

NAUK
NO. 11

UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-
ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT XI.

(JÄNNER 1929 — JUNI 1929).

REDIGIERT

VOM VORSTAND DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

THE LIBRARY OF THE

AUG 19 1935

UNIVERSITY OF ILLINOIS

LEMBERG, 1929.

VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

AUG 19 1935

UNIVERSITY OF ILLINOIS

I. Wirkliche Mitglieder der Sektion.

(Klammerzahl = Datum der Ernennung).

A) Mitglieder der ukrainischer Nation.

1. Baley Stephan, phil. u. med. Dr. (8/3 1917), Warschau.
2. Čajkovskýj Nikolaus, phil. Dr. (17/10 1913), Odessa.
3. Čehelskýj Roman, phil. Dr. (18/3 1914), Lemberg.
4. Černiachivskýj Alexander, med. Dr. (1/6 1899), Kyjiv.
5. Feščenko-Tschopivskýj Joh., r. tech. Dr. (6/4 1926), Krakau.
6. Hamorak Nestor, phil. Dr. (16/5 1923), Kamjanetz-Podolskýj.
7. Herasymenko Polikarp, phil. Dr. (30/6 1928), Prag.
8. Hirnjak Julian, r. techn. Dr. (15/1 1908), Lemberg.
9. Horbačevskýj Johann, med. Dr. (1/6 1899), Prag.
10. Janata Alexander, Prof. (16/5 1923), Kyjiv.
11. Kos Michael, med. Dr. (18/3 1914), Peremyšl.
12. Kravcuk (Krawtchouk) Michael, phil. Dr. (14/5 1925), Kyjiv.
13. Krokos Vladimir, Prof. (13/4 1929), Kyjiv.
14. Kryloff Nikolaus, phil. Dr. (24/3 1927), Kyjiv.
15. Kurenskýj (Kourensky) Max, Prof. (13/4 1929), Kyjiv.
16. Kučer Vladimir, phil. Dr. (18/5 1919), Lemberg.
17. Levyčskýj (Lewicky) Vladimir, phil. Dr. (1/6 1899), Lemberg.
18. Łukaševyč Eumen, med. Dr. (13/4 1929), Warschau.
19. Masurenko Basil, Prof. (15 6 1929), Charkiv.
20. Melnyk Nikolaus, Prof. (17/12 1920), Lemberg.
21. Muzyka Max, med. Dr. (13/4 1929), Lemberg.
22. Pavloff Michael, phil. Dr. (13/4 1929), Charkiv.
23. Pančyšyn Marian, med. Dr. (17/12 1920), Lemberg.
24. Polanskýj Georg, Prof. (24/3 1927), Lemberg.
25. Rakovskýj (Rakowsky) Johann, phil. Dr. (8/4 1903), Lemberg.
26. Risnyčenko Vladimir, Prof. (13/4 1929), Kyjiv.
27. Rožanskýj Demetrius, Prof. (13/4 1929), Charkiv.
28. Rudenko Serhij, (18/3 1914), Leningrad.
29. Rudnyčskýj Stefan, phil. Dr. (25/3 1901), Charkiv.
30. Sadovskýj Nikefor, Prof. (6/5 1922), Tarnopol.
31. Stasjuk Basil, phil. Dr. (5/3 1920), Berežany.
32. Tutkovskýj Paul, Prof. (16/5 1923), Kyjiv.
33. Tymošenko Stefan, (16/5 1923), Verein. Staaten, Nordamerika.
34. Tysovskýj Alexander, phil. Dr. (24/3 1927), Lemberg.
35. Velyčko Gregor, phil. Dr. (1/6 1899), Charkiv.
36. Vernadskýj Vladymir, phil. Dr. (29/12 1923), Paris.
37. Zaryčskýj Miron, Prof. (24/3 1927), Lemberg.

B) Mitglieder fremder Nationen.

1. Anthony Raoul, docteur es sciences (18/3 1914), Paris.
2. Bontscheff Georg, phil. Dr. (18/10 1924), Sofia.
3. Boscovitch Stefan, Gen. (22/10 1928), Beograd.
4. Chodounsky Karl, med. Dr. (18/3 1914), Prag.
5. Dzordzevyč Živojun, phil. Dr. (18/10 1924), Beograd.
6. Einstein Albrecht, phil. Dr. (17/3 1929), Berlin.
7. Grave Demetrius, Prof. (16/5 1923), Kyjiv.
8. Hilbert David, phil. Dr. (29/12 1923), Göttingen.
9. Iširkoff Todoroff Anastas, phil. Dr. (18/10 1924), Sofia.
10. Joffe A. F. (28/4 1929), Leningrad.
11. Kral Johann, phil. Dr. (15/6 1929), Prag.
12. Kramberger-Gorjanovič Dragutin, phil. Dr. (18/10 1924),
Zahreb.
13. Manouvrier Léonce, docteur es sciences (18/3 1914), Paris.
14. Matiegka Jindřich, phil. Dr. (17/12 1920), Prag.
15. Milojevyč Boryvoj, phil. Dr. (26/5 1925), Beograd.
16. Penck Albrecht, phil. Dr. (7/9 1918), Berlin.
17. Petkoff Stefan, phil. Dr. (18/10 1924), Sofia.
18. Petrovich Michael, phil. Dr. (18/10 1924), Beograd.
19. Planck Max, phil. Dr. (29/12 1923), Berlin.
20. Pregl Fritz, phil. Dr. (29/12 1923), Graz.
21. Purkyně Cyrill, phil. Dr. (22/10 1928), Prag.
22. Svamera Venzel, phil. Dr. (22/10 1928), Prag.
23. Varičak Vladimir, phil. Dr. (18/10 1924), Zahreb.
24. Vatieff Stefan, phil. Dr. (18/10 1924), Sofia.

C) Gestorben.

1. Dr. Bechtereff Vladimir, Leningrad.
2. Dr. Čvijič Johann, Beograd.
3. Dr. Dakura Josef, Wien.
4. Dr. Drončiloff Krum., Sofia.
5. Dr. Klein Felix, Göttingen.
6. Kosonogoff Vladimir, Kyjiv.
7. Dr. Łomnicki Marian, Lemberg.
8. Dr. Niedźwieckij Julian, Lemberg.
9. Ohonovskýj Peter, Lemberg.
10. Dr. Ozarkevyč Euhén, Lemberg.
11. Dr. Puluj Johann, Prag.
12. Dr. Selskýj Felix, Lemberg.
13. Šuchewyč Vladimir, Lemberg.
14. Verchratskýj Johann, Lemberg.
15. Dr. Vološčak Ostap, Lemberg.
16. Dr. Zalozeckij Roman, Lemberg.

Leitung der Sektion.

Direktor: Dr. Vladimir Levyčkyj, Hauptredakteur der Publikationen der Sektion.

Stellvertreter: Dr. Johann Rakovskýj.

Sekretar: Georg Polanickýj. Leiter des naturwiss. Museums.

Obmann der physiographischen Kommission: Prof. Nikolaus Melnyk, Redakteur der Sammelschrift der Kommission.

Obmann der ärztlichen Kommission: Dr. Marian Pančyšyn.

Obmann der technisch.-wissensch. Kommission: Dr. Michael Pavloff.

II.

Sitzungen der mathematisch - naturwissenschaftlich- ärztlichen Sektion.

CLIV. Sitzung am 31. Jänner 1929.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Die Herren C. Purkyně (Prag), V. Svambera (Prag) und St. Boskovič (Beograd) bedanken sich für ihre Wahl zu wirklichen Mitgliedern der Sektion.

2. Der Vorsitzende gibt eine kurze Übersicht über die Tätigkeit der Sektion im J. 1928.

3. Hr. Melnyk berichtet über zwei Arbeiten des Hrn. Žarškyj: a) „über Cobitinae unserer Flüsse; b) die Änderungen des histologischen Baues der Haut des Beitzkers und der Schleie unter dem Einfluß der Schilddrüse eines Säugetieres“. Die erste Arbeit wurde zur Publikation der physiographischen Kommission übergeben, die zweite wurde abgewiesen, da dieselbe schon früher in der französischen Sprache publiziert wurde.

4. Derselbe legt die Arbeit des Hrn. Prof. Pidhaječkyj (Kyjiv) unter dem Titel: „Bemerkungen zur Einrichtung der Arbeitsuntersuchungen in der Landwirtschaft“ vor. Die Arbeit wurde den Hrn. Dr. Cehelškyj und Dr. Muzyka zum Korreferat übergeben.

5. Hr. Pavloff legt den ersten Teil seiner Arbeit: „Die Grundlagen der Technik des Vacuums“ u. T. Physikalische Methoden der Erzeugung hohes Vacuums (conf. CXXXVIII. Sitzung, Punkt 4.) vor. Die Arbeit erscheint später als ein Band der Sammelchrift der Sektion.

6. Hr. Polanškyj legt seine Abhandlung u. T. „Die Loessterrassen Podoliens am Dnisterfluß“ vor. Die Arbeit erscheint demnächst in der Sammelchrift der Sektion.

7. Hr. Levyčkyj legt die Arbeit des Hrn. Kravčuk u. T. „Sur la methode de Laguerre pour la résolution approchée des équations“ vor. Diese Abhandlung erscheint im Bd. XXVIII. der Sammelchrift.

