

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ КІЛЬЦЕВИХ ШТАМПІВ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИМ ШАРОМ

Розроблено методику розв'язування контактних задач теорії пружності для випадку кільцевих штампів при їх взаємодії із трансверсально ізотропним шаром. Побудовано розв'язок задачі про контактну взаємодію двох кільцевих штампів з шаром. Одержано формули для обчислення контактних напружень під штампом та проаналізовано вплив форми штампів на величину і характер їх розподілу.

Вступ

Визначення контактних деформацій і напружень необхідно для вирішення проблеми міцності деталей машин і споруд в місцях їх взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалів конструкції і несучої здатності основи. В останні роки досліджувались контактні задачі про взаємодію пружних тіл із залишковими деформаціями, що зумовлені технологічними процесами [1,2]. Інший напрямок розвитку контактних задач пов'язаний з врахуванням анізотропії пружного середовища, або з ускладненням геометричної конфігурації тіл, що контактують [3]. Метою даної роботи є визначення впливу форми кільцевого штампа і механічних характеристик пружного трансверсально ізотропного шару на контактні напруження під штампом.

Постановка задачі

Розглянемо плоскопаралельний трансверсально ізотропний шар скінченної товщини $2h$, в який силою P втискаються два кільцеві штампи. Площини ізоотропії шару паралельні до його граничних площин. Обидва штампи є тілами, утвореними від обертання спряжених між собою в вершинах півпарабол навколо спільної осі, що співпадає з лінією дії сили P , перпендикулярної до граничних площин шару.

Зафіксуємо циліндричну систему координат $(0, r, \varphi, z)$ так, щоб координатна площина $(r, 0, \varphi)$ співпадала з серединною площиною шару, а вісь Oz з лінією дії сили P .

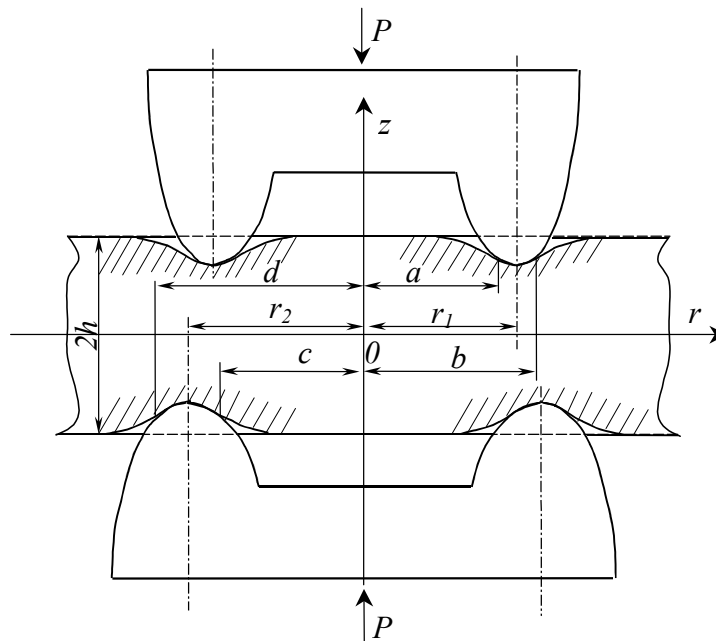


Рис. 1. Схема контактної взаємодії кільцевих штампів з шаром.

Результати дослідження та їх обґрунтування

Використовуючи традиційні позначення для компонент тензора напружень та переміщень, граничні умови задачі можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{при } z = h: \quad & \sigma_{rz} = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad \sigma_{zz} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad r \geq b; \\ & w(r, z) = w_1(r), \quad a \leq r \leq b; \\ \text{при } z = -h: \quad & \sigma_{rz}(r, z) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad \sigma_{zz}(r, z) = 0, \quad 0 \leq r < c, \quad r \geq d; \\ & w(r, z) = w_2(r), \quad c \leq r \leq d. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $w_1(r)$ і $w_2(r)$ відомі функції, що визначаються конфігурацією штампів.

При заданих граничних умовах потрібно визначити розподіл контактних напружень під штампами.

