

НЕКЛАСИЧНЕ ЕВОЛЮЦІЙНЕ РІВНЯННЯ ЕНЕРГОПЕРЕНОСУ В СЕРЕДОВИЩАХ З ТЕПЛОВОЮ ПАМ'ЯТТЮ

Розглянуто нелінійні задачі для інтегрально-диференціального рівняння теплопровідності, яке містить інтегральний оператор спадкоємності. Наведено теореми про однозначну розв'язність і вказано конструктивні методи розв'язання.

Експериментально доведено, що класичне рівняння теплопровідності не забезпечує адекватного описання процесів, в яких необхідно враховувати вплив зовнішніх факторів, швидкоплинність або теплову історію матеріалу. Це має місце, наприклад, при дослідженнях еволюції теплових збурень в плазмі, в рідкому гелії-II, в деяких діелектриках і полімерах при низьких температурах. Тому математичне дослідження нових більш складних, ніж класичне, рівнянь переносу тепла в середовищах із спеціальною поведінкою їх фізичних властивостей є актуальною задачею як з теоретичної, так і з фізичної точок зору.

Перші результати із створення математичних моделей тепловідності речовин, які володіють тепловою пам'яттю, належать Трусделлу, Коулмену, Ноллу, Дейю, Гуртіну, Нунзіато. Перші публікації з цієї проблеми в нашій країні з'явилися після опублікування в 1974 році оглядової статті А.В.Ликова у таких вчених як П.М.Колесников, І.А.Новіков, А.С.Галіцин, В.Л.Колнащиков, С.Ю.Яновський, В.М.Кудінов, В.А.Даніленко, А.С.Макаренко.

Досліджуване рівняння відрізняється від класичного рівняння теплопровідності параболічного типу наявністю інтегральних членів, які описують вплив теплової пам'яті через фізичні характеристики речовини і, крім того, прийнято, що на частині межі задаються межові умови, які містять похідні і інтеграли по часу.

Дослідження складніших, ніж класичне лінійне рівняння теплопровідності, рівнянь переносу тепла в середовищах із спеціальною поведінкою їх фізичних властивостей є актуальною задачею як з теоретичної, так і з прикладної точок зору.

Для математичного опису високоінтенсивних процесів енергопереносу в матеріальних середовищах, які мають теплову пам'ять, може бути використане некласичне еволюційне рівняння, яке містить інтегральні оператори спадкоємності [1,2].

1. Нехай $\Omega \subset E^3$ - обмежена область точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ з достатньо гладкою межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, s - довільна точка на Γ , $\mathbf{n}$ - зовнішня нормаль до Γ , ∇^2 - оператор Лапласа,

$$u(t) * v(t) = \int_0^t u(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad (t \geq 0). \quad (1)$$

Згадане рівняння з врахуванням нелінійно діючих джерел має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f_0(x, t, u) \quad (x \in \Omega, t > 0). \quad (2)$$

Для рівняння (2) розглядаються наступні крайові та початкова умови:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla u) + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * (\mathbf{n} \cdot \nabla u) = f_1(s, t, u) \quad (s \in \Gamma_1, t > 0). \quad (3)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla u) = 0 \quad (s \in \Gamma_2, t > 0); \quad u(x, 0) = g(x) \quad (x \in \bar{\Omega}). \quad (4)$$

Тут $\varepsilon(t)$ і $\lambda(t)$ - (ядра релаксації) задані цілі функції експоненціального типу, $f_0(x, t, 0) \in L_2(\Omega)$ і $f_1(s, t, 0) \in L_2(\Gamma_1)$ для всіх $0 < t \leq t_0 < \infty$; $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$; $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$.

Виникають питання про локальну і глобальну (за часом) розв'язність та конструктивні методи інтегрування цієї задачі. Для класичного рівняння теплопровідності вони розглянуті в [3].

2. Сформулюємо задачу в операторному вигляді. Нехай $u_0(x) \in L_2(\Omega)$ і $u_1(s) \in L_2(\Gamma)$. Утворимо пару $[u_0(x), u_1(s)] = \mathbf{u}(x)$ та введемо дійсний гільбертовий простір $L^2(\bar{\Omega}) = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$ зі скалярним добутком

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (u_0, v_0)_{\Omega} + \langle u_1, v_1 \rangle_{\Gamma}, \quad (5)$$

де $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\bar{\Omega})$. Якщо функція $\varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, а $(\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) = 0$ на Γ , то, утворивши пару $\varphi(x) = [\varphi(x), \varphi(s)]$, де $\varphi(x)$ - звуження функції $\varphi(x)$ на Γ , в $L^2(\bar{\Omega})$ можна ввести оператор

$$\tilde{A}\varphi = [-\nabla^2 \varphi(x), (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(s))] \quad (6)$$

При цьому, очевидно, $D_{\tilde{A}} = \{\varphi : \varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(s))_{\Gamma_2} = 0\}$.