8. Hrn. Prof. Feščenko-Čopivškyj übergibt seine Abhandlung u. T. „Über einige physikalischen Eigenschaften des rekrystallisierten weichen Eisens und über strukturelle Besonderheiten des rekrystallisierten Baues“. Diese Arbeit erscheint auch in der Sammelchrift der Sektion.

9. Derselbe legt die Arbeit des Hrn. A. Topačevškyj u. T.

„Über die Hydratation des Acetylens“ für die Sammelschrift der Sektion vor.

10. Es wurde beschlossen, den laufenden Band der Sammelschrift dem Hrn. Prof. Dr. Horbačevskýj (Prag) aus Anlaß seines 75-Geburtstages zu widmen. Hr. Ing. Kandiak wurde beauftragt eine Monographie über die Bedeutung dieses großen Chemikers für die Sammelschrift zu bearbeiten.

11. Die Sektion beschliesst die oberste Aufsicht über das naturwissenschaftliche Museum der Gesellschaft selbst zu übernehmen.

12. Dieselbe beschliesst die Journale „Zeitschrift für Rassenphysiologie“ und „Die Eiszeit“ zu abonnieren.

BERICHTE.

Sur la methode de Laguerre pour la résolution approchée des équations.

(par M. Krawtchouk.)

Soit

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = 0$$

une équation aux racines réelles. Alors, sous la condition

$$\frac{f'(x_r)}{f(x_r)} \geq 0,$$

le nombre x_{r+1} déterminé par l'égalité

$$(1) \quad \frac{1}{x_r - x_{r+1}} = \frac{1}{n} \frac{f'(x_r)}{f(x_r)} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \sum_i \left(\frac{1}{x_r - \alpha_i} - \frac{1}{n} \frac{f'(x_r)}{f(x_r)} \right)^2}$$

$$(r = 1, 2, \dots)$$

converge vers un de nombres α_i .

La rapidité de la convergence n'est pas moindre que celle du procédé de Newton et peut être augmentée si l'on prend au lieu de (1) la formule plus générale

$$(2) \quad \frac{1}{x_r - x_{r+1}} = \frac{1}{n} \frac{f'(x_r)}{f(x_r)} + \sqrt{\frac{(n-1)^{2l-1}}{(n-1)^{2l-1} + 1} \sum_i \left(\frac{1}{x_r - \alpha_i} - \frac{1}{n} \frac{f'(x_r)}{f(x_r)} \right)^{2l}}$$

En augmentant indéfiniment l'exposant $2l$ on réduit le procédé à la méthode de Graeffe qui est applicable sans restriction à toutes les équations algébriques.

La formule simplifiée

$$\frac{1}{(x_{r+1} - x_r)^{2l}} = \sum_i \frac{1}{(x_r - \alpha_i)^{2l}}$$

est aussi applicable aux certaines équations transcendantes.

Über die Hydratation des Acetylens

(von A. T o p a č e v š k y j).

Die Reaktion der Hydratation des Acetylens, die technisch im grossen Masstabe, z. B. bei der syntetischen Fabrikation der Essigsäure verwertet wird, ist in der Literatur sehr wenig untersucht und beschrieben.

Der Verfasser hat eine spezielle Methode zur Durchführung dieser Reaktion, wie auch eine Methode zur Analysierung des erhaltenen Produktes erfunden. Als Endresultat seiner Arbeit ergibt sich:

1. Eine dreimal grössere Aciditation der katalytischen Lösung ergibt eine beinahe zweimal grössere Dauerhaftigkeit derselben, ohne die Qualität des Produktes der Hydratation zu beeinflussen.

2. Mit der vermehrten Konzentration des Quecksilbersalzes wächst die absolute Quantität des erhaltenen Acetaldehydes.

3. Dabei vermindert sich die relative Wirkung des Katalysators mit der Vergrösserung der Konzentration, wenn auch langsam: eine 25 grössere Konzentration des Quecksilbersalzes verursacht eine zweimal schwächere Wirkung des Katalysators.

4. Die Verunreinigungen des Rohacetylens vermindern die katalytische Wirkung des Quecksilbers um $\frac{1}{3}$ im Vergleiche mit der Wirkung bei dem reinen Acetylen.

5. Eine Entfernung des Acetaldehydes vom Reaktionsraume mit der Geschwindigkeit 2 m/s der Dämpfe vergrössert die Dauerhaftigkeit des Katalysators um 3,3 im Vergleiche mit der Arbeitsweise, die in der Literatur angeführt wurde, wenn man den Acetaldehyd vom Reaktionsraume entweder gar nicht, oder erst nach der Erschöpfung der katalytischen Wirkung des gebrauchten Quecksilbers entfernt hat.

CLV. Sitzung am 19. Februar 1929.

Vorsizender Hr. L e v y ć k y j.

1. Das Erscheinen der Sitzungsberichte Heft X wurde zur Kenntnis genommen.

2. Hr. Prof. A. S e m e n c o f f (Kyjiv) übersendet seine Abhandlung u. T. „Zur ukrainischen chemischen Terminologie“. Auf Grund des Referates des Hrn. C e h e l š k y j wurde beschlossen diese Arbeit mit den entsprechenden Bemerkungen und Beschlüssen der Sektion im Bd. XXVIII der Sammelschrift zu veröffentlichen.

CLVI. Sitzung am 17. März 1929.

Vorsitzender Hr. L e v y ć k y j.

1. Es wurde beschlossen die Arbeit des Hrn. P i d h a j e ć k y j (conf. CLIV. Sitzung, Punkt 4), in der Sammelschrift der physiographischen Kommission zu veröffentlichen.

2. Die Abhandlung des Hrn. A. M u s i a n o w y c z u. T. „Über eine mögliche Erklärung der Gravitationsformel“ wurde dem Hrn. Dr. K u č e r zum Gutachten übergeben.

3. Hr. Dr. Cehel'skyj liest seine Bemerkungen zur ukrainischen chemischen Terminologie des Prof. Semencoff (vgl. vorige Sitzung). Hr. Dr. Kandiak wurde beauftragt ein Korreferat über diesen Stoff für die nächste Sitzung vorzubereiten.

4. Hr. Dr. Einstein wurde zum wirklichen Mitglied der Sektion gewählt; gleichzeitig wurde einhellig beschlossen, ihm aus Anlass seines Jubiläums ein Huldigungsschreiben zu übersenden.

CLVII. Sitzung am 13. April 1929.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Es wurde ein Schreiben des Hrn. A. Einstein mit Dankworten für seine Ernennung zum wirklichen Mitglied vorgelesen.

2. Die im Punkt 2 der vorigen Sitzung vorgelegte Arbeit des Hrn. Musianowycz wurde als nicht geeignet gefunden.

3. Hr. Dr. Muzyka berichtet über seine Untersuchungen u. T. „Quantitative Untersuchungen über den Verlauf der Agglutination der Hämolyse und der Komplementbildungen“. Die Arbeit erscheint später.

4. Hr. Polan'skyj berichtet, dass seine Abhandlung „Über die Lössschichten im Lichte der Untersuchungen des Hrn. I. Sawicki“ im Bd. X der „Wiadomości archeologiczne“ in der polnischen Sprache erschienen ist.

5. Das Korreferat des Hrn. Kandiak (vergl. Punkt 3 der vorigen Sitzung) wurde vorgelesen und erscheint demnächst zusammen mit der Arbeit des Hrn. Prof. Semencoff und dem Referat des Hrn. Cehel'skyj in der Sammelschrift der Sektion.

6. Auf Grund des Berichtes des Hrn. Dr. Pavloff wurde beschlossen, bei der Sektion eine wissenschaftlich-technische Kommission zu bilden. Zur Organisation derselben wurde seitens der Sektion Hr. Dr. Pavloff designiert.

7. Zu wirklichen Mitgliedern der Sektion wurden einhellig die Herren: Dr. Pavloff Michael (Lemberg), Dr. Muzyka Max (Lemberg), Dr. Łukaševyč Eumen (Warschau), Prof. Kuren'skyj Max (Kyjiv), Prof. Rožan'skyj Demetrius (Charkiv), Prof. Riznyčenko Vladimir (Kyjiv), Prof. Krokos Vladimir (Kyjiv) gewählt.

CLVIII. Sitzung am 28. April 1929.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Im Anschluss an den Punkt 7. der vorigen Sitzung wurde Prof. A. F. Joffe (Leningrad) zum wirklichen Mitglied der Sektion gewählt.

2. Es wurde zur Kenntnis genommen, dass die technisch-wissenschaftliche Kommission zu ihrem Obmann den Hrn. Dr. Pavloff, zum Obmannstellvertreter den Hrn. Ing. Kandiak, zu den Sekretären die Hrn. Ing. Pasternak u. Romanenko gewählt hat.

3. Es wurde beschlossen bei der Sektion eine Sammelschrift der obigen Kommission nicht periodisch herauszugeben.

CLIX. Sitzung am 18. Mai 1929.

Vorsitzender Hr. Levyckyj.

1. Hr. Kravčuk (Kyjiv) legt seine Arbeit u. T. „Sur la résolution approchée des équations linéaires intégrales et différentielles“ (siehe unten) vor.

2. Hr. Kurenškyj (Kyjiv) legt seine Arbeit u. T. „Die Methoden der Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. u. 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen“ vor.

