Мирон Зарицький (Львів).

Кілька заміток про спійність простору.

1. У своїй праці про основні поняття топології[1]) подав я деякі властивости поняття межі множини. Сі властивости являються логічними висновками чотирох незалежних від себе аксіомів. Сі аксіоми можна прикладати не лише до евклідового простору, але також до загальнійших абстрактних просторів. Одначе одним із висновків сих аксіомів є замкненість простору. Якнебудь ми згідно з ними означилиб поняття межі, то простір мусить бути замкнений, межа простору мусить бути частю простору. Але спійність простору не є висновком сеї системи аксіомів, можна їх прикладати і до абстрактних неспійних просторів.

2. В отсій ноті додаю до давних чотирох аксіомів ще пяту, так що всі пять разом творять нову систему незалежних від себе аксіомів, що їх висновком є спійність простору. Кождий простір, що в нім можна означити поняття межі згідно з поданими низше аксіомами мусить бути замкнений і спійний, отже мусить творити контінуум.

Літерою C зазначую простір, A^{f} значить межу множини A, а A^{c} доповнення множини A.

Нова система аксіомів представляється осьтак:

I. $AB(AB)^{f} = AB(A^{f}+B^{f})$

II. $A^{f} = A^{cf}$

III. $0^{f} = 0$

IV. $A^{ff} < A^{f}$

V. Як що $A^{f} = 0$, то $A = 0$ або $A = C$.

Доказом незалежности аксіомів є наступна таблиця, де у кождім прямовиснім рядку подані є такі означення межі всіх частей простору, що є згідні із усіми аксіомами з винятком одної зазначеної над даним рядком. Як простір приймаємо в таблиці множину зложену з трох елементів, a, b, c, отже: $C = (a, b, c)$.

[1]) Miron Zarycki, Quelques notions fondamentales d'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fundam. mathem.. T. IX.

	I	II	III	IV	V
$0^f =$	0	0	(c)	0	0
$(a)^f =$	(a)	(a)	(b, c)	(a, b)	0
$(b)^f =$	(b)	(b)	(b, c)	(b, c)	0
$(c)^f =$	(c)	(c)	(c)	(c, a)	0
$(a, b)^f =$	(c)	(a, b)	(c)	(c, a)	0
$(b, c)^f =$	(a)	(b, c)	(b, c)	(a, b)	0
$(c, a)^f =$	(b)	(c, a)	(b, c)	(b, c)	0
$(a, b. c)^f =$	0	0	(c)	0	0

3. Докажемо тепер, що простір C є спійний.

Легко можна доказати, що яканебудь множина M є спійна тоді і лише тоді, коли її не можна представити як суму таких двох множин A і B, що справджують формулу:

$$AB + AB^f + A^f B = 0.$$

Отже достаточною і необхідною умовою спійности простору є правдивість слідуючої теореми:

З припущень: 1) $C = A + B$ і

2) $AB + AB^f + A^f B = 0$

виходить: $A = 0$ або $B = 0$.

Доказ сеї теореми:

З припущень 1) і 2) виходить, що: $B = A^c$, отже:

$AA^{cf} + A^c A^f = 0$, або:

$AA^f + A^c A^f = A^f = 0$ (акс. II).

Однак з сего виходить на основі акс. V, що $A = 0$ або $A = C$, отже теорема доказана.

4. Істотно залежна від акс. V. є наступна теорема:

Множина без елементів і сам простір є одинокими множинами, що є рівночасно замкнені і розімкнені.

Доказ:

Множина A є розімкнена, коли $AA^f = 0$, а замкнена, коли $A^f < A$. Однак сі обі реляції є рівночасно можливі лише тоді, коли $A = 0$, або $A = C$.

Що множина без елементів і простір є замкнені і розімкнені, виходить з акс. II. і III.