УДК 517.946

М.Ленюк[1], докт. фіз. -мат. наук; М.Шелестовська[2], канд. техн. наук
[1]Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича
[2]Тернопільська академія народного господарства

НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ У НАПІВСФЕРИЧНИХ ПОРОЖНИСТИХ ТІЛАХ

Методом фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру нестаціонарної задачі теплопровідності для ізотропних напівсферичних порожнистих тіл.

Розв'язанню стаціонарних і нестаціонарних задач теплопровідності для сферичних тіл присвячена ціла низка наукових праць [1, 2, 3]. Стосовно напівсферичних порожнистих тіл – випадок стаціонарної задачі теплопровідності при симетрії по азимуту знаходимо в роботі [4]. У даній роботі розв'язується нестаціонарна задача теплопровідності для порожнистих напівсферичних тіл при найбільш широких з точки зору феноменологічної теорії теплопровідності припущеннях.

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля у напівсферичному ізотропному порожнистому тілі математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D=\{(t,r,\varphi,\mu): t\in(0,\infty), r\in(R_0,R_1), \varphi\in[0,2\pi), \mu\in[0,1]; \mu=\cos\theta, R_0>0\}$$

роз'язку рівняння теплопровідності параболічного типу [5]

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\gamma^2 T-a^2\Delta_3[T]=f(t,r,\varphi,\mu), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$T(t,r,\varphi,\mu)\big|_{t=0}=g(r,\varphi,\mu,) \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0)T\Big|_{r=R_0}=g_0(t,\mu,\varphi),(\alpha_{11}^1\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^1)T\Big|_{r=R_1}=g_1(t,\varphi,\mu) \tag{3}$$

$$T(t,r,\varphi,\mu)\big|_{\mu=0}=\omega(t,r,\varphi) \tag{4}$$

$$T(t,r,\varphi+2\pi,\mu)=T(t,r,\varphi,\mu) \tag{5}$$

У рівностях (1), (5) $a>0,\gamma^2\geq 0,\ |\alpha_{11}^m|+|\beta_{11}^m|\neq 0,\ m=0,1$

$$\Delta_3=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}].$$

Застосуємо до задачі (1)-(5) скінчене інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є стосовно кутових змінних (φ,μ) за правилом [6]:

$$F_{nm}[g(\varphi,\mu)]=\int_0^1\int_0^{2\pi}g(\varphi,\mu)e^{-im\varphi}P_n^m(\mu)d\varphi d\mu\equiv g_{mn} \tag{6}$$

Тут $P_n^m(\mu)$- приєднаний многочлен Лежандра 1-го роду [5]. При $n = 2\kappa + 1, m = 2s$ або при $n = 2\kappa, m = 2s + 1$ внаслідок тотожності

$$F_{mn}\left[\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]\right] = -n(n+1)U_{mn} + U_m\Big|_{\mu=0}\frac{dP_n^m(0)}{d\mu} \quad (7)$$

одержуємо задачу про конструкцію обмеженого в області

$$D_1 = \{(t,r) : t \in (0,\infty),\ r \in (R_0,R);\ R_0 > 0, R < \infty\}$$

розв'язку рівняння теплопровідності В - параболічного типу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^2\right)T_{mn}(t,r) - a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right)T_{mn}(t,r) = F_{mn}^*(t,r) \quad (8)$$

з початковою умовою

$$T_{mn}(t,r)\big|_{t=0} = g_{mn}(r),\ r \in (R_0,R) \quad (9)$$

та крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)T_{mn}(t,r)\Big|_{r=R_0} = g_{0,mn}(t), \left(\alpha_{11}^1\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^1\right)T_{mn}(t,r)\big|_{r=R} = g_{1mn}(t) \quad (10)$$

