

Формалізм та інтуїціонізм у математиці.¹⁾

Оцей доклад виходить в дещо зміненому виді. А саме додано до нього деякі пояснення, необхідні на це, щоб читач, не все математик, міг як слід зорієнтуватись у проблемі. Всеж таки доклад (реферат) остане докладом та не слід ставити до нього таких самих вимог, як до монографії тої ділянки математики, що її в такому чи інакшому місці заторкує. Його ціль — поінформувати, заінтересувати. І якщо така, що правда, скромна ціль буде досягнута, то здається, що завдання докладу можна вважати сповненим. Та в ніякому випадку такий доклад, хоч би вдесятеро поширеніший, не буде надаватись до студії. Тому подаю наприкінці літературу предмету, бодай таку, як знаю, крім цього згадуватиму принагідно оригінальні твори та розвідки, що з них можнаби річ студіювати. Не хочу вплутувати ненаукових афоризмів, та мимохіть нагадуються та насуваються слова віденського фізика Лехера: „... Stecken wir das Ziel bescheiden, so erreichen wir mehr“. Маю надію, що оцей доклад сповнить своє ось так скромно закривне завдання.

І. ПРОБЛЕМА.

Як тему розвідки вибрав я полеміку, що вивязалась поміж математиками в останніх десятиліттях та яку порушувано трохи не на кожному з'їзді математиків — з післявоєнних згадати б тільки про з'їзд в Навгайм 1920 р., Єні 1921 р., Лайпцігу 1922 і др., а з останніх з'їзд німецьких лікарів і природників в Празі, на якому брали участь в дискусії не тільки математики, а й представники логіки, а також і критики мови. Полеміка торкається питання вартості математики та стійності її тверджень. Питання можна сформулювати словами, що їх тяжко перекласти на українську мову: „Ist die jetzige Mathematik überhaupt logisch zwingend?“

Відповідно до цього, як ставились математики до цього питання, та чи давали притакуючу, чи заперечуючу відповідь на

¹⁾ Реферат читаний на VI. з'їзді укр. природників і лікарів у Львові 17. травня 1937.

нього, ділились вони на два табори. Противники тези про безоглядну стійність та „певність“ математики називають себе інтуїціоністами, прихильників називають формалістами. Цікаво, що саме ці математики, яким наука дуже багато завдячує, подали з часом в сумнів багато тверджень та доказів, між ін. навіть своїх власних. Ця обставина є доказом, що таке їх становище це вислід еволюції їхніх поглядів, та приневолює ставитись до їхнього становища дуже серйозно та схилити голову перед їх самокритикою, гідною справді вченої людини.

Щоби як слід з'ясувати становище представників обидвох напрямків на прикладах, вибираю підстави геометрії, що на них найкраще можна з'ясувати становище формалістів та теорію множин, на якій найперше почали показуватись риси і прогалини, що її довели опісля до кризи, чи радше розбудови підстав. Маючи на увазі читачів, не обізнаних із математичними поняттями, постараюсь пояснити поняття, які прийдеться заторкнути, по змозі ясно і докладно, пресумуючи тільки такі відомості з математики, що їх дає середньошкільне образання.

II. ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ.

Перші відомості про геометрію, трактовану формально, тобто не як практичне землемірство (як вказувала б сама назва), а як замкнену в собі систему правд, залежних одна від одної, маємо від греків. Менш-більш з VI. ст. пер. Хр. геометрія (а геометрією називали філософи все те, що сьогодні називаємо математикою) вважалась ділянкою логіки, та її то чи не найважливішою, як на це вказує хочби висказ Платона „*Μηδείς ἀγεωμέτης εἰσὶν οὐδ' τὴν οὐρανὴν*“. Ці філософи, в боротьбі з софістами, видосконалили геометрію, як абстрактну науку, так що через більш як 2000 літ підстави геометрії, виложені в Евклідових „*Στοιχεῖα*“ лишилися ненарушені. Що більше, наука геометрії ще до недавня була майже однозначна з наукою Евклідових елементів. Щоби порівняти Евклідову аксіоматику з новітньою Гільбертовою, дозволю собі затриматись найперше на деяких дефініціях, постулятах та аксіомах Евкліда. Притім покликуватись на липське видання Heiberg'a: *Euclidis Elementa Vol. I libros I—IV. continens. Lipsiae 1883, 333 S.*

