y'''(1+y'^2) = -\Phi'\left[x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right].y'\{3y'y''^2 - y'''y'(1+y'^2)\}.$$

З відси слїдує, що дістанемо слїдуючі ріжничкові рівнання евольвент:

$$3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2) \qquad 1)$$

$$\Phi'\left[x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)\right] y' = -1 \qquad 2)$$

Друге рівнаннє є характеристичне для даної кривої $\eta = \Phi(\xi)$, перше для всіх кривих.

Перше рівнаннє, написане в виді:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3y'y''}{1 + y'^2}$$

є вже нам звісне зі ст. 66 і воно висловлює слідуюче твердженнє:

До кождої еволюти належать два жмути евольвент, оден жмут спеціяльний для кождої кривої, другий жмут колес, зн. між всіми евольвентами якоїнебудь кривої лінії находить ся все жмут колес, той сам для всіх кривих.

Львів, в січни 1922.

Resumé

In dieser Abhandlung behandle ich einige Fälle der Lösung der Differentialgleichung einer Evolvente.

I. Ist die Evolute eine Gerade, dann bilden die Evolventen entweder eine Schar der parallelen Geraden oder eine Kreiseschar. Die zur xx-Achse gehörigen Evolventen bilden eine Schar der imaginären Kreise.

II. Ist die Evolute eine Hyperbel von der Form $xy = c$, dann bekommen wir zwei Evolventenscharen; eine bildet eine Kreiseschar, die zweite ist durch die Differentialgleichung:

$$x + yy' = 2a\sqrt{y'} + b$$

($a = \pm\sqrt{c}$, b eine Constante) charakterisiert. Die obige Differentialgleichung ist eine Gleichung Lagrange'schen-typus und lässt sich in die Euler'sche Formel:

$$x = Ce^{-\int I(p)\,dp} - e^{-\int I(p)\,dp} \int Z(p)\, e^{\int I(p)\,dp}\, dp$$

überführen, wobei:

$$I(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}, \quad Z(p) = -\frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}, \quad p = y'$$

bedeuten.

Da das Integral

$$\int Z(p)\, e^{\int I(p)\,dp}\, dp = -\frac{bc_1 p}{\sqrt{1+p^2}} - bc_1 c_2 + \frac{ac_1}{\sqrt{2}} \int \frac{ds}{s\sqrt{4s^3 - 4s}}$$

(c_1 c_2 constante Grössen) gleich ist, wobei $s = p(u)$ (Weierstrassche Funktion) bedeutet, also elliptische Transzendenten enthält, so bekommt man für zweite Evolventenschar einer Hyperbel eine Schar von transzendenten Kurven, die der Gleichung:

$$G(x\,y\,b\,c_1\,C_1) = 0$$

(c_1 C_1 constant) Genüge leisten.

III. Lehrsatz: Jede zur beliebigen Evolute gehörige Evolventenschar besteht im allgemeinen aus zwei Scharen, u. zw. einer speziellen Kurvenschar, die für gegebene Evolute charakteristisch ist, und einer allgemeinen Kreiseschar, die für alle Evoluten dieselbe ist.

Діяда як споріднена трансформація.

Написав

Никифор Садовський.

(Dyade als affine Transformation aufgefasst von Nikefor Sadowśkyj.)

---

§. 1.

Чому вводимо діяди?

Аналіза векторів є збудована на 3 дефініціях, які є в тісній звязи з трома основними понятями механіки: з рівнобіжником сили, працею і моментом.

Нехай будуть вектори $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ виражені через три основні напрямні дійсні одиниці $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, здовж осей *xx, yy, zz,* іменно:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k} \\ \mathfrak{b} &= b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k} \end{aligned}$$

то висше помічені дефініції виражаються аналітично в слідуючий спосіб:

$$\text{I.}\quad (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}) + (b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}) = \\ = (a_x + b_x)\mathfrak{i} + (a_y + b_y)\mathfrak{j} + (a_z + b_z)\mathfrak{k}$$

т. є дефініція додавання векторів.

$$\text{II.}\quad (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\,(b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}) = \\ = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

деф. скалярного множення і

$$\text{III.}\quad [a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}]\,[b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}] = \\ = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Сі три ділання назначуємо в механіці коротко символами, пр.

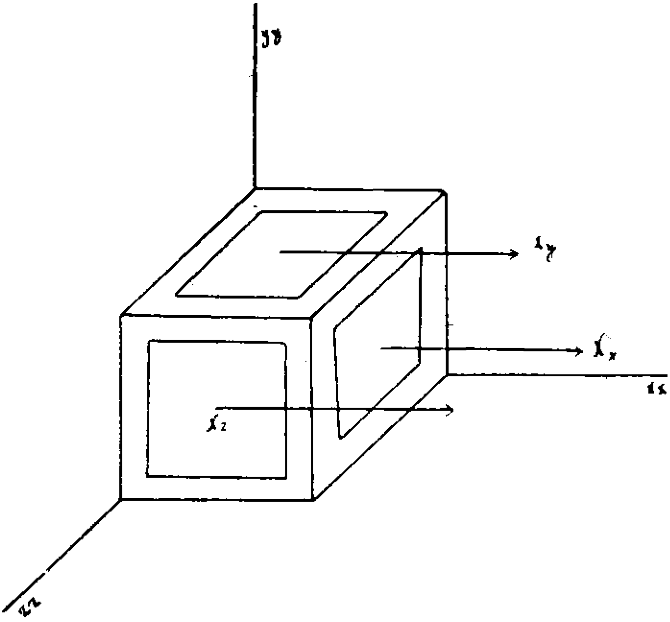
$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$$
$$L = \mathfrak{P}\ \sigma$$
$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\ \ \mathfrak{P}]$$

Аналіза векторів вистарчає вповні до математичного трактовання механіки точки і механіки штивних системів, но вона заводить при механіці упругих тіл. До сего потребуємо нового ґеометричного твору, а таким є діяда.

§. 2.

Діяда упругости.

Щоби подати дефініцію діяди, вийдім від приміру. Подумаймо собі куб, вирізаний з тіла, яке дається деформувати, причіплений трома стінами до трох площ основних першого октанта.



Фіґ. 1.

Щоби куб, вирізаний зі здеформованого тіла, був в рівновазі, мусимо його внутрішні напруження в напрямі xx зрівноважити трома зовнішними тягненнями, іменно нормальним тягненням X_x і двома стичними X_y і X_z (напруги). Подібну трійку дістаєм для двох прочих напрямів. В цілости дістаєм 9 величин, які опреділяють стан напруження в кубі. Сей комплекс пишемо подібно як детермінанти (визначники), но для відріжнення будемо давати вигнуті скобки місто двох рівнобіжних черток:

$$\begin{Bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{Bmatrix}$$

і називаємо його діядою напруження.

Коли тягнення підлягають трьом умовам т. зв. симетрії, т. є:

$$X_y = Y_x$$

і циклічно $Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z$

іншими словами, коли спряжені стинаючі є рівні, то діяда деґенерується в тензор напруження, колиж в кінци всі стинаючі тягнення є рівні зеро, то з діяди остає лиш головна перекутня

$$\begin{Bmatrix} X_x, & 0, & 0 \\ 0, & Y_y, & 0 \\ 0, & 0, & Z_z \end{Bmatrix}$$

і ми приходимо до вектора з його трьома складовими.

Таке деґенерування висших форм на низші стрічаємо і в детермінантах пр.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Операції діядами є зовсім відмінні від операцій детермінантами. Як оперується сею новою ґеометричною величиною, покажемо в слідуючих розділах. На разі позволимо собі діяду докладно спрецизувати і зробимо се при помочи споріденої (affine) трансформації.

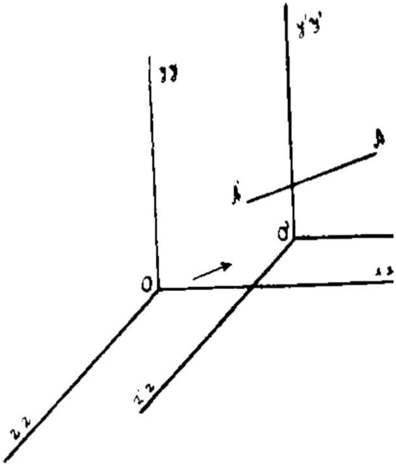
§. 3.

Споріднені трансформації та їх відношення до діяд.

В механіці і в теоретичній фізиці даються часто найдені права вбрати в лекшу і до дальших розслідів приступнійшу форму, коли місто первісних сорядних введемо нові, звязані функційно з первісними. Введення нових сорядних відбувається при помочи так званих трансформаційних рівнань.

Найпростійшою є трансформація споріднена (affine). Її можна зложити з чотирох основних трансформацій: з рівнобіжного пересунення, скручення, зміни поділки і з інверзії.

1) *Рівнобіжне пересунення.*



Фіг. 2.

Коли маємо два уклади сорядних, яких оси е рівнобіжні, і які через пересунення оо' дадуться накрити, то говоримо о рівнобіжнім пересуненню. Пересунення се виражаємо аналітична трома рівнанями:

Л*

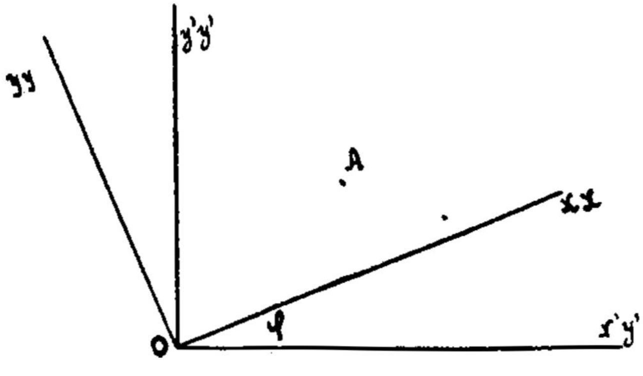
(P) $x^4 = x + a$

$y'_4 = y + Ь$

$г = 25 + с$

При тім відріжняемо активну і пасивну трансформацію. Возьмім точку ***A***, яка в системі О мав сорядні ***(x y*** з), а в системі О^i сорядні («' $у^4$ г'), то трансформацію можемо ионимати в сей спосіб, що точка ***A*** пересунулася і зайняла нове місце ***A***^{4} і се є активна трансформація; або що точка ***A*** лишила ся непорушно, а уклад пересунувся в нове положення О' і се є пасивна трансформація. Розуміється, що точка, а ^ другім случаю уклад, пересуваються рівнобіжно, лише в противнім змислі.

2) *Скручення системи.*



Фіг. 3.

В площі на скручення системи осий дає нам аналітична ґеометрія слідуючі рівнання:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$
$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

або загальнійше

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1$$
$$y' = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2$$

з услівями ортоґональности:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 = 1$$
$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 = 1 \qquad \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos_2 = 0.$$

Подібні формули дістаємо і для простору. Назвім $\cos \alpha_1 = a_1$ $\cos \beta_1 = b_1$ і т. д., то система для скручень буде

$$(D) \qquad \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

зі 6 услівями ортоґональности:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \text{ і т. д.}$$

Легко можемо переконатися, що субституції (P) і (D) не зміняють довжини. Відтинок $a = 5$ *cm* через ті субституції зміняє лише своє положення.

3) *Зміна поділки.*

Ту трансформацію характеризують 3 рівнання:

$$(M) \qquad \begin{aligned} x' &= \lambda x \\ y' &= \mu y \\ z' &= \nu z \end{aligned}$$

при чім λ μ ν є додатні числа ріжні від 1.

Ся трансформація, активно взята, означає зміну довжини відтинка і скручення його. В случаю $\lambda = \mu = \nu$ дістаємо фіґури подібні збільшені або зменшені в зависимости від λ і то без скручення.

Примір:

$$(M) \qquad \begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= 3y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Точка A (2, 1, 0) переходить в положення A' (4, 3, 0)

куля $$x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$$

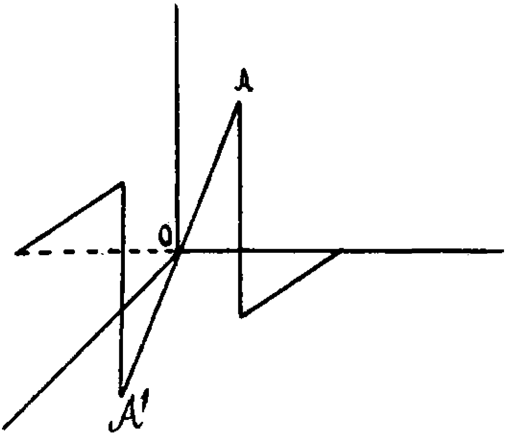
переходить в еліпсу

$$\left(\frac{x'}{12}\right)^2 + \left(\frac{y'}{18}\right)^2 + \left(\frac{z}{6}\right)^2 = 1$$

Трансформація взята пасивно означає зміну одиниць на осях укладу.

Для $\lambda = \mu = \nu = 1$ називаємо єї трасформацією ідентичности. Фіґура в (xyz) є пристайна до фіґури в $(x'y'z')$.

4. *Інверзія.*



Фіґ. 4.

Возьмім під увагу случай $\lambda = \mu = \nu = -1$, то легко переконатися, що та трансформація, взята активно, означає відзорованнє в початку укладу, а фіґури, що повстають через ту трансформацію т. з. інверзію, є центрально-симетричні.

Беручи пасивно, дістаєм заміну додатних осий (xyz) на відємні:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

Кожда з тих основних трансформацій є лінійною трансформацією сорядних. В наслідок сего можемо їх написати в загальнім виді:

$$(A) \qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned}$$

Легко переконатися, що система (А) має в собі всі чотири висше наведені трансформації.

Тому можемо сю споріднену трансформацію написати в виді:

$$(A) \equiv (FDMI).$$

Фіґури, що їх дістаємо через субституцію (A), називаємо ґеометрично спорідненими.

Подумаймо собі, що $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ є постійно зеро, або що на одно виходить, що виключаємо рівнобіжне пересунення, тоді 3 прочі дають нам 9 характеристичних сочинників від себе независимих, подібно як се ми мали при напруженню. Сей комплекс будемо називати діядою і будемо писати символічно: діяда $\Phi = (DMI) = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\}$

Значіння сего символа є однозначно усталене системою рівнань

$$(D,\ M,\ I) \qquad \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

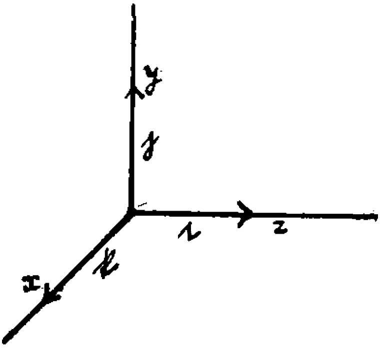
Ми понимали до сеї пори (A) як трансформацію точки, через яку точка A переходить в точку A'. Коли получимо точки A і A' з початком укладу O, то дістанемо два місцеві вектори

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{r} \quad \text{і} \quad \overrightarrow{OA'} = \mathfrak{r}'$$

Щоби дістати рівнання трансформаційні для місцевих векторів, множимо 3 рівнання трансформаційні по черзі через напрямні одиниці $\mathfrak{i}$ $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{k}$ і додаємо сторонами.

1) Для рівнобіжного пересунення

$$\begin{array}{l|l} x' = x + a_x & \mathfrak{i} \\ y' = y + a_y & \mathfrak{j} \\ z' = z + a_z & \mathfrak{k} \end{array}$$



Фіг. 5.

$$(x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k}) = (x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) + (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}).$$

Вираження по лівій стороні є місцевим вектором

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{r}'$$

подібно по правій

$$(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) = \overrightarrow{OA} = \mathfrak{r}$$

Вектор третий називаєся вектором рівнобіжного пересунення $\mathfrak{a}$.

Тимсамим рівнання рівнобіжного пересунення приймають вид

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$$

2) При скрученню, поступаючи подібно, дістаєм рівнання

$$x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k} = (a_1x + b_1y + c_1z)\mathfrak{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\mathfrak{j} + $$
$$+ (a_3x + b_3y + c_3z)\mathfrak{k}$$

Се рівнання заступаємо слідуючим

$$\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, \mathfrak{r}$$

при чім операцію опреділену сим рівнанням будемо називати множенням діяди. Діяда Φ означує ту сукупність 9 вечичин

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\},$$

звязаних зі собою умовами ортоґональности. Таку діяду будемо називали „чистою діядою скручення“.

