УДК 517.91; 532.2
Н.Скакальська
Тернопільський державний університет імені Івана Пулюя

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ НА ДВОСКЛАДОВІЙ ПОЛЯРНІЙ ВІСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) на полярній вісі з однією точкою спряження запроваджено інтегральне перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва в припущенні, що в умовах спряження бере участь спектральний параметр.

Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва, породженні диференціальним оператором Бесселя 2-го порядку з виродженням при сторонній похідній найбільш широко висвітлено в монографії [1] в припущенні, що межа середовища, включаючи лінії (поверхні) спряження, жорсткі по відношенню до відбиття хвиль. В даній статті одна із варіацій інтегрального перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва узагальнюється на випадок двоскладової полярної вісі з м'якою лінією спряження $r = R_1$, що математично означає наявність спектрального параметру в умовах спряження.

Побудуємо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_1^+ = \{r \in (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$$

гібридним диференціальним оператором Бесселя 2-го порядку

$$\mathrm{B}_{(\alpha)} = a_1^2\theta(r)\theta(R_1 - r)B_{\alpha_1} + a_2^2\theta(r - R_2)B_{\alpha_2}; (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

в припущенні, що спектральний параметр бере участь в умовах спряження ;

$$\mathrm{B}_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2, 2\alpha + 1 > 0, \lambda \in (0, \infty).$$

За дельта-подібну послідовність візьмемо ядро Коші – фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного типу, породженої оператором $\mathrm{B}_{(\alpha)}$.

Розглянемо задачу пробудову обмеженого в області

$$D_1^+ = \{(t, r) : t \in (0, \infty); r \in I_1^+\}$$

розв'язку системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [2]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \gamma_j^2 u_j(t, r) - a_j^2 \mathrm{B}_{\alpha_j}[u_j] = 0, r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1,2; R_0 = 0, R_2 = \infty \qquad (1)$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)\big|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1,2, R_0 = 0, R_2 = \infty \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned}&\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^1 + \delta_{j1}^1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1 + \gamma_{j1}^1\frac{\partial}{\partial t}\right]u_1(t, r) - \right.\\ &\left.-\left[\left(\alpha_{j2}^1 + \delta_{j2}^1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1 + \gamma_{j2}^1\frac{\partial}{\partial t}\right]u_2(t, r)\right\}\Bigg|_{r=R_1} = 0, j = 1,2\end{aligned} \qquad (3)$$

Припустимо, що:

1) вектор-функція *u(t,r)={u₁(t,r), u₂(t,r)}* є оригіналом за Лапласом щодо *t* [3];

2) $\Psi_{j1} \equiv \left[\delta^1_{j1} g'_1(R_1) + \gamma^1_{j1} g_1(R_1)\right] - \left[\delta^1_{j2} g'_2(R_1) + \gamma^1_{j2} g_2(R_1)\right] = 0,\ j = 1,2$;

3) $c_{11,1} \cdot c_{21,1} > 0, c_{j1,1} = \alpha^1_{2j}\beta^1_{1j} - \alpha^1_{1j}\beta^1_{2j}; c_{j2,1} \equiv \delta^1_{2j}\gamma^1_{1j} - \delta^1_{1j}\gamma^1_{2j} = 0,\ j = 1,2$;

4) $c^{12,1}_{j1,j2} = c^{21,1}_{j1,j2}; c^{12,1}_{i1,j2} = \alpha^1_{1i}\gamma^1_{2j} - \alpha^1_{2i}\gamma^1_{1j}; c^{21,1}_{i1,j2} = \beta^1_{1i}\delta^1_{2j} - \beta^1_{2i}\delta^1_{1j}, i, j = 1,2$;

У зображенні за Лапласом параболічній задачі (1)–(3) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_1^+ розв'язок сепаратної системи рівнянь Бесселя 2-го порядку для модифікованих функцій [4]

$$\left(\mathrm{B}_{\alpha_j} - \nu_j^2\right) u_j^*(p,r) = -\overline{g_j}(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1,2 \tag{4}$$

