УДК 532.526
Л.Романюк
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

НАБЛИЖЕНО-АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ЗНАХОДЖЕННЯ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

В роботі наведено наближено-аналітичні залежності для обчислення кінетичної енергії турбулентності для пристінних течій, що розвиваються при додатних, від'ємних та нульових градієнтах тиску. Отримані залежності мають важливе значення при числовому моделюванні пристінних турбулентних течій для задання початкових профілів кінетичної енергії турбулентності.

В природі та техніці найчастіше реалізуються турбулентні течії рідин та газів. В зв'язку з цим, дослідникам, які проектують технічні об'єкти, що залежать від розвитку турбулентних течій, ще до їх виготовлення важливо знати, як вони себе вестимуть. На сьогоднішній день немає чіткого розуміння механізму розвитку турбулентності, знання якого давало б змогу замкнути систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка математично описує турбулентний рух. Накопичені експериментами знання, методи теорії розмірності та подібності, інтуїція дослідників ведуть до того, що вони тим чи іншим способом здійснюють замикання системи рівнянь і, таким чином, будують напівемпіричні математичні моделі турбулентних течій на рівні гіпотез. Гіпотетичні моделі турбулентності оцінюють шляхом порівняння розрахунків, одержаних за цими моделями з експериментальними даними. На основі досліджень Таунсенда, Бредшоу і Ферріс запропонували свій варіант замикання системи диференціальних рівнянь (2) (див. далі). Отримані результати в межах пристінної області не узгоджуються з експериментальними результатами, наведеними в Хінце [1]. Отже, для пристінної області необхідні додаткові дослідження. Їм присвячена дана робота і вона є дальшим логічним розвитком досліджень, наведених в роботі [2].

Математична модель плоского турбулентного руху рідини чи газу - це система диференціальних рівнянь в частинних похідних виду

$$U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{UV}\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

де x та y - поздовжня і нормальна декартові координати, U та V - поздовжня і нормальна координати вектора швидкості (осереднені за часом в сенсі Рейнольдса), ρ - густина, p - тиск, τ - дотичне напруження тертя, що виникає між шарами в'язкої рідини при її русі, $\tau_Л=-\rho\overline{UV}$ - турбулентне напруження тертя.

Система рівнянь (1) незамкнена, оскільки величина $\tau_Л$ невідома. Саме для турбулентного напруження тертя τ_T будуються гіпотетичні моделі. За аналогією з відомим законом Ньютона, Буссінеск запропонував для турбулентного напруження тертя формулу

$$\tau_T=\mu_T\frac{\partial U}{\partial y},$$

в якій μ_T - коефіцієнт турбулентної в'язкості рідини. В новітніх теоріях турбулентності використовується коефіцієнт турбулентної в'язкості $\nu_T=\mu_T/\rho$ і його пов'язують з кінетичною енергією e турбулентності, віднесеної до маси рідини. Для знаходження енергії використовують відоме напівемпіричне диференціальне рівняння

$$U\frac{\partial e}{\partial x}+V\frac{\partial e}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\nu+\nu_T\right)\frac{\partial e}{\partial y}\right)+\tau_T\frac{\partial U}{\partial y}-\varepsilon, \qquad (2)$$

в якому ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості, ε - дисипація турбулентної енергії. Згідно з теорією розмірності, $\nu_T \sim UL$, де U - масштаб швидкості, L - масштаб довжини. Колмогоров [3], а згодом Прандтль [4] за масштаб швидкості взяли

$$\sqrt{e}=\sqrt{\frac{\overline{U'^2}+\overline{V'^2}+\overline{W'^2}}{2}}$$

(тут $U'\vec{i}+V'\vec{j}+W'\vec{k}=\vec{V}'$ - пульсаційний вектор швидкості турбулентної течії, $\overline{U'^2},\ \overline{V'^2},\ \overline{W'^2}$ - осереднені за часом в розумінні Рейнольдса величини $U'^2,\ V'^2,\ W'^2$) і запропонували співвідношення

$$\tau_T=Cl\sqrt{e}\,,$$

де C - емпірична стала, l - масштаб довжини. Невзглядов [5] запропонував формулу

$$\nu_T=a\rho e,\ a=const\,.$$

Бредшоу і Ферріс на основі досліджень Таунсенда для замикання диференціального рівняння (2) запропонували використовувати співвідношення $a=\tau_T/\left(\rho e\right)=0{,}30$ та дві емпіричні величини, які вони вважали універсальними і задавали графічно [6]. Але якщо звернутися до експериментальних результатів, наведених в Хінце [1], то в межах пристінної області співвідношення $a=0{,}30$ не виконується. Отже, для пристінної області необхідні додаткові дослідження.