Die Arbeit erscheint im Bd. XXVIII der Sammelschrift der Sektion, unten erscheint vorläufig ein Résumé derselben.

3. Es wurde über die Anteilnahme der Sektion an dem im September l. J. stattfindenden Kongress slavischer Mathematiker in Warschau diskutiert, ohne einen Beschluss zu fassen.

B E R I C H T E.

Sur la résolution des systèmes des équations
intégrales linéaires.

(Par M. Krawtchouk.)

Soit $y(x)$ la solution unique de l'équation

$$L[y] = y(x) + \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x).$$

Dans une de mes notes antérieures (voir Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 188, p. 978) il est démontré le théorème suivant:

1. Si le système des fonctions

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

est complet, alors la somme

$$y_m(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x)$$

définie par les équations

$$\int_0^1 L[y_m] \varphi_i dx = \int_0^1 f \varphi_i dx \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

vérifie l'égalité:

$$\int_0^x y dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x y_m dx$$

si de plus la dérivée $y^{(1+\delta)}$ ($\delta > 0$) existe, on a aussi

$$y = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$$

Par la même voie on peut établir des résultats plus généraux. Soit par exemple

$$z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_k(x, y)$$

la solution unique du système des équations

$$\begin{aligned} L_j[z_1, z_2, \dots, z_k] &= z_j(x, y) + \iint_{(s)} \sum_{i=0}^k K(x, y; \xi, \eta) z_i(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= f_j(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

dans le domaine S , et soit

$$\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots$$

un système complet des fonctions dans le même domaine. Alors on a le théorème suivant:

2. Si les dérivées des fonctions $z_j(x, y)$ sont continues, alors les sommes

$z_{jm}(x, y) = a_0 \varphi_0(x, y) + a_1 \varphi_1(x, y) + \dots + a_m \varphi_m(x, y)$
définies par les équations

$$\begin{aligned} \iint_{(s)} L_j[z_{1m}, z_{2m}, \dots, z_{km}] \varphi_i dx dy &= \iint_{(s)} f_j \varphi_i dx dy \\ (j = 1, 2, \dots, k; i = 0, 1, \dots, m) \end{aligned}$$

vérifient les égalités:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_{jm} = z_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

A titre d'application prenons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - A(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - B(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} - C(x, y) z = f(x, y).$$

Soit z sa solution unique dans le domaine s satisfaisant aux certaines conditions frontières homogènes. En introduisant les notations

$$u = \frac{\partial z}{\partial x} \quad v = \frac{\partial z}{\partial y}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} (1) \quad z(x, y) &= \iint_{(s)} \mathfrak{G} [A(\xi, \eta) u(\xi, \eta) + B(\xi, \eta) v(\xi, \eta) + C(\xi, \eta) z(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ &= \iint_{(s)} \mathfrak{G} s f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$2) u(x,y) - \iint_{(S)} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial x} [A(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + B(\xi,\eta)v(\xi,\eta) + C(\xi,\eta)z(\xi,\eta)] d\xi d\eta$$

$$= \iint_{(S)} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial x} f(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

$$(3) v(x,y) - \iint_{(S)} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial y} [A(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + B(\xi,\eta)v(\xi,\eta) + C(\xi,\eta)z(\xi,\eta)] d\xi d\eta$$

$$= \iint_{(S)} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial y} f(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

ou \mathcal{G}_s ne diffère de la fonction de Green de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

que par un facteur constant.

Si l'on applique maintenant au système (1), (2), (3) le théorème 2., on obtiendra une méthode convergente d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique.

Diverses autres applications et quelques généralisations s'imposent immédiatement.

Die Grundformen zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen.

(von M. K. Kuren'skyj (Kuren'sky)).

I. Die in Jacobischen Determinanten lineare Gleichungen haben folgende Gestalt:

$$M + \sum_i^k M_i^k P_i^k + \sum_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} M_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} P_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} + \dots + \sum_{1 2 \dots m}^{k_1 k_2 \dots k_m} M_{1 2 \dots m}^{k_1 k_2 \dots k_m} P_{1 2 \dots m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = 0$$

$$(i; i_1, i_2; \dots = 1, 2, \dots, m; k; k_1, k_2; \dots, k_m = 1, 2, \dots, n, \\ i_1 \neq i_2, \dots; k_1 \neq k_2, \dots)$$

für $n \geq m$, und

$$M + \sum_i^k M_i^k P_i^k + \sum_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} M_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} P_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} + \dots + \sum_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} M_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} P_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} = 0$$

$$(i; i_1, i_2, \dots, i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots, m; k; k_1, k_2, \dots = 1, 2, \dots, n; \\ i_1 \neq i_2, \dots; k_1 \neq k_2, \dots)$$

für $n \leq m$, wobei

$$P_i^k = \frac{\partial z^k}{\partial x_i}; P_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} = D \left(\frac{z_{k_1} \ z_{k_2}}{x_{i_1} \ x_{i_2}} \right); \dots P_{1 2 \dots m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = D \left(\frac{z_{k_1} \ z_{k_2} \ \dots \ z_{k_m}}{x_{i_1} \ x_{i_2}, \dots, x_{i_n}} \right)$$

$$\dots \dots \dots P_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n} = D \left(\frac{z_1, z_2, \dots, z_n}{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}} \right)$$

$$D \left(\frac{z_{k1}, z_{k2}}{x_{i1}, x_{i2}} \right) = \frac{\partial (z_k, z_{k2})}{\partial (x_{i1}, x_{i2})}$$

Ein spezieller Fall der Gleichungen (1), (2) ist die im Bezug auf die Ableitungen lineare Gleichung:

$$M + \sum_i^k M_i^k \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

Die Hamburger'schen Bedingungen in der Anzahl

$C_{m+n}^m - mn - 1$, haben für die Gleichung (1) die Form:

$$M \neq 0 \quad (4)$$

$$M_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} M = \begin{vmatrix} M_{i_1}^{k_1} & M_{i_2}^{k_1} \\ M_{i_1}^{k_2} & M_{i_2}^{k_2} \end{vmatrix} \quad M_{i_1 i_2 i_3}^{k_1 k_2 k_3} M^2 = \begin{vmatrix} M_{i_1}^{k_1} & M_{i_2}^{k_1} & M_{i_3}^{k_1} \\ M_{i_1}^{k_2} & M_{i_2}^{k_2} & M_{i_3}^{k_2} \\ M_{i_1}^{k_3} & M_{i_2}^{k_3} & M_{i_3}^{k_3} \end{vmatrix}$$

$$\dots M_{1 2 \dots m}^{k_1 k_2 \dots k_m} M^{m-1} = \begin{vmatrix} M_1^{k_1} & M_2^{k_1} & \dots & M_m^{k_1} \\ M_1^{k_2} & M_2^{k_2} & \dots & M_m^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1^{k_m} & M_2^{k_m} & \dots & M_m^{k_m} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Sind alle algebraischen Bedingungen (4) (5) erfüllt, dann ist das allgemeine Hamburger'sche Integral der Gleichung (1)

$$\varphi (u_1, u_2, \dots u_m) = 0 \quad (6)$$

wobei φ eine beliebige Funktion, und $u_1, u_2, \dots u_m$ Funktionen von $x_1, \dots x_m; z_1, \dots z_n$, partikuläre Integrale des Systems:

$$M \frac{\partial u}{\partial z_1} = M_1' \frac{\partial u}{\partial x_1} + M_2' \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + M_m' \frac{\partial u}{\partial x_m} \quad (7)$$

$$M \frac{\partial u}{\partial x_1} = M_1^n \frac{\partial u}{\partial x_1} + M_2^n \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + M_m^n \frac{\partial u}{\partial x_m} \text{ bedeuten.}$$

Für der Gleichung (3) haben wir $(m-1)(n-1)$ algebraische Hamburger'sche Bedingungen:

$$\frac{M_{i_1}^{k_1}}{M_{i_1}^k} = \frac{M_i^{k_1}}{M_i^k}, \text{ oder } \frac{M_{i_1}^{k_1}}{M_i^{k_1}} = \frac{M_i^k}{M_i^k} \quad (8)$$

Um ein System von n linearen Gleichungen (3) zu integrieren

$$M_r = M_i^k M_r^i \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots n),$$

muss man mit Hinsicht darauf, dass

$$(\lambda M) = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_n M_n; (\lambda M_i^k) = \lambda_1 M_{i1}^k + \dots + \lambda_n M_{in}^k$$

$$\frac{(\lambda M_2')}{(\lambda M_1')} = \frac{(\lambda M_2^2)}{(\lambda M_1^2)} = \dots = \frac{(\lambda M_2^n)}{(\lambda M_1^n)} = \mu,$$

bedeuten, die charakteristische Gleichung n-ten Grades für μ :

$$\begin{vmatrix} M_{12}' - \mu M_{11}', \dots, M_{n2}' - \mu M_{n1}' \\ M_{12}^n - \mu M_{11}^n, \dots, M_{n2}^n - \mu M_{n1}^n \end{vmatrix} = 0$$

auflösen, wobei jeder Wurzel μ_k die Gleichung:

$$(\lambda^k M) + \sum_i^k (\lambda^k M_i^k) \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

für welche das Integral die Form (6) besitzt, entspricht ¹⁾.

