UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG (LWIW)
(ČARNIECKI-GASSE Nr. 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT XXVI.

(JULI 1937 — DEZEMBER 1937).

VERÖFFENTLICHT

VOM DIREKTOR DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1938.

VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG (LWIW).

I.

Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion.

CCXV. Sitzung am 30. September 1937.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

Anwesend 8 Mitglieder.

1. Der Vorsitzende dankt namens der Sektion dem Hrn Präsidenten der Gesellschaft für die Remontierung des naturwiss. Museums.

2. Derselbe gibt zur Kenntnis der Anwesenden das Erscheinen der Sammelschrift der Sektion Bd. XXXI.

3. Hr. Chraplyvyj berichtet über seine u. T.: „On the Lorenz equations in the new Electrodynamic II" in „Acta phys. polon. VI, Nr. 1" erschienene Arbeit.

4. Der Vorsitzende legt seine Note u. T.: „Über die Evolvente der Cissoide" vor. (Erschienen im Bd. XXXI der Sammelschrift der Sektion).

5. Hr. Kučer gibt zur Kenntnis, dass er eine Abhandlung u. T.: „Einige Bemerkungen zu den Quantenstatistiken in Anwendung an ein ideales Gas" bald vorlegen wird.

6. Auf Grund des Referates des Vorsitzenden wurde beschlossen, den Ausschuss der Gesellschaft um Zurückgabe von zwei Sälen fürs naturwiss. Museum zu ersuchen.

CCXVI. Sitzung am 26. November 1937.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

Anwesend 10 Mitglieder.

1. Der Vorsitzende gibt zur Kenntnis, dass Hr. em. Schulrat und Direktor M. Hrycak wiederum 150 Zloty für die Ziele des naturwiss. Museums gespendet hat. — Bis jetzt hat derselbe über 1000 Zloty dem Museum geschenkt.

2. Hr. J. Kordiuk berichtet über seine Untersuchungen u. T.: „Mikroflora der mageren Milch".

3. Hr. Melnyk berichtet über den Stand des Druckes des VII. Heftes der physiographischen Sammelschrift.

4. Hr. Muzyka berichtet über neue Adaptierungen im chemisch-bakteriologischen Institute zwecks technologischer Untersuchungen.

5. Auf den Antrag desselben wurde einhellig beschlossen, eine neue Auflage des im Auftrage der ukrainischen Akademie der Wissenschaften in Kyjiv herausgegebenen ukrainischen anatomischen Wörterbuches vorzubereiten.

CCXVII. Sitzung am 23. Dezember 1937.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

Anwesend 9 Mitglieder.

1. Der Vorsitzende gibt eine Übersicht der Arbeiten der Sektion und ihrer Institute im J. 1937.

2. Derselbe legt die Arbeit des Hrn Dr. J. Bohačevśkyj in Stryj u. T.: „Versuch einer Verallgemeinerung der Legendre'schen Polynome" in der deutschen Sprache vor.

Diese Abhandlung erscheint in den Sitzungsberichten Heft XXVI (sieh unten).

3. Hr. Melnyk legt die Arbeiten des Hrn E. Žarśkyj u. T.: „Die Verbreitung des Bibers im ukrainischen Territorium" und des Hrn Wl. Łasorko u. T.: „Seltene und neue Käferarten des ukrainischen Territotoriums" vor.

Beide Arbeiten erscheinen im VII. Hefte der physiographischen Sammelschrift.

4. Es folgten dann einige administrative Angelegenheiten.

BERICHTE.

Versuch einer Verallgemeinerung der Legendre'schen Polynome.

(von Julian Bohačevśkyj — Stryj).