за умовами спряження

$$\left[(\overline{\alpha}^1_{j1}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^1_{j1})u_1^*(p,r) - (\overline{\alpha}^1_{j2}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^1_{j2})u_2^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_1} = 0, j = 1,2 \tag{5}$$

Тут $\nu_j = a_j^{-1}(p+\gamma_j^2)^{\frac{1}{2}}$, $a_j > 0, \gamma_j^2 \ge 0$, $\overline{\alpha}^1_{jm} = \alpha^1_{jm} + \delta^1_{jm} p$, $\overline{\beta}^1_{jm} = \beta^1_{jm} + \gamma^1_{jm} p$, $p = \sigma + is$, $i^2=-1$, $\overline{g}_j = a_j^{-2} g_j$, $\mathrm{Re}\,\nu_j > 0$; *j,m=1,2.*

Зауваження: Якщо $\Psi_{j1} \ne 0$, то переходимо до початкових умов $\varphi_1(r) = b_1 r + g_1(r)$, $\varphi_2(r) = b_2 + g_2(r)$ і вибираємо b_1, b_2 так, щоб мала місце рівність: $\Psi_{11} = 0$, $\Psi_{21} = 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha - \nu^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{\nu,\alpha}(\lambda r)$ і $K_{\nu,\alpha}(\lambda r)$ [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (4), (5) методом функцій Коші [5, 6]:

$$\begin{aligned} u_1^*(p,r) &= A_1 I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1 r) + \int_0^{R_1} \mathcal{E}^*_{\alpha_1}(p,r,\rho)\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho \\ u_2^*(p,r) &= B_2 \mathrm{K}_{\nu_2,\alpha_2}(\alpha_2 r) + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{E}^*_{\alpha_2}(p,r,\rho)\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho \end{aligned} \tag{6}$$

Тут беруть участь функції Коші

$$\mathcal{E}^*_{\alpha_1}(p,r,\rho) = \frac{\lambda_1^{2\alpha_1}}{U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1)}\begin{cases} I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda, r)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1, \lambda_1\rho), 0 < r < \rho < R_1 \\ I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda, \rho)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1, \lambda_1 r), 0 < \rho < r < R_1 \end{cases};$$

$$\mathcal{E}^*_{\alpha_2}(p,r,\rho) = -\frac{\lambda_2^{2\alpha_2}}{U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1)}\begin{cases} K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2 \rho)\Psi^{1*}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1, \lambda_2 r), R_1 < r < \rho < \infty \\ K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2 r)\Psi^{1*}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1, \lambda_2\rho), R_1 < \rho < r < \infty \end{cases};$$

Умови спряження (5) для визначення величин A_1, B_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(\lambda_1 R_1)A_1 - U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;j2}(\lambda_2 R_1)B_2 = \delta_{j2}G^*_{12}, j = 1,2 \tag{7}$$

Тут δ_{j2} – символ Кронекера,

$$G^*_{12} = \frac{c_{11,1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1\rho)}{U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1)}\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho - \frac{c_{21,1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{\infty}\frac{K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2\rho)}{U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_2)}\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1) = \left(\overline{\alpha}^1_{11}\frac{\nu_1-\alpha_1}{R_1}+\overline{\beta}^1_{11}\right)I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1 R_1)+\overline{\alpha}^1_{11}\lambda^2{}_1 R_1 I_{\nu_1+1,\alpha_1+1}(\lambda_1 R_1),$$

$$U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1) = \left(\overline{\alpha}^1_{12}\frac{\nu_2-\alpha_2}{R_1}+\overline{\beta}^1_{12}\right)\mathrm{K}_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2 R_1)-\overline{\alpha}^1_{12}\lambda^2_2 R_1 \mathrm{K}_{\nu_2+1,\alpha_2+1}(\lambda_2 R_1),$$

$$\Psi^{1*}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_1,\lambda r) = U^{11}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_1)\mathrm{K}_{\nu,\alpha}(\lambda r)-U^{12}_{\nu,\alpha;jk}(\lambda R_1)I_{\nu,\alpha}(\lambda r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа та $Im\ p = s \in (-\infty;+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (7)

$$\Delta_{(\alpha)}(p) \equiv U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(\lambda_1 R_1)U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1) - U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1)U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;22}(\lambda_2 R_1) \neq 0 \quad (8)$$