3) При зміні поділки редукується діяда до 3 членів головної перекутні

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{matrix}\right\}$$

Для приміру нехай буде $\Phi = \left\{\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$

і $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$, то ділаючи діядою на $\mathfrak{r}$ дістаєм

$$\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, \mathfrak{r}$$

або виразно:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}' = {} & (3\,.\,2 + 0(-1) + 0\,.\,3)\mathfrak{i} + \\ + {} & (0\,.\,2 + 2(-1) + 0\,.\,3)\mathfrak{j} + \\ + {} & (0\,.\,2 + 0(-1) + 1\,.\,3)\mathfrak{k} \\ = {} & 6\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k} \end{aligned}$$

Для $\lambda = \mu = \nu$ дістаємо діяду подібности

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}\right\}$$

при чім $\lambda = 1$. В случаю $\lambda = 1$ дістаєм діяду ідентичности.

$$\Phi = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} = I$$

Отже $\qquad \mathfrak{r}' = I\,.\,\mathfrak{r} = \mathfrak{r},$

значить маємо можність, там де сего вимагає потреба, представити кождий вектор в формі діяди. Простий рахунок показує, що діяда подібности дається виразити через діяду ідентичности:

$$\Phi = \lambda \,.\, I.$$

4) Рівнож і діяда інверзії є діядою ідентичности зі знаком мінус

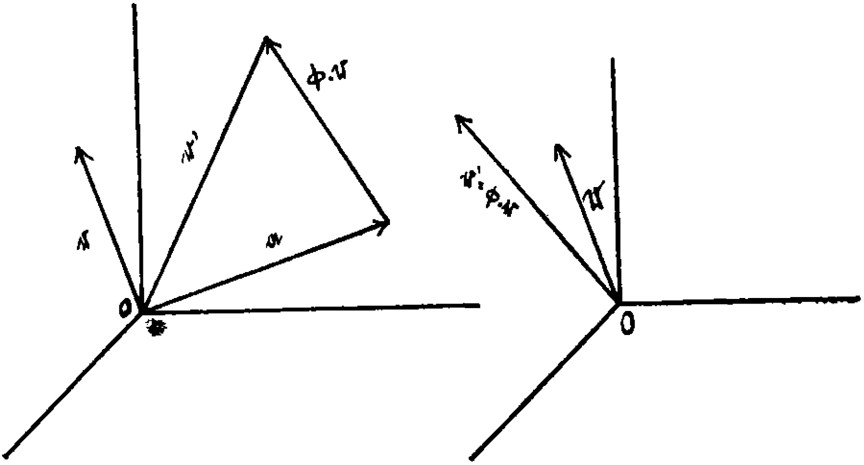
$$\Phi = \left\{ \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\}$$

Перейдім тепер до загального случаю. Помножім рівнання трансформації (A) по черзі через $\mathfrak{i}$ $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{k}$ і додаймо, то дістанемо

$$\mathfrak{r}' = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\} . \, \mathfrak{r} + (d_1\mathfrak{i} + d_2\mathfrak{j} + d_3\mathfrak{k})$$

або

$$\mathfrak{r}' = \Phi \quad \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$$



Фіг. 6.

Коли $\mathfrak{a} = 0$ (отже без пересунення), тоді

$$\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, \mathfrak{r}.$$

В сей спосіб ми прийшли до однозначного окреслення діяди як спорідненої трансформації без пересунення.

§. 4.

Значіння діяди в ряді Taylor'a.

Нехай буде дана довільна трансформація (лінійна або висше чим лінійна).

$$(T) \qquad \begin{aligned} x' &= \varphi(xyz) \\ y' &= \chi(xyz) \\ z' &= \psi(xyz). \end{aligned}$$

Точці A відповідає переміщена точка A'. Рівночасно переходить точка сусідна B $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ в точку

$$B' \ (x' + dx',\ y' + dy',\ z' + dz').$$

Поставмо собі задачу подати трансформацію елементарного вектора

$$d\mathfrak{r}' = f(d\mathfrak{r}).$$

В тій цілі розвиваємо рівнання (T) в ряд Taylor'a, при чім обмежуємося до нескінчених першого ряду

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \,.\, dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \,.\, dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \,.\, dz \\ dy' &= \frac{\partial\chi}{\partial x} \,.\, dx + \frac{\partial\chi}{\partial y} \,.\, dy + \frac{\partial\chi}{\partial z} \,.\, dz \\ dz' &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \,.\, dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} \,.\, dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} \,.\, dz \end{aligned}$$

Щоби ті рівнання подати в формі векторовій, поступаємо як при спорідненій трансформації. В тій цілі творимо із сочинників при

$$dx,\ dy,\ dz$$

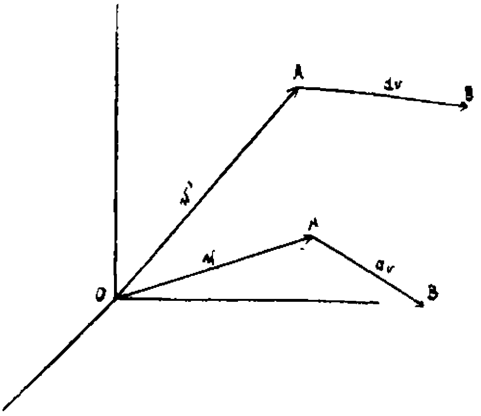
діяду

$$\Phi = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial\chi}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{matrix} \right\}$$

і дістаємо

$$d\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, d\mathfrak{r}$$

В спеціяльнім случаю, коли частні похідні є постійними числами, дістаємо звісну нам діяду спорідненої трансформації.



Фіґ. 7.

Вправи.

1) Як трансформує діяда $\Phi = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$ вектор $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$.

2) То само для

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \text{ і } \mathfrak{r} = z\mathfrak{i}$$

3) То само для

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \text{ і } \mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$$

(чистий оборот в площі (xy').

4) То само для

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \text{ для } \mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}.$$

5) Вправу 3. і 4. розвязати для $\alpha = 30^\circ$ і 90°.

6) Задачу 5. розвязати ґрафічно.

7) Коли вісь zz лишаємо незмінну, то є $z' = z$, тоді трансформація відбувається в площі (xy). Рівнянням трансформаційним відповідає діяда

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Діяда ся має 9 елементів і називаєся простірною або третого ряду. Колиж відкинемо третє рівнання, то дістанемо діяду поверхневу або другого ряду:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Bmatrix}$$

Задача: Розслідити, як зміняють ся місцеві вектори

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$$

піддані діланню діяди

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{Bmatrix}$$

8) Найти діяду 2 ряду, яка місцевий вектор $\mathfrak{r}$ обертає о кут 30° в відємнім напрямі не зміняючи його величини.

9) Вектор $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j}$ обернути в додатнім змислі в площі (xy) о 30° і збільшити в відношенню 3 : 1. Який вид має відповідна діяда?

§. 5.

Додавання діяд.

Свобідний вектор $\mathfrak{a}$ (що дається пересувати рівнобіжно) є однозначно опреділений своїми складовими a_x, a_y, a_z, тому можемо його уважати за злучення трох величин

$$\mathfrak{a} = (a_x \; a_y \; a_z)$$

В сій аналітичній методі дефініція додавання векторів має вид

$$(a_x \; a_y \; a_z) + (b_x \; b_y \; b_z) = (a_x + b_x, \; a_y + b_y, \; a_z + b_z).$$

Ту дефініцію додавання пошируємо на діяди, вважаючи їх злученням 9 величин, отже:

коли $\Phi_1 = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix}$ і $\Phi_2 = \begin{Bmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{Bmatrix}$

то

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = \begin{Bmatrix} a_1 + f_1, & b_1 + g_1, & c_1 + h_1 \\ a_2 + f_2, & b_2 + g_2, & c_2 + h_2 \\ a_3 + f_3, & b_3 + g_3, & c_3 = h_3 \end{Bmatrix}$$

Про ґеометричне значіння додавання діяд легко переконатися при спорідненій трансформації.

Рівнож легко виказати, що право переміни і злуки затримують своє значіння, що отже

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1$$

$$\Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3) = (\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3$$

Задачі:

1) Даний вектор $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ піддаємо по черзі ділланню діяд

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_1 + \Phi_2 \quad \text{і} \quad \Phi_2 + \Phi_1.$$

Як він зміняється, коли

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \left\{ \begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{matrix} \right\}?$$

2) Даний $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$

і діяди

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \right\} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \left\{ \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\}$$

Найти рахунком і рисунком

$$\Phi_1\mathfrak{r}, \quad \Phi_2\mathfrak{r}, \quad (\Phi_1 + \Phi_2)\mathfrak{r} \quad \text{і}$$
$$\Phi_1\mathfrak{r} + \Phi_2\mathfrak{r}.$$

3) Задачу 2. сформулувати для простору і розвязати.

§. 6.

Частні діяди.

I. *Спряжені діяди.*

Коли в даній діяді поміняємо стрічки з колюмнами (обернемо довкола головної перекутні), то дістаємо діяду *спряжену* Φ_c:

$$\Phi = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\} \qquad \Phi_c = \left\{ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\}$$

II. *Симетричні діяди або тензори.*

Коли $\Phi_c = \Phi$

то діяда називаеть ся *симетричною* або *тензором*,

і означується Φ_s

Жадання $\Phi_c = \Phi$

є рівноважне з трема умовами

$$a_2 = b_1 \qquad b_3 = c_2 \qquad c_1 = a_3$$

Діяда редукується до злучення 6 независимих величин

$$\Phi_s = \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\}$$

(гляди тензор напруження).

III. Коли $\Phi = -\Phi_c$, то діяда називається антісиметричною Φ_a. Рівнання услівне є рівнозначне з 6 слідуючими услівями:

$$a_1 = -a_1 \quad \text{або} \quad a_1 = 0$$

подібно $\quad b_2 = 0 \quad c_3 = 0$

дальше

$$a_2 = -b_1 \qquad b_3 = -c_2 \qquad c_1 = -a_3$$

отже

$$\Phi_a = \left\{ \begin{matrix} 0 & -b_1 & a_3 \\ b_1 & 0 & -c_2 \\ -a_3 & c_2 & 0 \end{matrix} \right\}$$

Діяда редукується до трох величин $b_1\ c_2\ a_3$, отже дається представити вектором.

Сі дефініції позваляють нам вивести три твердження для діяд:

1) $\qquad \Phi = \Phi_s + \Phi_a$

2) $\qquad \Phi_s = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)$

3) $\qquad \Phi_a = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c).$

§. 7.

Тензоровий добуток.

В теоретичній фізиці стрічаємо часто трансформацію, яка в виді діяд є

$$\Phi = \left\{ \begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_1 \end{matrix} \right\}$$

Ту діяду можемо вважати повсталою з двох векторів:

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}$$

що є характеристичні для даної трансформації. Саму діяду дістанемо, коли складові векторів помножимо через себе при захованню певного порядку (як се маємо в методі кватерніонів Hamilton'а).

Щоби сей добуток відріжнити від скалярного $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ і векторового $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, аналіза векторів означує подвійними скобками

$$[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]$$

і називає тензоровим добутком (Laue: Relativitätsprinzip, 1913). Як бачимо відповідна діяда є тензором.

§. 8.

Множення діяд.

Ми бачили, що добуток діяди і місцевого вектора є новим місцевим вектором $\mathfrak{r}$, який повстає з першого через споріднену трансформацію без пересунення

$$\mathfrak{r}' = \Phi_1\ \mathfrak{r}$$

Колиж сей новий вектор помножимо через другу діяду Φ_2, дістаєм

$$\mathfrak{r}'' = \Phi_2\ \Phi_1 . \mathfrak{r};$$

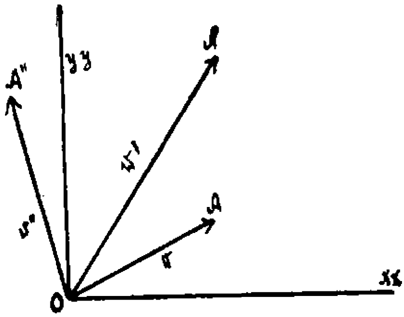
ту трансформацію місцевого вектора означуємо

$$\Phi_3 = \Phi_2 . \Phi_1$$

і називаємо множенням діяд.

З сеї дефініції слідують вже всі свійства сеї операції.

Як виглядає се множення в практиці, покажемо, для улекшення, на діядах другого ряду. — Діяда Φ_1 є рівнозначна з підставленням:



Фіґ. 8.

$$(a)\quad \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y \\ y' &= a_2 x + b_2 y \end{aligned}$$

і трансформує точку A в A', а діяда Φ_2 рівнозначна з підставленням:

$$(b)\quad \begin{aligned} x'' &= p_1 x' + q_1 y' \\ y'' &= p_2 x' + q_2 y' \end{aligned}$$

і трансформує точку A' в A''.

Щоби дістати трансформацію точки A прямо в A'', мусимо рівнання (a) підставити в (b) і дістаєм:

$$\begin{aligned} x'' &= (p_1 a_1 + q_1 a_2)x + (p_1 b_1 + q_1 b_2)y \\ y'' &= (p_2 a_1 + q_2 a_2)x + (p_2 b_1 + q_2 b_2)y \end{aligned}$$

З сего бачимо, що

$$\begin{Bmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 a_1 + q_1 a_2, & p_1 b_1 + q_1 b_2 \\ p_2 a_1 + q_2 a_2, & p_2 b_1 + q_2 b_2 \end{Bmatrix}$$

або коротше

$$\Phi_2{}'.\,\Phi_1 = \Phi_3.$$

Поширення на 3 і більше число діяд як рівнож на просторні діяди не справляє трудности.

Задачі.

1) Дані діяди

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3}, & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, & \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{Bmatrix} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{Bmatrix},$$

як переміститъ ся вектор $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}$, коли на него ділають діяди

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_1 + \Phi_2,\ \Phi_1\ \ \Phi_2,\ \text{і}\ \Phi_2\,.\,\Phi_1.$$

2) Розслідити, чи до множення діяд відноситься право переміни і розлуки, і то окремо для площі, а окремо для простору.

3) Скрутови довкола оси zz о кут $\varkappa$ відповідає діяда

$$\Phi_\gamma = \begin{Bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

винайти $\qquad \Phi_\alpha$ і Φ_β

які обертають вектори довкола осий xx і yy о кут α і β.

4) Місцевий вектор $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ обертаємо о кути $\varkappa = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$ в додатнім змислі довкола 3 осий. Яке буде остаточне положеннє вектора $\mathfrak{r}$?

5) Утворити діяду $\Phi_{\alpha\beta\gamma} = \Phi_\alpha\,.\,\Phi_\beta\,.\,\Phi_\gamma$ і розслідити, чи є сповнені услівя ортоґональности. (Чи є чистий оборот?)

6) Вектор $\mathfrak{r} = 4\mathfrak{i}$ побільшити в відношенню $4:1$ і обернути довкола кождої оси о $+ 90^0$. Як буде лежати вектор? Подати вид відповідної діяди.

7) Як трансформує тензоровий добуток з векторів

$$\mathfrak{a} = -2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b} = -2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$$

місцевий вектор $\quad \mathfrak{r} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$.

8) Зі сили

$$\mathfrak{P} = 2kg\,\mathfrak{i} + 3kg\,\mathfrak{j} + 4kg\,\mathfrak{k}$$

і рамени

$$\mathfrak{r} = 3m\,\mathfrak{i} + 5m\,\mathfrak{j} + 2m\,\mathfrak{k}$$

дістаємо момент $\mathfrak{M}$ в виді векторового добутка

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{P}].$$

Який вид має антісиметрична діяда Φ_a, що помножена через $\mathfrak{r}$ дає той сам момент?

$$\mathfrak{M} = \Phi_a \,.\, \mathfrak{r}?$$

9) Як виглядає антісиметрична діяда Φ_a', що помножена вектором сили $\mathfrak{P}$ дає момент

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$$

в виді

$$\mathfrak{M} = \Phi_a' \,.\, \mathfrak{P}?$$

В який спосіб дістанемо з діяди Φ_a' вектор $\mathfrak{r}$ і на відворот?

NB. Послідні дві задачі позваляють нам векторовий добуток замінити операцією діядами. Се значить для діяди поширення її понятя в значінню фізикальнім. Она є тут вже чимсь більше, чим спорідненою трансформацією. В діяді міститься тут і зміна діменэії вектора.

§. 9.

Ділення векторів.