In meiner Arbeit „Transformation der Laplace'schen Differentialgleichung im n-Dimensionalen auf generelle Koordinaten" *) habe ich gezeigt, dass sich die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0 \qquad (1)$$

*) Sammelschrift der mathematisch-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lwiw (Lemberg) Bd XXXI SS. 61–67.

auf generelle Koordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ wie folgend transformiert:

$$\Delta_2 V = h_1 h_2 \ldots h_n \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho_n}\right)\right]. \qquad (2)$$

Diese Transformation möge nun auf n-dimensionale Kugelkoordinaten angewendet werden. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1} \\
x_2 &= r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1} \\
x_3 &= r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2} \\
x_4 &= r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots\ldots \cos\vartheta_{n-3} \qquad\qquad (3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= r \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \\
x_n &= r \cos\vartheta_1 .
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die in der genannten Arbeit mit (3) bezeichneten Ortogonalitätsbedingungen für die letztausgeschriebenen Gleichungen erfüllt sind.

Die Ausdrücke $h_1, \ldots h_n$ lassen sich leicht bilden, und zwar:

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial r}\right)^2 = 1; \qquad H_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1}\right)^2 = r^2;$$

$$H_3 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_2}\right)^2 = r^2 \sin^2\vartheta_1; \qquad H_4 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_3}\right)^2 = r^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2; \ldots$$

$$H_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_{n-1}}\right)^2 = r^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2} \qquad (4)$$

und hieraus

$$h_1 = 1; \quad h_2 = \frac{1}{r}; \quad h_3 = \frac{1}{r\sin\vartheta_1}; \quad h_4 = \frac{1}{r\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2}; \ldots$$

$$h_n = \frac{1}{r\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2}} \qquad (5)$$

Der Ausdruck $\Delta_2 V$ erhält somit die Form:

$$\Delta_2 V = \frac{1}{r^{n-1}\sin^{n-2}\vartheta_1 \sin^{n-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\sin^{n-2}\vartheta_1 \sin^{n-3}\vartheta_2 \ldots \sin_{n-2}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\left(r^{n-3}\sin^{n-2}\vartheta_1 \sin^{n-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta_1}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \vartheta_2}\left(r^{n-3}\sin^{n-4}\vartheta_1 \sin^{n-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{n-2}\frac{\partial V}{\partial \vartheta_2}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}\left(r^{n-3}\sin^{n-4}\vartheta_1\sin^{n-5}\vartheta_2\sin^{n-6}\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{n-2}\frac{\partial V}{\partial\vartheta_3}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{\partial}{\partial\vartheta_{n-2}}\left(r^{n-3}\sin^{n-4}\vartheta_1\sin^{n-5}\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{n-4}\sin\vartheta_{n-2}\frac{\partial V}{\partial\vartheta_{n-2}}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\vartheta_{n-1}}\left(r^{n-3}\frac{\sin^{n-4}\vartheta_1\ldots\sin\vartheta_{n-4}}{\sin\vartheta_{n-2}}\frac{\partial V}{\partial\vartheta_{n-1}}\right)\Bigg]\ldots \tag{6}$$

oder nach der Ausführung der Rechnungen:

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1{}^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta_1}\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_2{}^2}+\ldots+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta_1\ldots\sin^2\vartheta_{n-2}}\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_{n-1}{}^2}+$$

$$+\frac{n-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{(n-2)\operatorname{ctg}\vartheta_1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\vartheta_1}+\frac{(n-3)\operatorname{ctg}\vartheta_2}{r^2\sin^2\vartheta_1}\frac{\partial V}{\partial\vartheta_2}+\ldots+$$

$$+\frac{\operatorname{ctg}\vartheta_{n-2}}{r^2\sin^2\vartheta_1\ldots\sin^2\vartheta_{n-3}}\frac{\partial V}{\partial\vartheta_{n-2}} \tag{7}$$

Die Gleichung hat (2n—1) Glieder.