Визначимо функції впливу:

$$\mathrm{H}^*_{(\alpha);11}(p,r,\rho) = \frac{\lambda_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{(\alpha)}(p)}\begin{cases} I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1 r)[U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;22}(\lambda_2 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;21}(\lambda_1 R_1,\lambda_1\rho) - \\ \quad -U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1,\lambda_1\rho)], 0<r<\rho<R_1 \\ I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1 \rho)[U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;22}(\lambda_2 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;21}(\lambda_1 R_1,\lambda_1 r) - \\ \quad -U^{12}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1,\lambda_1 r)], 0<\rho<r<R_1 \end{cases};$$

$$\mathrm{H}^*_{(\alpha);12}(p,r,\rho) = \frac{c_{21,1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(p)}I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1 r)K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2\rho);$$

$$\mathrm{H}^*_{(\alpha);21}(p,r,\rho) = \frac{c_{11,1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(p)}I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda_1 \rho)K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2 r); \quad (9)$$

$$\mathrm{H}^*_{(\alpha);22}(p,r,\rho) = \frac{\lambda_2^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\alpha)}(p)}\begin{cases} K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2 \rho)[U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_2,\alpha_2;22}(\lambda_2 R_1,\lambda_2 r) - \\ \quad -U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(\lambda_1 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1,\lambda_2 r)], R_1<r<\rho<\infty \\ K_{\nu_2,\alpha_2}(\lambda_2 r)[U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_2,\alpha_2;22}(\lambda_2 R_1,\lambda_2 \rho) - \\ \quad -U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(\lambda_1 R_1)\Psi^{1*}_{\nu_2,\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1,\lambda_2 \rho)], R_1<\rho<r<\infty \end{cases}.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (7), підстановки одержаних значень A_1, та B_2 у формули (6) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (4), (5):

$$u^*_j(p,r) = \int_0^{R_1}\mathrm{H}^*_{(\alpha);j1}(p,r,\rho)\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_1}^{\infty}\mathrm{H}^*_{(\alpha);j2}(p,r,\rho)\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho;\ j=1,2 \quad (10)$$

Повертаючись в рівностях (10) до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1)–(3):

$$u_j(t,r) = \int_0^{R_1}\mathrm{H}_{(\alpha);j1}(t,r,\rho)\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_1}^{\infty}\mathrm{H}_{(\alpha);j2}(t,r,\rho)\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho;\ j=1,2 \quad (11)$$

У рівностях (11) за означенням [3]

$$\mathrm{H}_{(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathrm{H}^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp;j,k=1,2 \quad (12)$$

Особливими точками функцій впливу $\mathrm{H}^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2, p=-\gamma_2^2$ та $p=\infty$. Покладемо $\nu_j = ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2) \equiv ib_j(\beta)$, де $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2 \geq 0$, $\gamma^2 = \max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\}$. У цьому випадку $p=-(\beta^2+\gamma^2) \equiv (\beta^2+\gamma^2)\exp\pi i, dp=-2\beta d\beta$.

Визначимо функції [1]:

$$D_\alpha(x,b(\beta)) = \pi^{-1} sh\pi b K_{ib,\alpha}(x); C_\alpha(x,b) = I_{ib,\alpha}(x) + iD_\alpha(x,b);$$

$$\mathrm{X}^{m1}_{\alpha;jk}(\lambda R_m, b) = \left(\tilde{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^m_{jk}\right) C_\alpha(\lambda r, b)\Big|_{r=R_m}; \tilde{\alpha}^m_{jk} = \alpha^m_{jk} - (\beta^2+\gamma^2)\delta^m_{jk} \quad ;$$

$$\mathrm{X}^{m2}_{\alpha;jk}(\lambda R_m, b) = \left(\tilde{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^m_{jk}\right) D_\alpha(\lambda r, b)\Big|_{r=R_m}; \tilde{\beta}^m_{jk} = \beta^m_{jk} - (\beta^2+\gamma^2)\gamma^m_{jk};$$