При розв'язанні задачі будемо використовувати співвідношення, запропоновані В. Новацьким в його роботі [4]. Застосовуючи до цих співвідношень інтегральне перетворення та формулу обернення Ханкеля [5], одержимо вирази для компонент напружень σ_{rz} , σ_{zz} та вертикальних переміщень w

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, z) &= \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e^{\frac{d^2}{dz^2}} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha, \\ \sigma_{zz}(r, z) &= -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e^{\frac{d^2}{dz^2}} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

$$w(r, z) = \beta A_{44} \int_0^\infty \alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha,$$

$$\text{де} \quad \bar{\psi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3} [C_j(\alpha) sh \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) ch \mu_j z \alpha]. \quad (3)$$

Вимагаючи виконання граничних умов (1) для напружень, одержимо систему двох потрібних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e^{\frac{d^2}{dz^2}} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha &= 0, \quad z = h, \quad 0 \leq r < +\infty, \\ -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e^{\frac{d^2}{dz^2}} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha &= 0, \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \geq b, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta A_{44} \int_0^\infty \alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha &= w_1(r), \quad z = h, \quad a \leq r \leq b; \\ \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e^{\frac{d^2}{dz^2}} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha &= 0, \quad z = -h, \quad 0 \leq r < +\infty, \\ -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e^{\frac{d^2}{dz^2}} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha &= 0, \quad z = -h, \quad 0 \leq r \leq c, \quad r \geq d, \\ \beta A_{44} \int_0^\infty \alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha &= w_2(r), \quad z = -h, \quad c \leq r \leq d. \end{aligned} \quad (5)$$

Враховуючи рівність (3), одержуємо:

$$\frac{d}{dz} \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \alpha^3 \sum_{j=1,3} \mu_j (e \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) ch \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) sh \mu_j z \alpha], \quad (6)$$

$$\frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \alpha^3 \sum_{j=1,3} \mu_j (c^* \mu_j^2 - b^*) [C_j(\alpha) ch \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) sh \mu_j z \alpha], \quad (7)$$

$$\left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \alpha^2 \sum_{j=1,3} (e \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) sh \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) ch \mu_j z \alpha]. \quad (8)$$

Другі співвідношення потрібних рівнянь (4) та (5), з врахуванням (7), продовжимо на весь інтервал $0 \leq r < +\infty$

$$\begin{aligned} -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^5 \sum_{j=1,3} (e \mu_j^2 - d) [C_j(\alpha) sh \mu_j h \alpha + D_j(\alpha) ch \mu_j h \alpha] J_0(r \alpha) d\alpha = \\ = x(r) [u(r-a) - u(r-b)], \quad 0 \leq r < +\infty, \\ \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^5 \sum_{j=1,3} (e \mu_j^2 - d) [C_j(\alpha) sh \mu_j h \alpha - D_j(\alpha) ch \mu_j h \alpha] J_0(r \alpha) d\alpha = \\ = y(r) [u(r-c) - u(r-d)], \quad 0 \leq r < +\infty, \end{aligned} \quad (9)$$

де $x(r)$ та $y(r)$ невідомі функції, що визначають контактні напруження під верхнім та нижнім штампамі відповідно.

Застосовуючи до перших співвідношень (4) та (5), а також (9), формули обернення інтегрального перетворення Ханкеля, прийдемо до системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими $C_j(\alpha)$ та $D_j(\alpha)$, $j = 1, 3$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,3} (e \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) sh \mu_j h \alpha + D_j(\alpha) ch \mu_j h \alpha] &= -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \int_a^b r x(r) J_0(r \alpha) dr = X(\alpha), \\ \sum_{j=1,3} (e \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) sh \mu_j h \alpha - D_j(\alpha) ch \mu_j h \alpha] &= \frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \int_c^d r y(r) J_0(r \alpha) dr = -Y(\alpha), \\ \sum_{j=1,3} \mu_j (e \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) ch \mu_j h \alpha + D_j(\alpha) sh \mu_j h \alpha] &= 0, \\ \sum_{j=1,3} \mu_j (e \mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) ch \mu_j h \alpha - D_j(\alpha) sh \mu_j h \alpha] &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язавши цю систему, одержимо:

$$\begin{aligned} C_1(\alpha) &= -\frac{\mu_3 ch \mu_3 h \alpha (X(\alpha) - Y(\alpha))}{2(e \mu_1^2 - d^*) f(\mu_1, \mu_3, \alpha)}, & C_3(\alpha) &= \frac{\mu_1 ch \mu_1 h \alpha (X(\alpha) - Y(\alpha))}{2(e \mu_3^2 - d^*) f(\mu_1, \mu_3, \alpha)}, \\ D_1(\alpha) &= -\frac{\mu_3 sh \mu_3 h \alpha (X(\alpha) + Y(\alpha))}{2(e \mu_1^2 - d^*) \phi(\mu_1, \mu_3, \alpha)}, & D_3(\alpha) &= \frac{\mu_1 sh \mu_1 h \alpha (X(\alpha) + Y(\alpha))}{2(e \mu_3^2 - d^*) \phi(\mu_1, \mu_3, \alpha)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f(\mu_i, \mu_j, \alpha) &= \mu_i ch \mu_i h \alpha sh \mu_j h \alpha - \mu_j ch \mu_j h \alpha sh \mu_i h \alpha, \\ \phi(\mu_i, \mu_j, \alpha) &= \mu_i sh \mu_i h \alpha ch \mu_j h \alpha - \mu_j sh \mu_j h \alpha ch \mu_i h \alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Але тоді підінтегральні функції третіх співвідношень (4) та (5) наберуть виду:

$$\alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) \Big|_{z=h} =$$

$$= -M_{13} \alpha^4 \left[(X(\alpha) - Y(\alpha)) \frac{ch\mu_1 h\alpha ch\mu_3 h\alpha}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} + (X(\alpha) + Y(\alpha)) \frac{sh\mu_1 h\alpha sh\mu_3 h\alpha}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} \right], \quad (13)$$

$$\alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) \Big|_{z=-h} =$$

$$= -M_{13} \alpha^4 \left[(X(\alpha) - Y(\alpha)) \frac{ch\mu_1 h\alpha ch\mu_3 h\alpha}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} - (X(\alpha) + Y(\alpha)) \frac{sh\mu_1 h\alpha sh\mu_3 h\alpha}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} \right]. \quad (14)$$

Тут

$$X(\alpha) = -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \int_a^b r x(r) J_0(r\alpha) dr, \quad Y(\alpha) = -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \int_c^d r y(r) J_0(r\alpha) dr. \quad (15)$$

Невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$, які описують контактні напруження під штампами, будемо шукати у вигляді:

$$x(r) = \sum_{n=1}^N a_n \left[J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) \right],$$

$$y(r) = \sum_{n=1}^N b_n \left[J_0\left(\frac{r}{c} \lambda_n\right) N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) N_0\left(\frac{r}{c} \lambda_n\right) \right], \quad (16)$$

де γ_n та λ_n додатні корені рівнянь

$$J_0\left(\frac{b}{a} z\right) N_0(z) - J_0(z) N_0\left(\frac{b}{a} z\right) = 0 \quad \text{та} \quad J_0\left(\frac{d}{c} z\right) N_0(z) - J_0(z) N_0\left(\frac{d}{c} z\right) = 0 \quad (17)$$

відповідно, a_n та b_n - невідомі коефіцієнти.

Врахувавши умову рівноваги штампів

$$2\pi \int_a^b r x(r) dr = -2\pi \int_c^d r y(r) dr,$$

тобто

$$\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \frac{a^2}{\gamma_n^2} \left[\frac{2}{\pi} - R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) \right] + \sum_{n=1}^N b_n \frac{c^2}{\lambda_n^2} \left[\frac{2}{\pi} - R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) \right] \right\} = 0$$