Für ein System von n linearen Gleichungen (3) müssen $(m-2)(n-1)$ algebraische Bedingungen erfüllt werden.

Wird die Bedingung (4) nicht erfüllt und kommt dabei eine der Bedingungen

$$M_i^k \leq 0$$

dann ändern sich für die Gleichung (1) entsprechend die Bedingungen (5) und das System (7) bekommt die Form:

$$M_i^k \frac{\partial z}{\partial z_1} = M_{i1}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + M_{ii-1}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \dots + M_{in}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

.....

$$M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_{k1}} = M_{i1}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + M_{ii-1}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^{k-1} \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \dots +$$

$$M_{im}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$- M_i^k \frac{\partial u}{\partial x_i} = M_{i1}^k \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + M_{ii-1}^k \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} - M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^k \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \dots + M_{im}^k \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_{k+1}} = M_{i1}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + M_{ii-1}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^{k+1} \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \dots +$$

$$M_{im}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

.....

$$M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_n} = M_{i1}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + M_{ii-1}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^n \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \dots + M_{im}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

¹⁾ Hamburger. — Crelle Journ., Bd. 100, 1886, pp. 390—404.

Für eine lineare Gleichung (3) bleiben die Bedingungen der Proportionalität (8) so wie auch das System (7) ohne Änderung¹⁾.

Das System von $\mu n + \nu$ Gleichungen, wobei $1 \leq \mu \leq m-1$; $0 \leq \nu \leq n-1$, müssen noch die Bedingungen, die wir im nächsten Abschnitt anführen, erfüllen.

Für ein System von mn Gleichungen 1. Ordnung, das in Bezug auf alle Ableitungen gelöst ist, von der Gestalt

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i} = f_{ik}(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n)$$

bekommen wir die Bedingungen der Integrierbarkeit aus der Identität

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_j \partial x_i} \quad (j = 1, \dots, m) \dots$$

Mittels der Mayer'schen Substitution der Variablen:

$$x_l = x_l^0 + y_l; \quad x_l = x_l^0 + y_l y_e \quad (l = 2, 3, \dots, m)$$

kann man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt:

$$\frac{dz_1}{dy_1} = F_1(y_1, y_2, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n), \dots, \frac{dz_n}{dy_1} = F_n(y_1, y_2, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n)$$

integrieren²⁾.

Im Hamburger'schen allgemeinen Integral $\varphi_1(u'_1, u'_2, \dots, u'_m) = 0$; $\varphi_2(u_1^2, u_2^2, \dots, u_m^2) = 0$; ... für ein System der Gleichungen von der Form (1), (2), (3), muss ein jedes Paar der beliebigen Functionen φ wenigstens in einem ihrer Argumente u verschieden sein.

Für ein System von $\mu n + \nu$ Gleichungen, linearen oder nichtlinearen, hat das vollständige Integral die Form:

$$z_k = \Phi_k[x_1, \dots, x_m; C_1, C_2, \dots, C_{n(m-\mu+1)-\nu}] \quad (k = 1, \dots, n)$$

wobei C_1, C_2, \dots beliebige Konstanten bedeuten.

Das allgemeine Integral eines Systemes von $\mu n + \nu$ Gleichungen bestimmt man mittelst des Theoremes von C. Bourlet — E. von Weber, auf Grund welches dasselbe $n - \nu$ beliebige Functionen von $m - \mu$ Argumenten sowie ν beliebige Functionen von $m - \nu - 1$ Argumenten haben muss³⁾.

Die Variation der beliebigen Konstanten für der Über-

1) М. Куренський. Записки фіз.-мат. Від. Укр. Ак. Наук, т. II. в. 1, 1926; Труды фіз.-мат. Від. Укр. Ак. Наук, т. V, в. 3, 1927, ст. 119.

2) C. Bourlet: Annales de l'Ec. Norm., s. (3), t. 8, 1891; suppl., pp. 7—8.

3) E. von Weber: Mathem. Annalen, Bd. 49, 1897, s. 551.
C. Bourlet: Annales de l'Ec. Norm., (3) s., t. 8, 1891, suppl., p. 43.

gang vom vollständigen zum allgemeinen Integral behandeln die Untersuchungen von L. Königsberger und M. Kurenskýj ¹⁾.

Für die Gleichungen von Typus (1), (2), (3) kann man sich, wenn die Hamburger'schen algebraischen Bedingungen nicht genügen, der Integrationsmethode von M. Kurenskýj bedienen²⁾, welche derselbe für zwei und drei Funktionen, wie auch für m unabhängige Variablen genau durchgeführt hat. Diese Methode geht in die Hamburger'sche über, wenn für die Koeffizienten die Hamburger'schen algebraischen Bedingungen durchgeführt werden.

Das Integrieren von nichtlinearen Gleichungen mit nur zwei unabhängigen Variablen erlernt man in den Arbeiten von Hamburger, Nasimoff, E. von Weber und Beudon³⁾.

II. Das Integrieren der nichtlinearen Gleichungen 1. und 2. Ordnung beruht auf meinen Untersuchungen, welche ich eben in der Sammelchrift der math. natur. Sektion der Ševčenko — Gesellschaft publizieren.

Die Bedingungen der Übereinstimmung eines Systemes von $\mu n + \nu$ Gleichungen 1. Ordnung

$$F_g(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p_1', p_2', \dots, p_m^n) = 0 \quad (g = 1, 2, \dots, \mu n + \nu) \quad (9)$$

wobei $1 \leq \mu \leq m-1; 0 \leq \nu \leq n-1$

$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n),$$

reduzieren sich zur Nullgleichheit der

$$(\rho - \sigma + 1)(\tau - \sigma + 1)$$

Determinanten σ Ordnung einer Matrix mit ρ Zeilen und τ Kolumnen, wo:

$$\sigma = (m - \mu) \nu + \frac{1}{2} \mu n (2m - \mu + 1) + 1$$

$$\rho = m(\mu n + \nu); \tau = \frac{1}{2} m(m + 1)n + 1,$$

von der Gestalt:

¹⁾ Z. Königsberger: Crelle Journ., Bd. 109.

M. Куренський: Труды фіз.-мат. Від. Укр. Ак. Наук, т. 5, в. 3, розд. VI, VII.

²⁾ M. Kourensky: Proceedings of the London Math. Soc., vol. 27, 1927; § 3; Труды фіз. мат. Від. Укр. Ак. Наук, Т. 5. в. 3, розд. IX.

³⁾ Hamburger: Crelle Journ., Bd. 81, 1875; Bd. 93. 1892. — П. С. Назимовъ: Обь интегрированіи нѣкоторыхъ классовъ уравненій, Москва, 1883. — E. von Weber: Crelle Journ., Bd. 118, 1897; J. Beudon: C. R. t. 125, 1897.

Die Bedingung der Übereinstimmung 1. Kategorie wird nur eine sein, und zwar, wenn $\sigma = \rho$ d. h. für

$$\mu n + 2 = \mu (\mu n + 2\nu).$$

Mann kann sich leicht überzeugen, dass es für ein System von 2 Gleichungen mit einer Funktion z und für ein solches System, dass die Anzahl seiner Gleichungen um Einheit die Anzahl der Funktionen z_1, \dots, z_n : $\mu = 1, \nu = 1$ übersteigt, sein wird.

Für diesen speziellen Fall, wenn wir ein System von 2 Gleichungen mit einer Funktion z

$$F_g(x_1, \dots, x_m; z, p_1, \dots, p_m) = 0 \quad (g = 1, 2)$$

haben, reduziert sich die Bedingung der Übereinstimmung 1. Kategorie auf die Nullgleichheit der Poisson-Weiler'schen Klammern $[F_1, F_2] = 0$, und alle Bedingungen der Übereinstimmung zweiter Kategorie werden zu den Identitäten.

Für ein System von q Gleichungen 1. Ordnung mit einer Funktion z :

$$F_g(x_1, \dots, x_m; z, p_1, \dots, p_m) = 0 \quad (g = 1, 2, \dots, q)$$

kann man die Bedingungen der Übereinstimmung für jedes Paar der Gleichungen besonders untersuchen, — dann werden wir bekannte Bedingungen $[F_h, F_l] = 0$ und $(F_h, F_l) = 0$, oder für Gesamtheit aller 3, 4... und q Gleichungen haben und dann bekommen wir neue, den Bedingungen der Nullgleichheiten der Poisson-Weiler'schen Klammern äquivalente Bedingungen; das wird die erste Verallgemeinerung der Poisson-Weiler'schen Klammern sein.