Для визначення коефіцієнта турбулентної в'язкості в роботі [2] за масштаб довжини використано параметр довжини Ротта-Клаузера Δ. З врахуванням структури турбулентної примежевої течії для ν_T запропоновано єдину аналітичну залежність виду

$$\nu_T=C\Delta\sqrt{e}th\frac{lV_*\sqrt{\tau_+}}{C\Delta\sqrt{e}}\,,$$

де

$$l=ky\ th\frac{sh^2\left(\chi_1y^+\right)th\left(sh^2\left(\chi_2y^+\right)\right)}{ky^+\sqrt{\tau_+}}\,,$$

$c,\ k,\ \chi_1,\ \chi_2$ - емпіричні коефіцієнти моделі, $\tau_+=\tau_0/\tau_w$, τ_0 - напруження тертя в околі стінки, τ_w - напруження тертя на стінці, $\tau_+=1+\Phi\overline{y}$ - при додатному градієнті тиску і $\tau_+=\dfrac{1}{1-\Phi\overline{y}}$ - при від'ємному, $\Phi=\dfrac{\delta}{\tau_w}\dfrac{dp}{dx}$ - параметр Федяєвського, δ - товщина примежового шару, $\overline{y}=y/\delta$, $V_*=\sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}}$ - динамічна швидкість.

При проведенні розрахунків необхідно мати інформацію про значення кінетичної енергії турбулентності в початкових перетинах. В експериментальних результатах досліджень така інформація, як правило, відсутня. Тому дуже важливою є побудова наближень для кінетичної енергії, які адекватні до експериментальних результатів. В даній роботі для аналітичного задання кінетичної енергії турбулентності використовуються формули [2], які дають можливість позонно обчислювати вказану величину для всього примежевого шару.

Для перехідної та в'язкої зон ці формули такі:

$$e=\begin{cases}\dfrac{V_*^2}{\sqrt{c}\left(1-py^+\right)}th\left(\chi_1 y^+\right)th^{1/2}\left(sh^2\left(\chi_2 y^+\right)\right) & \text{при} \quad p\le 0,\\ \dfrac{V_*^2}{\sqrt{c}}th\left(\chi_1 y^+\right)th^{1/2}\left(sh^2\left(\chi_2 y^+\right)\right) & \text{при} \quad p=0,\\ \dfrac{V_*^2}{\sqrt{c}}\left(1+py^+\right)th\left(\chi_1 y^+\right)th^{1/2}\left(sh^2\left(\chi_2 y^+\right)\right) & \text{при} \quad p\ge 0.\end{cases}$$

Для логарифмічної зони

$$e=\begin{cases}\dfrac{V_*^2}{\sqrt{c}\left(1-p^+y^+\right)} & \text{коли} \quad p^+\le 0,\\ \dfrac{V_*^2}{\sqrt{c}} & \text{коли} \quad p^+=0,\\ \dfrac{V_*^2}{\sqrt{c}}\left(1+p^+y^+\right) & \text{коли} \quad p\ge 0,\end{cases}$$

(в цих формулах $p^+=\dfrac{\nu}{\rho v_*^3}\dfrac{dp}{dx}$).

У зовнішній зоні течії використовується наближення, запропоноване Невзглядовим, тобто вважається, що

$$e=\frac{\tau_T}{\rho a} \tag{3}$$

і при визначенні коефіцієнта a враховується, що турбулентність не є фізичною величиною, і визначається вона геометричними та зовнішніми факторами. Тому різними є значення коефіцієнта a в моделях турбулентної в'язкості для пристінних, вільних, плоских чи осесиметричних течіях.

В роботах [7], які базуються на моделі Невзглядова, вважається, що $a=6,67\div 7,14$. В цій роботі пропонується враховувати вплив градієнта тиску на коефіцієнт a через градієнт тиску $\beta=\dfrac{\delta^*}{\tau_w}\dfrac{dp}{dx}$ та його похідну $\dfrac{d\beta}{dx}$. Точніше, для нерівноважних течій береться

$$a=7,14e^{-0,0101\beta+0,007\frac{dp}{dx}\delta^*},$$

а для рівноважних взято

$$a=6,67e^{-0,0101\beta}.$$

Для розподілу турбулентного напруження тертя, яке присутнє у формулі (3), пропонується використовувати степеневі апроксимації виду [8]:

$$\tau = \begin{cases} \tau_w\left(1-\overline{y}\right)\left(1+\left(1+\Phi\right)\overline{y}-\left(2+\Phi\right)\overline{y}^n th\dfrac{l\sqrt{\tau_+}}{\chi\Delta}\right), & \text{коли} \quad \Phi \geq -1; \\ \tau_w\left(1-\overline{y}\right)\left(\dfrac{1}{1-\left(\Phi+1\right)\overline{y}}+\dfrac{\overline{y}^n}{\Phi}th\dfrac{l\sqrt{\tau_+}}{\chi\Delta}\right), & \text{коли} \quad \Phi < -1 \end{cases}$$