після обчислення інтегралів (15) одержимо вирази для $X(\alpha)$ та $Y(\alpha)$

$$X(\alpha) = -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \left[\frac{\left(\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) \right)}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{\gamma_n^2} \left[\frac{2}{\pi} - R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) \right] \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^N b_n \frac{c^2}{\lambda_n^2} \left[\frac{2}{\pi} - R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) \right] \right\}, \quad (18)$$

$$Y(\alpha) = -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \sum_{n=1}^N b_n \frac{\left(\frac{2}{\pi} J_0(c\alpha) - J_0(d\alpha) R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) \right)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2},$$

де $R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) = \frac{b}{a} \gamma_n \left[N_0(\gamma_n) J_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) - J_0(\gamma_n) N_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) \right],$ (19)

$$R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) = \frac{d}{c} \lambda_n \left[N_0(\lambda_n) J_1\left(\frac{d}{c} \lambda_n\right) - J_0(\lambda_n) N_1\left(\frac{d}{c} \lambda_n\right) \right].$$

Підставляючи (18) в (13) та (14), другі співвідношення (4) та (5) одержимо у вигляді:

$$\frac{M_{13}}{A_{33}} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \frac{H(\alpha) S_n(\alpha)}{D(\alpha)} \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)} \right\} d\alpha + \sum_{n=1}^N b_n \int_0^\infty \frac{1}{D(\alpha)} [G(\alpha) Q_n(\alpha) - H(\alpha) K_n] \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)} \right\} d\alpha \right\} = \left\{ \frac{1}{R_1} [(a-r_1)^2 - (r-r_1)^2] \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)} \right\} d\alpha \right\} = \left\{ \frac{1}{R_2} [(b-r_1)^2 - (r-r_1)^2] \right\},$$
 (20)

$$\frac{M_{13}}{A_{33}} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \int_0^\infty \frac{G(\alpha) S_n(\alpha)}{D(\alpha)} \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)} \right\} d\alpha + \sum_{n=1}^N b_n \int_0^\infty \frac{1}{D(\alpha)} [H(\alpha) Q_n(\alpha) - G(\alpha) K_n] \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)} \right\} d\alpha \right\} = \left\{ \frac{1}{R_3} [(c-r_2)^2 - (r-r_2)^2] \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha)} \right\} d\alpha \right\} = \left\{ \frac{1}{R_4} [(d-r_2)^2 - (r-r_2)^2] \right\}.$$
 (21)

Тут

$$D(\alpha) = (\mu_1 - \mu_3)^2 (1 - e^{-2(\mu_1 + \mu_3)h\alpha})^2 - (\mu_1 + \mu_3)^2 (e^{-2\mu_3 h\alpha} - e^{-2\mu_1 h\alpha})^2,$$

$$H(\alpha) = -2[(\mu_1 - \mu_3)(1 - e^{-4(\mu_1 + \mu_3)h\alpha}) + (\mu_1 + \mu_3)(e^{-4\mu_3 h\alpha} - e^{-4\mu_1 h\alpha})],$$

$$G(\alpha) = 4[\mu_1(e^{-2\mu_3 h\alpha} - e^{-(4\mu_1 + 2\mu_3)h\alpha}) - \mu_3(e^{-2\mu_1 h\alpha} - e^{-(2\mu_1 + 4\mu_3)h\alpha})],$$

$$S_n(\alpha) = \left\{ \frac{\left(\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) \right)}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{\gamma_n^2} \left[\frac{2}{\pi} - R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) \right] \right\},$$
 (22)
$$Q_n(\alpha) = \frac{\frac{2}{\pi} J_0(c\alpha) - J_0(d\alpha) R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2},$$

$$K_n = \frac{c^2}{\lambda_n^2} \left[\frac{2}{\pi} - R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) \right].$$

Відшукування контактних напружень під штампами доцільно проводити так: введемо позначення

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A_{33}}{M_{13}} \left(\frac{1}{R_1} a_n^{(1)} + \frac{1}{R_2} a_n^{(2)} + \frac{1}{R_3} a_n^{(3)} + \frac{1}{R_4} a_n^{(4)} \right), \\ b_n &= \frac{A_{33}}{M_{13}} \left(\frac{1}{R_1} b_n^{(1)} + \frac{1}{R_2} b_n^{(2)} + \frac{1}{R_3} b_n^{(3)} + \frac{1}{R_4} b_n^{(4)} \right); \end{aligned} \quad (23)$$