Für ein System von der Form

$$F_g(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p_1^k, \dots, p_m^k) = 0 \quad (g = 1, 2)$$

wir die Bedingung der Übereinstimmung $\{F_1, F_2\} = 0$ sein, wobei

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F_1}{\partial p_i^k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial z_l} p_i^l \right) - \frac{\partial F_2}{\partial p_i^k} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial z_l} p_i^l \right) \right];$$

das gibt die zweite Verallgemeinerung der Poisson-Weiler'schen Gleichungen; spezielle Fälle für $n = 1$ werden:

$$[F_1, F_2] = 0; \quad (F_1, F_2) = 0 \quad \text{sein.}$$

Um ein System von n Gleichungen 1. Ordnung mit n unbekanntenen Funktionen

$$F_g(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p_1', p_2', \dots, p_m^n) = 0 \quad (g = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

zu integrieren, nehmen wir die Gleichungen

$$\Phi(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p_1', p_2', \dots, p_m^n) = \text{Const.} \quad \text{dazu.}$$

Wir bekommen eine Bedingung der Übereinstimmung der $(n+1)$ Gleichungen (13), (14) 1. Kategorie und $\frac{1}{2} m(m-1) - m + 1$ Bedingungen der Übereinstimmung 2. Kategorie. Alle diese Bedingungen

der Übereinstimmung geben ein System von Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekanntem Funktion Φ , von der Form:

$$\Psi(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p'_1, \dots, p'_m; \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}; \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial z_n}; \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial p'_m}) = 0 \quad (15)$$

$$\Psi_h(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p'_1, \dots, p'_m; \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial p'_m}) = 0 \quad [h = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} m (m - 1) - m + 1]. \quad (16)$$

Aus $n(m-1)$ partikulären Integralen $\Phi_1 = C_1, \dots, \Phi_{n(m-1)} = C_{n(m-1)}$ des Systems (15), (16), falls dasselbe ein übereinstimmendes System ist, solchen, dass dieselben mit dem gegebenen System (13) ein übereinstimmendes System von mn Gleichungen bestimmen, bekommen wir p'_1, \dots, p'_m als Funktionen von $x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; C_1, \dots, C_{n(m-1)}$ und finden mittelst der Quadraturen die Funktionen z_1, \dots, z_n aus den Abhängigkeiten:

$$dz_k = p_1^k dx_1 + \dots + p_m^k dx_m \quad (k = 1, \dots, n).$$

Bei der Integration eines übereinstimmenden Systems von $\mu n + \nu$ Gleichungen von der Gestalt (13), mit der gleichzeitigen Benützung der Gleichung (14), bekommen wir ein System der Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekanntem Funktion Φ ; dieses System wird aus einigen Gleichungen (15) und einigen Gleichungen (16) bestehen.

Für den partiellen Fall einer einzigen unbekanntem Funktion z haben wir die Jakobische Integrations-Methode. Für eine Gleichung (13) mit $n=1$ bekommen wir nur eine Gleichung von der Form (15), für ein System von q Gleichungen (13) bekommen wir ein System der Gleichungen (15).

III. Um ein System von 2 Gleichungen 1. Ordnung mit zwei abhängigen Variablen z_1, z_2 und zwei unabhängigen x_1, x_2 :

$$F_g(x_1, x_2; z_1, z_2; p'_1, p'_2; p_1^2, p_2^2) = 0 \quad (g = 1, 2), \quad (17)$$

wo
$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2),$$

zu integrieren, adjungieren wir zum System (17) die Gleichung von der Gestalt:

$$\Phi(x_1, x_2; z_1, z_2; p'_1, p'_2; p_1^2, p_2^2) = \text{Const.}$$

Wenn wir die Bezeichnungen:

$$X_h^g = \frac{\partial F_g}{\partial x_h} + \frac{\partial F_g}{\partial z_1} p'_h + \frac{\partial F_g}{\partial z_2} p_h^2; \quad X_h^3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_h + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_h^2$$

$$P_h^k = \frac{\partial F_g}{\partial p_h^k}; \quad P_h^3 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_h^k} \quad (h, g, k = 1, 2),$$

einführen, bekommen wir die Bedingungen der Übereinstimmung in der Form der Nullgleichheit von 2 Determinanten 6. Ordnung der Matrix

$$\left| \begin{array}{cccccc} X_3 & P_3^2 & P_3' & P_3' & P_3^2 & O & O \\ X_1 & P_1^2 & P_1' & P_1' & P_1^2 & O & O \\ X_2 & P_2^2 & P_2' & P_2' & P_2^2 & O & O \\ X_2 & P_1^2 & P_1' & O & O & P_1' & P_1^2 \\ X_2 & P_2^2 & P_2' & O & O & P_2' & P_2^2 \\ X_3 & P_3^2 & P_3' & O & O & P_3' & P_3^2 \end{array} \right| \quad (18)$$

indem wir zu der von Null verschiedenen Determinante 5. Ordnung Δ der Matrix eine nach der anderen von den Zeilen und Kolumnen zuschreiben.

Die Aufgabe der Integration der Gleichung (17) reduziert sich zum Bestimmen von zwei mit den Gleichungen (17) übereinstimmenden partikulären Integralen $\Phi_1 = C_1$; $\Phi_2 = C_2$ einer linearen Gleichung erster Ordnung mit einer unbekanntem Funktion Φ , wenn die Gleichungen (17) keine einzige Ableitung p_i^k enthalten.

Hat (17) nur eine Ableitung p_i^k , dann gibt die Elimination derselben $f(x_1, x_2; z_1, z_2) = 0$; wenn wir von da z_2 finden und in (17) einsetzen, bekommen wir eine Gleichung 1. Ordnung mit einer einzigen Funktion z_1 .

Hat (17) nur zwei Ableitungen von p_i^k , dann bekommen wir bei den Bezeichnungen:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_i^k, p_j^l}\right) = D_{ij}^{kl}; D\left(\frac{F_1, F_2}{p_i^k, x_j}\right) = D_{ij}^{ko} \quad (i, j; k, l = 1, 2)$$

folgende Fälle:

1) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_1^2}\right) \neq 0$ muss man partikuläre Integrale, die wenigstens eine Variable p_2' , oder p_2^2 haben, aus der Gleichung

$$D_{11}^{22} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{12}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{11}^{01} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}^{01} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \quad \text{suchen};$$

2) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2^2, p_2^2}\right) \neq 0$ partikuläre Integrale, die wenigstens p_1' oder p_1^2 haben, aus der Gleichung

$$D_{22}^{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_2' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right) + D_{12}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{21}^{00} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{00} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0$$

3) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) \neq 0$ kann man partikuläre Integrale von einem

der zwei Systeme

$$D_{21}^{2'} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{12}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{11}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} = 0,$$

bei $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} = 0$, oder

$$D_{21}^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_2' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{11}^{10} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{12}^{10} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} = 0,$$

bei $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} = 0$ suchen;

4) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1^2}\right) \geq 0$ kann man partikuläre Integrale von

irgend einem der zwei Systeme

$$D_{12}^{2'} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{11}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{21}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} = 0,$$

bei $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} \geq 0$, oder

$$D_{12}^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_2' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right) + D_{11}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{21}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0,$$

bei $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} = 0$ suchen;

5) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2'}\right) = 0$ ist die Bedingung der Übereinstimmung

folgend: $\{F_1, F_2\} = 0$; die Elimination vom System (17) der Funktion z_2 führt zum Integrieren der Gleichung 1. Ordnung mit einer Funktion z_1 : $f(x_1, x_2, z_1, p_1', p_2') = 0$.

6) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) \leq 0$ bekommt man den Fall 5), wenn wir

den oberen Index 1 mit 2 vertauschen.

Hat (17) nur drei Ableitungen von allen p_i^k , dann haben wir folgende Fälle:

1) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1^2}\right) \leq 0$, oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_2^2}\right) \geq 0$, wie auch

$$D_{12}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{2'}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}'^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} \geq 0, \text{ findet man die Funktion } \Phi \text{ aus:}$$

$$D_{12}^{2'} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{22}^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_2' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right) + (D_{11}^{02} + D_{22}^{02}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{21}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} = 0; \text{ die Elimination der Variab-}$$

len p' aus den Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = \text{Const.}$ führt zum Fall 6).

2. Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p_2^2}\right) \leq 0$ oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p_1^2}\right) \geq 0$, wie auch

$$D_{12}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D_{21}^{21} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{11}^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} \leq 0 \text{ haben wir für } \Phi:$$

$$D_{11}^{21} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{21}^{21} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right) +$$

$$\left(D_{11}^{02} + D_{22}^{02} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + D_{11}^{10} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{12}^{10} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0;$$

3) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p_2^2}\right) \leq 0$, oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p_2^2}\right) \leq 0$, wie auch

$$D_{22}^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D_{21}^{21} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} + D_{12}^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} \leq 0 \text{ haben wir für } \Phi:$$

$$D_{12}^{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p'_2 \right) + D_{22}^{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right)$$

$$+ D_{21}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + D_{22}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \left(D_{11}^0 + D_{22}^1 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} = 0;$$

4) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p_1^2}\right) \geq 0$, oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p_1^2}\right) \geq 0$, wie auch

$$D_{21}^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D_{11}^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} + D_{12}^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} \geq 0 \text{ ist für } \Phi:$$

$$D_{11}^{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{21}^{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right)$$

$$+ D_{11}^{10} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + D_{12}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \left(D_{22}^0 + D_{11}^0 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0.$$

IV. Um die allgemeine Gestalt des Systems von zwei Gleichungen erster Ordnung (17) zu integrieren, wenn wir eine von Null verschiedene Determinante Δ 5. Ordnung, z. B. von 5 letzten Zeilen und Kolumnen der Matrix (18) nehmen, hat man die Beschränkungen:

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p_1^2}\right) \geq 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p'_2, p_2^2}\right) \geq 0; \quad (19)$$

bei welchen wir ein folgendes System der nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der unbekanntten Funktion Φ :

$$\begin{cases} D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p_2^2, x_2}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p_1^2, p_2}\right) = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p_1^2, x_1}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p_2^2, p_1}\right) \\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p_2^2, x_2}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p_1^2, p_2^2}\right) = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p_1^2, x_2}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p_2^2, p_1}\right) \end{cases}$$

bekommen; dieser System behält seine Bedeutung auch bei folgenden zwei Beschränkungen statt (19):

$$1) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_2^2} \right) \leq 0; \quad 2) D \left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1', p_2', p_1^2} \right) \leq 0.$$

Die Aufgabe das System (17) zu integrieren reduziert sich auf die Aufgabe zwei mit (17) übereinstimmende partikuläre Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ des Systems der Gleichungen 1. Ordnung (20) mit einer unbekanntem Funktion Φ zu finden.