Відомо [4], що цей оператор симетричний, додатно визначений, а його область означення $D_{\tilde{A}}$ щільна в гільбертовому просторі $L^2(\bar{\Omega})$. Таким чином, оператор A , який є замиканням $\tilde{A}$ в $L^2(\bar{\Omega})$, самоспряжений та додатно визначений [5]. З (6) зрозуміло, що рівняння $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ в $L^2(\bar{\Omega})$ еквівалентне еліптичній задачі

$$-\nabla^2 u = f_0(x \in \Omega); \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla u) = f_1(s \in \Gamma_1), \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla u) = 0(s \in \Gamma_2), \quad (7)$$

а рівняння $A\varphi = \beta\varphi$ ($\beta = \text{const}$) еквівалентне задачі на власні значення

$$-\nabla^2 \beta = \beta\varphi(x \in \Omega); \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) = \beta\varphi(s \in \Gamma_1), \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) = 0(s \in \Gamma_2). \quad (8)$$

Використовуючи A , задачу (2)-(4) запишемо у вигляді

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + A\mathbf{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A\mathbf{u} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}); \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}, \quad (9)$$

де $\mathbf{u} = [u(x, t), u(s, t)]$, $\mathbf{f} = [f_0(x, t, u(x, t)), f_1(s, t, u(s, t))]$, $\mathbf{g} = [g(x), g(s)]$. Функція $u(x, t)$ вважається розв'язком задачі (2)-(4), якщо $\mathbf{u}(t)$ є розв'язком задачі (9) в просторі $L^2(\bar{\Omega})$. Припускається, що

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq c_0 \|A^v \mathbf{u} - A^v \mathbf{v}\| \quad (0 < v \leq 1, c_0 = \text{const}). \quad (10)$$

3. З допомогою відомих властивостей операторів A^v , $0 < v < 1$, теорем вкладання для просторів Соболева та теорії абстрактних нелінійних параболічних рівнянь [3,5,6] визначені достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (9).

Теорема 1 (про локальну розв'язність). Якщо

- 1) $g(x) \in D_A$;
- 2) $f_j(x, t, u)$ мають неперервні перші похідні по u та t ;

- 3) $|f_j(x, t, u)|^2 \leq |f_j(x, t, 0)|^2 + c_1 |u|^{2+n_1}$ ($j=1, 2; n_1 \geq 1$), то задача однозначно розв'язна при $0 \leq t \leq t_0$, причому $u \in W^{3/2}(\Omega)$.

Теорема 2 (про глобальну розв'язність). Якщо

- 1) $g(x) \in C^3(\Omega)$; $(\mathbf{n} \cdot \nabla g) = 0, s \in \Gamma_2$;
- 2) $f_j(x, t, u)$ мають неперервні перші похідні по всіх своїх аргументах;
- 3) $\partial f_j / \partial u$ рівномірно обмежені по x та t ;
- 4) $|f_j(x, t, u)|^2 \leq |f_j(x, t, 0)|^2 + c_2 |u|^{2+n_2}$ ($j=1, 2; n_2 \geq 1$), то задача однозначно розв'язна при $0 < t < \infty$, причому $u \in W^{3/2+\alpha}(\Omega)$, $\alpha < 1/4$.

Зауваження 1. З теореми 2 випливає, що, коли $f_j(x, t, u) = \mu_j(x, t) + \chi_j(x, t)u$ з неперервно диференційовними по t функціями μ_j і χ_j , при тих же допущеннях щодо функції $g(x)$ задача однозначно розв'язна на довільному інтервалі часу.

Зауваження 2. Ідентичні результати одержуються і у випадку більш загальної крайової умови

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla u) + hu + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\lambda} * (\mathbf{n} \cdot \nabla u) = f_1(s, t, u) \quad (s \in \Gamma_1, t > 0),$$

де $h = h(s) \geq 0$. У цьому випадку в $L^2(\bar{\Omega})$ вводять два оператори

$$A_1 \Phi = [-\sigma \nabla^2 \varphi(x), \sigma(\mathbf{n} \cdot (\nabla \varphi(s)))];$$

$$K \Phi = [-(1-\sigma) \nabla^2 \varphi(x), (1-\sigma)(\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(s)) + h \varphi(s)],$$

де $0 < \sigma < 1$, з допомогою яких операторне формулювання задачі набуває вигляду

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + A_1 \mathbf{u} + K \mathbf{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \sigma^{-1} (\dot{\lambda} * A_1 \mathbf{u}) = f(t, \mathbf{u}); \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}, \quad (11)$$

де, очевидно, $A = \sigma^{-1} A_1$. Ця форма зручна при асимптотичному інтегруванні задачі.