Отже перша книга починається 23-ма дефініціями, 5-ма постулятами і 5-ма аксіомами. З поміж усіх 118 дефініцій (*ὁροι*) пригляньмося н. пр. I „*Σημείον ἐστίν, οὐ μέρος οὐθέν*“ (точка це щось, що не дається поділити) або до II „*Γραμμή δὲ μῆκος ἀπλατές*“ (лінія це довжина без ширини) або до IV „*Εὐθεία γραμμή*

ἔστιν, ἥτις ἐξ ἑαυτῆς σημείοις κέται“ (проста лінія це така, що однаково [„в однаковий спосіб“] лежить поміж своїми точками). В оних і декількох дальших таких самих дефініціях Евклід намагається викликати в читача наглядне зображення, уявління цих творів, про які говорить. Цілком інакше Д. Гільберт, у якого геометрія цілком сформалізована. Та над цим задержуся небавом.

Постуляти (*αἰτήματα*) і аксіоми (*κοινὰ ἔννοια*) — це деякі правила, що відносяться до оних основних понять, описаних дефініціями, та й то такі правди, що з них уже методами чистої логіки можна вивести усі твердження геометрії. Оця величність логічна будівля, що спочиває на фундаменті оних постулатів та аксіомів, це ще й до сьогодні зразок математичної аксіоматики. Та оця будівля виказує одну хибу: система аксіом неповна. Так нпр. в XVII дефініції (поперечник кола — це яка-небудь проста, поведена через середину і з обидвох боків обмежена обводом кола, вона переполовлює коло) або в XXIII (рівнобіжні це такі лінії, що лежать на одній площі і, продовжені з обидвох боків в безконечність, не перетинаються з жадного боку) — приймається як самозрозумілий, ненаписаний, постулат, що кожна точка ділить просту на дві частини, в V. постулаті (якщо проста перетинає дві прості і творить з ними з одного боку середові кути менші від двох прямих кутів, то ті прості перетинаються з цього боку, по яким лежать ці середові кути, менші від двох прямих кутів) — приймається мовчки, що кожна проста ділить площу на два обшири, в IV. аксіомі (це, що накривається одне з одним, є одне одному рівне), говорить про накривання (*τὰ ἐφαρμόζοντα*), отже вводиться поняття руху і т. д. Деякого доповнення аксіоматики довершив у 1882 р. М. Pasch у своїх „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Між ін. вводить він до геометрії т. зв. „Zwischen-Axiom“-и — слово, що його тяжко перекласти на якунебудь іншу мову.

Довгі досліді „Елементів“ Евкліда та спроби перебудови його аксіоматики, особливо невдачі зусилля, щоб доказати т. зв. V-ту аксіому Евкліда та відкинути її накінець як залежну від других, довели до відкриття т. зв. неевклідової геометрії.

Тут маленьке пояснення; говорю про неевклідову геометрію і так називаю геометрію Лобачевського, що в ній побіч аксіомів т. зв. „абсолютної“ геометрії (тобто такої, що не робить ужитку з V. Евкл. аксіоми, а займається тільки твердженнями, що даються вивести з усіх інших аксіом крім V-ої) важна замість V. аксіоми Евкліда аксіома Лобачевського: „Існує проста g і точка P поза простою g , така, що донайменше дві прості, поведені через P , не перетинають простої g .