Das Integrieren des Systems (20) reduziert sich zur Integration einer von folgenden Systemen von linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer Funktion Φ : (I)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 D_{11}'^2 \frac{d\Phi}{dx_1} + D_{22}'^1 \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_1 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_1 D_{11}^{01} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{01} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ \left(\lambda_1 D_{12}^{21} + D_{22}^{21} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + \left(\lambda_1 D_{11}'^2 + D_{12}^{12} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_1 D_{21}''^1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}''^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ \lambda_2 D_{11}'^2 \frac{d\Phi}{dx_1} + D_{22}'^2 \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_2 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_2 D_{11}'^1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ \lambda_2 D_{12}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{12}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \left(\lambda_2 D_{21}^{21} + D_{22}^{21} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + \left(\lambda_2 D_{11}'^2 + D_{21}''^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

wenn

$$1) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2} \right) \leq 0; \quad 2) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2} \right) \geq 0; \quad 3) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'} \right) \leq 0,$$

wo λ_1, λ_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$D_{11}'^2 \lambda^2 + \left(D_{21}''^2 + D_{12}''^2 \right) \lambda + D_{12}''^2 = 0, \quad (21)$$

bedeuten; wenn

$$1) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_2^2} \right) \geq 0; \quad 2) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2} \right) \leq 0; \quad 3) D \left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'} \right) = 0,$$

dann ist:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_3 D_{11}'^2 \frac{d\Phi}{dx_1} + D_{21}''^2 \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_3 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_3 D_{11}^{01} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ \lambda_3 D_{12}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{12}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \left(\lambda_3 D_{21}^{21} + D_{22}^{21} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + \left(\lambda_3 D_{11}'^2 + D_{21}''^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda_3 = \frac{D_{21}''^2}{D_{12}^{22}} = \frac{D_{21}''^2}{D_{11}'^2};$$

wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) = 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) \geq 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'}\right) \geq 0,$$

dann ist (IV)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_4 D_{11}^{\prime 2} \frac{d\Phi}{dx_1} + D_{22}^{\prime 2} \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_4 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_4 D_{11}^{0'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{\prime 0} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ \left(\lambda_4 D_{12}^{\prime 2} + D_{22}^{\prime 2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + \left(\lambda_4 D_{12}^{\prime 2} + D_{12}^{\prime 2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_4 D_{21}^{\prime \prime} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}^{\prime \prime} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda_4 = \frac{D_{22}^{\prime 2}}{D_{21}^{\prime 2}} = \frac{D_{12}^{\prime 2}}{D_{11}^{\prime 2}};$$

wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) = 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) \leq 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'}\right) = 0; \quad D_{21}^{\prime 2} \leq D_{12}^{\prime 2}$$

dann ist:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_3 D_{11}^{\prime 2} \frac{d\Phi}{dx_1} + D_{22}^{\prime 2} \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_3 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_3 D_{11}^{0'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{00} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{22}^{\prime 2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{12}^{\prime 2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_4 D_{11}^{\prime 2} \frac{d\Phi}{dx_1} + D_{22}^{\prime 2} \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_4 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_4 D_{11}^{0'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{0'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{22}^{\prime 2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{21}^{\prime 2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(VI)}$$

wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) = 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) \leq 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'}\right) = 0; \quad D_{21}^{\prime 2} = D_{12}^{\prime 2},$$

dann haben wir zum Bestimmen von Φ nur eine Gleichung (V) oder eine Gleichung (VI); wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) \geq 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) = 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'}\right) \geq 0,$$

dann sind in der Gleichung (21) die Koeffizienten von $\lambda D_{21}^{\prime 2}$ in der 2. Gleichung des Systems (I) ist der Koeffizient bei der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} \lambda_1 D_{11}^{\prime 2}$ und in der 2. Gleichung des Systems (II) ist der Koeffizient $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2}$ bei $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} D_{22}^{\prime 2}$; wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) \leq 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) = 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'}\right) = 0,$$

dann ist $D_{22}'^2 = 0$, und wir haben ein System von zwei gleichwertigen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{12}^{22} \frac{\partial \phi}{\partial p_2'} + D_{21}^{12} \frac{\partial \phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{VII})$$

und ein System

$$\left. \begin{aligned} \lambda_5 D_{11}'^2 \frac{d\Phi}{dx_1} + \lambda_5 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_5 D_{11}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{12}^{2'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{11}^{2'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (\text{VIII})$$

$$\lambda_5 = \frac{D_{12}^{2'}}{D_{11}'^2};$$

wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_2^2}\right) = 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) = 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2'}\right) \neq 0,$$

dann ist $D_{11}'^2 = 0$, und

$$\left. \begin{aligned} D_{22}^{2'} \frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_6 D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} + D_{22}^{02} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} + \lambda_6 D_{11}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}'^0 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{22}^{2'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}'^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

$$\lambda_6 = \frac{D_{22}'^2}{D_{12}^{2'}};$$

wenn

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1^2, p_2^2}\right) = 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1', p_2^2}\right) = 0; \quad 3) D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2', p_1'}\right) = 0,$$

dann ist $D_{11}'^2 = 0$, $D_{23}'^2 = 0$, $D_{21}'^2 = 0$; die Funktionen F_1 und F_2 sind von den Ableitungen p_i^k abhängig; die Elimination der Ableitung p_i^k aus zwei Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ führt zur Relation

$$f(x_1, x_2; z_1, z_2) = 0. \quad (\text{X})$$

V. Die Bedingungen der Übereinstimmung des Systemes der Gleichungen 2. Ordnung mit mehreren Funktionen: (22)

$$F_q(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n; p_1', p_2', \dots, p_m^n; p_{11}', p_{12}', \dots, p_{mm}^n) = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, Mn + \nu)$$

wo

$$1 \leq M \leq \frac{1}{2} m (m + 1) - 1; \quad 0 \leq v \leq n - 1$$

$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}; \quad p_{ij}^k = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m; k = 1, \dots, n),$$

bekommen wir, indem wir neue Funktionen z auf Grund der Formeln:

$$p_i^k = z_{n + (k - 1)m + i}$$

eingeführen, auf Grund der Regeln des § 2; das System (1) übergeht dann in des System der Gleichungen 1. Ordnung. Die Bedingungen der Übereinstimmung bekommt man auf andere Weise; wenn wir die Zahl M in der Form

$$M = m + (m - 1) + (m - 2) + \dots + [m - (i - 1)] + k$$

$$(i = 0, 1, \dots, m - 1; k = 1, 2, \dots, m)$$

schreiben, wobei, wenn $i = 0$, auch $M = k = 1, 2, \dots$ und wenn $i = 1$, dann $M = m + k = m + 1, m + 2, \dots$, ist, und wenn wir gleich Null $(R - S + 1) (T - S + 1)$ Determinanten Grades S von den Elementen der Matrix mit den R Zeilen und T Kolumnen setzen, welche aus den Koeffizienten bei den Ableitungen 2. Ordnung und freien Gliedern der linearen Gleichungen, die wir aus den Gleichungen (22) durch die Differentiation mit x_1, x_2, \dots, x_m bekommen, besteht

$$S = \left[\frac{m(m+1)(m+2) - (m-i-1)(m-i)(m-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(m-i-k)(m-i-k+1)}{1 \cdot 2} \right] n + (m-i-k)v + 1$$

$$R = m(Mn + v); \quad T = \frac{1}{6} m(m+1)(m+2)n + 1.$$

Um alle Bedingungen der Übereinstimmung des Systems (22) aufzuschreiben, muss man irgend welche von Null verschiedene Determinante Δ von der Ordnung $S - 1$ der obigen Matrix wählen und zur selben eine nach der anderen von übrigen Zeilen und Kolumnen zuschreiben; alle solche Determinanten von der Ordnung S muss man gleich Null setzen.