4. З властивостей оператора A випливає, що його спектр $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ точковий і дійсний з точкою згущення на ∞ , а відповідні власні функції $\Phi_k(x)$ утворюють ортонормовану систему $\{\mathbf{e}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, повну як в $L^2(\bar{\Omega})$, так і в енергетичному просторі H_A . Тому довільну функцію $\mathbf{u} \in L^2(\bar{\Omega})$ або ($\mathbf{u} \in H_A$) єдиним чином можна подати узагальненим рядом Фур'є за цією системою:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ((\mathbf{u}, \mathbf{e}_k)) \mathbf{e}_k(x) \quad (x \in \bar{\Omega}). \quad (12)$$

При цьому

$$A^v \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^v ((\mathbf{u}, \mathbf{e}_k)) \mathbf{e}_k(x) \quad (0 < v \leq 1). \quad (13)$$

Застосовуючи (12) до еліптичної задачі (7), з врахуванням $((\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n)) = \delta_{kn}$, одразу ж одержуємо, що

$$\mathbf{u}(x) = A^{-1} \mathbf{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{-1} ((\mathbf{f}, \mathbf{e}_k)) \mathbf{e}_k(x) \quad (x \in \bar{\Omega}). \quad (14)$$

Якщо задача (2)-(4) лінійна і $\mathbf{f} = [f_0(x, t), f_1(s, t)]$, то її розв'язок знаходиться у вигляді

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \mathbf{e}_k(x) \quad (x \in \bar{\Omega}, t > 0), \quad (15)$$

де $u_k(t)$ задовольняє рівняння

$$Tu_k \equiv \frac{du_k}{dt} + \beta_k u_k + \dot{\varepsilon} * \frac{du_k}{dt} + \beta_k (\dot{\lambda} * u_k) = f_k(t); \quad u_k(0) = g_k; \quad (16)$$

тут $f_k = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_k)$, $g_k = (\mathbf{g}, \mathbf{e}_k)$. Для розв'язання задачі (16) зручно використати перетворення Лапласа. Оскільки $\varepsilon(0) = \lambda(0) = 1$ [1,2], то трансформанта коефіцієнтів $u_k(t)$ в (15) має вигляд

$$U_k(s) = \frac{1}{s} \frac{F_k(s) + g_k}{sE(s) + \beta_k \Lambda(s)}, \quad (17)$$

де F_k, E, Λ - трансформанти функцій f_k, ε і λ відповідно. Обчислення оригіналу виразу (17) при конкретно заданих ядрах релаксації ε і λ здійснюється методами операційного числення [7]. Викликає практичний інтерес випадок, коли функції f_0 та f_1 не залежать від t ($F_k = c_k/s$), $u(x, 0) = 0$, а ядра релаксації є експоненціально спадаючими ("затухаюча пам'ять") функціями $\exp(-at)$. Для цих умов з (17) відразу ж отримується, що в (15) коефіцієнти мають вигляд

$$u_k(t) = \frac{c_k}{a^2 \beta_k^2} \left(a \beta_k t - a - \beta_k + \frac{a^2 e^{-\beta_k t} - \beta_k^2 e^{-at}}{a - \beta_k} \right).$$

Розв'язок початкової нелінійної задачі шукається у вигляді ряду (15), але його коефіцієнти $u_k(t)$ визначаються з функціонального рівняння (16) з нелінійною правою частиною: $Tu_k = ((\mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \mathbf{e}_k))$. Якщо вдається виділити малий параметр при f_k , то це рівняння наближено розв'язується за методом Крилова-Боголюбова-Митропольського. В загальному випадку воно розв'язується за методом ітерацій.

5. Нехай ядро λ залежить від координат і часу, причому $\lambda = \lambda_{ij}(x) = a_{ij}(x) \chi(t)$, де $a_{ij} = a_{ji}$ і такі, що виконуються відомі умови еліптичності оператора

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (18)$$

Тоді, ввівши в $L^2(\bar{\Omega})$ замикання оператора

$$G\varphi = [L\varphi(x), (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(s))]; \quad D_G = \{ \varphi : \varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi)_{\Gamma_2} = 0 \}, \quad (19)$$

запишемо задачу у вигляді

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + G\mathbf{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \dot{\lambda} * G\mathbf{u} = \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}. \quad (20)$$

У відповідності з визначенням [8], оператори G і A - схожі, бо $D_A = D_G$. Тому для наближеного розв'язування задачі, сформульованої в $L^2(\bar{\Omega})$, використані різні методи проєкційного типу, в яких для апроксимації розв'язку по x застосовуються власні елементи оператора A .