У рівності (8) прийнято позначення:

$$F^*{}_{mn}(t,r) = f_{mn}(t,r) + r^{-2}\omega_m(t,r)\frac{dP_n^m(0)}{d\mu}.$$

Розв'язок задачі (8)-(10) побудуємо методом інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду [7]:

$$H_n[g(r)] = \int_{R_0}^{R_1} g(r)V_n(r,\beta_j)r^2dr \equiv g_j \quad (11)$$

$$H_n^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j\frac{V_n(r,\beta_j)}{\|V_n(r,\beta_j)\|^2} \equiv g(r) \quad (12)$$

У рівностях (11), (12) $V_n(r,\beta_j)$є спектральною функцією задачі Штурма- Ліувілля: побудувати ненульовий розв'язок рівняння Бесселя

$$\left(B_{n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \beta^2\right)V_n(r,\beta) \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \beta^2\right)V_n = 0 \quad (13)$$

з крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \, d/dr + \beta_{11}^0)V_n\Big|_{r=R_0} = 0,\ \ (\alpha_{11}^1 \, d/dr + \beta_{11}^1)V_n\Big|_{r=R_1} = 0. \quad (14)$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Беселля $\left(B_{\nu_n,\frac{1}{2}} + \beta^2\right)\upsilon = 0$,

де $\nu_n = n + \frac{1}{2}$, утворюють функції Беселля

$$J_{\nu_n,\frac{1}{2}}(\beta r) = (\beta r)^{-\frac{1}{2}}J_{\nu_n}(\beta r)\ та\ N_{\nu_n,\frac{1}{2}}(\beta r) = (\beta r)^{-\frac{1}{2}}N_{\nu_n}(\beta r)[3].$$

Якщо визначити функції

$$U^{m1}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta R_m)=\left(\alpha^m_{11}\frac{n}{R_m}+\beta^m_{11}\right)J_{\nu_n,\frac{1}{2}}(\beta R_m)-\alpha^m_{11}\beta^2 R_m J_{\nu_n+1,\frac{3}{2}}(\beta R_m),$$

$$U^{m2}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta R_m)=\left(\alpha^m_{11}\frac{n}{R_m}+\beta^m_{11}\right)N_{\nu_n,\frac{1}{2}}(\beta R_m)-\alpha^m_{11}\beta^2 R_m N_{\nu_n+1,\frac{3}{2}}(\beta R_m),$$

то безпосередньо перевіряється, що

$$V_n(r,\beta_j)=U^{01}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta_j R_0)N_{\nu_n,\frac{1}{2}}(\beta_j r)-U^{02}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta_j R_0)J_{\nu_n,\frac{1}{2}}(\beta_j r) \tag{15}$$

При цьому β_j - корені трансцендентного рівняння

$$\delta_n(\beta)\equiv U^{01}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta R_0)U^{12}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta R_1)-U^{02}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta R_0)U^{11}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta R_1)=0, \tag{16}$$

що утворюють дискретний спектр [4], квадрат норми спектральної функції обчислюється за правилом [4]

$$\left\|V_n(r,\beta_j)\right\|^2=\int_{R_0}^{R_1}[V_n(r,\beta_j)]^2 r^2 dr \tag{17}$$

і справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора Бесселя $B_{\nu_n,\frac{1}{2}}$:

$$\begin{gathered}H_n\left[B_{\nu_n,\frac{1}{2}}[g(r)]\right]\equiv\int_{R_0}^{R_1}B_{\nu_n,\frac{1}{2}}[g(r)]\,.\,V_n(r,\beta_j)r^2dr=-\beta_j^2 g_j+\\ \frac{2}{\pi\beta_j}\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\beta^0_{11}\right)g\Big|_{r=R_0}-\frac{2}{\pi\beta_j}\frac{U^{01}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta_j R_0)}{U^{11}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta_j R_1)}\left(\alpha^1_{11}\frac{d}{dr}+\beta^1_{11}\right)g\Big|_{r=R_1}\end{gathered} \tag{18}$$

