УДК 62-504.462
Л.Мовчан, канд.техн.наук; С.Мовчан
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ВПЛИВ КОРЕНІВ ЧИСЕЛЬНИКА ПЕРЕДАТОЧНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПОКАЗНИКИ ЯКОСТІ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ СИСТЕМ СТАБІЛІЗАЦІЇ

Розглянуто вплив коренів чисельника передаточної функції системи стабілізації на тривалість і коливність перехідного процесу. На основі отриманих виразів показано, що коливність і тривалість відповідних складових перехідного процесу однакові як при наявності, так і при відсутності коренів чисельника передаточної функції системи стабілізації і залежить від коренів характеристичного рівняння, що дозволяє при дослідженні тривалості і коливності перехідного процесу системи стабілізації використовувати відомі непрямі кореневі методи оцінки вищезгаданих показників якості.

Відомо, що стійкість систем автоматичного керування (САК), тобто загасання перехідних процесів в них, є необхідною, але недостатньою умовою практичної працездатності системи. Важливим є також якість перехідних процесів (ПП), тобто сам характер проходження перехідних процесів і, насамперед, їх тривалість і коливність.

При дослідженні перехідних процесів САК зручними для практичного використання є непрямі критерії якості, до яких відносяться кореневі критерії і які дозволяють порівняно просто, без розв’язку диференціальних рівнянь оцінити показники якості системи. Досить прості і об’єктивні оцінки якості з допомогою кореневих методів можна одержати для системи за передаточною функцією $W(p) = \dfrac{b_0}{D(p)}$. Але у випадку, коли передаточна функція замкнутої системи має вигляд

$$W(p) = \frac{R(p)}{D(p)} = \frac{b_0 \prod_i (p - p_{0i})}{a_0 \prod_i (p - p_i)},$$

де p_i – полюси передаточної функції, p_{0i} – нулі передаточної функції, вигляд перехідного процесу САК визначається не тільки лівою, але й правою частиною диференціального рівняння. Тому виникає проблема оцінки впливу нулів передаточної функції на основні показники якості ПП.

Питання залежності загального вигляду перехідного процесу лінійної САК від правої частини диференціальних рівнянь, без конкретної оцінки впливу нулів на основні показники якості ПП, розглянуті в роботах [1, 2, 3], де показано, що наявність нулів в передаточній функції системи, тобто наявність в чисельнику $R(p)$ членів з p, може суттєво вплинути на якість перехідного процесу в напрямі, який визначається знаками цих членів. Тому оцінка якості тільки по полюсах передаточної функції (коренях знаменника) в цьому випадку може викликати велику помилку, причому в будь-який бік, тобто перехідний процес може бути як кращим, так і гіршим. Іншими словами, в загальному якість перехідного процесу необхідно оцінювати не тільки коренями характеристичного рівняння системи, але і коренями чисельника передаточної функції, що робить проблематичним використання непрямих кореневих критеріїв оцінки якості ПП, які базуються на дослідженні зміщених характеристичних рівнянь.

В даній роботі розглядається конкретний вплив коренів чисельника передаточної функції системи стабілізації на тривалість і коливність перехідного процесу такої системи і можливість використання відомих непрямих кореневих методів оцінки вищезгаданих показників якості ПП.

В загальному випадку система стабілізації може бути описана диференціальним рівнянням

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m) x\,, \tag{1}$$

де a_0, a_1, ..., a_n і b_0, b_1, ..., a_m – сталі коефіцієнти, які залежать від параметрів ланок системи, $p=d/dt$ – оператор диференціювання, $x=K=const$.

Передаточна функція системи в операторній формі має вигляд

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} = \frac{R(p)}{D(p)}\,. \tag{2}$$

Щоб визначити вплив коренів чисельника (нулів) на окремі показники якості перехідного процесу, подамо систему у вигляді послідовно з'єднаних ланок з передаточними функціями $W_1(p) = \dfrac{1}{D(p)}$ і $W_2(p) = R(p)$ (рис.1).