Нехай S_N - підпростір, породжений N першими власними функціями $\varphi_n(x)$ оператора A , B – деякий лінійний оператор з областю визначення $D_B \supseteq D_G$, а $\varphi_n \in D_B$. Оскільки послідовність $\{S_N\}$ гранично щільна в $L^2(\bar{\Omega})$, наближений розв'язок задачі (9) шукається у вигляді

$$\mathbf{u}_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{b}_n(t) \varphi_n(x). \quad (21)$$

Невідомі компоненти $b_n(t)$ можна знайти з системи рівнянь:

$$\hat{H} \left(\frac{db}{dt} + \varepsilon * \frac{db}{dt} \right) + \hat{G}(b + \chi * b) = f; \quad b(0) = \mathbf{g}, \quad (22)$$

де $b = [b_1, \dots, b_N]^T$; $f = [((\mathbf{f}, B\varphi_1)), \dots, ((\mathbf{f}, B\varphi_N))]^T$; $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_N]^T$; $\hat{H} = [H_{nm}]$, $H_{nm} = ((\varphi_n, B\varphi_m))$; $\hat{G} = [G_{nm}]$, $G_{nm} = ((G\varphi_n, B\varphi_m))$; $m = \overline{1, N}$. Вибір сталих g_n , взагалі кажучи, довільний і підпорядкований лише вимозі $\left\| \mathbf{g} - \sum_{n=1}^N g_n \varphi_n \right\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Алгоритм (22) як часткові випадки включає узагальнені методи Гальоркіна (при $B=I$), моментів (коли оператор $G \in B$ -додатно визначеним) для нестационарних задач [8]. Дослідження швидкості збіжності і стійкості цих методів у розглядуваному варіанті та оцінка впливу на них нормування φ_n (в L^2 , H_A , H_B або H_G) становлять окремий інтерес.

Якщо задача лінійна, то перетворенням Лапласа нестационарна система (22) зводиться до системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень $B(s)$:

$$(sE\hat{H} + X\hat{G})B = \frac{1}{s}(\hat{H}g + F), \quad (23)$$

де E , X і F - трансформанти функцій ε , χ та f відповідно. Визначивши корені s_k рівняння $D(s) = \det(sE\hat{H} + X\hat{G}) = 0$ та розв'язавши систему (23), знайдемо, що

$$B_n(s) = \frac{P_n(s)}{sD(s)},$$

де $P_n(s)$ - деяка раціональна алгебраїчна функція, вигляд якої залежить від ядер ε і λ . Оригінали таких функцій обчислюються за лемою Жордано і в загальному випадку мають вигляд [7]

$$b_n(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} \int_0^t \frac{\tau^{m_k-j} e^{s_k \tau}}{(j-1)!(m_k-j)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[\frac{(s-s_k)^{m_k} P_n(s)}{D(s)} \right]_{s=s_k} d\tau,$$

де m_k - кратність кореня s_k .

Висновки

Одержані результати можна застосовувати не тільки при розв'язуванні початково-граничних задач тепломасопереносу в середовищах з пам'яттю, але і в математичних задачах суміжних дисциплін таких як електродинаміка, теорія пружності тощо).

Nonlinear problems are considered for the integro-differential heat conduction equation containing an integral inheritance operator. Theorems on unambiguous solvability and constructive methods of the solutions are presented.

Література

1. Nunziato I.W. On heat conduction in materials with memory // Quart. Appl. Math. – 1971. – N 6. – P. 187-204.
2. Галицын А.С. Построение решений некоторых неоднородных задач для диффузионного уравнения с затухающей памятью . – Киев, 1983. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.51).
3. Митропольский Ю.А., Нижник Л.П., Кульчицкий В.Л. Нелинейные задачи теплопроводности производной по времени в граничном условии. – Киев, 1974. – 31 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 74.15).
4. Oddnoff J. Operators generated by differential problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition // Medd. Lunds univ. math. semin. – 1979. - 14.- P.3-88.
5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 798 с.
6. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.- М.: Наука, 1966. – 433 с.
7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 287 с.
8. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1986.- 432 с.

Одержано 10.05.2002 р.