Setzen wir der Einfachheit halber

$$\vartheta_2=\text{const},\ \vartheta_3=\text{const},\ \ldots\ \vartheta_{n-1}=\text{const},$$

so vereinfacht sich die Gleichung (7) folgend:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1{}^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{n-2}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta_1\frac{\partial V}{\partial\vartheta_1}=0 \tag{7a}$$

oder wenn wir den Index 1 bei ϑ_1 weglassen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{n-2}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}=0. \tag{7b}$$

Diese Gleichung kann durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden, und zwar ist die allgemeine Lösung ein Aggregat von Ausdrücken, deren jeder ein Produkt aus einer Potenz von r und einer Funktion von ϑ allein ist. Nennen wir diese Funktionen $R=R(r)=r^m$ und $\Theta=\Theta(\vartheta)=\Phi(\cos\vartheta)=\Phi(\zeta)$, so erhält die Gleichung (7b), wenn wir sie noch mit r^2 multiplizieren, die Gestalt:

$$r^2\frac{\partial^2(R\Phi)}{\partial r^2}+(n-1)r\frac{\partial(R\Phi)}{\partial r}=-\left[\frac{\partial^2(R\Phi)}{\partial\vartheta^2}+(n-2)\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial(R\Phi)}{\partial\vartheta}\right] \tag{8}$$

Hier hebt sich links Φ, rechterseits R vor die Klammer. Dividieren wir nun beiderseits durch $R\Phi$ und setzen beide Seiten ein und derselben Konstante C gleich, so ergibt sich:

$$\frac{1}{R}\left[r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+(n-1)r\frac{\partial R}{\partial r}\right]=-\frac{1}{\Phi}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}+(n-2)\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right]=C \tag{9}$$

Setzen wir nun $R=r^m$, so folgt

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+(n-1)r\frac{\partial R}{\partial r}-CR=0 \tag{10}$$

oder

$$\Big[m(m-1)+(n-1)m-C\Big]r^m=0 \tag{10a}$$

und hieraus $$C = m(m + n - 2).$$
Die Gleichung $$m^2 + (n-2)m - C = 0$$
hat zwei Wurzeln, die zueinander in Beziehung stehen:
$$m_1 + m_2 = -(n-2)$$
$$m_2 = -(m_1 + n - 2)$$

Es muss demnach in der Gleichung (9) auch rechterseits die Konstante C dieselbe Bedeutung haben, also:
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + (n-2)\operatorname{ctg}\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + m(m+n-2)\Phi = 0. \tag{11}$$

Nun kann aber $\Phi = \Phi(\cos\vartheta) = \Phi(\zeta)$ angenommen werden, also
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} = -\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}(1-\zeta^2) - \zeta\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.$$

In (11) eingesetzt ergibt das:
$$(1-\zeta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} - (n-1)\zeta\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + m(m+n-2)\Phi = 0. \tag{12}$$

Daraus ist auch ersichtlich, dass, wenn wir für ein gegebenes m die Lösung Φ_m der Gleichung (12) finden, gleichzeitig mit r^m bzw. mit $r^{-(m+n-2)}$ auch $r^m \Phi_m$, bzw. $r^{-(m+n-2)}\Phi_m$ Lösungen der Differentialgleichung (7b) sind.

Die Gleichung (12) kann durch eine Reihe integriert werden. Man kann versuchsweise ansetzen:
$$\Phi(\zeta) = \sum_0^\infty a_k \zeta^k; \quad \Phi'(\zeta) = \sum_1^\infty k a_k \zeta^{k-1};$$
$$\Phi''(\zeta) = \sum_2^\infty k(k-1)a_k \zeta^{k-2} = \sum_0^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}\zeta^k \tag{13}$$

Dies in (12) eingesetzt, ergibt
$$\sum_0^\infty \left\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + (m+k+n-2)(m-k)a_k\right\}\zeta^k = 0.$$

So erhalten wir für die Koeffizienten a_k die Rekursionsformel:
$$a_{k+2} = -\frac{(m-k)(m+k+n-2)}{(k+1)(k+2)}a^k \tag{14}$$

Das ergibt für gerade Indizes
$$a_{2i} = (-1)^i \frac{m(m-2)(m-4)\ldots(m-2i+2)(m+n-2)(m+n)(m+n+2)\ldots(m+n+2i-4)}{(2i)!}a_0 \tag{15a}$$

für ungerade dagegen

$$a_{2i+1}=(-1)^i \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\dots(m-2i+1).(m+n-1)(m+n+1)(m+n+3)\dots(m+n+2i-3)}{(2i+1)!} a_1 \qquad (15b)$$