Einen speziellen Fall dieser Bedingungen der Übereinstimmung bilden die Darboux-schen Bedingungen der Übereinstimmung für zwei Gleichungen zweiter Ordnung mit einer unbekanntem Funktion z von der Gestalt

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0; \quad \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Die Matrix ist dann folgende:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & O \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & O \\ \frac{dF}{dy} & O & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{d\Phi}{dy} & O & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{array} \right\|, \quad (23)$$

wobei

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s; \quad \frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t; \dots$$

wählen wir eine von Null verschiedene Determinante dritter Ordnung

$\frac{\partial F}{\partial z} D \left(\frac{F, \Phi}{r, s} \right)$, dann bekommen wir bekannte Bedingungen¹⁾:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{dF}{dy} & O & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{d\Phi}{dy} & O & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \end{array} \right\| = 0; \quad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & O \\ O & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & O \\ O & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{array} \right\| = 0. \quad (24)$$

Um das System der Gleichungen 2. Ordnung

$$F_k(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p'_1, \dots, p'_m; p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{mm}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

zu integrieren, adiungieren wir zum System (23) die Gleichungen von der Gestalt

$$\Phi(x_1, \dots, x_m; z_1, \dots, z_n; p'_1, \dots, p'_m; p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{mm}) = \text{Const.} \quad (26)$$

und trachten, dass das System der Gleichungen (23), (24) übereinstimmend sei. Dann haben wir

$$S = m(n+1); \quad R = m(n+1); \quad T = \frac{1}{6} m(m+1)(m+2)n + 1.$$

Dadurch bekommen wir ein System von $(T-S+1)$ Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekanntem Funktion Φ und mit mehreren unabhängigen Variablen $x_i, z_k, p_i^k, p_{ij}^k$. Indem wir p partikuläre Integrale $\Phi_1 = C_1, \dots, \Phi_p = C_p$, wo $p = \frac{1}{2} [m(m+1) - 2]n$, solche, dass dieselben mit dem Systeme der n Gleichungen (23) übereinstimmen, durch die Quadraturen bestimmen, bekommen wir z_1, \dots, z_k aus den Relationen

$$dp_i^k = p_{i1}^k dx_1 + \dots + p_{im}^k dx_m; \quad dz_k = p_1^k dx_1 + \dots + p_m^k dx_m.$$

¹⁾ A. R. Forsyth: Theory of differ. equations, vol. VI, p. 317.

Für ein System von q Gleichungen von der Form (23), wo $n < l < \frac{1}{2} m (m + 1) n$, muss man zuerst die Übereinstimmung des Systemes von q Gleichungen untersuchen und dann die Gleichungen (24) adiungieren.

Die Integrationsmethode von Darboux, nach der Vorlesung von Forsyth¹⁾, der Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ bildet einen speziellen Fall der allgemeinen Methode der Integration des Systemes (25).

Das System der Hilfsgleichungen 1. Ordnung mit einer unbekanntem Funktion Φ reduziert sich auf dasselbe System von 2 linearen Gleichungen; man muss eine von den drei folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{d\Phi}{dy} + \left(\lambda \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= 0 * \quad (27) \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{d\Phi}{dy} - \lambda \frac{dF}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial z} * - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 \\ \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{d\Phi}{dx} + \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \frac{d\Phi}{dy} * - \lambda \frac{dF}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\frac{dF}{dx} - \lambda \frac{dF}{dy} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

wie auch eine von folgenden zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \lambda \frac{\partial F}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0, \quad (28) \end{aligned}$$

wo λ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} \lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s} \lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ ist, nehmen.}$$

Ein System von zwei solchen linearen Gleichungen vertritt das unbequeme Forsyth'sche System

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} + \lambda \frac{d\Phi}{dy} - \frac{\frac{dF}{dx} \partial \Phi}{\frac{\partial F}{\partial z}} - \lambda \frac{\frac{dF}{dy} \partial \Phi}{\frac{\partial F}{\partial t}} &= 0 \\ \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

welches bei den Beschränkungen 1) $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$; 2) $D\left(\frac{F_1}{r, s}\right) \neq 0$; 3) $\lambda \neq 0$ behilflich ist.

Ein System von zwei linearen Gleichungen — einer von (27) und einer von (28) — ist dann ausreichend, wenn wenigstens eine von

¹⁾ A. R. Forsyth: Theory of differ. equations, vol. VI, p. 314.

den 40 Determinanten Δ_{pq}^r der 3. Ordnung der Matrix (23) von Null verschieden ist; wir bekommen Δ_{pq}^r dann, wenn wir in der Matrix (23) r -te Zeile und p -te und q -te Kolumne durchstreichen. Die Forsyth'sche Beschränkungen (29) übergehen in irgend eine oder zwei von den Beschränkungen folgender Tabelle:

$$1. \Delta_{12}^2, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \geq 0$$

$$2. \Delta_1^4, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial s} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \geq 0$$

$$3. \Delta_{23}^2, \frac{d\Phi}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \leq 0$$

$$4. \Delta_{25}^4, \frac{d\Phi}{dx} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] \geq 0$$

$$5. \Delta_{24}^2, \frac{d\Phi}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] \leq 0$$

$$6. \Delta_{35}^4, \frac{d\Phi}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial s} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \leq 0$$

$$7. \Delta_{25}^2, \frac{d\Phi}{dy} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] \geq 0$$

$$8. \Delta_{15}^4, \frac{d\Phi}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(\frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \geq 0$$

$$9. \Delta_{15}^2, \frac{\partial F}{\partial z} \leq 0; D\left(\frac{F, \Phi}{z, s}\right) \leq 0; \quad 10. \Delta_{13}^2, \frac{\partial F}{\partial z} \geq 0; D\left(\frac{F, \Phi}{s, t}\right) \leq 0$$

$$11. \Delta_{14}^2, \frac{\partial F}{\partial z} \leq 0; D\left(\frac{F, \Phi}{z, t}\right) \geq 0; \quad 12. \Delta_{12}^4, \frac{\partial F}{\partial t} \leq 0; D\left(\frac{F, \Phi}{s, t}\right) \leq 0$$

$$13. \Delta_{13}^4, \frac{\partial F}{\partial t} \geq 0; D\left(\frac{F, \Phi}{z, t}\right) \geq 0; \quad 14. \Delta_{14}^4, \frac{\partial F}{\partial t} \leq 0; D\left(\frac{F, \Phi}{z, s}\right) \leq 0$$

$$15. \Delta_{45}^2, \frac{\partial F}{\partial z} \geq 0; D\left[\frac{F, \Phi}{y, z}\right] \geq 0; \quad 16. \Delta_{35}^2, \frac{\partial F}{\partial z} \leq 0; D\left[\frac{F, \Phi}{y, s}\right] \geq 0$$

$$17. \Delta_{34}^2, \frac{\partial F}{\partial z} \leq 0; D\left[\frac{F, \Phi}{y, t}\right] \geq 0; \quad 18. \Delta_{34}^4, \frac{\partial F}{\partial t} \geq 0; D\left[\frac{F, \Phi}{x, z}\right] \geq 0$$

$$19. \Delta_{24}^4, \frac{\partial F}{\partial t} \leq 0; D\left[\frac{F, \Phi}{x, s}\right] \geq 0; \quad 20. \Delta_{23}^4, \frac{\partial F}{\partial t} \geq 0; D\left[\frac{F, \Phi}{x, t}\right] \leq 0.$$

20 andere Kombinationen der Beschränkungen bekommen wir aus den obigen durch Vertauschung von F und Φ und umgekehrt.

VI. Für das Integrieren eines Systemes von Gleichungen 2. Ordnung mit 2 abhängigen und 2 unabhängigen:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2; z_1, z_2; p'_1, p'_2, p_1^2, p_2^2; p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}, p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = 0 & (30) \\ F_2(x_1, x_2; z_1, z_2; p'_1, p'_2, p_1^2, p_2^2; p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}, p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = 0 \end{cases}$$

mit dem Adjungieren zum System (30) der Gleichung: (31)

$$\Phi(x_1, x_2; z_1, z_2; p'_1, p'_2, p_1^2, p_2^2; p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}, p_{11}^2, p_{12}^2, p_{22}^2) = \text{Const.},$$

und auf Grund von Bezeichnungen:

$$\frac{dF_g}{dx_i} = X_i = \frac{\partial F_g}{\partial x_i} + \frac{\partial F_g}{\partial z_1} p'_i + \frac{\partial F_g}{\partial z_2} p_i^2 + \frac{\partial F_g}{\partial p'_{1i}} p'_{1i} + \frac{\partial F_g}{\partial p_1^2} p_{1i}^2 + \frac{\partial F_g}{\partial p'_{2i}} p'_{2i} + \frac{\partial F_g}{\partial p_2^2} p_{2i}^2; \quad P_{ij}^k = \frac{\partial F_g}{\partial p_{ij}^k} \quad (g, i, k = 1, 2)$$

$$\frac{d\Phi}{dx_i} = X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p'_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_i^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{1i}} p'_{1i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} p_{1i}^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{2i}} p'_{2i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} p_{2i}^2; \quad P_{ij}^k = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}^k}$$

bekommen wir 4 Bedingungen der Uebereinstimmung, indem wir entsprechende Determinanten 6. Ordnung der Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} X_3 & P'_{311} & P'_{312} & P'_{322} & O & P^2_{311} & O & P^2_{312} & P^2_{322} \\ X_1 & P'_{111} & P'_{112} & P'_{122} & O & P^2_{111} & O & P^2_{112} & P^2_{122} \\ X_2 & P'_{211} & P'_{212} & P'_{222} & O & P^2_{211} & O & P^2_{212} & P^2_{222} \\ X_1 & O & P'_{111} & P'_{112} & P'_{122} & O & P^2_{122} & P^2_{111} & P^2_{112} \\ X_2 & O & P'_{211} & P'_{212} & P'_{222} & O & P^2_{222} & P^2_{211} & P^2_{212} \\ X_3 & O & P'_{311} & P'_{312} & P'_{322} & O & P^2_{322} & P^2_{311} & P^2_{312} \end{array} \right\| \quad (32)$$

gleich Null setzen.