Ми шукали до сеї пори вектора $\mathfrak{b}$ з даних Φ і $\mathfrak{a}$, іменно

$$\mathfrak{b} = \Phi \,.\, \mathfrak{a}$$

Тепер ставимо собі відворотну задачу: з даних $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{a}$ найти діяду Φ. Ту задачу означуємо символічно

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \Phi$$

і називаємо сю операцію діленнєм векторів. Що сей проблєм є немало важний, показує теоретична фізика, де ми кожду напрямну величину $\mathfrak{b}$ можемо представити в виді

$$\mathfrak{b} = \Phi \,.\, \mathfrak{a}$$

наколи в розвиненню Taylor'а ограничимося до членів першого ряду; пр. ріжничка скорости

$$d\mathfrak{v} = \Phi \,.\, d\mathfrak{r},$$

ріжничка сили в ґравітацийнім поли

$$d\mathfrak{K} = \Phi_1 d\mathfrak{r} \qquad \text{і т. д.}$$

Щоби задачу рішити, введім деяке улекшення, яке не зміняє його загальности. Зорієнтуймо простір в сей спосіб, щоби його (xy) площа переходила через вектори $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$, при чім приймаємо, що оба вектори мають точку зачіплення в початку укладу.

Під сим заложеннєм трансформація дається зложити з чистого обороту

$$\Phi_{\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$$

і з діяди

$$\Phi_{\varkappa} = \left\{ \begin{matrix} \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa \end{matrix} \right\}$$

при чім

$$\varkappa = \frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|}$$

Діяда $\Phi_{\varkappa}$ дає зміну величин і дімензії вектора $\mathfrak{a}$.

В результаті дістаємо

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \Phi_{\varkappa} \,.\, \Phi_{\gamma}.$$

Пригадуємо, що ми рішили задачу через пасивну трансформацію: зорієнтовання простору і через активну $\Phi_{\varkappa} \,.\, \Phi_{\gamma}$ трансформацію вектора.

Задачі:

1) Вектор $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ переходить в вектор

$$\mathfrak{r}' = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}.$$

Як великий є оборот, довкола якої оси і в якій поділці?

2) Найти діяду обороту системи (xyz) для:

$$\alpha = \beta = \gamma = 120^{\circ}.$$

3) Вектор рамени $\mathfrak{r} = 2\,m\,\mathfrak{i}$ переходить в вектор моменту

$$\mathfrak{M} = {}'8\, mkg\, \mathfrak{k}$$

Яка є діяда?

§. 10.

Поля скалярні і векторові.

Коли до кождої точки простору належить точно означена величина, то маємо перед собою „поле“. Підпорядкована величина може бути скалярна пр. температура і тоді є скалярне поле. Колиж она є напрямна, то маємо векторове поле пр. поле маґнетне довкола маґнета.

Надто місцева функція може означати величину і якість фізикального стану і тоді говоримо про фізикальне поле, або може означати чисто ґеометричну величину і тоді говоримо про ґеометричне поле.

Щоби мож було розсліджувати поля, мусимо пізнати ріжничковання скалярних і векторових функцій, де рівночасно побачимо гарне примінення діяд.

§. 11.

Роля діяд в ріжничкованню.

А.

Стан на простій.

1) Нехай t означае час. Подумаймо собі одну точку на простій, в якій розсліджуемо величину скалярну змінну з часом пр.

$$\vartheta = k \, . \, e^{-\alpha t}$$

(охолоджування в даній точці).

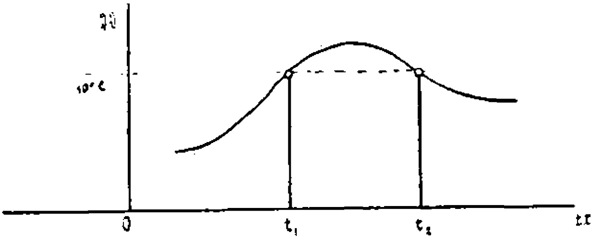
Загально:

$$a = \varphi(t)$$

Похідна, яку будемо означували

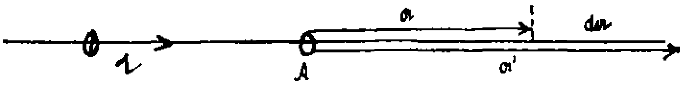
$$\frac{da}{dt} = \dot{a}$$

дае нам льокальну зміну скалярної величини



Фіґ. 9.

2) Нехай буде $\mathfrak{a} = \varphi(t)$і отже, напрямний стан в точці пр.



Фіґ. 10.

сила, що зміняеся в часі лише що до величини, значить зміняе ся лише

$$|\mathfrak{a}| = \varphi(t).$$

Функцію $\varphi(t)$ розвиваємо в ряд Taylor'a, задержуючи лише нескінчено малі першого ряду і множимо через і, то дістаєм

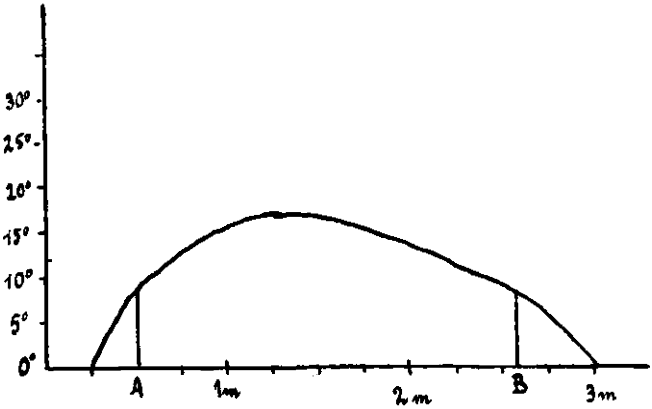
$$da = \varphi'(t)dt \, . \, \mathrm{i}$$

Звідти

$$\frac{da}{dt} = \varphi'(t) \, . \, \mathrm{i} = \dot{a}$$

дає нам льокальну зміну.

3) Возьмім під увагу скалярну функцію $a = \varphi(x)$, яка нам подає скалярний стан в данім моменті пр. розклад температури поміж вікном і дверми в хаті.



Фіг. 11.

Точки A і B є точками рівної температури (загально еквіпотенціяльними). Зміна стану є дана через приріст

$$da = \frac{d\varphi}{dx} \; dx$$

Введім символ $\dfrac{d}{dx} \, \mathrm{i} = \nabla$

(читай його „del") і назвім

$$dx \, \mathrm{i} = d\mathfrak{r}$$

тоді приріст висше наведений можемо написати в виді

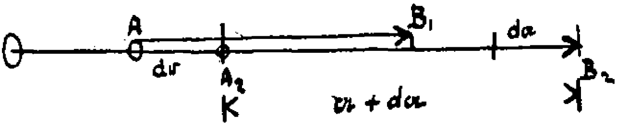
$$da = \nabla\varphi \, . \, d\mathfrak{r}$$

звідки

$$\frac{da}{d\mathfrak{r}} = \nabla\varphi$$

Величина $\nabla\varphi$ дає нам субстанціяльну зміну скалярної величини $\varphi(x)$ в напрямі $d\mathfrak{r}$.

4) Нехай $\mathfrak{a} = \varphi(x)\mathfrak{i}$ означає векторову величину, яка зміняється з місцем



Фіґ 12.

Зміні x о dx відповідає зміна вектора $\mathfrak{a}$ о $d\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a}.$$

Розвиваючи $\varphi(x)$ після Taylor'а дістаємо

$$d\mathfrak{a} = \frac{d\varphi}{dx} dx\mathfrak{i} = \frac{d\varphi}{dx} . d\mathfrak{r}$$

Вираження $\frac{d\varphi}{dx}$ будемо означували $\Phi^{\mathfrak{a}}$ і називали діядою першого ряду з $\mathfrak{a}$.

Отже $\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}} = \Phi^{\mathfrak{a}}$.

Діяда $\Phi^{\mathfrak{a}}$ подає нам субстанціяльну зміну вектора $\mathfrak{a}$ в напрямі $d\mathfrak{r}$. Означеннє се оправдається вже при діяді другого ряду.

5) Закладаємо, що рухаємося здовж xx зі скоростю $\mathfrak{v}$ і розсліджуємо стан, який стрічаємо в точках, через які переходимо. Коли сей стан є скалярний, тоді маємо

$$a = \varphi(x, t)$$

при чім x є також функція t.

Зміну стану a

$$da = \frac{\partial a}{\partial t} . dt + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt$$

можемо, приймаючи означення попередних случаїв, виразити рівнаннєм

$$da = \dot{a}\, dt + \nabla a . \mathfrak{v} . dt$$

звідки $\frac{da}{dt} = \dot{a} + \nabla a . \mathfrak{v}$.

6) Анальоґічний случай дістанемо для напрямного стану:

$$\mathfrak{a} = \varphi(x, t) . \mathfrak{i}$$

при чім $x = f(t)$
именно:

$$d\mathfrak{a} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} . dt . \mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \; \frac{dx}{dt} . dt . \mathfrak{i}$$

звідки

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \dot{\mathfrak{a}} + \Phi_{\mathfrak{a}} . \mathfrak{v}.$$

Порівнаймо результати в 5) і 6), то бачимо, що діяда в ріжничковім рахунку має таку саму ролю при векторах, як ∇ т. з. оператор Hamilton'а при скалярах. Обі величини характеризують субстанціяльну зміну і є звязані з $\mathfrak{v}$ т. є скоростю, з якою обсерватор рухається.

Б.

Стан на площі.

1) Коли стан в точці $P(x_0 y_0)$ є скалярний і залежить лише від часу

$$a = \varphi(t)$$

тоді льокальна зміна

$$\frac{da}{dt} = \dot{a}.$$

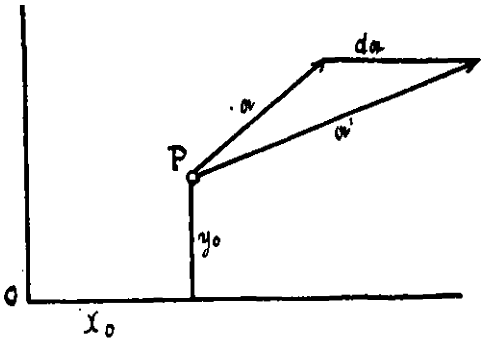
2) Подібно для вектора в точці $P(x_0 y_0)$ змінного з часом:

$$\mathfrak{a} = \varphi(t)\mathfrak{i} + \chi(t)\mathfrak{j};$$

зміна в одиниці часу

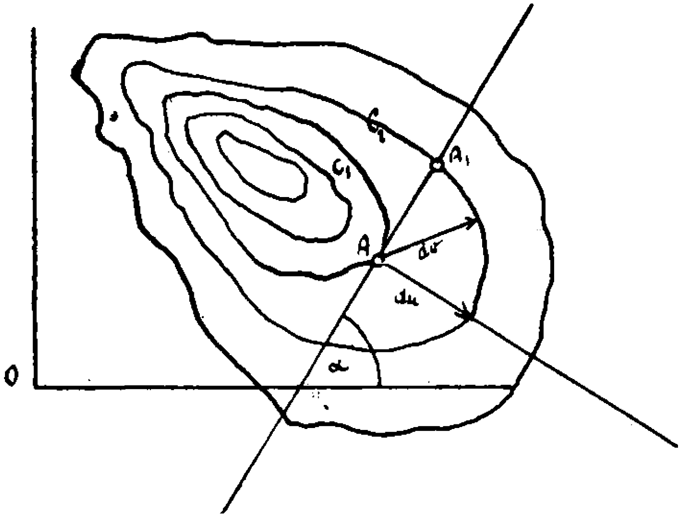
$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathfrak{i} + \frac{d\chi}{dt}\mathfrak{j} = \dot{\mathfrak{a}}$$

є льокальною зміною вектора $\mathfrak{a}$.



Фіг. 13.

3) Маємо скалярне поле $a = \varphi(xy)$ независиме від часу пр. $\vartheta = \varphi(xy)$ розклад температури на площі в певнім моменті. Крива $\varphi(xy) = \vartheta$, дає нам ізотерму. Коли a опреділяє нам потенціял, то криві C_1 C_2... називаємо еквіпотенціяльними.



Фіґ. 14.

Приріст $da = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy$

можемо уважати за добуток оператора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j}$$

з величини a і з місцевого вектора

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j},$$

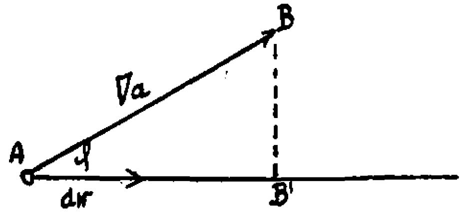
отже
$$da = \nabla a \,.\, d\mathfrak{r}.$$

Величина ∇a є зависима лише від поля і називається **ґрадєнтом**, а пишеться *grad a*.

На основі дефініції скалярного добутка

$$\begin{aligned} da &= \nabla a \; d\mathfrak{r} \\ &= |\nabla a|\,|d\mathfrak{r}|\cos\varphi \\ &= |\nabla a|\, dr \cos\varphi \end{aligned}$$

звідси
$$\frac{da}{dr} = |\nabla a| \cos\varphi$$



Фіґ. 15.

Щоби зазначити, що сей приріст відбувається в напрямі $d\mathfrak{r}$, множимо обі сторони через одиницю напрямну $\mathfrak{m}$.

Тимсамим дістаємо на правій стороні вектор

$$|\nabla a|\cos\varphi\,.\,\mathfrak{m}$$

який означуємо $\frac{da}{d\mathfrak{r}}$ і називаємо похідною скалярної величини зглядом вектора $d\mathfrak{r}$.

Величина сего вектора „спаду“ $\overrightarrow{AB'}$

$$\frac{da}{d\mathfrak{r}} = |\nabla a|\cos\varphi \quad \mathfrak{m}$$

зміняється враз з кутом φ. Для $\varphi = 0$ приймає максимальну вартість. Назвім приріст $d\mathfrak{r}$ в тім напрямі (який то напрям є рівночасно напрямом ґрадєнта $grad\ a = \nabla a$) через $d\mathfrak{n}$, то дістаємо

$$\frac{da}{d\mathfrak{n}} = grad\ a.$$

Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ є $\frac{da}{d\mathfrak{r}} = 0.$

Ті два напрями: зерового і максимального спаду відгривають в теоретичній фізиці велику ролю.

Возьмім під увагу довільну лінію

$$a = \varphi(xy) = const$$

то
$$da = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

звідки
$$tg\alpha = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}.$$

Рівночасно ґрадєнт

$$grad\ a = \nabla a = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathfrak{j}$$

має зглядом xx нахиленнє

$$tg\beta = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}, \text{ отже } = -\frac{1}{tg\alpha},$$

що значить, що ґрадєнти і еквіпотенціяли пересікаються під простим кутом.

4) Коли дане поле

$$\mathfrak{a} = \varphi(xy)\,\mathfrak{i} + \chi(xy)\,\mathfrak{j},$$

то приріст $d\mathfrak{a}$

$$d\mathfrak{a} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy\right)\mathfrak{j}$$

дається представити діядою другого ряду

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x} & \frac{\partial\chi}{\partial y} \end{Bmatrix},$$

іменно

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} \,.\, d\mathfrak{r},$$

при чім

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j}.$$

Коли напрямна одиниця є $\mathfrak{m}$, так що

$$d\mathfrak{r} = dr \,.\, \mathfrak{m},$$

тоді

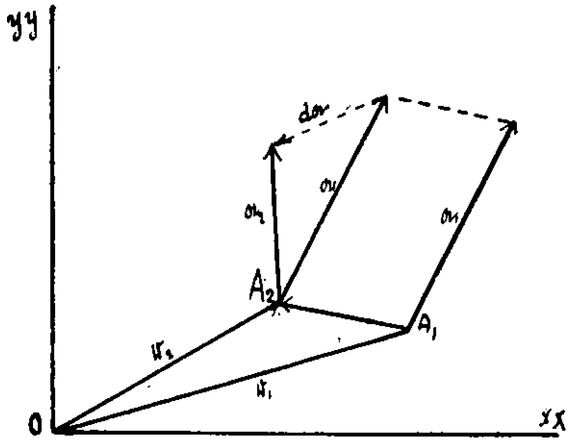
$$\frac{d\mathfrak{a}}{dr} = \Phi^{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{m}.$$

Сей вектор помножений через $\mathfrak{m}$ скалярно, дає нам скалярну величину, яку будемо називати $\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}}$.

Коли $$\mathfrak{m} = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\sin\alpha,$$

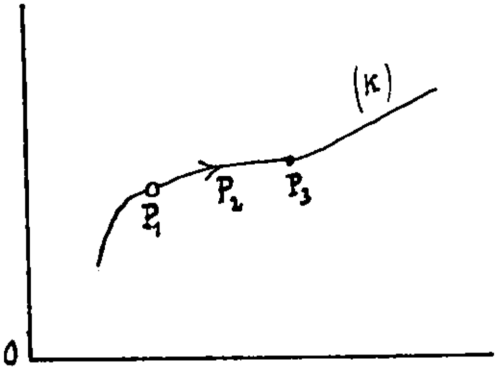
то

$$\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial\chi}{\partial y}\sin^2\alpha.$$



Фіґ. 16.