співвідношення (20), (21) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{H(\alpha) S_n(\alpha)}{D(\alpha)} \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)} \right\} d\alpha + \\ + \sum_{n=1}^N b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{G(\alpha) Q_n(\alpha) - H(\alpha) K_n}{D(\alpha)} \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)} \right\} d\alpha = B_i^{(1)}(r), \quad \left\{ \begin{array}{l} a < r < r_1 \\ r_1 < r < b \end{array} \right\}, i = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{G(\alpha) S_n(\alpha)}{D(\alpha)} \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)} \right\} d\alpha + \\ + \sum_{n=1}^N b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{H(\alpha) Q_n(\alpha) - G(\alpha) K_n}{D(\alpha)} \left\{ \frac{J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha)}{J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)} \right\} d\alpha = B_i^{(2)}(r), \quad \left\{ \begin{array}{l} c < r < r_2 \\ r_2 < r < d \end{array} \right\}, i = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут

$$\begin{aligned} B_1^{(1)}(r) &= \begin{cases} [(a-r_1)^2 - (r-r_1)^2], & a < r < r_1, \\ 0, & r_1 < r < b, \end{cases} \quad B_1^{(2)}(r) = 0, \\ B_2^{(1)}(r) &= \begin{cases} 0, & a < r < r_1, \\ [(b-r_1)^2 - (r-r_1)^2], & r_1 < r < b, \end{cases} \quad B_2^{(2)}(r) = 0, \\ B_3^{(2)}(r) &= \begin{cases} [(c-r_2)^2 - (r-r_2)^2], & c < r < r_2, \\ 0, & r_2 < r < d, \end{cases} \quad B_3^{(1)}(r) = 0, \\ B_4^{(2)}(r) &= \begin{cases} 0, & c < r < r_2, \\ [(d-r_2)^2 - (r-r_2)^2], & r_2 < r < d, \end{cases} \quad B_4^{(1)}(r) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Вимагаючи виконання рівностей (24), (25) в N точках проміжку $a < r < b$ та N точках проміжку $c < r < d$, одержимо чотири системи по $2N$ рівнянь з $2N$ невідомими $a_n^{(i)}, b_n^{(i)} (i = \overline{1,2,3,4})$. Розв'язавши ці системи, за формулами (23), одержимо значення a_n та b_n , в виразах для яких фігуруватимуть величини $\frac{1}{R_i} (i = \overline{1,2,3,4})$ пов'язані з раді-

усами кривизни півпарабол, обертанням яких утворені штампи. Вимагаючи виконання умов рівноваги двох штампів, а також використовуючи рівності вертикальних переміщень в точці $r = r_1$ при $a < r < r_1$ та $r_1 < r < b$, а також в точці $r = r_2$ при $c < r < r_2$ та $r_2 < r < d$ на верхній та нижній граничних площинах шару, одержимо систему чотирьох рівнянь, з яких визначимо величини

$$\frac{1}{R_i} = \frac{P}{2\pi a^2} \cdot \frac{M_{13}}{A_{33}} x_i, \quad i = \overline{1,2,3,4}. \quad (27)$$

Тут x_i числові значення розв'язків цієї системи. Підставляючи (27) в (23) і враховуючи (17), запишемо формули для обчислення контактних напружень під штампами

$$\sigma_{zz}(r, z) = x(r) = \frac{P}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^N \left(a_n^{(1)} x_1 + a_n^{(2)} x_2 + a_n^{(3)} x_3 + a_n^{(4)} x_4 \right) \times$$

$$\times \left[J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) \right], \quad z = h, \quad a < r < b, \quad (28)$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = y(r) = \frac{P}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^N \left(b_n^{(1)} x_1 + b_n^{(2)} x_2 + b_n^{(3)} x_3 + b_n^{(4)} x_4 \right) \times$$

$$\times \left[J_0\left(\frac{r}{c} \lambda_n\right) N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) N_0\left(\frac{r}{c} \lambda_n\right) \right], \quad z = -h, \quad c < r < d. \quad (29)$$

Числовий аналіз виконано для значень $\mu_1 = 1,388395$; $\mu_3 = 0,705194$.