Somit sind die beiden partikulären Lösungen der Gleichung (12) Φ_m und Ψ_m, wenn wir noch $\Phi_m(0)=1$, $\Phi'_m(0)=0$, $\Psi_m(0)=0$, $\Psi'_m(0)=1$ vorschreiben, durch folgende Reihen gegeben:

$$\Phi_m = 1 - \frac{m(m+n-2)}{2!}\zeta^2 + \frac{m(m-2)(m+n-2)(m+n)}{4!}\zeta^4 -$$

$$-\frac{m(m-2)(m-4)(m+n-2)(m+n)(m+n+2)}{6!}\zeta^6 + \dots \qquad (16a)$$

$$\Psi_m = \zeta - \frac{(m-1)(m+n)}{3!}\zeta^3 + \frac{(m-1)(m-3)(m+n-1)(m+n+1)}{5!}\zeta^5 -$$

$$-\frac{(m-1)(m-3)(m-5)(m+n-1)(m+n+1)(m+n+3)}{7!}\zeta^7 + \dots \qquad (16b)$$

Von den beiden Entwickelungen bricht nun für ein gegebenes m eine ab, und zwar für ein gerades m die erste, für ein ungerades m die zweite (bei der m-ten Potenz). In beiden Fällen erhalten wir ein endliches Polynom:

$$\Phi_m(\zeta) = a_m \zeta^m + a_{m-2}\zeta^{m-2} + a_{m-4}\zeta^{m-4} + \dots \qquad (17)$$

bei dem die Koeffizienten a_i durch die Rekursionsformel

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(m-k+2)(m+k+n-4)} \cdot a_k \qquad (14a)$$

voneinander abhängen.

Bestimmen wir den noch disponiblen Faktor a_m zu

$$a_m = \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)\dots(n+2m-4)}{(n-1)n(n+1)(n+2)\dots(n+m-3)} \qquad (17a)$$

so erhalten wir folgende ganze rationale Lösung der Gleichung (12):

$$\Phi_m(\zeta) = \frac{n(n+2)(n+4)\dots(n+2m-4)}{(n-1)n(n+1)(n+3)\dots(n+m-3)}\Big\{\zeta^m - \frac{m(m-1)}{2(2m+n-4)}\zeta^{m-2} +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4(2m+n-4)(2m+n-6)}\zeta^{m-4} -$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.4.6(2m+n-4)(2m+n-6)(2m+n-8)}\zeta^{m-6} + \dots\Big\} \qquad (18)$$

Der Wert des Faktors a_m wurde dabei so bestimmt, dass für jedes m

$\Phi_m(1) = 1$ ist.

Die andere von den beiden Entwickelungen (16) stellt eine unendliche Reihe dar. Sie ist im Intervalle $-1 < \zeta < +1$ konvergent, wie es aus

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}\zeta^{k+2}}{a_k\zeta^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(1-\frac{m}{k}\right)\left(1+\frac{m+n-2}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)}\right|\cdot|\zeta|^2 = |\zeta|^2$$

ersichtlich ist.

Für $n = 3$ sind die Funktionen $\Phi_m(\zeta)$ mit den Kugelfunktionen $P_m(\zeta)$ 1-ter Art m-ter Ordnung, $\Psi_m(\zeta)$ mit den Kugelfunktionen $Q_m(\zeta)$ 2-ter Art m-ter Ordnung identisch. Als partikuläre Lösungen ein und derselben linearen homogenen Differentialgleichung (12) hängen sie miteinander darch die Fornel zusammen:

$$\Psi_m(\zeta) = \Phi_m(\zeta) \int \frac{d\zeta}{e^{\int \varphi(\zeta)\, d\zeta} \left[\Phi_m(\zeta)\right]^2} \tag{19}$$