Сей скаляр дає нам безглядну вартість складового приросту вектора в напрямі $d\mathfrak{r}$.



Фіґ. 17.

5) Нехай буде дане скалярне поле

$$a = \varphi(xyt),$$

при чім

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\} (k)$$

то значить, що ми рухаємося по кривій (k) і розсліджуємо стан, який по дорозі стрічаємо. Приростови dt відповідає зміна

$$da = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

А, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathfrak{j} = \nabla a$$

$$\frac{dx}{dt}\,\mathfrak{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{v},$$

тому

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} + \nabla a \,.\, \mathfrak{v}.$$

6) Анальоґічно розумуючи дістаємо для векторового поля

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \dot{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{v}.$$

В.

Стан в просторі.

Розважання даються добре поширити на простір, при чім вираження

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{k} = \nabla$$

є властивим оператором Hamilton'а, а

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x} & \frac{\partial\chi}{\partial y} & \frac{\partial\chi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{array} \right\}$$

є діядою третого ряду.

Розуміється, що ∇a дістаємо при скалярнім поли $a = \varphi(xyz)$, а діяду при векторовім поли

$$\mathfrak{a} = \varphi(xyz)\,\mathfrak{i} + \chi(xyz)\,\mathfrak{j} + \psi(xyz)\,\mathfrak{k}.$$

В случаю, коли рухаємося по кривій в просторі

$$(k) \left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), \end{array} \right.$$

дістаємо

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} + \nabla a \,.\, \mathfrak{v}$$

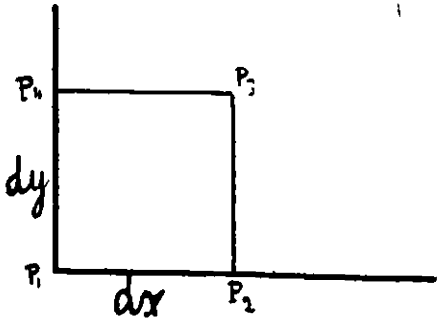
евентуально

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \dot{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{a}} \ \mathfrak{v},$$

де $\mathfrak{v}$ є скорість нашого руху.

§. 12.

Розложеннє діяди другого ряду.



Фіґ. 18.

Маємо дане векторове поле

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j}.$$

Коли сей вектор має в точці P_1 складові $(a_x\, a_y)$, то сусідні точки мають сорядні

$$(P_2) \qquad \mathfrak{a}_2 = \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} dx,\ a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} dx\right)$$

$$(P_3) \qquad \mathfrak{a}_3 = \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} dx + \frac{\partial a_x}{\partial y} dy,\ a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} dx + \frac{\partial a_y}{\partial y} dy\right)$$

$$(P_4) \qquad \mathfrak{a}_4 = \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} dy,\ a_y + \frac{\partial a_y}{\partial y} dy\right).$$

Введім діяду другого ряду

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} \end{array} \right\}$$

то можемо написати

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r}.$$

Покажемо, що діяда $\Phi^{\mathfrak{a}}$ дається розложити на 3 діяди, а кожда з них має спеціяльне ґеометричне значіннє.

Рахунок діяд, як ми вже висше зазначили, має найбільше примінennє в теорії деформовального осередка. Вправді звичайно вектор є силою, що спричинює деформацію, то все таки діяда має значіннє для всіх можливих векторів. Длятого зробимо заложеннє, яке позволить нам розложені діяди без виїмку інтерпретувати ґеометрично.

Закладаємо, що вектор уділяє своїй точці зачіплення пересуненнє в напрямі вектора і пропорціонально до величини вектора, но сочинник пропорціональности мусить бути так дібраний, щоби зміна довжини була зглядом довжини самої нескінчено мала.

(Оправданнє такого заложення дають нам сочинники видовження в теорії упругости.)

По такім заложенню вернім до задачі.

Для упрощення подумаймо собі, що вектор поля $\mathfrak{a}$ вже є помножений через нескінчено малий сочинник, так що $\mathfrak{a}$ вже є вектором пересунення.

На питаннє, як здеформується простокутник

$$P_1P_2P_3P_4,$$

дає нам відповідь формула

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \Phi^c d\mathfrak{r}$$

яка каже, що кожда точка пересунеся о вектор $\mathfrak{a}$ (рівнобіжне пересуненнє).

Се означає рівнобіжне пересуненнє цілого medium і се нас мало інтересує, бо воно не спричинює ніякої внутрішної зміни точок. Натомість звернемо увагу на другу часть $\Phi^c d\mathfrak{r}$.

Щоби її розслідити, пригляньмося вперед, як зміниться квадрат о боці = 1.

Ті зміни є зглядом довжини боків нескінчено малі і виражаються похідними

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad \text{і т. д.}$$

Що ми dx і dy заступаємо коротко через 1, є оправдане тим, що ми обрали одиницю нескінчено малу. Надто в розвиненню Taylor'а ограничуємося до перших членів.

Вибір такого нескінчено малого „одиничного“ квадрата є дуже корисний при дальших розслідах.

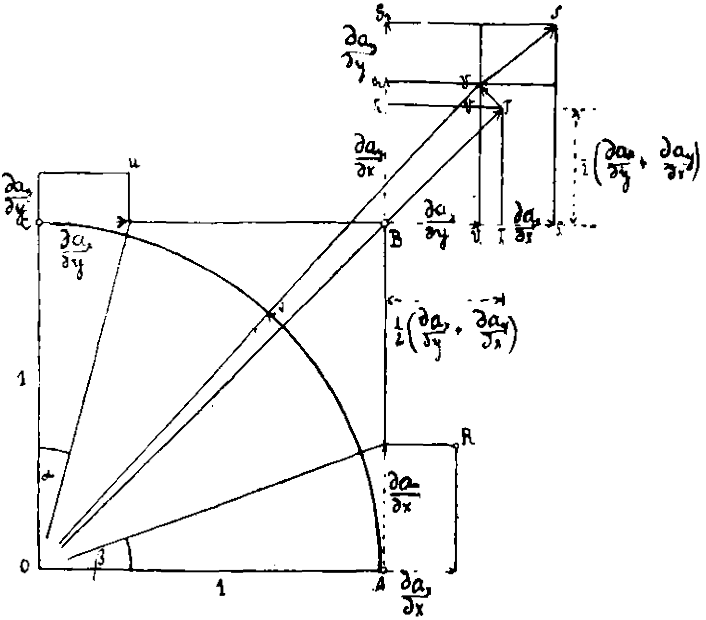
Пересуненнє вершків квадрата одиничного A, B і C видко з фіґ. 19. Найбільше скомплікований рух виконує точка B. Єї дорогу $\overrightarrow{BS}$ можемо зложити з векторів

$$\overrightarrow{BS_1} \text{ і } \overrightarrow{BS_2}$$

або, що для рахунку діяд важнійше, з трех векторів:

1) $\overrightarrow{BT}$, то є симетричного пересунення або здовж перекутні; для него $|\overrightarrow{BT_1}| = |\overrightarrow{BT_2}|$.

2) $\overrightarrow{TV}$, то є обороту довкола точки 0 в площі (xy) о кут (значить довкола оси рівнобіжної до оси zz),



Фіґ. 19.

і 3) $\overrightarrow{VS}$ асиметричного пересунення здовж осий.

Про ті пересунення можемо сказати, що слідує:

Величина $|BT_1| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)$; єї називаємо середним видовженнєм перекутні і означуємо x_y.

З огляду, що $|\overrightarrow{BT_1}| = |\overrightarrow{BT_2}|$

$$x_y = y_x$$

Ad 2. Дугу $\overset{\frown}{TU}$ можемо уважати за простолінійну довжину і вичислити єї з трикутника $[TWV]$

$$|\overline{TV}| = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)^2}{2}}$$

звідси скрученнє

$$= \frac{|T_v|}{|\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{BT}|};$$

а що $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$, а $\overrightarrow{BT}$ є нескінчено малою висшого ряду, отже

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Дальше бачимо з фіґури, що

$$tg\,\alpha = \frac{\partial a_x}{\partial y}, \quad tg\,\beta = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

а що кути є малі, то:

$$\nu = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Ad 3. Асиметричне видовження

$$\frac{\partial a_x}{dx} \text{ і } \frac{\partial a_y}{\partial y}$$

називаємо коротко x_x і y_y.

Тепер побачимо, як ті три деформації даються з діяди безпосередно відчитати.

Розложім діяду $\Phi^{\mathfrak{a}}$, яку дістаєм з формули

$$d\mathfrak{a} = \Phi^1 \,.\, d\mathfrak{r},$$

на симетричну і антісиметричну.

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial a_x}{\partial x}, & \dfrac{\frac{\partial a_x}{dy} + \frac{\partial a_y}{\partial x}}{2} \\ \dfrac{\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}}{2}, & \frac{\partial a_y}{\partial y} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0, & \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, & 0 \end{matrix}\right\}.$$

Першу часть розложім дальше на 2 части $\Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{I}}$ і $\Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{II}}$, іменно:

$$\Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{I}} = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial a_y}{\partial y} \end{matrix}\right\}. \quad \text{і} \quad \Phi^1_{\mathrm{II}} = \left\{\begin{matrix} 0, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), & 0 \end{matrix}\right\}.$$

Коли введемо умовлені висше знаки, то дістанемо

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} \,.\, d\mathfrak{r} =$$

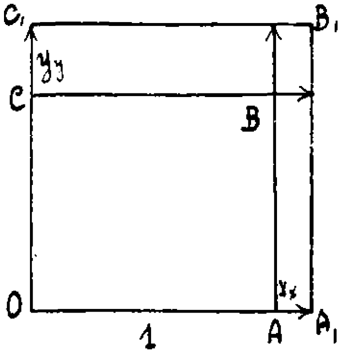
$$= \left\{\begin{matrix} x_x & 0 \\ 0 & y_y \end{matrix}\right\} d\mathfrak{r} + \left\{\begin{matrix} 0 & x_y \\ y_x & 0 \end{matrix}\right\} d\mathfrak{r} + \left\{\begin{matrix} 0 & -\nu \\ & 0 \end{matrix}\right\} d\mathfrak{r}$$

або

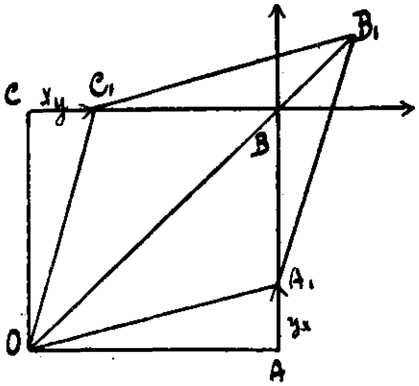
$$= \Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{I}} d\mathfrak{r} + \Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{II}} d\mathfrak{r} + \Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{III}} d\mathfrak{r}$$

при чім $x_y = y_x$.

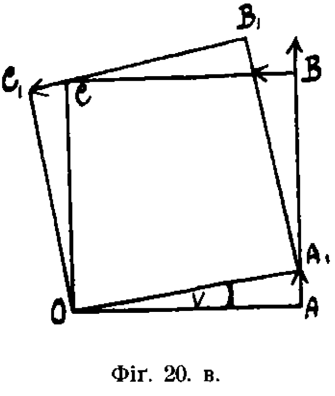
Ті три деформації, які викликує приріст вектора a на нескінчено малім одиничнім квадраті, представляються ґеометрично в слідуючий спосіб:



Фіг. 20. а.



Фіґ. 20. б.



Фіг. 20. в.

Приріст $\Phi_{\rm I} d\mathfrak{r}$ спричинює видовження в напрямі осий, при чім кути не деформуються.

$\Phi_{\rm II} d\mathfrak{r}$ видовжує перекутню, замінює квадрат на ромб.

В наслідок антісиметричної части $\Phi_{\rm III} d\mathfrak{r}$ обертається цілий квадрат о кут при чім вид не змінюється (чистий оборот).

На зміну величини поверхні має вплив лише перша діяда, що і тим проявляється, що в ній бачимо обі складові части діверґенції:

$$div\ \mathfrak{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Діяда $\Phi_I + \Phi_{II}$ називається діядою видовження (Streckdyade), а Φ_{III} діядою обороту (Drehdyade).

Те саме розумованнє дається докладно примінити при три- і висше-вимірнім просторі.

Для трох-вимірного дістаємо:

$$\Phi_I = \left\{ \begin{matrix} x_x & 0 & 0 \\ 0 & y_y & 0 \\ 0 & 0 & z_z \end{matrix} \right\}$$

$$\Phi_{II} = \left\{ \begin{matrix} 0 & x_y & x_z \\ y_x & 0 & y_z \\ z_x & z_y & 0 \end{matrix} \right\}, \quad \text{при чім} \quad \begin{matrix} x_y = y_x \\ y_z = z_y \\ z_x = x_z \end{matrix}$$

$$\text{і } \Phi_{III} = \left\{ \begin{matrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{matrix} \right\}$$

Часть Φ_I дає зміну обєму (Volumsdilatation), Φ_{II} дає зміну виду (Gestaltänderung), трета часть Φ_{III} обертає куб довкола певної оси. Сей оборот дається розложити на 3 обороти, складові довкола осей *xx*, *yy*, *zz*, а величину складових оборотів дають нам числа λ μ ν. Сю діяду називаємо оборотом середовища (Drehung des Mediums).

В першій части маємо до діла зі складовими частями

$$div\ \mathfrak{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right).$$

Ми бачимо, що діяда стає сильним средством, щоби розпізнати, з яким векторовим полем маємо до діла.

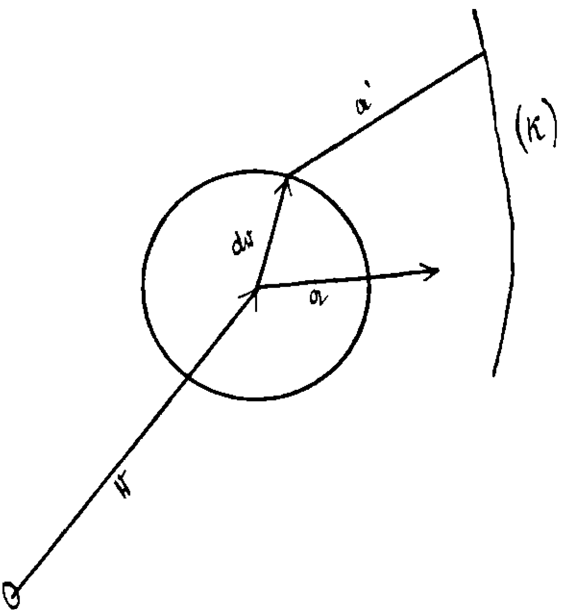
Повисші результати даються в теорії упругости прямо примінити.

Коли $\Phi_I^a = 0$, то поле є безжерельне (quellenfrei), його $div\ \mathfrak{a} = 0$.

Колиж $\Phi_{III}^a = 0$, то поле є безвирове (wirbelfrei), його $curl\ \mathfrak{a} = 0$.

§. 13.

Головні оси деформації (на площі).



Фіґ. 21.

Возьмім під увагу рівняннє

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \Phi \,.\, d\mathfrak{r}$$

загально

$$\mathfrak{a} = f(d\mathfrak{r}).$$

Коли конець вектора $d\mathfrak{r}$ рухається по колі, то конець вектора $\mathfrak{a}'$ зачеркує певну криву (k). Пошукаймо таких $d\mathfrak{r}$, при яких $\Phi_s d\mathfrak{r}$ йде здовж напряму $d\mathfrak{r}$, то є шукаємо напряму чистого видовження (reine Streckung).