Тоді

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{1}{D(p)} \cdot R(p)\,.$$

Перша ланка описується диференціальним рівнянням

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n) z = x \tag{3}$$

або

$$D(p) z = x\,.$$

Відомо, що його розв'язок можна записати у вигляді

$$z = z_в + z_{пер}\,.$$

Перехідна складова $z_{пер}$ є загальним розв'язком однорідного рівняння $D(p)z = 0$ і має вигляд $z_{пер} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + ... + C_n e^{p_n t}$, де C_1, C_2, ..., C_n – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами, а p_1, p_2,..., p_n – корені характеристичного рівняння $D(p)=0$. Якщо характеристичне рівняння має $2k$ комплексних коренів $\alpha_i \pm j\beta_i$ і $(n–2k)$ дійсних коренів, то загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$z_{пер} = \sum_{i=1}^{k} C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i) + \sum_{i=2k+1}^{n} C_i e^{\alpha_i t}\,,$$

де складові $C_i e^{\alpha_i t}$, обумовлені дійсними коренями, а $C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)$ - комплексно-спряженими.

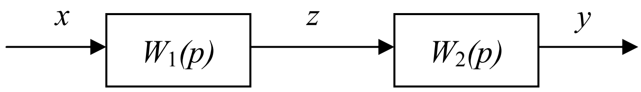

Рис. 1 Структурна схема системи стабілізації

Частковий розв'язок $z_в$ визначається правою частиною рівняння (3), відповідає вимушеному режиму системи після затухання $z_{пер}$ і може бути записаним у вигляді

$$z_в = \frac{1}{a_n} \cdot x = \frac{K}{a_n}\,.$$

Тоді розв'язок першої ланки можна записати як

$$z = \frac{K}{a_n} + \sum_{i=1}^{k} C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i) + \sum_{i=2k+1}^{n} C_i e^{\alpha_i t}\,.$$

Друга ланка описується рівнянням

$$y = R(p) z = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m) z \tag{4}$$

або

$$y = R(p) \cdot z_{пер} + R(p) \cdot z_в\,. \tag{5}$$

Отже, щоб одержати розв'язок усієї системи, необхідно, згідно з (4), (5), m раз продиференціювати кожну складову загального та часткового розв'язку першої ланки і перемножити на відповідні коефіцієнти.

Враховуючи, що досліджується система стабілізації, тобто x=$const$, частковий розв'язок системи набуває вигляду

$$y_в = \frac{b_m}{a_n} x = \frac{K \cdot b_m}{a_n}.$$

Похідна складової загального розв'язку першої ланки, яка обумовлена дійсним коренем, має вигляд $\frac{d^k z_{iпер}}{dt^k} = \frac{d^k C_i e^{\alpha_i t}}{dt^k} = \alpha_i^k C_i e^{\alpha_i t}$. Звідки складову перехідного процесу системи, яка обумовлена дійсними коренями, записуємо як

$$y_{iпер} = C_i' e^{\alpha_i t}, \tag{6}$$

де $C_i' = (b_m + b_{m-1}\alpha_i + ... + b_1\alpha_i^{\ m-1} + b_0\alpha_i^{\ m})C_i$.

Коливна складова загального розв'язку першої ланки, яка обумовлена комплексно-спряженими коренями, і її похідні мають вигляд:

$$y_i = C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) = A_0 C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + B_0 C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i),$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + \beta_i C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i) =$$

$$= A_1 C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + B_1 C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i),$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = (\alpha_i^{\ 2} - \beta_i^{\ 2}) C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + 2\alpha_i\beta_i C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i) =$$

$$= A_2 C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + B_2 C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i), \tag{7}$$

....

$$\frac{d^m y_i}{dt^m} = A_m C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + B_m C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i),$$

де $A_0 = 1,\quad B_0 = 0,\quad A_1 = \alpha_i \quad B_1 = \beta_i,\ A_r = A_{r-1}\alpha_i - B_{r-1}\beta_i,\quad B_r = B_{r-1}\beta_i + B_{r-1}\alpha_i$.

З рівняння (4) і співвідношень (7) випливає, що складова перехідного процесу всієї системи, яка обумовлена комплексно-спряженими коренями, рівна

$$y_{iпер} = A \cdot C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i) + B \cdot C_i e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t + \varphi_i) =$$

$$= D \cdot C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i + \theta) = C_i' e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i'), \tag{8}$$

де $A = b_m A_0 + b_{m-1}A_1 + ... + b_1 A_{m-1} + b_0 A_m$, $B = b_{m-1}B_1 + b_{m-2}B_2 + ... + b_1 B_{m-1} + b_0 B_m$, $D = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\theta = \arcsin\frac{A}{D}$, $C_i' = D \cdot C_i$ і $\varphi' = \varphi_i + \theta$.