wo $\varphi(\zeta)$ den Koeffizienten der ersten Ableitung in der Gleichung (12) bedeutet, wenn wir dieselbe in der Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} - \frac{(n-1)\zeta}{1-\zeta^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{m(m+n-2)}{1-\zeta^2}\Phi = 0 \tag{12a}$$

schreiben, so dass der Koeffizient der zweiten Ableitung $= 1$ ist, also

$$\int \varphi(\zeta)\, d\zeta = \frac{n-1}{2}\int \frac{2\zeta\, d\zeta}{1-\zeta^2} = \lg(1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$e^{\int \varphi(\zeta)\, d\zeta} = (1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\Psi_m(\zeta) = \Phi_m(\zeta) \int \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}} \left[\Phi_m(\zeta)\right]^2}. \tag{19a}$$

Diese Formel bestätigt sich auch im Falle $n = 2$, von einer multiplikativen Konstanten abgesehen. Die Formel (18) nimmt für diesen Fall die Gestalt an:

$$\Phi_m(\zeta) = 2^{m-1}\left[\zeta^m - \frac{m}{2^2 . 1!}\zeta^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2^4 . 2!}\zeta^{m-4} - \right.$$

$$\left. - \frac{m(m-4)(m-5)}{2^6 . 3!}\zeta^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2^8 . 4!}\zeta^{m-8} - \ldots\right] \tag{18a}$$

$\Phi_m(\zeta)$ ist in diesem Falle $= \cos m\vartheta$ und die Formel (18^a) erlaubt uns, $\cos m\vartheta$ durch $\cos\vartheta$ auszudrücken.

Die Funktionen Φ_m können als Spezialfälle der n-dimensionalen Kugelfunktionen $X_n(\vartheta_1 \ldots \vartheta_{n-1})$ angesehen werden, die auf folgende Art definiert und hergestellt werden können: Als Lösung der Gleichung (7) sei ein ganzes rationales Polynom m-ten Grades in $X_1 \ldots X_n$ angesetzt:

$$V(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{s_1 s_2 \ldots s_{n-1}} C_{s_1 s_{n-1}} x_1^{s_1} x_2^{s_2-s_1} x_3^{s_3-s_2} \ldots x_{n-1}^{s_{n-1}-s_{n-2}} x_n^{m-s_{n-1}} \tag{20}$$

wobei die Zahlen $s_1 \ldots s_{n-1}$, m der Ungleichung:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{n-1} \leq m$$

genügen sollen. Führen wir in (20) die Koordinaten (3) ein, so ergibt sich

$$V(x_1\, x_2 \ldots x_n) = r^m X_m(\vartheta_1\, \vartheta_2 \ldots \vartheta_{n-1}) =$$

$$= r^m \sum C_{s_1 \ldots s_{n-1}} \cos^{m-s_{n-1}} \vartheta_1 \sin^{s_{n-1}} \vartheta_1 \cos^{s_{n-1}-s_{n-2}} \vartheta_2 \sin^{s_{n-2}} \vartheta_2 \ldots$$

$$\ldots \cos^{s_3-s_2} \vartheta_{n-2} \sin^{s_2} \vartheta_{n-2} \cos^{s_2-s_1} \vartheta_{n-1} \sin^{s_1} \vartheta_{n-1} \qquad (20a)$$

Diese Summe genügt nun der Gleichung (7) und stellt eben die n-dimensionale Kugelfunktion dar. Der wirklichen Herstellung dieser Funktionen, bzw. der Verallgemeinerung der 3-dimensionalen Kugelfunktionen, sei eine besondere Arbeit gewidmet.

Seltene und neue Käferarten des ukrainischen Territoriums.

(von Wladimir Łasorko).

In dieser Abhandlung gibt der Verfasser neue Standorte der seltenen Käfer des westukrainischen Territoriums an. Das Material befindet sich vorwiegend in der Privatsammlung des Verfassers; außerdem gehören einige Arten den Sammlungen des weil. Professors I. Verchratśkyj, des Prof. Wl. Zańko, S. Polanśkyj und des weil. Ing. K. Hankevyč. Alle Sammlungen werden im naturwiss. Museum der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg aufbewahrt.