Се буде тоді, коли $\Phi\, d\mathfrak{r}$ буде пропорціональне до $d\mathfrak{r}$, значить

$$\Phi_s d\mathfrak{r} = \lambda d\mathfrak{r}$$

де λ є скалярний чинник пропорціональности. Його можемо написати в виді діяди λI, при чім

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

отже

$$\Phi_s d\mathfrak{r} = \lambda I d\mathfrak{r},$$

а звідси

$$(\Phi_s - \lambda I)\, d\mathfrak{r} = 0.$$

Підставмо значіннє Φ_s, то дістанемо повисше рівняннє в векторовім виді

$$\left\{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \lambda\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right) dy\right\}\mathfrak{i} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} - \lambda\right) dy\right\}\mathfrak{j} = 0.$$

Але вектор може бути рівний зеро лише тоді, коли його обі складові є зером; звідси дістаєм дві умови до вишукання жаданих напрямів:

$$(a)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}-\lambda\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{da_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)dy = 0 \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}-\lambda\right)dy = 0. \end{aligned}$$

А що dx і dy є ріжні від зера, тому зникає визначник зі сочинників

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x}-\lambda, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), & \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}-\lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

звідси

$$\lambda^2-\lambda\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial a_x}{\partial y}\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Отже дістаєм дві все дійсні вартости на λ (вираженнє під корінем є все додатне), а при помочи рівнань (a) вирахуємо

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha.$$

З діядного рівнання по підставленню вартостий на λ дістаємо:

$$\begin{aligned} (\Phi_s - \lambda_1 I)\, d\mathfrak{r}_1 &= 0 \\ (\Phi_s - \lambda_2 I)\, d\mathfrak{r}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Помножім перше з них через $d\mathfrak{r}_2$, а друге через $d\mathfrak{r}_1$ і віднимім, то буде

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, d\mathfrak{r}_1\, d\mathfrak{r}_2 = 0,$$

а що загально беручи $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тому $d\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{r}_2 = 0$, се значить, що оба напрями стоять на собі прямовісно. Ми називаємо їх головними напрямами деформації.

З рівнання для λ виходить, що

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = div\, \mathfrak{a} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Сю величину називаємо сочинником видовження площі.

Розумованнє дається легко поширити на простір.

Приміри.

1) Маємо розслідити поле $\mathfrak{P} = x\mathfrak{i} + 2y\mathfrak{j}$. В тій ціли творимо ріжничкову діяду

$$\Phi^{\mathfrak{P}} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Вона показує нам, що сила $\mathfrak{P}$ не спричинює ніякого обороту середовища, а лише видовження. Щоби найти головні оси деформації, творимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і находимо $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

отже: $div\, a = 3$.

Для напрямів маємо похідні:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\lambda - \frac{\partial a_x}{\partial x}\right)}{\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}}{2\left(\lambda - \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)},$$

звідки для $\lambda_1 = 1 \qquad \alpha_1 = 0$

$$\lambda_2 = 2 \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Щоби се поле представити ґрафічно, нарисуймо коло о лучу $\overline{OA} = 1$ і в достаточнім числі точок його обводу нарисуймо вектор $\mathfrak{P} = xi + 2yj$. На основі рис. 21. можемо так сказати:

Полевий вектор $\mathfrak{P}$ деформує одиничне коло в еліпсу, якої оси накривають оси укладу. Сей спосіб представлення деформації є дуже простий і корисний для оцінки поля.

Легко можна переконатися, що окружний інтеґрал здовж одиничного кола (Rundarbeit)

$$\underline{L}_{\bigcirc} = 0.$$

Надто можемо найти таку функцію $H(xy)$, що

$$grad\, H = \nabla H = \mathfrak{P}$$

звідки $$\frac{\partial H}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 2y$$

іменно $$H = \frac{x^2}{2} + y^2 + C.$$

Сталу C означуємо з даних початкових. Функцію H називаємо силовою функцією, а її відємну вартість

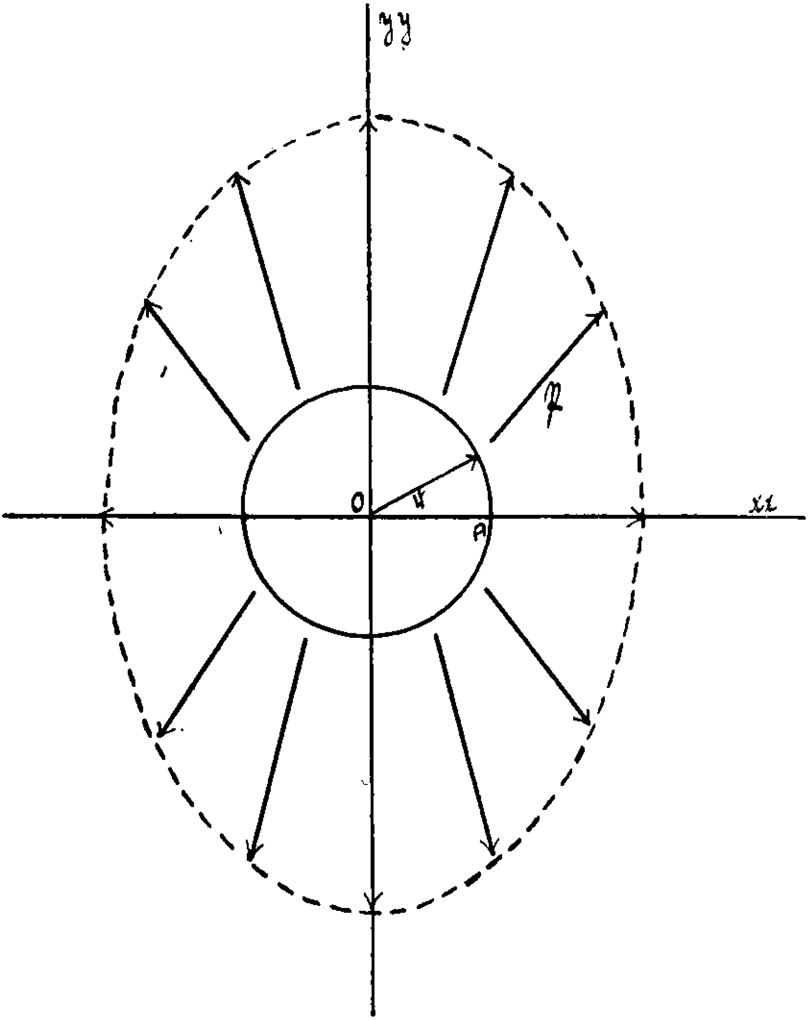
$$V = -H$$

називаємо потенціялом поля.

Взагалі, коли вектор має лише симетричну діяду, то поле має скалярний потенціял. В нашім примірі

$$\mathit{div}\,\mathfrak{P} \neq 0$$
$$\mathit{curl}\,\mathfrak{P} = 0$$

се є безвирове жерельне поле.

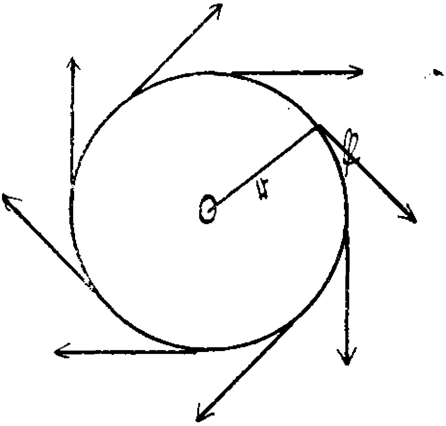


Фіг. 22.

2) Силове поле дане рівнанням $\mathfrak{P} = y\mathrm{i} - x\mathrm{j}$, його діяда

$$\Phi^{\mathfrak{P}} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

є антісиметрична, отже $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$ а тимсамим $div\,\mathfrak{P} = 0$.



Фіг. 23.

Окружна праця

$$L_{\bigcirc} = 2r^2\pi \neq 0$$

квот

$$\frac{L_{\bigcirc}}{r^2\pi}$$

є праця на одиниці поверхні; таку працю ми називаємо виром і пишемо в нашім примірі

$$|curl\,\mathfrak{P}| = 2.$$

Таке поле, в якім

$$div\,\mathfrak{P} = 0$$

$$curl\,\mathfrak{P} \neq 0$$

називається безжерельне вирове поле.

3) Додаймо оба поля з попередних примірів, то дістанемо

$$\mathfrak{P} = (x + y)\mathfrak{i} + (2y - x)\mathfrak{j}.$$

Його діяда

$$\Phi^{\mathfrak{P}} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

розложена на часть симетричну і антісиметричну дає пізнати, що поле має жерела і вири, та позваляє найти для жерел скалярний потенціял, а для вирів векторовий потенціял.

Задача:

Розслідити потенціял Newton'а при помочи діяд.

Теорія стаєся інтереснійшою але і незвичайно трудною в случаю, коли функції $\varphi(xy)$ і $\chi(xy)$ вектора

$$\mathfrak{a} = \quad \mathfrak{i} + \chi\,\mathfrak{j}$$

є другого або висше як другого степеня.

Для приміру возьмім случай

$$\mathfrak{a} = (x^2 + xy)\mathfrak{i} + (y^2 + xy)\mathfrak{j}$$

Діяда

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \begin{Bmatrix} 2x + y, & x \\ y, & 2y + x \end{Bmatrix}$$

має тензор

$$\Phi^{\mathfrak{a}}_{s} = \begin{Bmatrix} 2x + y, & \frac{1}{2}(x + y) \\ \frac{1}{2}(x + y), & 2y + x \end{Bmatrix}$$

і ротор

$$\Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}} = \begin{Bmatrix} 0, & \frac{1}{2}(x - y) \\ -\frac{1}{2}(x - y), & 0 \end{Bmatrix}.$$

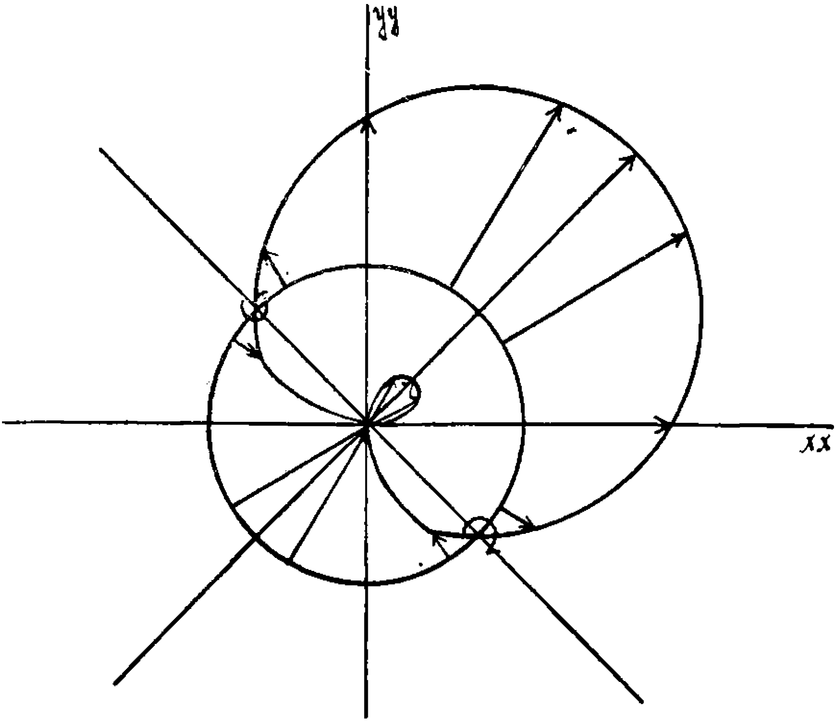
Звідси $div\, \mathfrak{a} = 3(x + y)$.

Оборот можемо виразити вектором, яким є напрямна величина кута обороту

$$= \tfrac{1}{2}(x - y)\mathfrak{k}.$$

Для $x = y$, отже на першім медіяні є $curl\, \mathfrak{a} = 0$, значить є чисте видовженнє.

Для точок на $y = -x$ є знов $div\, \mathfrak{a} = 0$, а $curl\, \mathfrak{a} \neq 0$, отже є поле чисто вирове. Дуже ясно показує нам се рисунок для одиничного кола.

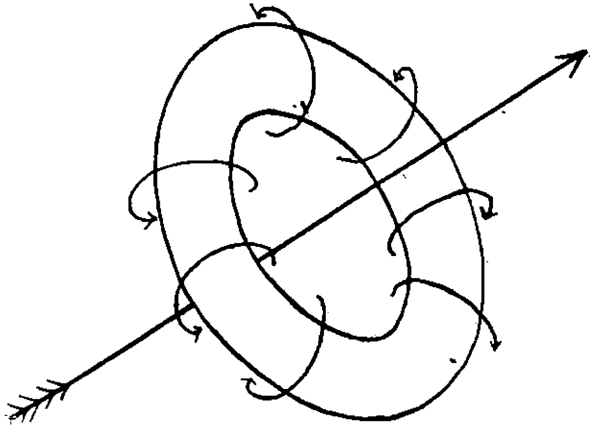


Фіґ. 24.

Обернім се поле довкола першого медіяну

$$y = x,$$

то дістанемо поле, в якім пр. з диму мусять творитися вирові перстені (Wirbelring).



Фіґ. 25.

§. 14.

Оператор Hamilton'а а діяди.

В векторовім рахунку уживаємо двох векторів:

1) вектора напряму поступового

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j} + dz\,\mathfrak{k}$$

і 2) оператора Hamilton'а

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}.$$

Сей послідний має в рахунку діяд велике значіннє, так що о нім дещо поговоримо.

1) Коли до даного скалярного поля

$$a = \varphi(xyz)$$

примінимо ∇, то дістанемо:

$$\nabla a = grad\, a \text{ отже вектор.}$$

Через се в кождій точці підпорядковуємо скалярній величині a величину напрямну:

$$\mathfrak{a} = grad\, a.$$

2) Навідворот вектор $\mathfrak{a}$ заміняється під впливом ∇ на величину скалярну

$$a = div\, \mathfrak{a}.$$

3) Векторовий добуток $[\nabla\mathfrak{a}]$ підпорядковує векторові $\mathfrak{a}$ другий вектор $\mathfrak{u} = curl\, \mathfrak{a}$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що складові сего вектора є як раз подвійні кути оборотів довкола осий, с. є 2λ, 2μ, 2ν.

4) Утворім тензоровий добуток з ∇ і $\mathfrak{a}$, то дістаємо спряжену діяду

$$[[\nabla \mathfrak{a}]] = \Phi_c^a.$$

5) Нехай буде дана діяда напруження

$$S = \begin{Bmatrix} x_x & x_y & x_z \\ y_x & y_y & y_z \\ z_x & z_y & z_z \end{Bmatrix}$$

і утворім з неї скалярний добуток

$$S\nabla.$$

В тім розважанню придаю операторови ∇ значіннє повного вектора, а не щось в роді піввектора, як се роблять автори необзнакомлені з діядами і через те змушені ввести два окремі символи

$$\mathfrak{a}\nabla \text{ і } \nabla\mathfrak{a}.$$

Тим самим усталю на дальше

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_x = a_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \text{ і т. д.}$$

На тій основі можу написати рівно добре

$$\nabla S.$$

Коли представимо ∇S в виді вектора, дістанемо

$$\begin{aligned} \nabla S = &\left(\frac{\partial x_x}{\partial x} + \frac{\partial x_y}{\partial y} + \frac{\partial x_z}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \\ + &\left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} + \frac{\partial y_z}{\partial z}\right)\mathfrak{j} + \\ + &\left(\frac{\partial z_x}{\partial x} + \frac{\partial z_y}{\partial y} + \frac{\partial z_z}{\partial z}\right)\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Складова в напрямі xx є приростом двох стичних і одного нормального напруження і т. д. Отже ∇S представляєть собою ту силу, яку належить примінити, щоби зрівноважити всі напруження, що ділають в одиничнім кубі. Її називають силою поля і означують

$$\mathfrak{F} = div\, S.$$

§. 15.

Основні твердження діяд.

Подамо їх без доказу, бо вистарчить на основі дефініції розвинути обі сторони, щоби пересьвідчитися о їх ідентичности.

1) $\Phi^{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} + \Phi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + [curl\, \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}] + [curl\, \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}]$.

2) $\Phi^{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \Phi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = curl\, [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + \mathfrak{b}\, div\, \mathfrak{a} - \mathfrak{a}\, div\, \mathfrak{b}$.

3) Під заложеннєм, що

$$(\mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}) = 0 \qquad \text{отже } d\mathfrak{r} \perp \mathfrak{a},$$
$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r}$$
$$= [curl\, \mathfrak{a} \,.\, d\mathfrak{r}].$$

4) Під заложеннєм, що

$$[\mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}] = 0 \qquad \text{або } d\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{a}$$
$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r}$$
$$= div\, \mathfrak{a} \,.\, d\mathfrak{r}.$$

З тих двох послідних форм скористаємо при наведених в слідуючім уступі нових доказах твердження Ґаусса і Стокса.

Задачі:

1) Даний скалярний потенціял:

$$U = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

вичислити силу $\mathfrak{P} = -grad\, U$, $\Phi^{\mathfrak{P}}$ і найти $div\, \mathfrak{P}$ і $curl\, \mathfrak{P}$.