(Rich. Baldus: Nichteuklidische Geometrie стор. 70). Існує ще крім цього геометрія Riemann-a, що в ній важна замість Евклідової аксіоми аксіома Ріманна, а саме, що з точки поза простою не дається повести до простої жадна рівнобіжна. Та прийнявши цю аксіому, мусимо відкинути деякі аксіоми абсолютної геометрії. Так нпр. в абсолютній геометрії, так само в Евклідовій і Лобачевського, дві прості можуть перетинатись щонайбільше в одній точці (якщо не накриваються), а в геометрії Ріманна дві прості перетинаються усе в двох точках. Або інший приклад: в абсолютній геометрії, так само в геометрії Лобачевського, жадна м. ін. аксіома: з трьох точок на простій усе одна з них лежить поміж двома другими. Натомість в теорії Ріманна маємо аксіому: Кожна з трьох точок на якійнебудь простій лежить поміж двома другими.

Вже на опих прикладах видно, що аксіома Ріманна, поставлена на місце V. Евклідової аксіоми (або однозначної з нею іншої) нарушує інші аксіоми абсолютної геометрії, натомість аксіома Лобачевського не нарушує їх. Тимсамим можна розбудовувати абсолютну геометрію або приймаючи додатково V. аксіому Евкліда або V. аксіому Лобачевського. В першому випадку маємо Евклідову, в другому неевклідову геометрію. Хоч дехто зачисляє ще й геометрію Ріманна до „неевклідових“ геометрій.

Пізнання цієї неевклідової геометрії, та критика підстав геометрії довели до повстання новітньої аксіоматики, що найшла зразковий вислів в Гільбертових „Grundlagen der Geometrie“, оцьому ще досі не перевищеному творі, хоч сам Гільберт доповнював підстави геометрії, хоч дехто, як нпр. A. Rosenthal виказував, що деякі з аксіом зайві, хоч дехто (як нпр. M. Dehn) розбудовував їх дальше, інколи на зазив самого Гільберта. В цьому творі піддано Евклідові аксіоми основній критичній апалізі та перерібіці. Пізніці поміж постулятами та аксіомами там уже немає, говоритьсь тільки про аксіоми.

Замість дефініцій виступають там уже тільки пояснення (Erklärungen).

У вступі каже Гільберт: „Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie... Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches (підчеркнення самого автора) System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen (підчеркнення mos) möglichst klar zutage tritt“..

„Vollständiges System“ значить, що усе там повинно бути ясно сказане, отже немає там місця для аксіомів, впроваджуваних „мовчки“, як це діється у Евкліда. Тяжше вже приходитьсь

сказати, що значить „möglichst einfaches System“. Це відчувається радше інтуїційно. Натомість новим являється домагання далекосяглості (Tragweite) аксіом. У Евкліда всі аксіоми однаково важні; у Гільберта вони поділені на групи і нова група виступає у нього щойно тоді, як вже з попередньої не дасться вивести більше тверджень.

На початок кладе Гільберт ось такі пояснення: Подумаймо собі три різні системи предметів (dreі verschiedene Systeme von Dingen). Предмети першої системи (Dinge des ersten Systems) назв'ємо точками і позначим їх $A, B, C, \dots$, предмети другої системи простими і позначим їх $a, b, c, \dots$, предмети третьої системи площами і позначим їх $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Точки називаємо також елементами лінійної геометрії, точки і прості елементами геометрії на площі, а точки, прості і площі елементами просторової геометрії. Оці елементи хай стоять одні до одних у деяких відношеннях. Оці взаємовідношення елементів позначуємо словами: „лежати“, „поміж“, „рівнобіжний“, „приставати“, „суцільний“; докладний опис оцих взаємовідношень дають аксіоми геометрії.

Свої аксіоми ділить Гільберт на 5 груп, а саме:

- I. 1—8. Аксіоми злуки (Axiome der Verknüpfung).
- II. 1—4. Аксіоми впорядкування (Axiome der Anordnung).
- III. 1—5. Аксіоми приставання (Axiome der Kongruenz).
- IV. Аксіома рівнобіжних (Axiom der Parallelen).
- V. 1—2. Аксіоми суцільності (Axiome der Stetigkeit).