Безпосередньо встановлюємо:

$$U^{m1}_{ib,\alpha;jk}(\lambda R_m) = \mathrm{X}^{m1}_{\alpha;jk}(\lambda R_m, b) - i\mathrm{X}^{m2}_{\alpha;jk}(\lambda R_m, b);$$
$$U^{m2}_{ib,\alpha;jk}(\lambda R_m) = \pi(sh\pi b)^{-1}\mathrm{X}^{m2}_{\alpha;jk}(\lambda R_m, b(\beta));$$
$$\Delta_{(\alpha)}\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2)\right) = \frac{\pi}{sh\pi b_2}\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta) - i\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right], \tag{13}$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = \mathrm{X}^{1j}_{\alpha_1;21}(\lambda_1 R_1, b_1)\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda_2 R_1, b_2) - \mathrm{X}^{1j}_{\alpha_1;11}(\lambda_1 R_1, b_1)\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;22}(\lambda_2 R_1, b_2)$$

Введемо до розгляду функції:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^{\,2}}, \sigma_2 = \frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{a_2^2}; \delta_{\alpha_1}(\beta) = \frac{c_{11,1} sh\pi b_1(\beta)}{\pi\lambda_1^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}};$$
$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \omega_{(\alpha),1}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda_1 r, b_1) - \omega_{(\alpha),2}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda_1 r, b_1); \tag{14}$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = \delta_{\alpha_1}(\beta)D_{\alpha_2}(\lambda_2 r, b_2(\beta));$$
$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = 2\beta\lambda_1^{2\alpha_1}(sh\pi b_1)^{-1}\left([\omega_{(\alpha),1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha),2}(\beta)]^2\right)^{-1}.$$

На основі леми Жордана й теореми Коші [3] знаходимо, що

$$\mathrm{H}_{(\alpha);jk}(t,r,\beta) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{H}^*_{(\alpha);jk}\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2), r, \rho\right)\right\}\beta d\beta =$$
$$= \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} V_{(\alpha),j}(r,\beta)V_{(\alpha),k}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2; j,k = 1,2 \tag{15}$$

У результаті підстановки (15) в (11) отримуємо інтегральне зображення єдиного розв’язку параболічної задачі (1)-(3):

$$u_j(t,r) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} V_{(\alpha),j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\left[\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{(\alpha),1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \right.$$
$$\left. + \int_{R_1}^\infty g_2(\rho)V_{(\alpha),2}(\rho,\beta)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\right]d\beta; j = 1,2 \tag{16}$$

Звідси внаслідок початкових умов (2) маємо інтегральні зображення:

$$g_1(r) = \int_0^\infty V_{(\alpha),1}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{(\alpha),1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\beta$$
$$g_2(r) = \int_0^\infty V_{(\alpha),2}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\int_{R_1}^\infty g_2(\rho)V_{(\alpha),2}(\rho,\beta)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\beta \tag{17}$$

Якщо покласти

$$V_{(\alpha)}(r,\beta) = \Theta(r)\Theta(R_1 - r)V_{(\alpha);1}(r,\beta) + \Theta(r - R_1)V_{(\alpha);2}(r,\beta)$$

$$\sigma_{(\alpha)}(r)=\Theta(r)\Theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}+\Theta(r-R_1)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1};$$

$$g(r)=\Theta(r)\Theta(R_1-r)g_1(r)+\Theta(r-R_1)g_2(r),$$

то система рівностей (17) дає інтегральне зображення вектор-функції *g(r)*:

$$g(r)=\int_0^\infty V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\int_0^\infty g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma_\alpha(\rho)d\rho d\beta \tag{18}$$

Інтегральне зображення (18) визначає пряме

$$\mathrm{H}_{(\alpha);1}[g(r)]=\int_0^\infty g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_{(\alpha)}(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta) \tag{19}$$

і обернене

$$\mathrm{H}^{-1}_{(\alpha);1}[\tilde{g}(\beta)]=\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r) \tag{20}$$

інтегральне перетворення типу Конторовича–Лєбєдєва із спектральним параметром на полярній вісі з однією точкою спряження.