2) Даний векторовий потенціял:

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}(y - z)^2\mathfrak{i} + \tfrac{1}{2}(z - x)^2\mathfrak{j} + \tfrac{1}{2}(x - y)^2\mathfrak{k},$$

вичислити силу $\mathfrak{P} = curl\, \mathfrak{U}$.
Як виглядає тут $\Phi^{\mathfrak{P}}$. Вичислити $div\, \mathfrak{P}$ і $curl\, \mathfrak{P}$.

3) Дане силове поле

$$\mathfrak{P} = (x + 2y)\mathfrak{i} + (y + 2z)\mathfrak{j} + (z + 2x)\mathfrak{k}.$$

Найти при помочи діяд потенціял скалярний і векторовий.

4) Розслідити, яке значіннє мають діяди при розвиненю скаляра і вектора (як функцій місця) в ряд Taylor'а.

§. 16.

Інтеґральні твердження.

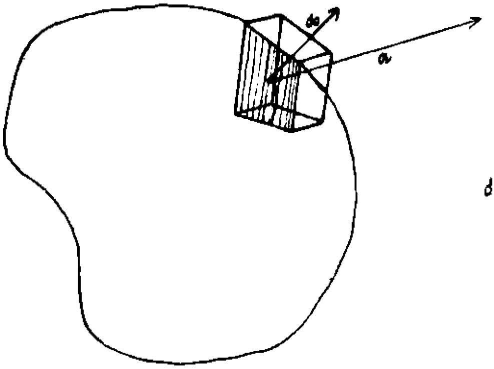
I.

Твердження Gauss'а.

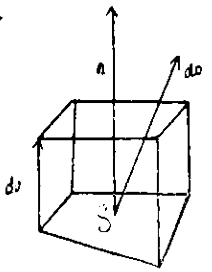
Під заложеннєм $[\mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}] = 0$ приріст полевого вектора виражається:

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r} = div\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}.$$

Коли $\mathfrak{a}$ представляєть силове поле, то маємо до діла зі случайом, який часто стрічаємо в фізиці, іменно ми йдем в напрямі сили.



Фіг. 26.



Фіґ. 26. а.

Возьмім під увагу довільну замкнену поверхню (Фіґ. 26.) в поли, то векторна ріка через напрямний елемент поверхні $d\mathfrak{o}$ є дана скалярним добутком $\mathfrak{a}\, d\mathfrak{o}$. При тім $d\mathfrak{o}$ є осевим вектором, якого змисл показує внішна нормальна.

Виберім $d\mathfrak{r}$ в напрямі вектора $\mathfrak{a}$, то маємо

$$d\mathfrak{a} = div\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}.$$

В сусідній точці має полевий вектор вартість

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + div\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}.$$

Помножім обі сторони скалярно через $d\mathfrak{o}$, то дістаєм, з огляду на $d\mathfrak{o} \,.\, d\mathfrak{r} = dv$,

$$\mathfrak{a}' d\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\, d\mathfrak{o} + div\, \mathfrak{a} \,.\, dv.$$

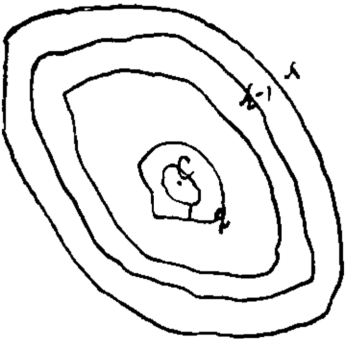
А що $d\mathfrak{o}$ ріжниться від $d\mathfrak{o}'$ нескінчено малими висших рядів, то можна написати:

$$\mathfrak{a}' d\mathfrak{o}' = \mathfrak{a}\, d\mathfrak{o} + div\, \mathfrak{a}\, dv.$$

Зінтеґруймо се рівнаннє над цілою поверхнею, то дістаєм

$$\int \mathfrak{a}' d\mathfrak{v}' = \int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} + \int div\, \mathfrak{a}\, dv.$$

Інтеґрал $\int div\, \mathfrak{a}\, dv$ відноситься до обєму нескінчено тонкеї верстви, грубости $d\mathfrak{r}$.



Фіґ. 27.

Поділім обєм даної замкненої поверхні на слої

$$\lambda, \quad \lambda_{-1}, \qquad 2,\ 1,$$

доки не дійдем до якоїсь точки C.

Для перегляду уживаємо поєдинчого знаку інтеґрала, бо з сего не може вийти помилка.

Для першої верстви дістаєм:

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{v}_1 = \int \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{v}_0 + \int div\, \mathfrak{a}_0 dv_0.$$

А що $d\mathfrak{v}_0 = 0$ (поверхня точки C), то перша верства дає нам

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{v}_1 = \int div\, \mathfrak{a}_0 dv_0,$$

друга верства дає

$$\int \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{v}_2 = \int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{v}_1 + \int div\, \mathfrak{a}_1 dv_1$$

і т. д. а послідна

$$\int \mathfrak{a}_\lambda d\mathfrak{v}_\lambda = \int \mathfrak{a}_{\lambda-1} d\mathfrak{v}_{\lambda-1} = \int div\, \mathfrak{a}_{\lambda-1} dv_{\lambda-1}.$$

Додаймо ті рівности сторонами, то по счеркненю рівних членів дістаєм

$$\int \mathfrak{a}_\lambda d\mathfrak{v}_\lambda = \int div\, \mathfrak{a}_0 dv_0 + \int div\, \mathfrak{a}_1 dv_1 + \qquad + \int div\, \mathfrak{a}_{\lambda-1} dv_{\lambda-1}.$$

Коли по лівій стороні інтеґрал віднесем до поверхні замкненої (зовнішної), а по правій условимося інтеґрувати над всіми елєментами замкненої поверхні, то можемо написати коротко

$$\int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} = \int div\, \mathfrak{a}\, dv.$$

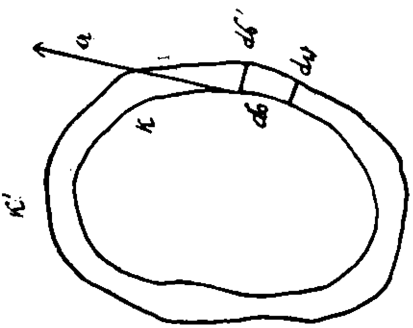
Се є твердженнє Ґаусса, що позваляєть нам замінити інтеґрал поверхневий інтеґралом обємним.

II.

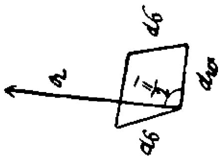
Твердження Stockes'a.

З заложення $(\mathfrak{a}\,d\mathfrak{r}) = 0$ виходить, що приріст полевого вектора дається виразити

$$d\mathfrak{a} = \Phi \, . \, d\mathfrak{r}$$
$$= [\mathit{curl}\, \mathfrak{a} \, . \, d\mathfrak{r}].$$



Фіґ. 28.



Фіґ. 28. a.

Возмім під увагу замкнену криву (k) в данім полю; $d\mathfrak{r}$ замикає з $\mathfrak{a}$ кут $\frac{\pi}{2}$.

В сусідній точці $\mathfrak{a}$ має вартість

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + [\mathit{curl}\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}]$$

а $d\mathfrak{s}$ $\quad$ $d\mathfrak{s}'$.

Помножім $\mathfrak{a}'$ скалярно через $d\mathfrak{s}$, то буде:

$$\mathfrak{a}'d\mathfrak{s} = \mathfrak{a}d\mathfrak{s} + [\mathit{curl}\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{s},$$

а що $\quad [\mathit{curl}\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{s} = \mathit{vurl}\, \mathfrak{a}\, [d\mathfrak{r} d\mathfrak{s}]$

$$= \mathit{cuvl}\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}$$

а надто що $d\mathfrak{s}'$ ріжниться нескінчено малими висших рядів, тому

$$\mathfrak{a}'d\mathfrak{s}' = \mathfrak{a}d\mathfrak{s} + \mathit{curl}\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}.$$

Інтеґрал здовж кривої (k) дає нам

$$\int \mathfrak{a}'d\mathfrak{s}' = \int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} + \int \mathit{curl}\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}.$$

Поділім поверхню, замкнену кривою $k'' > k' > k$ кривими 1, 2, 3, $\quad \lambda$ на тонкі перстені з кривою береговою λ, то дістанемо для першого перстення

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1 = \int \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{s}_0 + \int curl\, \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{v}_0.$$

А що $d\mathfrak{s}_0 = 0$ (обвід точки), то лишається

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1 = \int curl\, \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{s}_0.$$

Для другого перстеня буде

$$\int \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{s}_2 = \int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1 + \int curl\, \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1$$

і т. д., — а для послідного

$$\int \mathfrak{a}_\lambda d\mathfrak{s}_\lambda = \int \mathfrak{a}_{\lambda-1} d\mathfrak{s}_{\lambda-1} + \int curl\, \mathfrak{a}_{\lambda-1} d\mathfrak{v}_{\lambda-1}.$$

Додаймо всі рівнания обосторонно, то по счеркненню рівних членів і умові, що по лівій стороні інтеґруємо над береговою кривою, а по правій над елементами поверхні, які вона замикає, пишемо

$$\int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} = \int curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{o}.$$

Задачі:

1) При помочи діяд розслідити поле скорости $\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathfrak{j}$ в напрямі $d\mathfrak{r} = dx\mathfrak{i} + dz\mathfrak{k}$.

(Тротуари Вельса).

2) Розслідити поле

$$\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}\, \mathfrak{j}.$$

(Водопроводи!)

В Красноярську (Сибір), 1919 р.

Resumé.

Dem Verfasser standen zur Verfügung im ganzen 3 Bücher: 1) Valentiner, Vektoranalysis (Sammlung Göschen) 1912, 2) F. Klein, Elementare Mathematik vom höheren Standpunkte aus, II. Theil 1913, 3) Laue, Das Relativitätsprinzip 1913, folglich ist es dem Leser leicht das bereits Bekannte vom Neuen zu trennen. Die Anregung zur Forschung gab Valentiner durch seinen III. Teil (Dyadenrechnung), Klein zeigte den Weg und Laue zwang den Verfasser eine Methode ausfindig zu machen, die Anzahl der Dimension erweiterungsfähig zu machen. Auf diese Weise ist „die Ordnung“ der Dyade entstanden. In der Beschränkung der Dyade bloss auf Tensor sieht der Verfasser die Hemmung in den Untersuchungen der physikalischen Felder und der Probleme der Elastizitätstheorie.

Auf Grund der Definition der Dyade als affiner Transformation ohne Parallelverschiebung führt der Verfasser die Grundoperationen, Spaltung der Dyade in drei Teile: Achsenstreckdyade, Medianstreckdyade und reine Drehdyade an, zeigt die Bedeutung der Dyade 1) bei der Division der Vektore, 2) bei der Untersuchung der Felder, 3) in der Differentialrechnung, im besonderen bei der Taylor'schen Entwickelung.

Bei der Untersuchung der Felder führt der Verfasser den Einheitskreis an und zeichnet die längs des Umfanges angreifenden Vektore. Dadurch gewinnt man neue Methode zur Darstellung der Spannungsfelder (im Raume Einheitskugel). Zum Schluss gibt der Verfasser einen neuen rein vektoriellen Beweis für die Sätze von Gauss und Stockes.

Bei jedem Kapitel sind einige Aufgaben angeführt, die einerseits zum Verständniss der behandelten Probleme, andererseits als Wegweiser für weitere selbständige Forschungen auf diesem Gebiete dienen sollen.

Про виріб срібних зеркал

написали

П. В. Данкворт* і *Н. С. Садовський.

(З лябораторії податкового заряду в Красноярську, Єнісейської губернії, 1920)[1]

(Über die Fabrikation der Silberspiegel. Von P. W. Dankworth und N. S. Sadowškyj.)

Понизше наведені розсліди над способом виробу срібних зеркал без похибок були спричинені чисто практичною потребою. Підчас нашої неволі в Сибірі були ми вже від часу панування адмірала Колчака приневолені власними руками на насущний хліб наш заробляти. З огляду що на кождім полі відчувалася велика недостача промислової продукції, тому ми, попри інші, заложили робітню срібних зеркал, яка нас досконало ратувала в скрутній грошевій ситуації.

Фахового знання в тім виробі ми не мали, а з приписів ми найшли два, іменно в підручнику фізики Кольрауша припис Бетґера (Böttger) і припис в звіснім підручнику хемічної технольоґії Ост'а. Оба ті приписи сильно ріжняться від себе, а надто не дають бездоганних зеркал. Тому ми мусіли викомбінувати власну рецепту для виробу срібних зеркал і то таку, якаб нам позволяла певно і без похибок виробляти зеркала пригожі до розпродажі.

Ми почали розсліди з двох причин: по перше, щоби охоронитися від похибок, які спорадично появлялися, а по друге, щоби з огляду на велике і непропорціональне підношеннєся цін на хемікалія ограничитися до мінімум матеріялів. Окрім роданового амонія, якого ми уживали до тітровання, всі прочі хемікалія ми самі собі приготовляли, а саме: азотан срібла, квас азотовий

---

[1] Являється рівночасно і в німецькій мові.

і сільний, амоняк, сіль Сеґнета і прочі. По повороті ми не брали під увагу літератури про виріб зеркал, щоби праця не втратила „сибірського“ характеру.

За основу до наших розслідів — за виключеннєм послідних розслідів над приписом Ост'а — належить уважати слідуючі два розтвори; а) розтвір І.: 10 *g* азотану срібла розпустити в воді (розуміється дестильований) і додати стільки амоняку, щоби окис срібла майже цілком розпустився; опісля перефільтрувати і доповнити до одного літра. б) розтвір II.: 3,3 *g* соли Сеґнета і 3,3 *g* тростинового цукру разом тепло розпустити, до того додати розтвір 2 *g* азотану срібла в 200 *g* води і дальше огрівати, доки осад добре не виділиться; опісля перефільтрувати і доповнити до одного літра.

При наливанню ми не брали тих розтворів в відношенню 1 : 1 так як се ми в приписах найшли, а в відношенню 1 : 5, через що зменьшили ми запотребованнє срібла майже чотири рази.

З гори можна було додуматися, що поза похибками, спричиненими чищеннєм скла, змінами температури комнати і т. п. будуть ще похибки натури хемічної, а саме в розтворі І. через зміну скількости амоняку, а в розтворі II. не лише через відношеннє скількости соли Сеґнета і срібла, але через спосіб приготовлення.

При оцінці доброти зеркал ми гляділи в першій мірі на час, в якім срібло по налятю на скло почало виділюватися. По довшій стоянці виділялася на поверхні течи, налитої на скло, часто друга ніжна срібна поволока-верства, яку ми назвали верхною верствою. На готовім зеркалі ми розсліджували другу сторону, прозрачність (отже грубість верстви срібла) а головно відбиваючу площу. Поміж плямами, що ми їх стрічали на відбиваючій площі, приходили часто такі, які нагадували скіру тигра і тому ми назвали їх коротко „тигром“. Оден зі способів пізнавання доброти зеркал полягав на тім, що покриттє трималося добре при тертю, так що можна було срібну поволоку полірувати. На відворотній стороні окрім „тигра“ появлялися часто фіґури — лінії, що виходили від рогів плитки і які нагадували лінії замкненої коперти. Ми назвали їх узловими фіґурами (вони відповідають акустичним фіґурам Хлядні'го).

В слідуючих таблицях ми подаємо лише найважнійші дати обсервації.

I. Зміни в сеґнетовім розтворі. (Розтвір II.)

а) Вплив температури при мішанню розтвору.

Після висше наведеної рецепти взяли ми 0,33 *g* соли Сеґнета і 0,33 *g* цукру, розпустили в 50 cm^3 води і до сего розтвору, нагрітого по черзі до 20_0 *C*, 60° *C*, 80° *C* і 100° *C* доливали 0,2 *g* соли срібла, розпущеної в 20 *g* води. Опісля привели ми сі розтвори до кипіння і давали їм кипіти через 5 мінут. По остудженню до комнатної температури перефільтрували і доповнили кождий з тих чотирох розтворів до 100 cm^3. До наливання зеркал брали ми одну часть розтвору I і мішали його з 5 частями кождого з розтворів II. При тім показалося, що через ріжне нагріваннє виступили малі вагання в скількости срібла і то чим висша температура, тим більше його тратимо. Добрі зеркала ми дістали лише поміж 20° *C* а 60° *C*. Коли змішати сеґнетову і срібну сіль при 80° *C*, то появляється слабий „тигр“ а поволока срібна тримаєся вже слабше. При 100° *C* тигр виступає сильно, а поволока тримаєся цілком слабо. При дальших досвідах ми задержали температуру 60° *C*, яка і з практики показалася найкориснійшою.