Neu sind im ukrain. Territorium folgende Arten:

Orochares angustata Er. Ein Exemplar wurde vom Verfasser am 30. X. 1931 in Lemberg (Pohulanka) gefunden.

Scaphium immaculatum Oliv. Zwei Exemplare in der Sammlung des I. Verchratśkyj — stammen aus Galizien. Andere Arten sind schon früher in Ukraina bekannt — aber nur aus einigen Standorten. Zu den selteneren Arten gehören:

Carabus nemoralis Müll. Uniw, Bez. Peremyšlany (coll. K. Hankevyč).

Notiophilus rufipes Curt. ab. femoralis J Łomn. Lemberg Teufelsberg (coll. der Verfasser).

Olisthopus rotundatus Payk. Lemberg-Kaiserwald (coll. der Verfasser).

Tachyporus hypnorum ab. armeniacus Kobend. Lemberg-Pohulanka.

Quedius brevicornis Thoms. Lemberg-Lesieńice; 1 Exemp. coll. der Verfasser am 30. X. 1934.

Xantholinus hungaricus Reitt. Bis jetzt bekannt aus dem Marmarosser-Gebiet. Der Verfasser fand 2 Exemplare in Załemianka (Bez. Skole) am 8. und 10. VIII. 1933.

Dendrophagus crenatus Payk. Coll. S. Polanškyj in Holowsko (Bez. Turka, Karpathen).

Harminius undulatus ab. bifasciatus Gyll. Berg Paraška (Bez. Skole, Karpathen), coll. der Verfasser.

Elater Megerlei Lac. Kaminka Strumiłowa (Galizien).

Alphitophagus bifasciatus Say. Lemberg VI. 1931 (coll. der Verfasser).

Cryptocephalus distinguendus Schneid. Westpodolien-Höhenzug Hołohory (Gołogóry), Waldblösse beim Dorf Nowosiłki (Bez. Zoločiv) 16. VI. 1931 (coll. der Verfasser).

Hylesinus toranio Bern (oleiperda Fabr.) Westpodolien-Dorf Wilszanycia (Bez. Zoločiv) 26. VI. 1934 (coll. der Vertasser).

Ausserdem hat der Verfasser neue Standorte für mehrere Käfer, mehr oder weniger häüfige im ukr. Territorium, angeführt.

Von den Aberrationen beschreibt der Verfasser ein nicht normales Exemplar von Amara aenea L., bei welchem der charakterische Skutellarstreifen vollkommen fehlt, sowie auch die Aberration Dromius quadrimaculatus L., wo die Flecke der Flügeldeckel ein heller Streifen verbindet Beide Aberrationen illustriert der Verfasser durch eine Zeichnung.

Der Verfasser führt auch in der Zeichnung den Hylesinus toranio Bern (oleiperda Fabr.) auf Syringa vulgaris fressend an.

CCXVIII. Sitzung am 30. Dezember 1937.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

Anwesend 12 Mitglieder.

1. Es wurden für die nächsten zwei Jahre ins Präsidium der Sektion gewählt:

Direktor: Dr. Levyćkyj Wladimir, Hauptredakteur der Publikationen der Sekiion.

Stellvertreter: Dr. Muzyka Max, Leiter des bakteriologisch-chemischen Institutes und Delegierter der Sektion in den Ausschuss der Gesellschaft.

Sekretär: Dr. Polanśkyj Georg, Leiter der naturw. Museums.

Obmann der physiographischen Kommission: Prof. Melnyk Nikolaus, Redakteur der Sammelschrift der Kommission und Mitredakteur der Sammelschrift der Sektion.

Obmann der geographischen Kommission: Dr. Kubijovyč Wladimir, Redakteur der Sammelschrift der Kommission.

Obmann der technisch-wissenschaftlichen Kommission: Dr. Feščenko-Tschopivśkyj: Iwan.

Obmann der Naturschutzkommission: Dr. Mryc Olga.

Obmann der ärztlichen Kommission und Redakteur des ärztlichen Sammelschrift: der Kommission vorbehalten.