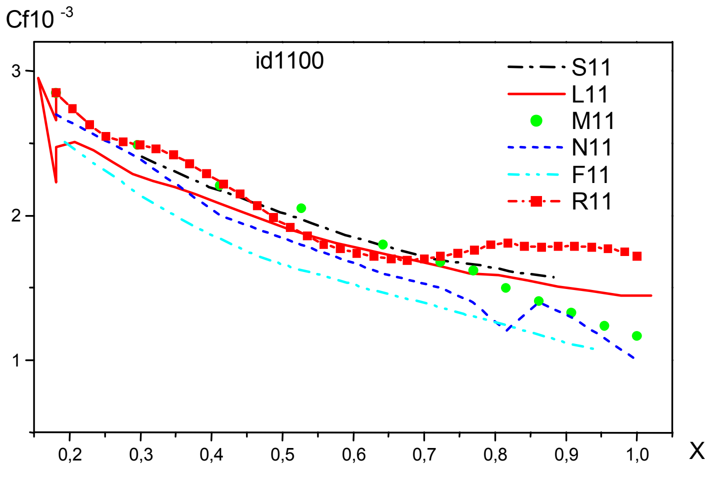
і при цьому знаходити показники степеня n за формулами, наведеними в роботі [8].

Отримані тут залежності використані в розрахунках за методикою роботи [2] представлені в графіках лініями L та R за двома моделями у порівнянні з експериментальними даними (рис.1, 2).

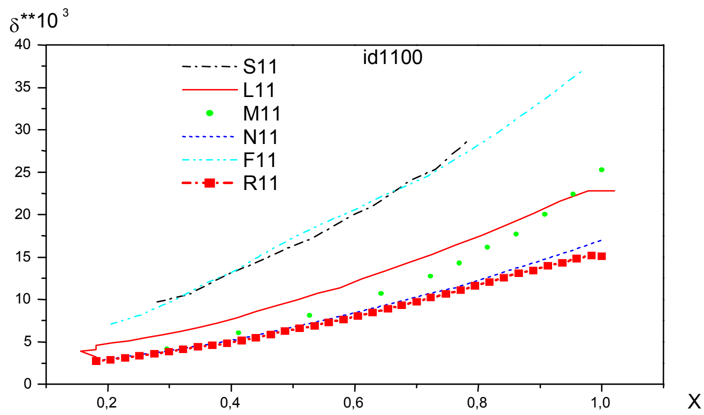
Розрахунки Федяєвського представлені лінією F, розрахунки Новожилова - лінією N, розрахунки Сінгала-Сполдінга - лінією S. У статті наведено лише два експерименти id 1100 та id 1200 з 16 канонічних експериментів, представлених у 1968 році на Стенфордській конференції.

Висновки

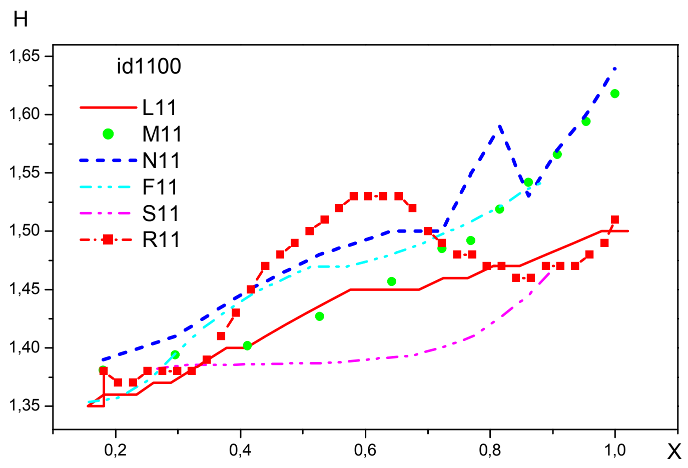
Встановлені в роботі залежності дозволяють при числовому моделюванні пристінних турбулентних течій з високою точністю обчислювати кінетичну енергію турбулентності та задавати початкові профілі кінетичної енергії турбулентності. Отримані за розробленою у статті методикою результати добре узгоджуються з експериментальними результатами для пристінної області.