б) Вплив скількости срібла в розтворі соли Сеґнета.

Розтвір I лишився знова нормальний, то є після нашої вихідної рецепти. До спорядження ріжних розтворів II ми взяли 0,33 *g* Сеґнета і 0,33 *g* цукру, розпустили в відповідній скількости води, нагріли до 60° *C* і до так приготовлених розтворів додавали ріжні скількости $\frac{n}{10}\, AgN0_3$. Опісля нагрівали до кипіння, позваляли кипіти 5 мінут, а по перефільтрованню доповняли до 100 cm^3. Дуже цікаве, як ріжно випали всі вісім проб зеркал. (Гляди таб. 1.)

Таблиця 1.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
$\frac{n}{10} AgN0_3$ в cm^3	2,0	5,0	10,0	15,0	20,0	30,0	40,0	50,0
тітрованнє $\frac{n}{20}$ родановим амоном дало скількість срібла в 100 cm^3 перед кипіннєм	0,0339	0,0850	0,1700	0,2550	0,3390	0,5099	0,6799	0,8498
по кипінню	0,0227	0,0550	0,1182	0,1877	0,2556	0,4044	0,4624	0,6700
втрата	0,0112	0,0300	0,0518	0,0673	0,0834	0,1055	0,2175	0,1798
початок долішної верстви в мінутах	21	16	8	7	5	2·5	?	11
початок горішної верстви в мінутах			33	13	13	5	2	6

З таблиці видно, що при побільшуванню скількости срібла в розтворі II. щораз то скорійше починається виділювати долішна верства, отже творитися зеркало. На утвореннє горішної верстви треба при третій комбінації майже пів години ждати, при четвертій уже лиш 6 мінут, а при 7 і 8 вже показується наперед горішна верства.

Що до якости зеркал, то при першій комбінації береги не реаґують, появляється сильний „тигр“ і срібло дуже слабо тримається. При 2. похибки вже меньші так, що при 3. є вже зеркало можливе. Числа 4. і 5. дали бездоганні „пріма“ зеркала. Починаючи від 6. ставалися зеркала щораз то гірші. При 7. стається зеркало чорне, а 8. не дало взагалі зеркала, лише чорний осад. Дальші розсліди показали, що добрі зеркала дістається в границях 0,18 g до 0,25 g на 100 cm^3 другого розтвору. З практичних та економічних зглядів ми брали при дальших розслідах рівно 0,2 g $AgN0_3$. Сей вислід ми дістали не лише в малих лябораторийних пробах, але також і при наливанню десятків тисяч зеркал в робітні, при чім набрали ми такої вправи, що на основі самої реакції подавали ми в тісних границях (з великою точністю) скількість срібла в розтворі II.

в) Вплив скількости соли Сеґнета.

Розтвір I лишився без зміни. Розтвора II ми зробили з ростучих скількостий соли Сеґнета від 0,05 до 2 g і постійної скількости соли срібла, а саме

$$11{,}7\ cm^3\ \frac{n}{10}\ AgN0_3$$

що відповідає 0,2 g на 100 cm^3 розтвору. (Гляди таблиця 2.)

Таблиця 2.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
скількість g соли Сеґнета в 100 cm^3	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2
срібло перед кипіннєм в 100 cm^3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
срібло по кипінню в 100 cm^3	0,1819	0,1751	0,1734	0,1649	0,1564	0,1497	0,1360	0,1300	0,1275
початок реакції в мінутах	2,5	2,5	2,5	3	5	6	10	11	20

Тітрованнє показало, що чим більше соли Сеґнета, тим більше тратимо срібла. Що до якости зеркал, то дістаємо добрі зеркала поміж 0,2 до 0,5 g Сеґнета. Практика показала, що найлучші зеркала дістається тоді, коли початок реакції лежить поміж 3 а 5 мінутами, що годиться в повні з таблицею 2. В дальших розслідах ми прийняли 0,33 g на 100 cm^3.

г) Вплив цукру на розтвір соли Сеґнета.

З огляду, що цукор можна було в Сибірі дістати лише через паскарів, ми взялися провірити, яке значіннє має цукор при виробі зеркал, та чи не можна би було його виелімінувати. При тім показалося щось дуже цікаве, а саме при пропорції обох розтворів 1 : 5 зеркала без цукру абсолютно нічим не ріжнилися від зеркал з цукром. Натомість при пропорції 1 : 1, як се подають всі рецепти, зеркала з цукром випадають дуже гарно, підчас коли розтвори без цукру дають зеркала не до прийняття.

II. Зміни в срібнім розтворі. (Розтвір I.)

Вплив скількости амоняку в розтворі азотану срібла.

В тих пробах лишили ми розтвір II нормальний, то є такий, який зі звичайним розтвором I давав в відношенню 1 : 5 зеркала без закиду. Ріжні розтвори I приготовляли ми сим способом, що до 1% розтвору азотану срібла додавали ріжні порції $\frac{n}{2}$ амоняку. Теоретично беручи до 1 g $AgN0_3$, або що на одно виходить

$$58{,}55\ cm^3\ \frac{n}{10}\ AgN0_3$$

належить

$$23{,}50\ cm^3\ \frac{n}{2}\ NH_3.$$

Ту скількість амоняку ми назначили числом $\frac{10}{10}$ і давали до 1% розтвору азотану срібла ростучі числа cm^3 амоняку від $\frac{1}{10}$ до $\frac{12}{10}$.

Вартости срібла ріжняться дуже мало. Чим більше амоняку, тим більше срібла випадає доки не дамо половини амоняку. Дальше додавання амоняку розпускає темний осад окиси срібла. Теоретично вирахована скількість амоняку не розтворює вповні окиси срібла, се діється доперва при невеликій надвижці амоняку.

Зеркала наливані тими 12 розтворами показали великий вплив амоняку на виріб добрих зеркал. І так: при порціях $\frac{1}{10}$ до $\frac{3}{10}$ не дістаємо взагалі зеркал. При $\frac{4}{10}$ доперва по 68 мінутах дістаємо щось, що ледви нагадує зеркало. Взагалі від $\frac{1}{10}$ до $\frac{6}{10}$ твориться вперед верхня верства, зеркала нездатні; час реакції скорочується в міру збільшування амоняку. При $\frac{7}{10}$ появляються обі верстви рівночасно, а зеркало є вже до прийняття.

Починаючи від $\frac{8}{10}$ виходить наперед спідна верства; зеркала стаються щораз ліпші, „тигр“ зникає, срібло тримається сильно. Спеціяльні проби показали, що при подвійній порції теоретично вирахованого амоняку дістаємо єще добрі зеркала, а доперва при потрійній є непридатні. Сі дуже цікаві проби показали наглядно, що додавання амоняку не вимагає великої осторожности, належить вистерігатися лише великої надвижки.

Таблиця 3.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Скількість амоняку	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{12}{10}$
$\frac{n}{2}NH_3 cm^3$	2,35	4,70	7,05	9,40	11.75	14,10	16,45	18,80	21,25	23,50	25,40	28,20
на 25 cm^3 зужито $\frac{n}{10}$ роданового амонія	27.90	27,65	27,10	26,90	26,70	26,90	27,26	27,55	28,10	28,70	29,40	29,65
скількість $AgNO_3$ в 100 cm^3 розтвору	0,9484	0,9399	0,9215	0,9147	0,9078	0,9147	0,9249	0,9367	0,9554	0,9759	0,9996	1,009
початок реакції в мінутах	—	—	68	42	12	10	9	7	10	7	7	6

III. Рівночасна зміна скількости амоняку і соли Сеґнота в рецепті Ост'а.

Щоби розслідити взаїмну залежність амоняку і соли Сеґнета в присутности азотану срібла, ми вийшли не від звичайних наших розтрорів, а від рецепти Оста, яка подає 2% розтвір соли Сеґнета. Щоби справи не комплікувати, ми взяли чотири розтвори під увагу, іменно

Розтвір *A*. 10 *g* $AgN0_3$ в 1 літрі води без амоняку.

Розтвір *B*. 10 *g* $AgN0_3$ розтворили в воді, додали амоняку до повного прояснення ся, перефільтрували і доповнили до одного літра.

Розтвір *C*. 20 *g* соли Сеґнета
20 *g* цукру
4 *g* $AgN0_3$ на
1000 cm^3 води.
Зрештою зроблено розтвір в той сам спосіб, як давнійше розтвір II.

Розтвір *D*. Дестильована вода.

Ріжні Сеґнетові розтвори ми діставали комбінуючи *C* і *D*; пр. $\frac{5}{5}$ *S* значить чистий розтвір *C* нерозпущений водою, $\frac{3}{5}$ *S* значить 3 части чистого розтвору *C* і 2 части води.

Ріжні амонякові розтвори повстали через комбінацію розтворів *A* і *B*; пр. $\frac{5}{5}$ амоняку значить чистий розтвір *B*, $\frac{2}{5}$ амоняку дістаєть ся через доданнє до двох частий розтвору *B* 3 частий розтвору *A*. При мішанню виділювався окис срібла, який ми через фільтрованнє усували. При помочи тих 2 разів по 5 розтворів ми наляли 25 комбінованих зеркал. Опісля ми повторили проби з поділеннєм на 10 порцій і дістали 100 ріжних комбінаційних зеркал, однак з огляду, що ніжні ріжниці є доступні лише для фаховця, обмежуємося в тій розвідці до подання таблиці з 25 першими пробами. (Гляди таб. 4)

Таблиця 4.

		$\frac{1}{5}S$	$\frac{2}{5}S$	$\frac{3}{5}S$	$\frac{4}{5}S$	$\frac{5}{5}S$
початок реакції	$\frac{1}{5}NH_3$	9^m	21^m	27^m	—	—
поволока тримається		слабо	слабо	нема поволоки а лише білі кристали		
якість зеркала		дуже добре	нездібне	нема зеркала		
початок реакції	$\frac{2}{5}NH_3$	4^m	11^m	12^m	—	—
поволока тримається		дуже сильно	дуже сильно	кристали		молочна тіч
якість зеркала		дуже добре	дуже добре	нездібне	нема зеркала	
початок реакції	$\frac{3}{5}NH_3$	5″	4″	10″	12″	20″
поволока тримається		добре	дуже сильно	дуже сильно	сильно	добре
якість зеркала		добре	дуже добре	дуже добре	добре	нездібне
початок реакції	$\frac{4}{5}NH_3$	чорніє		2″	6^m	8^m
поволока тримається		—	—	сильно	дуже сильно	сильно
якість зеркала		нема зèркала		дуже добре	дуже добре	дуже добре
початок реакції	$\frac{5}{5}NH_3$	наперед	горішна	верства тигр!	5^m	7^m
поволока тримається		слабо	слабо	слабо	сильно	сильно
якість зеркала		нездібне		добре	дуже добре	дуже добре

В таблиці ми подали лише найважніші дати. Щоби здати собі справу з вислідів таблиці належить перейти її стрічками поземими і прямовісними.

1. Позема стрічка $\frac{1}{5} NH_3$.

Чим більше соли Сеґнета, тим більше виділяється кристалів, тим скорійше затрачується здібність до творення зеркала, срібло кладеться на плиті чим раз тоншою верствою і чим раз слабше її чіпається.

2. Позема стрічка $\frac{2}{5} NH_3$.

І тут мішанина мутніє через виділення кристалів, появляються узлові лінії, взагалі зеркало тим гірше, чим більше соли Сеґнета.

3. Позема стрічка $\frac{3}{5} NH_3$.

Найлучші зеркала лежать в середині при $\frac{2}{5}$ і $\frac{3}{5} S$; при $\frac{1}{5} S$ видко місце наливання, при $\frac{5}{5} S$ являються концентричні перстені. Рівнож і поволока тримається около середини найлучше.

4. Позема стрічка $\frac{4}{5} NH_3$.

Доброта зеркал пересувається на право, іменно найлучші є при $\frac{3}{5} S$ і $\frac{4}{5} S$. При $\frac{1}{5} S$ і $\frac{2}{5} S$ мутніє мішанина і мало що зі срібла йде на поволоку.

5. Позема стрічка $\frac{5}{5} NH_3$.

При малій скількости соли Сеґнета мутніє мішанина і вперед виділяється горішна верства. В міру підношення скількости соли Сеґнета зеркала стаються щораз то лучші. Зеркала є вже добрі при $\frac{3}{5} S$.

Що до зміни скількости амоняку, то наводимо лише дві крайні прямовісні стрічки.

1. Прямовісна стрічка $\frac{1}{5} S$.

При малій скількости соли Сеґнета дістаємо лише при малій скількости амоняку добрі зеркала.

Чим більше амоняку, тим скорійше темніє мішанина, при $\frac{3}{5} NH_3$ появляються обі верстви рівночасно, а дальше навіть верхна поволока скорійше чим долішна. Зеркала стають щораз більше прозрачні.

5. Прямовісна стрічка $\frac{5}{5} S$.

При сконцентрованім розтворі соли Сеґнета дістаємо лише при великій скількости амоняку добрі зеркала. Чим менше амоняку, тим пізнійше зачинається реакція, а при малій скількости амоняку не повстає зеркало, а виділюються лише кристали.

Коли получимо квадрати з дуже добрими зеркалами простою, то дістаємо „зеркальну криву“, якої кожда точка дає досконалу рецепту на зеркала, розуміється о скілько є виповнені бездоганно всі прочі умови.

Результатів, що ми їх дістали через зміну рецепти Ост'а, не можемо порівнувати з вислідами поданими вперед.

А саме при розріджуванню розтвору Сеґнета (*C*) ми рівночасно зменшуємо скількість $AgN0_3$ в розтворі II, а ми вперед вже бачили, яке велике значіннє має скількість азотану срібла в редукцийнім розтворі.

Лишається еще до переведення дуже цікавий случай: перевести досліди над рецептою Оста в сей спосіб, щоби скількість срібла була незмінна.

Хоч лишилося нам еще богато невияснених питань, то ми мусіли припинити свої досліди з настанием невідрадних відносин по введенню комунізму. Зрештою ми дігняли цілі, щоби можна було при кождім литтю ґварантувати за першу сорту зеркал.

Зовсім інакше річ малася зі здібністю до розпродажи. Ми лякували з початку наші зеркала жовтим мастиксовим ляком так довго, доки наш аґент не звернув нам уваги, що „русскі“ уважають лише ті зеркала за добрі, які є поляковані на червоно. І доперва коли ми наші зеркала поволікали мініюм-ляком, зачав нам інтерес досконало йти. Ми заробили в короткім часі тисячі рублів, які позволили нам вкінци по довгій, бо шестилітній неволі, побачити рідну хату.

В Тернополі. 1. мая 1922 р.

Про досліди др. Ірени Паранкевич

над елементарним квантом електричности і над фотофорезою.

Подав ***д-р Р. Цегельський.***

Питаннє єствовання елементарного кванта електричности ще досі незовсім прояснене. Тому богато дослідників старається ріжними способами дати остаточну розвязку його. В тій ціли поминають дослідники останнього десятиліття дотеперішну методу творення пересічних вартостий, а намагаються мірити електричні наряди на найменших частинках матерії. Більшість фізиків, що вели сі досліди, переконана, що повелося їм вповні доказати єствованнє вимаґаного теорією елементарного кванта електричности о наряді 4·7 . 10^{10} електростат. одиниць. Сюди належать R. A. Millikan, E. Regener, H. Fletscher, E. Weiss, I. Roux, A. Шидлов, п-а Мурджиновська, A. Таргонський і т. д. На противнім становищі стоїть проф. віденського університету Felix Ehrenhaft, що витворив довкруги себе цілу школу дослідників згаданого проблєму. Поміж ними стрічаємо також нашу землячку п-у Ірену Паранкевич, що працювала через кілька літ у фізикальнім інституті віденського університету і помістила кілька більших праць на обговорену тему у передових німецьких фізикальних журналах, як Wiener Berichte der Akademie der Wissenschaften, Physik. Zeitschrift і Annalen der Physik.

Автор сих стрічок має перед собою отсі праці п-и др. Паранкевич: 1) „Grössen und elektr. Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“ (Phys. Zs. *18*, 1917, стр. 567), 2) Antwort auf die Bemerkung von R. Bär zu der Arbeit: Grössen u. elektr. Ladungen і т. д. (Phys. Zs. *20*, 1919, S. 75), 3) Der kritische Weg zur Feststellung der Existenz einer Atomistik der Elektrizität. Erörtert an Ölkügelchen.1) Sonderabdruck aus Ann. d. Phys. IV. *53*, S. 551) i 4) Über die lichtpositive und die lichtnegative Photophorese. Untersucht am Schwefel u. Selen. (Sonderabdruck aus Ann. d. Phys. IV. *57*, 1918).