Якщо порівняємо Гільбертові дефініції з Евклідовими, то вдаряє нас тут чистий *sit venia verbo* — вербалізм. Для Гільберта цілком байдуже, що собі подумаємо під „точкою“, „простою“, чи „площею“. Ніде не сказано, щоб це доконче були такі точки, як їх собі уявляємо звичайно. Важне тільки те, щоби оці твори уяви, які собі виберемо як інтерпретацію оцих назв, сповнювали вимоги, висказані в аксіомах і більш нічого! Геометрія таким чином вповні сформалізована. Висловлюючись приступно, а водночас досадно, можна сказати, що геометрія з не те, що нарисуємо, а те, що говоримо, чи навіть напишемо, навіть не те, про що говоримо, чи пишемо, а те, що ми говоримо, чи пишемо.

II. МОЖЛИВІСТЬ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ТА ПИТАННЯ ПОВНОТИ АКСІОМ.

Ще одна різниця виступає наявно поміж Евклідовими і Гільбертовими аксіомами: а саме, що Гільбертові поняття можна ре-

алізувати. інтерпретувати в якийнебудь спосіб, аби тільки були сповнені аксіоми. Таку довільність інтерпретації можна показати на ось такому прикладі: в математиці дуже часто послуговуємось т. зв. стереографічною проєкцією, а саме беремо під увагу кулю (гльоб) Γ , відзначаємо на ньому обидва бігуни і ведемо опісля через рівник площу π . Кожну точку тої площі лучимо простою з північним бігуном. Така проста перетинає кулю все в одній точці (крім того в північному бігуні). Кажемо, що відтворюємо площу π на кулю Γ , а саме часть площі поза рівником на північну, внутрішню часть на полудневу півкулю. Значить, що кожній точці площі π відповідає (є припорядкована) одна і тільки одна точка на кулі Γ і навідворот. Кожній простій на площі π відповідає на гльобі Γ коло, яке переходить через північний бігун, простим, що переходять через осередок рівника, відповідають на Γ великі кола (полуденники). Двом рівнобіжним на площі π відповідають на Γ два кола, що переходять через півн. бігун. Цей бігун є для них точкою стичности. Та притім треба пам'ятати, що північний бігун як т. зв. „окремішну точку“ виключується з математичних розважань. Прийім тепер, що двох математиків говорять про геометрію, а саме про Гільбертові аксіом та виводять з них відповідні твердження; один з них має на думці точку і прості на площі, другий натомість відповідні твори на відповідному гльобі. Як довго вони нічого не рисують, так довго вони дійдуть до повного порозуміння. Їх обидві „геометрії“ будуть однаково важні, однаково „правдиві“, а саме тому, що вони погоджуються відносно своєї аксіоматики*).

Оцього зрозуміння, що під точкою, простою, чи площею можна розуміти щось інакше, чим ми звичайно розумімо, у Евкліда ще не було. Геометрію Гільберта ціхує, в противенстві до Евкліда, льогічний формалізм.

Тут іще насувається питання, чи така довільність інтерпретації не посунена занадто далеко; значить, що якщо придумаємо собі дві якінебудь івші інтерпретації геометричних понять, то щоби вони усе далися відтворити одна на одну в вищеприписаному зміслі, та й то однозначно. Система аксіом мусить бути повна. Чи система аксіом Гільберта повна, значить чи там не пропущено якої ще потрібної аксіоми, на це може дати відповідь щойно критика тверджень, виведених з оцих аксіом.

*) Rich. Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Karlsruhe in Baden 1924, стр. 11.