Внаслідок властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності маємо твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо виконані умови 3) і 4) на коефіцієнти, вектор-функція

$$f(r)=\left[\Theta(r)\Theta(R_1-r)r^{\alpha_1-\frac{1}{2}}+\Theta(r-R_1)r^{\alpha_2-\frac{1}{2}}\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_1^+$ справджується інтегральне зображення (18).

Сформульована теорема є математичним обгрунтуванням формул (19), (20).

Зауваження 1: Якщо вектор-функція g(r) кусково-неперервна, то в рівності (18) треба зліва g(r) замінити на

$$\tfrac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)].$$

Зауваження 2: Співвідношення (13) для $\Delta_{(\alpha)}$ показує, що спектр оператора $B_{(\alpha)}$ не може бути дискретним.

Дійсно, якби спектр оператора $B_{(\alpha)}$ був дискретним і β_m власне число, то ми мали б тотожності:

$$\begin{cases}\omega_{(\alpha);1}(\beta_m)=\mathrm{X}^{11}_{\alpha_1;21}(\lambda_1R_1,b_{1m})\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,b_{2m})-\mathrm{X}^{11}_{\alpha_1;11}(\lambda_1R_1,b_{1m})\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,b_{2m})\equiv 0\\ \omega_{(\alpha);2}(\beta_m)=\mathrm{X}^{12}_{\alpha_1;21}(\lambda_1R_1,b_{1m})\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,b_{2m})-\mathrm{X}^{12}_{\alpha_1;11}(\lambda_1R_1,b_{1m})\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,b_{2m})\equiv 0\end{cases} \tag{21}$$

Внаслідок того, що визначник системи (21)

$$\mathrm{X}^{11}_{\alpha_1;21}(\lambda_1R_1,b_{1m})\mathrm{X}^{12}_{\alpha_1;11}(\lambda_1R_1,b_{2m})-\mathrm{X}^{11}_{\alpha_1;11}(\lambda_1R_1,b_{1m})\mathrm{X}^{12}_{\alpha_1;21}(\lambda_1R_1,b_{2m})=$$
$$=\frac{c_{11}sh\pi b_{1m}}{\pi\lambda_1^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\equiv\delta_{\alpha_1}(\beta_m)\neq 0, b_{jm}=a_j^{-1}\left(\beta_m^2+k_j^2\right)^{1/2},$$

маємо рівності:

$$\begin{cases}\mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,b_{2m})\equiv\tilde{\alpha}^1_{12}\lambda_2D'_{\alpha_2}(\lambda_2R_1,b_{2m})+\tilde{\beta}^1_{12}D_{\alpha_2}(\lambda_2R_1,b_{2m})=0\\ \mathrm{X}^{12}_{\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,b_{2m})\equiv\tilde{\alpha}^1_{22}\lambda_2D'_{\alpha_2}(\lambda_2R_1,b_{2m})+\tilde{\beta}^1_{22}D_{\alpha_2}(\lambda_2R_1,b_{2m})=0\end{cases} \tag{22}$$

Оскільки визначник алгебраїчної системи (22)

$$\tilde{\alpha}_{12}^{1}\tilde{\beta}_{22}^{1}-\tilde{\alpha}_{22}^{1}\tilde{\beta}_{12}^{1}=\alpha_{12}^{1}\beta_{22}^{1}-\alpha_{22}^{1}\beta_{12}^{1}=-c_{21,1}\neq 0,$$

то система (22) має тільки нульовий розв'язок:

$$D'_{\alpha_2}\left(\lambda_2 R_1, b_{2m}\right)=0, D_{\alpha_2}\left(\lambda_2 R_1, b_{2m}\right)=0$$

Останнє неможливо: нулі функцій $K_{ib_m}\left(\lambda_2 R_1\right)$ і $K'_{ib_m}\left(\lambda_2 R_1\right)$ відносно β_m перемежовуються [7].

В основі застосування запровадженого інтегрального перетворення для розв'язання відповідних задач математичної фізики лежить основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $\mathrm{B}_{(\alpha)}$.