На рисунках 2, 3 подано графіки розподілу контактних напружень вздовж радіальної координати r , відповідно під верхнім і нижнім штампом. При цьому

$$\sigma_{\theta} = \frac{2\pi a^2}{P} \sigma_{zz}(z, h); \quad \sigma_H = \frac{2\pi a^2}{P} \sigma_{zz}(z, -h).$$

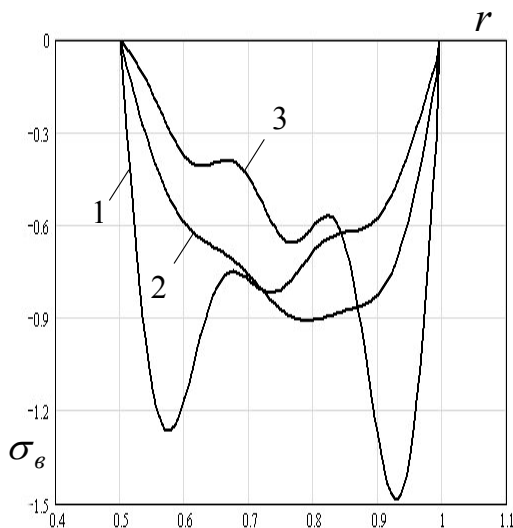


Рис.2. Розподіл контактних напружень під верхнім штампом для значень $a = 0,5$; $b = 1,0$; $c = 0,8$; $d = 1,5$; $r_2 = 1,05$; для кривої 1 $r_1 = 0,55$; 2 - $r_1 = 0,75$; 3 - $r_1 = 0,95$.

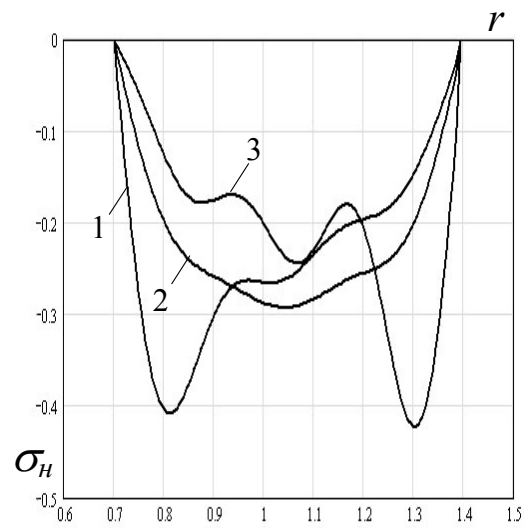


Рис.3. Розподіл контактних напружень під нижнім штампом для значень $a = 0,4$; $b = 1,1$; $c = 0,7$; $d = 1,4$; $r_1 = 0,75$; для кривої 1 $r_2 = 0,85$; 2 - $r_2 = 1,05$; 3 - $r_2 = 1,25$.

Висновки

З наведених результатів видно, що конфігурація штампів та анізотропія шару суттєво впливають на розподіл контактних напружень. Одержані формули для обчислення контактних напружень є відносно простими і зручними для використання в інженерних розрахунках на міцність. У подальших розробках доцільно визначити вплив температурних полів та залишкових деформацій на контактні напруження.

The method of solving contact tasks of the elastic theory for the case of the ring dies while contacting transversal isotropic layer, is developed. The solving of tasks on the contact interaction of two layer ring dies is built. Formulas for calculation of contact stresses under stamp are obtained as well as the influence of the die forms on its value and the way of their distribution is analysed.

Література

1. Гузь А.І., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища школа, 1995. – 305 с.
2. Шелестовський Б. Контактна взаємодія кругового штампа з шаром із залишковими деформаціями, що зумовлені зосередженим нагрівом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2002. – Т.7. - №4. – С.13-20.

3. Rudnitsky V., Gabrusev V., Shelestovsky B. Annular punch contact interaction with the preliminary stressed layer // Proc. of second world congress on computational mechanics.– Stuttgart.–1990.–P.801.
4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
5. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955. – 668 с.

Одержано 12.10.2002 р.