2. Es wurden noch einige Forderungen und Anträge an den Ausschuss der Gesellschaft, betreffend die weitere Entwickelung der wissenschaftlichen Tätigkeit der Sektion, erwogen und angenommen.

3. Hr. Kubijovyč hält einen Vortrag u. T.: „Relative Höhen im ukrainischen Gebiete".

II.

Sitzungen der technisch-wissenschaftlichen Kommission.

XVIII. Sitzung am 2. Jänner 1938.

Vorsitzende: Hr. I. Feščenko-Tschopivśkyj
u. Hr. S. Pasternak.

1. Ins Präsidium der Kommission wurden für die nächsten zwei Jahre gewählt:

Obmann: Hr. Prof. Dr. Feščenko-Tschopivśkyj Iwan.
Obmannsstellvertreter: Hr. Ing. Pasternak Severin.
Sekretär: Hr. Ing. Romanenko Anton.

2. Es fanden dann folgende Referate statt:

a) Hr. Dr. Ing. M. Čyževśkyj: Über historische Entwickelung des Verkokungsprozesses der Steinkohle.

b) Hr. Ing. E. Perchorovyč: Über die Untersuchungen der Gießbarkeit der reinen Metalle und der Doppeltlegierungen.

Der Referent berichtet über die Untersuchungen der Giessbarkeit der reinen Metalle und ihrer Legierungen und über den Einfluss einzelner Faktore auf diesen Prozess, sowie auch über theoretische Grundlagen und praktische Anvendungen desselben.

c) Hr. Ing. A. Šumovśkyj: Einige Bemerkungen aus der Praxis der Konstruktion von modernen Dampflokomotiven.

Der Referent berichtet kurz über den gegenwärtigen Stand des Dampflokomotivenbaues in Europa und Amerika, über die Möglichkeit der Konkurrenz dessellen mit der Motorisierung und führt einige praktische Angaben über die neuesten polnischen Schnellzugslokomotiven Serie Pm 36 an.

d) Hr. Prof. I. Feščenko-Tschopivškyj hält den Vortrag u. T.: "Was versteht man unter der s. g. geleiteten Metallurgie (metallurgie dirigée)?

Das Wachstum der austenischen Körner hängt von ihren Dimensionen ab; ihre Härtemöglichkeit, sowie die Härte selbst und andere Eigenschaften hängen von dem Körnigkeitsgrade ab. Der Vortragende berichtet über seine und seiner Schüler Arbeiten auf dem Gebiete der austenischen Körnigkeit, der Veränderlichkeit, der Dauerhaftigkeit des austenischen Kornes, sowie auch über den Zusammenhang zwischen dem austenischen Korn und den Eigenschaften des Stahles. Der Verfasser und seine Schüler haben den Einfluss von *Al* und *V*, sowie auch einer heissen plastischen Umarbeitung auf die Dauerhaftigkeit der austenischen Körnigkeit untersucht.

III.

Bericht über den Zustand des naturwissenschaftlichen Museums im zweiten Halbjahre 1937.

Der Zustand des Museums stellt sich am Ende Dezember 1937 folgendermassen dar:

Abteilung		Inventar-Nummer
Zoologie	Osteologie	1174
	Mammalia	39
	Aves	268
	Reptilia	15
	Amphibia	3
	Pisces	10
	Seemollusken	278
	Süsswassermollusken	628
	Hexapoda	7000
	Arachnoidea, Crustacea, Vermes, Coelenterata	44
	Eier	87
Paläontologie	Diluviale Mollusken	464
	Zoopaläontologie	120
Anthropologie	Menschenskelette	2
	Anatomische Präparate	45
	Tafeln	340
Botanik	Herbarien	2500
	Waldbotanik	140
Mineralogie Petrographie	Mineralogie, Petrographie	3690
	Diluviale Petrographie	166
Paläolith	Stein- und Knochengeräte	515
	Technologie	545
	Bibliothek	237

Geschlossen am 2. Jänner 1938.