IV. ПИТАННЯ ЗГІДНОСТІ АКСІОМ ОДНИХ З ОДНИМИ ТА ЇХ ВЗАЇМНОЇ НЕЗАЛЕЖНОСТІ.

Згідність аксіом одних з одними доводить Гільберт так, що відтворює (також в поясненому попередньому змісті) предмети першої системи на множині дійсних чисел, предмети третьої системи (площі) на множині лінійних рівнянь з трьома змінними (з дійсними сучинниками), а предметів другої системи, простих, на множині пар таких рівнянь.

Для не-матиматиків подам ось таке пояснення: відтворення множини точок на множині дійсних чисел (а радше трійки таких чисел) значить встановлення одно-однозначної відповідності поміж точками і трійками чисел, так щоб кожній трійці чисел відповідала одна і тільки одна точка і навідворот. Як це робиться на площі, знаємо із шкільної науки алгебри: рисуємо т. зв. систему ссрядних Декарта і зазначаємо початок укладу парою чисел $(0, 0)$, всі інші точки відповідними парами чисел. В просторовій геометрії мусимо вибрати систему Декарта з трьома осями, простопадними одна до одної, початкову точку зазначаємо трійкою $(0, 0, 0)$, всі інші точки відповідними трійками чисел. Так само знаємо із шкільної алгебри, що кожній простій відповідає якесь рівняння з двома змінними

$$ux + vy + w = 0,$$

а що дві прості (нерівнобіжні) перетинаються в одній точці, то ми могли б також точки на площі означувати парами таких рівнянь. В просторовій аналітичній геометрії площі зазначаються лінійними рівняннями з трьома змінними

$$ux + vy + wz + t = 0,$$

а що дві площі нерівнобіжні перетинаються в простій, то прості лінії в просторовій геометрії зазначаються парами таких лінійних рівнянь з трьома змінними.

Отож, якщо якакебудь суперечність мала б місце поміж аксіомами або висновками з цих аксіом, то така суперечність виступила б таки зараз в множині дійсних чисел. Таким чином Гільберт узалежнює згідність геометрії з собою від згідності арифметики з собою. Та саме оцю згідність арифметики з собою треба було таки доказати і це завдало Гільбертові згодом навіть чимало мороки.

Що ж торкається взаємнезалежності аксіом, то незалежність аксіом рівнобіжних від других аксіом доводить Гільберт можливістю неевклідової геометрії, незалежність аксіом приставання від других аксіом можливістю інакшої геометрії, незалежність аксіом суцільності можливістю не-Архимедової геометрії. Та годі отрястися з подиву для геніяльної інтуїції Евкліда, що, не знаючи модерної арифметики та аналітично-геометричних метод, поставив свій V. постулат на належному місці.

V. НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ПРОБЛЕМИ.

Тому що для формалістів та інтуїціоністів — характерни- стичне м. ін. їхнє становище до нерозв'язаних проблем та до т. зв. доказів існування, представлю в оцьому уступі бодай де- кілька таких проблем.

Теорія чисел знає т. зв. проблему Fermat'-а, що лежить у тому, щоб найти доказ т. зв. великого твердження Fermat'-а, а саме, що неможливо пайти такі три цілі числа x , y , z , аби було сповнене рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

де n було б більше чим 2. Дотепер переведено докази тільки в поодиноких випадках для $n = 3, 4, 5$ і т. д. та доведено аж до числа 257, натомість не вдалось подати загального доказу для всіх натуральних чисел, підставлених за n .

До сьогодні немає відповіді на питання, чи маємо скінчену, чи нескінчену кількість пар первісних чисел з різницею 2, як н. пр. 5 і 7, 11 і 13, 41 і 43 і т. д.

До сьогодні ще не маємо доказу т. зв. твердження Гольд- баха, а саме, що кожне паристе число дається бодай в один спосіб представити як сума двох первісних чисел, н. пр.: $10 = 7 + 3$, $18 = 11 + 7$, $22 = 19 + 3$ і т. д.