У результаті застосування до задачі (8)-(10) оператора H_n за правилом (11) внаслідок тотожності (18) одержуємо задачу Коші:

$$\begin{gathered}\left(\frac{d}{dt}+\gamma^2+a^2\beta_j^2\right)T_{mnj}(t)=F^*{}_{mnj}(t)+\frac{2}{\pi\beta_j}\cdot g_{0,mn}(t)-\\ -\frac{2}{\pi\beta_j}\frac{U^{01}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta_j R_0)}{U^{11}_{\nu_n,\frac{1}{2};11}(\beta_j R_1)}g_{1mn}(t),\qquad U_{mnj}(t)\Big|_{t=0}=g_{mnj}\end{gathered} \tag{19}$$

Розв'язком задачі Коші (19) є функція [9]

$$\begin{gathered}T_{mnj}(t)=e^{-(a^2\beta_j^2+\gamma^2)t}g_{mnj}+\int_0^t e^{-(a^2\beta_j^2+\gamma^2)(t-\tau)}[F^*{}_{mnj}(\tau)+\\ \left.+\frac{2}{\pi\beta_j}g_{0,mn}(\tau)-\frac{2}{\pi\beta_j}\frac{U^{01}_{\nu_n,1/2;11}(\beta_j R_0)}{U^{11}_{\nu_n,1/2;11}(\beta_j R_1)}g_{1mn}(\tau)\right]d\tau\end{gathered} \tag{20}$$

Оберненим до F_{mn} є оператор

$$F_{mn}^{-1}[g_{mn}]=\frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m g_{mn}e^{im\varphi}\frac{P_n^m(\mu)}{\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2} \tag{21}$$

Тут Re (...) – дійсна частина виразу (...), $\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=...\varepsilon_m=...=2$, квадрат норми приєднаного многочлена Лежандра 1-го роду

$$\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2\equiv\int_0^1\left[P_n^m(\mu)\right]^2 d\mu=\frac{1}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\ n\geq m.$$

Якщо до функції T_{mnj}, визначеної формулою (20), застосувати послідовно оператори H_n^{-1} за правилом (12) та F_{mn}^{-1} за правилом (21), то в результаті елементарних перетворень одержимо єдиний розв'язок параболічної задачі (1)-(5):

$$T(t,r,\varphi,\mu)=\int_{R_0}^{R_1}\int_0^1\int_0^{2\pi}G(t;r,\varphi,\mu;\rho,\alpha,\eta)g(\rho,\alpha,\eta)\rho^2 d\alpha d\eta d\rho+$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\int_0^1\int_0^{2\pi}G(t-\tau;r,\varphi,\mu;\rho,\alpha,\eta)\ f(\tau,\rho,\alpha,\eta)\rho^2 d\alpha d\eta d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^{2\pi}[W_0(t-\tau;r,\varphi,\mu;\alpha,\eta)g_0(\tau,\alpha,\eta)+W_1(t-\tau;r,\varphi,\mu;\alpha,\eta)\times$$

$$\times g_1(\tau,\alpha,\eta]) d\alpha d\eta d\tau+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{2\pi}W_\mu(t;r,\varphi,\mu;\rho,\alpha)\omega(\tau,\rho,\alpha)d\alpha d\rho d\tau \tag{22}$$

У формулі (22) беруть участь фундаментальний розв'язок задачі Коші (фундаментальна функція даної параболічної задачі)

$$G(t;r,\varphi,\mu;\rho,\alpha,\eta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m\sum_{j=1}^{\infty}e^{-(a^2\beta_j^2+\gamma^2)t}\frac{V_n(r,\beta_j)V_n(\rho,\beta_j)}{\left\|V_n(r,\beta_j)\right\|^2}\times$$

$$\times\frac{P_n^m(\mu)P_n^m(\eta)}{\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2}\cos m(\varphi-\alpha), \tag{23}$$