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо виконані умови 3) і 4) на коефіцієнти, вектор-функція $f(r)=\{\mathrm{B}_{\alpha_1}[g_1(r)];\mathrm{B}_{\alpha_2}[g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_1^+, а вектор-функція g(r) задовольняє умови обмеження

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha_1+1}\left(g_1{}' V_{(\alpha);1}-g_1 V'_{(\alpha);1}\right)=0, \lim_{r\to 0} r^{2\alpha_2+1}\left(g_2{}' V_{(\alpha);2}-g_2 V'_{(\alpha);2}\right)=0 \tag{23}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{1}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{1}\right)g_1(r)-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^{1}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^{1}\right)g_2(r)\right]\Big|_{r=R_1}=\omega_{j1}, j=1,2, \tag{24}$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора $\mathrm{B}_{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{(\alpha);1}\left[\mathrm{B}_{(\alpha)}[g(r)]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-k_1^2\int_0^{R_1} g_1(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr-\\ -k_2^2\int_{R_1}^{\infty} g_2(r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+\\ +\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{11,1}}\left[\left(\tilde{\alpha}_{12}^1 d/dr+\tilde{\beta}_{12}^1\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1}\omega_{21}-\left(\tilde{\alpha}_{22}^1 d/dr+\tilde{\beta}_{22}^1\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1}\omega_{11}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

Доведення: Із умов спряження знаходимо базову тотожність (при виконанні уммов (3) і (4) на коефіцієнти):

$$\begin{aligned}g_1'(R_1)V_{(\alpha);1}(R_1,\beta)-g_1(R_1)V'_{(\alpha);1}(R_1,\beta)=\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}\left[g_2'(R_1)V_{(\alpha);2}(R_1,\beta)-g_2(R_1)V'_{(\alpha);2}(R_1,\beta)\right]+\\ +\frac{1}{c_{11,1}}\left\{\left(\tilde{\alpha}_{12}^1\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{12}^1\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1}\omega_{21}-\left(\tilde{\alpha}_{22}^1\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^1\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1}\omega_{11}\right\}.\end{aligned} \tag{26}$$

У справедливості тотжності (25) переконаємося, якщо проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами і скористаємося тотожністю

$$a_j^2\mathrm{B}_{\alpha_j}\left[V_{(\alpha);j}(r,\beta)\right]\equiv-\left(\beta^2+k_j^2\right)V_{(\alpha);j}(r,\beta),$$

структурою σ_1,σ_2, умовами обмеженості (23) і базовою тотожністю (26).

Наведемо типові задачі математичної фізики, точний аналітичний розв'язок яких будується даним методом.

Задача квазістатики: Побудувати обмежений в області D_1^+ розв'язок системи рівнянь теплопровідності

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \gamma_j^2 u_j(t,r) - a_j^2 \mathrm{B}_{\alpha_j}[u_j] = f_j(t,r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1,2 \tag{27}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1,2, R_0 = 0, R_2 = \infty \tag{28}$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^1 + \delta_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1 + \gamma_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial t}\right] u_1(t,r) - \left[\left(\alpha_{j2}^1 + \delta_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1 + \gamma_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial t}\right] u_2(t,r)\right\}\Big|_{r=R_1} = \tag{29}$$
$$= \omega_{j1}(t), j = 1,2$$

Розв’язання: Запишемо систему (27) і початкові умови (28) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{\alpha_1}\right) u_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 B_{\alpha_2}\right) u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{bmatrix} \tag{30}$$

Зобразимо інтегральний оператор $H_{(\alpha);1}$ згідно з правилом (19) у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\alpha);1}[\ldots] = \left[\int_0^{R_1} \ldots V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr \right] \tag{31}$$

Припустимо, що $\gamma_1^2 \ge \gamma_2^2$. Покладемо $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \ge 0$. Застосуємо операторну матрицю-рядок (31) за правилом множення матриць до задачі (30). Внаслідок основної тотожності (25) одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \gamma_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta) \tag{32}$$

Тут бере участь функція

$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + d_1\left[Z_{(\alpha);12}^1(\beta)(\omega_{21}(t) + \psi_{21}) - Z_{(\alpha);22}^1(\beta)(\omega_{11}(t) + \psi_{11})\right];$$
$$Z_{(\alpha);i2}^1(\beta) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^1 \, d/dr + \tilde{\beta}_{i2}^1\right) V_{(\alpha);2}(r,\beta)\big|_{r=R_1}, i = 1,2; d_1 = \frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{11,1}}.$$

Розв’язком задачі Коші (32) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\left[\tilde{F}(\tau,\beta) + \tilde{g}(\beta)\delta_+(\tau)\right] d\tau, \tag{33}$$

$\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці *t=0+*.