До тепер ще не знаємо, чи т. зв. Ойлерівська (Euler) стала (Konstante)

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right]$$

в алгебричним, чи трансцендентним числом. [Алгебричним називаємо число, що може бути коренем (розв'язкою) алгебричного рівняння з цілочисловими сучинниками. Числа, що не можуть бути розв'язкою таких рівнянь, називаємо трансцендентними].

Таких нерозв'язаних проблем математика знає більше. Не від речі буде згадати, що ще до недавня, бо до 1871 р. не було доказу, що число π переступне.

VI. ДОКАЗИ ІСНУВАННЯ.

В математиці переводиться часто т. зв. докази існування деяких математичних понять, хоч самого поняття при тім не твориться, не показується ефективно. Так н. пр. в альгебрі зокрема доказується існування розв'язок рівнянь, а зокрема показується вираження, що їх представляють. Що більше, Абель доказав, що для рівнянь V. і вищих ступінів неможливо (в загальному випадку) найти альгебричне вираження (себто при по-

мочі чергового корінювання) на розвязки рівняння, а проте ці розвязки існують! Та й не тільки існують, а й маємо величню будівлю теорії алгебричних чисел, отже чогось такого, що ефективно маємо тільки в виняткових випадках, для виняткових рівнянь.

Так само маємо докази існування інтегралів диференціальних рівнянь, що їх треба відрізнити виразно від ефективного заподання таких інтегралів (розвязок)*).

Та бувають і ефективні докази існування. Щоби показати хоч на одному прикладі різницю між ефективним а неефективним доказом, наведу доказ існування трансцендентних чисел, так як його подає G. Cantor на підставі своєї теорії множин, а як доказують існування оцих чисел Liouville, Hermite і Lindemann. Доказ Cantor-а, що його він перевів на з'їзді природників в Галле 1891 р., переповідаю за Кляйном. Цей доказ дещо відмінний від цього, що його Кантор оголосив 1873 р. (в 77-му томі *Journal f. reine u. angew. Mathematik*). Та перед тим дам декілька необхідних пояснень з теорії множин.

Множиною називаємо (за Кантором) скінчений або й нескінчений збір (комплекс) предметів, різних один від одного. Ці предмети називаємо елементами множини.

Найбільш типовим прикладом множини в нескінченую кількість елементів є множина натуральних чисел

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

або множина усіх паристих чисел

$$\{2, 4, 6, \dots\}$$

або усіх можливих дробів

$$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\}.$$

В деяких випадках можна встановити одно-однозначну відповідність поміж поодинокими елементами двох множин, так щоб кожному елементові одної множини відповідав один, але тільки один елемент другої. Така відповідність існує н. пр. поміж множиною чисел природного ряду і множиною усіх паристих чисел

$$\begin{array}{ccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & & \text{in inf.}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ \{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & & \text{in inf.}\} \end{array}$$

Такі дві множини називаємо рівноважними одна з одною.

*) Про значіння доказів існування див. Д-р В. Левицький: Докази існування інтегралів різничкових рівнянь. Збірник матем.-природн.-лік. Секції Н. Т. Ш. т. I. 1897 р.

Множину, рівноважну з множиною чисел природного ряду, звемо перелічимою (abzählbare Menge). Отож н. пр. множина паристих чисел перелічима.

Так само перелічима множина усіх дробів. Доказ переводиться при допомозі т. зв. 1-го косинного процесу (erstes Diagonalverfahren). А саме виписується всі цілі числа й дробі (всі вимірні числа) в ось такому порядку

$$\begin{array}{c} 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \\ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \end{array}$$

Кажемо, що таким способом „вичерпаємо“, тобто виписемо „всі“ вимірні числа, значить цілі числа і дробі. Тепер виймаємо їх по черзі ось так:

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4},$$

Зараз видно, що вони дадуться припорядкувати кожне по черзі одному і тільки одному з чисел природного ряду. (Можна б, як хто хоче, іще перекреслити числа, які повторюються):

$$\begin{array}{c} 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \\ \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \end{array}$$

З такого представлення видно рівноважність множин вимірних чисел з множиною чисел прир. ряду, значить перелічимість множини вимірних чисел.*)

Назва „Diagonalverfahren“ походить звідси, що за цими числами слідуємо по косинах.