Повисші праці виконувала авторка в навязанню до дослідів проф. Ehrenhaft-а і послугувалася його методою. Остання полягає на тім, що у поземо вмонтований кондензатор впроваджується ґаз враз із завішеними частинками якоїсь субстанції. Коли кондензатор не наряджений, то частинки субстанції починають поволи падати в долину. При відповіднім наряджению можна зрівноважити силу тяготи або навіть спонукати частинку посуватися у гору. Таким чином можна усунути з поля зріння всі частинки з виїмком одної, котру саме хочемо обсервувати. З часу падання частинки у ненаряджені́м кондензаторі і руху зглядно рівноваги такої частинки у наряджені́м кондензаторі можна обчислити величину і наряд її. Що до першого, то найліпше надається до сего формулка Stokes-Cunningham-а, після якої рухливість частинки $B = \frac{1}{6\pi\mu a} \cdot \left[1 + \frac{Al}{a}\right]$, де a є луч кулистої частинки, μ співчинник тертя окружаючого ґазу, l середна свобідна довгота дороги ґазових молекулів, A стала, що хитається між вартостями 0·815 і 1·630; рухливість частинки є скоростю її під впливом ділання одиничної сили. Наряд e можна обчислити на основі нерівностий $ef^s > mg$ і $ef^f < mg$, де f^s означає електричну силу, при якій частинка ще йде в гору, а f^f означає електричну силу, при якій частинка вже починає падати. Для контролі ужила п-а Паранкевич також оптичних метод означування величини наряду, а саме обсервації резонанційних красок, що їх показують частинки відповідно до своєї величини, як се доказав G. Mie2) на основі теорії угинання світла, і означування максімального натиску світла в звязи з величиною частинок.

Всі ті методи дали для частинок сірки, витворених парованнєм, згідний вислід навіть для ріжного тисненя окружаючого ґазу, як довго свобідна середна дорога молекула ґазу мала той сам ряд величини, що луч частинки a. При низших тиснен-

---

1) Витяг з більшої праці, опублікованої у „Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften“.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 25, 377, 1908.

нях, для яких $\frac{l}{a}$ є великим числом, треба закон Stokes-Cunningham-а доповнити поправочним членом M. Knudsen-а і S. Webera, а тоді осягається знова згідний вислід.

В тій самій праці досліджувала авторка величину частинок живого срібла, витворених електричним і механічним розпилюванням, а також пароваyням. Оптична метода і закон Stokes-Cunningham-а дали знов згідні висліди.

Метода паровання достарчає лише ненаряджених частинок. Їх наряджувала п-а Паранкевич при помочи йонізовання і доказала, що сірчані кульочки мали наряди величини 10^{-11} ел.-ст. один., подібно селенові, а найменша кульочка із живого срібла о лучі $a = 2{\cdot}0 \,.\, 10^{-6}$ мала наряд $2{\cdot}68 \,.\, 10^{-13}$ ел.-ст. один., отже 1800 рази менший, як електрон, вимаганий теорією.

Друга висше наведена статя є відповідю на замітку R. Bär-а[1]) до першої праці. R. Bär старався доказати, що поміри п-и Паранкевич дають на величину елементарного кванта електричности вартости, що лежать близько теоретичної, коли обчисляти їх при помочи теорії руху Brown-а. Супроти того авторка констатує, що по перше сі вартости є навіть при ужиттю теорії руху Brown-а майже виключно менші, як $4 - 5 \,.\, 10^{-10}$ ел.-ст. один., що впрочім сама авторка справдила вже давнійше[2]), а також і D. Konstatinowsky[3]), по друге Bär обчислив наряди частинок з 10 до 20 мірених вартостий часу падання і піднимання частинки, а се за мало для статистичних обчислень, по трете метода закону Stokes-Cunningham-а видержала пробу, якої поки що висліди теорії рухів Brown-а не видержали, тому величини і наряди частинок обчислені після першої методи є найбільше правдоподібні.

У третій праці подає авторка загальну методу, якою можна сконстатувати, чи якась фізикальна царина (Gebiet) має атомістичну будову, і примінює її до електричности.

Конечною, але не вистарчаючою умовою атомістичної будови даної царини є рівнання $a = n \,.\, \alpha$, де a є якоюсь маленькою зміреною величиною її, n цілим числом, α елементарним квантом. Коли з цілого ряду помірів одержуємо рівнання

---

[1]) R. Bär. Phys. Zs. *19*, 1918, ст. 373.

[2]) I. Parankiewicz. Wien. Akad. Ber. *126*, 1263, 1917; Ann. d. Phys. *53*, 564, 1917.

[2]) D. Konstantinowsky. Wien. Akad. Ber. *123*, 1736, 1914.

$a_i = n_i \, . \, a$, де $i = 1, 2, 3 \, . \, . \, . \, p$, при чім всі a однакові, то припускаємо, що a є елементарним квантом, а царипа побудована атомістично. З рівнання $n_i = \frac{a_i}{a}$ виходить, що одержимо тим докладнійше числа n, чим докладнійше змірнмо a_i. При міренню стараємося замкнути величини a_i у двох границях після нерівностий:

$$1) \quad \left.\begin{array}{l} g_1 < a_1 < g_2 \\ h_1 < a_2 < h_2 \\ \dots\dots\dots \\ k_1 < a_p < k_2 \end{array}\right\}$$

Як з нерівностий 1) одержимо біжучу пропорцію цілих чисел n а саме: $a_1 : a_2 : \, . \, . \, . \, : a_n = n_1 : n_2 : \, . \, . \, . \, : n_p$, то можемо уважати останні многократями величин a. Отже цілий проблем зводиться до того, щоби з ряду незвісних величин, з яких кожда замкнена між двома експериментально найденими границями, найти біжучу пропорцію цілих чисел.

Сю методу завели Ehrenhaft і Konstantinowsky для електричних нарядів. Помір їх полягає на означенню електричної напруги, при якій частинка ще підіймається (f^s) або вже паде (f^f). Так одержимо ряд нерівностий

$$2) \quad \frac{mg}{f_i^s} < e < \frac{mg}{f_i^f},$$

де mg означає тягар частинки, e її наряд, f^s і f^f напруги електричного поля при підниманню зглядно паданню частинки, а $i = 1, 2, 3 \, . \, . \, . \, p$. Через утворенне відношення двох нарядів виходить з двох нерівностий:

$$\frac{f_k^f}{f_i^s} < \frac{e_i}{e_k} = \frac{n_i}{n_k} < \frac{f_k^s}{f_i^f},$$

а відси для p по собі слідуючих нарядів одної і тої самої частинки одержимо завсігди біжучу пропорцію:

$$e_1 : e_2 : e_3 : \, . \, . \, . \, : e_p = n_1 : n_2 : n_3 : \, . \, . \, . \, : n_p$$

або:

$$\frac{e_i}{n_i} = \varepsilon = const.$$

Останнє рівнаннє можемо побудувати на ріжні способи. Без огляду на те, чи наряди тої самої частинки зложені з атомів чи ні, одержуємо без числа таких чисел ε', але лише один найбільший наряд ε, що його можемо уважати елементарним квантом всіх e_i. Се ε є найбільшою спільною мірою нарядів тої самої частинки, а заразом горішною границею евентуального кванта. За те єствованнє меншого наряду не виключене.

На основі сего розумовання приходимо до ось яких висновків:

1. Коли всі наряди, мірені на ріжних частинках, дають таке саме ε, а для ніодного електричного наряду не подибується величини меншої від ε, то се ε можемо правдоподібно уважати електричним атомом.

2. Як для ріжних частинок одержимо ріжні ε, то є певним, що атомістична будова електричности виключена для ряду величин, доступного для сеї методи.

Повисшу методу примінила авторка до дослідів над маленькими кульочками оливи, завішеними у воздусі, з отсим вислідом:

1. Наряди, мірені на краплинах оливи, є або менші від теоретичного елементарного кванта $4{\cdot}7 \,.\, 10^{-10}$ ел.-ст. один. або значно ріжняться від многократий його; найдено всякі можливі наряди так, що не доказано єствовання якогось визначного наряду.

2. Метода замкнення поміж двома границями дала на найбільшу спільну міру більших нарядів вартости далеко менші від $e = 4{\cdot}7 \,.\, 10^{-10}$ ел.-ст. один. Відси висновує авторка, що, як атоми електричности єствують, то лежать у далеко низшім ряді величин, як теоретично вимаганий квант.

Праці п-и Паранкевич викликали дальшу полеміку. І так Ernst Radel¹) стає в обороні елементарного кванта електричности, а Reinhold Fürth²) поборює його на основі його експеріментального матеріялу. Однак годі входити в подробиці, бо се перейшло би межі зачеркненої мети. В кождім разі бачимо, що проблєм не так легкий до вирішення, як зразу здавалося.

В звязи з обговореними працями стоїть праця про фотофорезу себто динамічне діланнє світла на матерію. Се діланнє викрив проф. Ehrenhaft. Він сконстатував, що частинки деяких субстанцій, падучи або підіймаючися в електричнім полі, підлягають відклоненню під впливом сильно сконцентрованих лучів світла. Частинки сірки улягають притяганню; їх називає Ehrenhaft відємними з огляду на світло (lichtnegativ); частинки селену є або додатні або відємні. Діланнє світла залежить від лу-

---

¹) E. Radel, Zeitschrift f. Physik, 3, 1920, стр. 63.

³) R. Fürth, Zs. f. Physik, 3, 1920, стр. 422.

чистої енерґії і від освітленої матерії, а не залежить від роду і тиснення окружаючого ґазу. Сила, з якою ділає світло на частинки матерії, є $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{v}}{B}$, де $\mathfrak{v}$ є скоростю частинки, а B її рухливостю. Досліди робила п-а Паранкевич на кулистих частинках сірки і селєну, яких луч мав величину 8 — 60 . 10^{-6} *cm*. Скорість частинки мірила після методи Ehrenhaft-а, а рухливість зглядно величину її після закону Stokes-Cunningham-а, якого висліди сконтролювала при помочи оптичних обсервацій і теорії. На основі своїх помірів одержала отсі висліди:

1. Частинки сірки порушаються все до світла; вони відємні з огляду на світло, а частинки селєну або відємні або додатні залежно від часу огрівання його.

2. Відємна фотофоретична сила, що ділає на селєн, є 6 разів більша, як сила того самого луча на частинки сірки однакової рухливости.

3. Величина фотофоретичної сили залежить від величини частинки. Відємна фотофореза має maximum для частинок сірки о лучі 27 . 10^{-6} *cm*, а для частинок селєну о лучі 15 . 10^{-6} *cm*.

4. Фотофоретична сила, що ділає на сірку, і відємна фотофоретична сила, що ділає на селєн, не залежать від часу, а додатна фотофореза селєну маліє з часом, бо селєн переходить мабуть у другу відміну.

5. Якість і тиснення окружаючого ґазу не мають впливу на фотофорезу.

6. Незалежність фотофоретичної сили від тиснення і хемічних прикмет окружаючого ґазу, маління додатної фотофорези селєну із-за внутрішної переміни, вкінци факт, що частинки однакової рухливости, але ріжного матеріялу у ріжнім степени підлягають впливови лучистої енерґії, потверджує висновки Ehrenhaft-а, що тут маємо до діла з прямим діланнєм промінистої енерґії на матерію.

PUBLIKATIONEN

der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg

Čarnećkyj-Gasse, 26.

(in ukrainischer Sprache).

Mitteilungen der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften, bis jetzt erschienen Bde I—CXXXII (Geschichte, Archäologie Ethnographie, Sprache und Literaturgeschichte, besonders der Ukraine). B. I—XX vergriffen.

Publikationen der Sektionen und Kommissionen der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften:

A. Die historisch-philosophische Sektion publizierte bis jetzt:

1. 15 Bände ihrer Beiträge (Zbirnyk istoryčno-filosofičnoi sekcii).
   - Bd. I: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. I. (bis Anfang des XI Jahrh.).
   - Bd. II: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. II. (bis Mitte des XIII Jahrh.).
   - Bd. III—IV: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. III (bis zum J. 1340).
   - Bd. V: Materialien zur Kulturgeschichte Galiziens im XVIII—XIX Jahrh.
   - Bd. VI—VII: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. IV (bis zum J. 1569).
   - Bd. VIII—XI: M Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. V (Verfassung und soziale Verhältnisse in XIV—XVII Jahrh.).
   - Bd. X—XI: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. VI (Oekonomische, kulturelle und nationale Verhältnisse in XIV—XVII Jahrh.).
   - Bd. XII—XIII: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine. T. VII (Ukrainische Kosaken bis zum J. 1625).
   - Bd. XIV: M. Hruševśkyj, Geschichte der Ukraine, Bd. VIII, I. Teil.
   - Bd. XVI: Al. Novyćkyj, Taras Ševčenko als Maler.
2. Ukrainisch-ruthenisches Archiv, bisjetz 13 Bde (I—X und XIII—XV).

B. Die philologische Sektion publizierte bis jetzt 18 Bde ihrer Beiträge (Zbirnyk filologičnoi sekcii).

Ukrainische Bibliothek. Bd. I—VIII.

C. Die mathematisch-naturwissenschaftlich-medizinische Sektion publizierte bis jetzt 22 Bände ihrer Beiträge (Zbirnyk). (Band XX erscheint später).

D. Die Archaeographische Kommission publizierte bis jetzt folgende Werke:

1. Quellen zur Geschichte der Ukraine.
   - Bd. I: M. Hruševśkyj, Lustrationen der königlichen Domänen in den Bezirken von Halyč und Peremyšl vom J. 1565—66.
   - Bd. II: M. Hruševśkyj, Lustrationen der königl. Domänen in den Bezirken von Peremyšl und Sanok im J. 1565.
   - Bd. III: M. Hruševśkyj, Lustrationen der königl. Domänen in den Bezirken von Cholm, Bels und Lemberg im J. 1564—5.
   - Bd. IV V: St. Tomašivśkyj, Galizische Akten und Annalen aus den J. 1648—1649.
   - Bd. VI: St. Tomašivśkyj, Galizische Chroniken 1648—1657.
   - Bd. VII: M. Hruševśkyj, Lustrationen vom J. 1570.

Bd. VIII: Iv. Krypjakevyč, Akten zur Geschichte der ukr. Kosaken 1513 1630.
Bd. XII: Dr. M. Korduba, Akten zur Geschichte der ukr. Kosaken 1648 – 1657.
Bd. XXII: Journal von J. Markovyč.

2. Denkmäler der ukrainischen Sprache und Literatur. Bd. I – VII.
3. Kotljarevśkyj, Die travestierte Aeneïs, Abdruck der ersten Ausgabe vom J. 1798.
4. Akten-Sammlung zur Geschichte der sozial-politischen und ökonomischen Verhältnisse der West-Ukraine.
5. Ševčenko, Kobzarj, Facsimile der ersten Ausgabe vom 1840.

E. Statistische Kommission publiziert:

1. Studien aus dem Gebiete der Sozialwissenschaften und der Statistik, bis jetzt 3 Bde.

F. Juridische Kommission publizierte bis jetzt:

1. Juridische Zeitschrift, bis jetzt 10 Bde.
2. Juridische und ökonomische Zeitschrift, bis jetzt 10 Bde.
3. Juridische Bibliothek. bis jetzt 4 Bde.

G. Die Ethnographische Kommission publizierte:

1. Ethnographische Sammlungen (Etnografičnyj Zbirnyk; bis jetzt erschienen 38 Bände. (Band XX erscheint später).
2. Materialien zur ukrainischen Ethnologie; bis jetzt erschienen 20 Bände.

H. Bibliographische Kommission publiziert:

Beiträge zur ukrainischen Bibliographie, bis jetzt 4 Bde.

Chronik der Gesellschaft, enthält Berichte über die Tätigkeit der Gesellschaft, Sektionen und Kommissionen derselben, erscheint 4 Mal im Jahre. Bis jetzt erschienen N. 1—64 ukrainisch und 1—59 deutsch.

Diese und andere Publikationen der Gesellschaft sind in der Buchhandlung der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg, Ringplatz, Nr. 10 vorrätig.

Том XX про „Расовість Славян (ч. II)“ д-ра І. Раковського вийде пізнійше.

Band XX über die „Rassenverhältnisse der Slaven (T. II)“ von Dr I. Rakowśkyj erscheint später.