Інтегральний оператор $H_{(\alpha);1}^{-1}$, що діє за правилом (20), як обернений до (31) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовбця

$$H_{(\alpha);1}^{-1} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \cdots V_{(\alpha);1}(r,\beta)\Omega(\beta)d\beta \\ \int_0^\infty \cdots V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Omega(\beta)d\beta \end{bmatrix} \tag{34}$$

Якщо застосувати за правилом множення матриць операторну матрицю-стовбець (34) до матриці-елемента $[\widetilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (33), то в результаті елементарних перетворень одержимо єдиний розв'язок параболічної задачі (27)-(29):

$$\begin{aligned} u_m(t,r) &= \int_0^\infty \widetilde{u}(t,r) V_{(\alpha);m}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(r,\beta)d\beta = \\ &= \int_0^t \left[\int_0^{R_1} H_{(\alpha);m1}(t-\tau,r,\rho)(f_1(\tau,\rho)+g_1(\rho)\delta_+(\tau))\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \right. \\ &\left. + \int_{R_1}^\infty H_{(\alpha);m2}(t-\tau,r,\rho)(f_2(\tau,\rho)+g_2(\rho)\delta_+(\tau))\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho \right] d\tau + \\ &+ \int_0^t \left[\Re^{1m}_{(\alpha);12}(t-\tau,r)(\omega_{21}(\tau)+\psi_{21}\delta_+(t)) - \Re^{1m}_{(\alpha);22}(t-\tau,r)(\omega_{11}(\tau)+\psi_{11}\delta_+(t))\right] d\tau, m=1,2 \end{aligned} \tag{35}$$

У рівностях (35) беруть участь функції впливу

$$H_{(\alpha);mk}(t,r,\rho) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t} V_{(\alpha);m}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta; m,k=1,2\,, \tag{36}$$

породжені наявністю теплових джерел (початкового температурного режиму), та функції Гріна

$$\Re^{1m}_{(\alpha);i2}(t,r) = \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}\left[d_1 Z^1_{(\alpha);i2}(\beta)\right] V_{(\alpha);m}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta; i,m=1,2 \tag{37}$$

умов спряження.

Задача динаміки: Побудувати обмежений в області D_1^+ розв'язок системи рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \gamma_j^2 u_j - a_j^2 \mathrm{B}_{\alpha_j}[u_j] = f_j(t,r), r\in(R_{j-1},R_j), j=1,2 \tag{38}$$

за початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0} = \varphi_j(r), \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = g_j(r), r\in(R_{j-1},R_j), j=1,2, R_0=0, R_2=\infty \tag{39}$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned} &\left\{\left[\left(\alpha^1_{j1}+\delta^1_{j1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta^1_{j1}+\gamma^1_{j1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_1(t,r) - \left[\left(\alpha^1_{j2}+\delta^1_{j2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta^1_{j2}+\gamma^1_{j2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_2(t,r)\right\}\Big|_{r=R_1} = \\ &= \omega_{j1}(t), j=1,2 \end{aligned} \tag{40}$$

Розв'язання: Запишемо систему (38) і початкові умови (39) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-a_1^2 B_{\alpha_1}\right)u_1 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-a_2^2 B_{\alpha_2}\right)u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

В припущенні, що $\gamma_1^2 \geq \gamma_2^2$, застосуємо до задачі (41) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (31). Внаслідок основної тотожності (25) одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + \gamma_1^2\right)\widetilde{u} = \widetilde{F}, \widetilde{u}\Big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \frac{d\widetilde{u}}{dt}\Big|_{t=0} = \widetilde{g} \tag{42}$$