Das Nichtverschwinden der Determinante 5. Ordnung Δ , die in der Matrix (32) umstrichen ist, gibt die Beschränkungen:

$$1) D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_{11}, p_{11}^2}\right) \leq 0; \quad 2) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}}\right) \geq 0.$$

Die Bedingungen der Uebereinstimmung der Systeme (30), (31) geben folgendes System von 4 nichtlinearen Gleichungen zum Bestimmen von Φ :

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, p^2_{22}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right) &= D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{22}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) \\
D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right) &= D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) - \\
&\quad - D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p^2_{11}, p^2_{12}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{22}}\right) \\
D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, p^2_{12}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right) &= D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) - \\
&\quad - D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p^2_{11}, p^2_{22}}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{22}}\right) \\
D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, x_2}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right) &= D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, x_2}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) - \\
&\quad - D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p^2_{11}, x_1}\right) D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{22}}\right)
\end{aligned} \tag{33}$$

Mann muss 4 partikuläre mit dem System der Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$ übereinstimmende Integrale des Systemes (33), $\Phi_1 = C_1, \dots, \Phi_4 = C_4$ finden; durch Berechnung von den 6 Gleichungen der Ableitungen p_{ij} bekommen wir z_1, z_2 aus der Formel:

$$dp_i^k = p_{i1}^k dx_1 + p_{i2}^k dx_2; \quad dz_k = p_1^k dx_1 + p_2^k dx_2 \quad (i, k = 1, 2).$$

Auf Grund von Bezeichnungen

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{i_1 i_2}^k, p_{j_1 j_2}^l}\right) = D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{kl}; \quad D\left(\frac{F_1, F_2}{p_{i_1 i_2}^k, x_j}\right) = D_{i_1 i_2 j}^{ko}$$

$$(i_1, i_2; j_1, j_2, j, k, l = 1, 2),$$

und Identitäten:

$$\begin{aligned}
D_{11 12}^{11} D_{11 22}^{21} + D_{11 11}^{21} D_{12 22}^{11} + D_{11 12}^{21} D_{22 11}^{11} &= 0 \\
D_{22 11}^{21} D_{22 12}^{11} + D_{12 22}^{21} D_{22 11}^{11} + D_{22 12}^{21} D_{12 11}^{11} &= 0
\end{aligned}$$

reduziert sich das Integrieren des Systemes (33) im Falle:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_{22}, p^2_{22}}\right) \cong 0,$$

auf das Integrieren des Systemes von 5 linearen Gleichungen:

$$D'_{12\ 22} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{11}} + D'_{22\ 11} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{12}} + D'_{11\ 12} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{22}} = O \quad (34)$$

$$\left(D'^2_{12\ 11} + \lambda D'^2_{11\ 22} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{11}} + D'^2_{11\ 11} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{12}} + \lambda D'^2_{11\ 11} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{22}} + \left(D'_{11\ 12} + \lambda D'_{22\ 11} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'^2_{11}} = O$$

$$\left(D'^2_{22\ 11} + \mu D'^2_{12\ 11} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{11}} + \lambda D'^2_{11\ 22} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{12}} + \left(D'^2_{11\ 11} + \lambda D'^2_{12\ 11} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{22}} + \mu D'^2_{11\ 12} \frac{\partial \Phi}{\partial p'^2_{11}} + \mu D'^2_{11\ 11} \frac{\partial \Phi}{\partial p'^2_{12}} = O$$

$$\left(D'^2_{22\ 12} + \mu D'^2_{22\ 11} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{11}} + \lambda D'^2_{12\ 22} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{12}} + \left(D'^2_{12\ 11} + \lambda D'^2_{12\ 12} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{22}} + \mu D'^2_{11\ 22} \frac{\partial \Phi}{\partial p'^2_{11}} + \mu D'^2_{11\ 11} \frac{\partial \Phi}{\partial p'^2_{22}} = O$$

$$\left(D'^0_{22\ 2} + \mu D'^0_{1\ 11} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{11}} + \lambda D'^0_{2\ 22} \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{12}} + \left(D'^0_{2\ 11} + \lambda D'^0_{1\ 22} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_{22}} + \mu D'^0_{1\ 11} \frac{\partial \Phi}{\partial p'^2_{11}} + \mu D'^2_{11\ 11} \frac{d\Phi}{dx_2} = O;$$

Der Fall :

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_{22}, p^2_{22}}\right) = O$$

führt zum Integrieren des Systemes von 4 letzten Gleichungen des Systemes (34).

Im System (34) bestimmt man die Funktionen λ und μ durch folgendes System von linearen Gleichungen:

$$D'_{22\ 11} \lambda + D'^2_{11\ 11} \mu + D'_{11\ 12} = O$$

$$D'_{22\ 12} \lambda + D'_{11\ 22} = O.$$

Im speziellen Falle einer einzigen unbekannteten Funktion z bekommen wir die Darboux-sche Methode der Integration der Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = O$, die im vorigen § angeführt wurde.

CLX. Sitzung am 15. Juni 1929.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. Kurenśkyj (Kyjiv) bedankt sich für die Wahl zum wirklichen Mitglied der Sektion.

2. Prof. M. Baltovskoj (Rostov) übersendet eine Abhandlung „Über ukrainische und weissrussische mathematische Terminologie im Zusammenhang mit der Geschichte der russischen Terminologie“. Die Arbeit erscheint in der Sammelschrift der Sektion.

3. Zu wirklichen Mitgliedern der Sektion wurden nachträglich die Hrn.: Prof. B. M a z u r e n k o (Charkiv) und Prof. Dr. J. K r a l (Prag) gewählt.

4. Es wurde beschlossen, den Aufschuß der Gesellschaft um die Ernennung des Hrn. Dr. B. H n a t e v y ě zum Mitarbeiter am naturwissenschaftlichen Museum der Gesellschaft zu ersuchen.

5. Es wurde beschlossen für den nächsten allslavischen ethnographisch-geographischen Kongress alles Nötige (im Einvernehmen mit den wissenschaftlichen Institutionen in Ukraina) vorzubereiten.

6. Hr. Dr. R a k o v ś k y j wurde beauftragt Untersuchungen der Blutgruppierungen unter den Huzulen in der jetztigen Sommerzeit mit der Unterstützung der Gesellschaft durchzuführen.

III.

Tätigkeit der physiographischen Kommission.

XXX. Sitzung am 10. Februar 1929.

Vorsitzender Hr. M e l n y k.

1. Es wurden administrative Angelegenheiten erledigt.

2. Die Materialien zum nächsten Heft der physiographischen Sammelchrift wurden einigen Mitgliedern der Kommission zum Gutachten übergeben.

XXXI. Sitzung am 29. Juni 1929.

Vorsitzender Hr. M e l n y k.

1. Es wurde beschlossen, in das nächste III. Heft der physiographischen Sammelchrift folgende Arbeiten aufzunehmen:

1) Prof. P i d h a j e ć k y j: Bemerkungen zur Einrichtung der Arbeituntersuchungen in der Landwirtschaft.

2) M. D o l n y ć k y j: Die Ansiedlungen vom Stadtypus in transkarpat. Ukraina.

3) E. Ź a r ś k y j: Cobitinae unserer Flüsse.

4) I. K r y p i a k e v y ě: Astronomische Erscheinungen in den ukrainischen Chroniken XV—XVIII Jahrh.

5) I. R a k o v ś k y j: Ergebnisse der antropometrischen Untersuchungen im ukrainischen Gebiete in den Grenzen des polnischen Staates.

6) I. F y l y p ě a k: Das Problem der Verbreitung des Maulbeerbaumes auf dem westukrainischen Gebiete.

2. Hr. Č a j k o v ś k y j E. berichtet über den jetztigen Zustand des naturwissenschaftlichen Museums der Gesellschaft. Und zwar zählt:

a) die mineralogisch-geologische	Abteilung	2827	Nummern
b) die diluvialgeologische	"	326	"
c) die botanische	"	1265	"
d) die ornitologische	"	115	"
e) Konchyliensammlung	"	99	"
f) Anatomie und Entomologie	"	4050	"

Die grösseren Spenden opferten die Hrn.: M. Terlećkyj (Lemberg), G. Terlećkyj (Boryslav), I. Ozarkevyč (Boryslav), Ing. Stefanovyč (Lemberg), G. Polanćkyj (Lemberg), I. Fylypčak (Sambor), H. Martyneć (Sambor) u. a., sowie der Verein der ukrainischen Studenten der Bergakademie in Příbram.

3. Es wurden Pläne der Ferialerkursionen diskutiert.

4. Es wurden einige neue Mitglieder der Kommission gewählt.

E R R A T A

Sitzungsberichte Heft X.

Seite	statt	soll sein
9 Zeile 1 v. oben	y	J
9 " 3 " "	y	J
10 " 6 " unten	$\frac{q(p-s')}{2p^2}$	$\frac{q(q-s')}{2p^2}$
10 " 6 " unten	$\frac{r(q-s')}{2q^2}$	$\frac{q(r-s')}{2p^2}$
Ausserdem fehlt in dieser Zeile Nummer (11).		
11 " 6 v. oben	$\frac{p}{q}$	$\frac{q}{p}$
12 " 5 " "	y_2	y_3

Geschlossen am 30. Juni 1929.