функції Гріна

$$W_0(t;r,\varphi,\mu;\alpha,\eta)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m\sum_{j=1}^{\infty}e^{-(a^2\beta_j^2+\gamma^2)t}\frac{V_n(r,\beta_j)}{\beta_j\left\|V_n(r,\beta_j)\right\|^2}\times$$

$$\times\frac{P_n^m(\mu)P_n^m(\eta)}{\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2}\cos m(\varphi-\alpha), \tag{24}$$

$$W_1(t;r,\varphi,\mu;\alpha,\eta)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m\sum_{j=1}^{\infty}e^{-(a^2\beta_j^2+\gamma^2)t}\frac{U^{01}_{\nu_n 1/2;11}(\beta_j R_0)}{\beta_j U^{11}_{\nu_n,1/2;11}(\beta_j R_1)}\times$$

$$\times\frac{V_n(r,\beta_j)}{\left\|V_n(r,\beta_j)\right\|^2}\cdot\frac{P_n^m(\mu)P_n^m(\eta)}{\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2}\cos m(\varphi-\alpha), \tag{25}$$

породжені наявністю теплового режиму відповідно на поверхах $r=R_0$ та $r=R_1$, а також функція Гріна

$$W_\theta(t;r,\varphi,\mu;\rho,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_m\sum_{j=1}^{\infty}e^{-(a^2\beta_j^2+\gamma^2)t}\frac{V_n(r,\beta_j)V_n(\rho,\beta_j)}{\left\|V_n(r,\beta_j)\right\|^2}\times$$

$$\times\frac{P_n^m(\mu)\dfrac{dP_n^m(0)}{d\mu}}{\left\|P_n^m(\mu)\right\|^2}\cos m(\varphi-\alpha) \qquad (26)$$

породжена тепловим режимом на поверхні $\theta=\pi/2$.

Зауваження: Якщо функції f,g,g_0,g_1,w (або одна з них чи декілька) не залежать від кутової змінної φ, то у відповідних доданках формули зникає інтегрування по змінній α разом із множником 2π. При цьому у формулах (23)-(26) із суми по m залишається тільки доданок при $m=0$.

Нехай тепер на межі $\mu=0$ задано крайову умову 2-го роду

$$\frac{\partial}{\partial\mu}T(t,r,\varphi,\mu)\Big|_{\mu=0}=\omega_1(t,r,\varphi) \qquad (27)$$

Тоді при $n=2\kappa,\ m=2s$ внаслідок тотожності

$$F_{mn}\left[\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]\right]= \qquad (28)$$
$$=-n(n+1)T_{mn}(t,r)-P_n^m(0)w_{1m}(t,r)$$

отримаємо задачу (8)-(10), де

$$F_{mn}^*(t,r)=f_{mn}(t,r)-P_n^m(0)w_{1m}(t,r).$$

Розв'язок параболічної задачі (1)-(3), (27), (5) має інтегральне зображення (22). При цьому в формулах (23)-(26) n та m парні і в рівності (26) замість $\dfrac{dP_n^m(0)}{d\mu}$ треба написати $(-P_n^m(0))$.

Висновок

Точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру нестаціонарної задачі теплопровідності для ізотропних напівсферичних тіл, який побудовано методом фундаментальних функцій може використовуватись в інженерних розрахунках при визначенні температурних полів і напруженого стану конструкцій.

Precise analytical solution of the algorythm type of the unstationary heat – conductivity task for the isotropic semispheric cavity bodies was built by means of the fundamental functions method.

Література

1. Гобсон Е.В. Теория сферических и элипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1952. – 476 с.
2. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282с.
3. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209с.
4. Веренич І.І. Стаціонарна задача теплопровідності для ортотропних півсферичних порожнистих тіл. Симетрія по азимуту // Сучасні проблеми математики.–Чернівці: Рута, 1998.– Ч.4. – С. 24-27.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики- М.: Наука, 1972. -735с.
6. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Беселя, Лежандра-Фурье).-Киев, 1983-56с.-(Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 83.18).

7. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля).- Киев,1983.-60с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
8. Комаров Г.Н., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівнянями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001.-228с.
9. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физмат-гиз, 1959.-468с.

Одержано 20.11.2002 р.