Тут прийнято позначення:

$$\widetilde{F}(t,\beta) = \widetilde{f}(t,\beta) + d_1\left[Z^1_{(\alpha);12}(\beta)\left(\omega_{21}(t) + \psi_{21} - \left(\beta^2 + \gamma_1^2\right)\overline{\varphi}_{21}\right) - Z^1_{(\alpha);22}(\beta)\left(\omega_{11}(t) + \psi_{11} - \left(\beta^2 + \gamma_1^2\right)\overline{\varphi}_{11}\right)\right];$$

$$\psi_{j1}(R_1) = \delta^1_{j1} g_1'(R_1) + \gamma^1_{j1} g_1(R_1) - \left[\delta^1_{j2} g_2'(R_1) + \gamma^1_{j2} g_2(R_1)\right], j = 1,2;$$

$$\overline{\varphi}_{j1}(R_1) = \delta^1_{j1}\varphi_1'(R_1) + \gamma^1_{j1}\varphi_1(R_1) - \left[\delta^1_{j2}\varphi_2'(R_1) + \gamma^1_{j2}\varphi_2(R_1)\right].$$

Розв’язком задачі Коші (42) є функція

$$\widetilde{u}(t,\beta) = \frac{\sin\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}}\widetilde{g}(\beta) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}}\right)\widetilde{\varphi}(\beta) + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}}\widetilde{F}(\tau,\beta)d\tau \ , \tag{43}$$

Визначимо функції впливу

$$K_{(\alpha);mj}(t,r,\rho) = \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}} V_{(\alpha);m}(r,\beta) V_{(\alpha);j}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta; m, j = 1,2 \tag{44}$$

породжені наявністю густини збурюючої сили (початкового збуреного стану) і функції Гріна

$$\Re^{1m}_{(\alpha);i2}(t,r) = \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}}\left[d_1 Z^1_{(\alpha);i2}(\beta)\right] V_{(\alpha);m}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta; i, m = 1,2 \tag{45}$$

умов спряження й незв’язності початкових умов.

Застосуємо операторну матрицю-стовбець (34) до матриці-елемента $[\widetilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (43), за правилом множення матриць. У результаті елементарних перетворень отримуємо точний аналітичний розв’язок гіперболічної задачі (38)-(40):

$$
\begin{aligned}
u_m(t,r) &= \int_0^\infty \tilde{u}(t,r)V_{(\alpha);m}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta = \\
&= \int_0^t \int_0^{R_1} K_{(\alpha);m1}(t-\tau,r,\rho)\left(f_1(\tau,\rho)+g_1(\rho)\delta_+(\tau)\right)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_{R_1}^\infty K_{(\alpha);m2}(t-\tau,r,\rho)\left(f_2(\tau,\rho)+g_2(\rho)\delta_+(\tau)\right)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{R_1} K_{(\alpha);m1}(t,r,\rho)\varphi_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_1}^\infty K_{(\alpha);m2}(t,r,\rho)\varphi_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\right] + \\
&+ \int_0^t \left[\Re^{1m}_{(\alpha);12}(t-\tau,r)\left(\omega_{21}(\tau)+\psi_{21}\delta_+(t)\right) - \Re^{1m}_{(\alpha);22}(t-\tau,r)\left(\omega_{11}(\tau)+\psi_{11}\delta_+(t)\right)\right]d\tau + \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Re^{1m}_{(\alpha);12}(t,r)\overline{\varphi}_{21} - \Re^{1m}_{(\alpha);22}(t,r)\overline{\varphi}_{11}\right], m = 1,2.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Висновок

Наведені приклади показують, що методом запровадженого інтегрального перетворення можна побудувати точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру достатньо широкого класу задач математичної фізики неоднорідних середовищ з м'якими межами.

By method like delta sequence (kernel of Koshi) on polar axis with one point of collision the integral transformation of Kontorovich–Lebedev with spectral parameter under the collision conditions are introduced.

Література

1. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1972. –735 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 486 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Одержано 10.10.2003 р.