а)

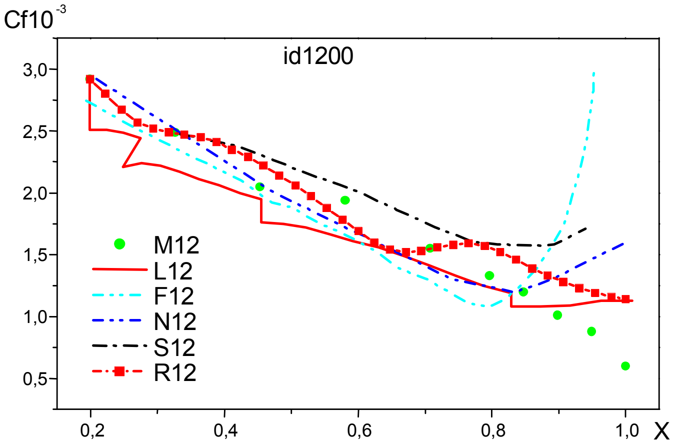


б)

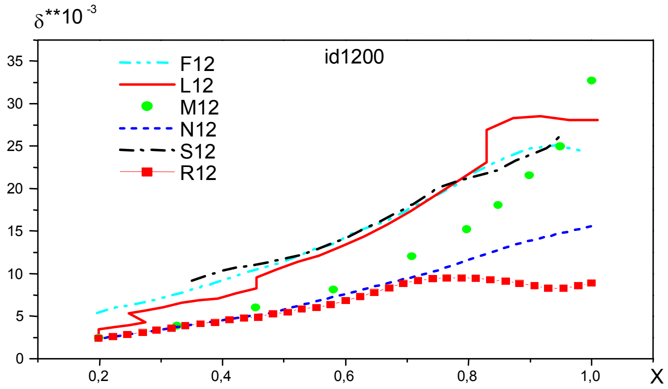


в)

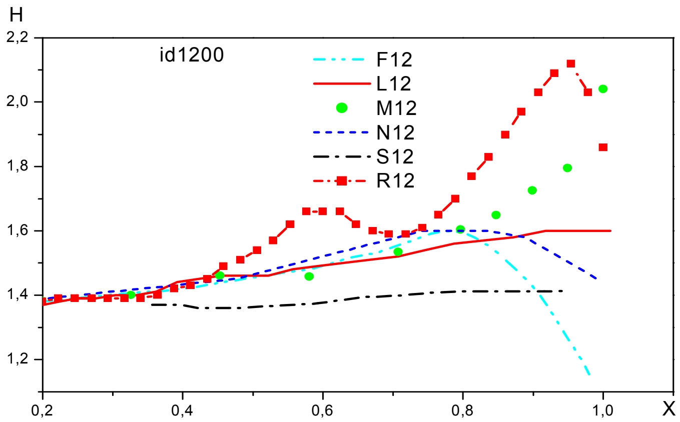
Рис.1. Експеримент id1100: а) - залежність коефіцієнта тертя від довжини;
б) - залежність товщини загубленого імпульсу δ** від довжини;
в) - залежність параметру H від довжини



а)



б)



в)

Рис.2. Експеримент id1200: а) - залежність коефіцієнта тертя від довжини;
б) - залежність товщини загубленого імпульсу δ** від довжини;
в) - залежність параметру H від довжини

Approximate-analytic dependences for calculating kinetic energy of turbulence for by-cover currents which are being developed at plus, minus and zero gradients of pressure are presented in this paper.

The received dependences are of great importance at numerous modeling of by-cover turbulant currents for setting primary profiles of kinetic energy of turbulence.

Література

1. Хинце И.О. Турбулентность. - М.: Физматгиз, 1963. - 680 с.
2. Мовчан В.Т., Романюк Л.А. Чисельне моделювання турбулентних примежових шарів з використанням однопараметричної моделі турбулентності без додаткового диференціального рівняння // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2001. - №1. - С.130-134.

3. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Сер.физ. - 1942. - Т.6. - №№1-2. - С.56-58.
4. Prandtl L., Weighardt K. Űber ein neues Formelsistem fűr die ausgebildete turbulenz // Naehr.Akad.Wiss., Gottingen, Math.Phys. - 1945. - S.874-887.
5. Невзглядов В.Г. К феноменологической теории турбулентности // Доклады АН СССР. - 1945. - Т.47. - №3. - С.169-173.
6. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. Фроста У., Моуленда Т. - М.: Мир, 1980. - 526 с.
7. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Рассчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. - Л.: Судостроение, 1973. - 256 с.
8. Мовчан В.Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного пограничного слоя // Журн.прикладной механики и технической физики. - 1982. - №3. - С.102-111.

Одержано 20.11.2002 р.