Тоді розв'язок всієї системи записується у вигляді

$$y = y_в + y_{пер} = \frac{b_m}{a_n} x + \sum_{i=1}^{k} C_i' e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i') + \sum_{i=2k+1}^{n} C_i' e^{\alpha_i t}.$$

Відомо, що тривалість затухання перехідного процесу і його складових, до величини, що становить 5% від початкового значення, відповідає часу закінчення перехідного процесу. Тоді з (6) одержуємо

$$0.05 \cdot C_i' = C_i' e^{\alpha_i t_{пер}}$$

або (оскільки система стійка і $\alpha_i < 0$)

$$0.05 \cdot C_i' = C_i' e^{-|\alpha_i| t_{пер}}$$

звідки випливає, що час перехідного процесу i-ї складової системи, яка обумовлена дійсним коренем, рівна

$$t_{пер} = \frac{\ln 0.05}{-|\alpha_i|} \approx \frac{3}{|\alpha_i|}. \tag{9}$$

Для коливної складової системи (8) можна визначити верхню границю перехідного процесу, приймаючи $\sin(\beta_i t + \varphi_i) = 1$. Тоді, враховуючи вищесказане, одержуємо

$$t_{пер} \le \frac{\ln 0.05}{-|\alpha_i|} \approx \frac{3}{|\alpha_i|}. \tag{10}$$

З (9) і (10) випливає, що час затухання складових перехідного процесу першої ланки і час затухання відповідних складових всієї системи стабілізації однакові. А з виразу (8) видно, що частота затухаючих коливань i-ї складової перехідного процесу всієї системи стабілізації дорівнює частоті затухаючих коливань відповідної складової першої ланки системи з передаточною функцією $W_1(p)$.

Крім того, відомо [2], що затухання за період складової перехідного процесу, яке описується виразом $z_i = C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)$ або дорівнює

$$\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu_i}}, \tag{11}$$

де $\mu_i = \dfrac{\beta_i}{|\alpha_i|}$ - ступінь коливності ланки або

$$\mu_i = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{1}{1-\xi}}. \tag{12}$$

Визначимо затухання за період і ступінь коливності складової перехідного процесу всієї системи стабілізації, яка описується рівнянням $y_{iпер} = D \cdot C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i + \theta)$, або (оскільки система стійка і $\alpha_i < 0$) $y_{iпер} = D \cdot C_i e^{-|\alpha_i| t} \sin(\beta_i t + \varphi_i + \theta)$.

При деякому значенні $t = t_1$ амплітуда дорівнює $C_{1i} = D \cdot C_i e^{-|\alpha_i| t_1}$, через період $T = \dfrac{2\pi}{\beta_i}$

$$C_{2i} = D \cdot C_i e^{-|\alpha_i|(t_1 + \frac{2\pi}{\beta_i})} = D \cdot C_i e^{-|\alpha_i| t_1} \cdot e^{-2\pi \frac{|\alpha_i|}{\beta_i}} = C_{1i} e^{-2\pi \frac{|\alpha_i|}{\beta_i}}.$$

Тоді

$$\xi = \frac{C_{1i} - C_{2i}}{C_{1i}} = 1 - \frac{C_{2i}}{C_{1i}} = 1 - e^{-2\pi/\mu_i} \tag{13}$$

або

$$\mu_i = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{1}{1-\xi}}. \tag{14}$$

Висновки

Одержані результати показують, що коливність і тривалість складових перехідного процесу лінійної системи стабілізації однакові як при наявності, так і при відсутності коренів чисельника передаточної функції і залежить тільки від коренів характеристичного рівняння. Тому, при дослідженні тривалості і коливності перехідного процесу системи стабілізації, що описується рівнянням (1), можна використовувати відомі непрямі кореневі методи оцінки вищезгаданих показників якості перехідних процесів.

The influence of the radicals of numerator of a transfer function of a system of the stabilization to duration and variability of transient process is considered. On the basis of the obtained expressions, is shown, that a variability and duration of the transient process of the rectangular components are identical both at presence, and at lack of the radicals of numerator of a transfer function of a system of the stabilization and depends on the radicals of a characteristic equation, that allows at a research of duration and variability of transient process of a system of the stabilization to use known indirect rooted methods of a rating of the above mentioned coefficients of quality of transient processes.

Література

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – Київ: Либідь, 1997. – 544 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теорія систем автоматического регулирования. – Москва: Наука, 1975. – 768 с.
3. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – Энергия: Ленинград, 1969. – 375 с.

Одержано 16.09.2002 р.