Важний і інтересний приклад перелічимої множини маємо на множині алгебричних чисел. Її перелічимість доказуємо так, що доказуємо перелічимість усіх многочленів з цілочисловими сучинниками $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

В тій цілі впроваджується поняття т. зв. „висоти“ многочлена

$$h = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|;$$

це, як видно, сума абсолютних вартостей сучинників і ступня. Якщо за h прийматимемо по черзі числа 2, 3, 4, і т. д., то для означеного h маємо тільки закінчену кількість многочленів

*) Е. Камке: Mengenlehre, Sammlung Götschen, ч. 999, 8-ма і сл. стор.

з висотою h . Так н. пр. для $h=2$ маємо само x або рівняння $x=0$, для $h=3$ маємо многочлени x^2 , $2x$, $x+1$, $x-1$, 3 , або рівняння $x^2=0$, $2x=0$, $x+1=0$, $x-1=0$. Так можемо впорядкувати усі многочлени, чи відповідні рівняння, або, що на одно виходить, їх розвязки, отже альгебричні числа, і кожне з них припорядкувати одному з чисел природного ряду. Таким чином перелічимість множини альгебричних чисел буде доказана. (Kamke, op. cit.).

Що не всі множини перелічимі, що існують множини неперелічимі, а саме н. пр. множина чисел, що не є ані вимірні, ані альгебричні, доводить Cantor при допомозі т. зв. 2-го косинного процесу (zweites Diagonalverfahren). Він бере під увагу всі альгебричні числа поміж 0 і 1. Кожне з них дається виписати одним способом при допомозі цифер як нескінчений (а хочби й скінчений) десятковий дріб, а їх „кількість“, множина є перелічима.

$$0, a_{11}a_{12}a_{13}$$

$$0, a_{21}a_{22}a_{23}$$

$$0, a_{31}a_{32}a_{33}$$

Виберім тепер цифри на косині, значить цифри $0, a_{11}, a_{22}, a_{33}$, і т. д. і створім нове число $0, b_1b_2b_3$, так щоб b_1 не було рівне a_{11} , дальше $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$ і т. д. Такого числа немає поміж вже виписаними (бо від кожного з них різниться бодай одною цифрою від якогонебудь іншого). З цього видно, що усі альгебричні числа ще не виповнюють цілого інтервалу поміж 0 і 1, отже що є, існують іще числа, які не є альгебричні.

В оцьому доказі не показується ефективно, як перевести конструкцію неальгебричного числа. Інакше поступає Liouville (Comptes rendus 1844 або Journal de Mathématiques vol. 16 з р. 1851). Він виводить одну характеристичну прикмету альгебричних чисел, та показує на прикладах, що є, існують числа, які не мають тої прикмети, отже не є альгебричними числами. Між іншим подає він ось таке число

$$\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^{1.2}} + \frac{1}{10^{1.2.3}} + \frac{1}{10^{1.2.3.4}} + \dots \quad \text{in inf.} = 0,11000100.$$

Подібним, хоч дещо відмінним способом доводить Hermite, що число $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$ є переступне число, так само

Lindemann, що число $\pi = 3,14159\dots$ це переступне число.*) Тут переводиться доказ, що немає такого алгебричного рівняння з цілочисловими сучинниками, якого коренем було б число e , чи π , а тим самим, що це переступні числа. Та годі тут переводити, а радше повторювати ці докази *in extenso*. Для не-математика вони за тяжкі і за довгі і ніякий популяризатор тут нічого не вдіє, а математик знає їх і без того. Те саме можна завважити, що торкається теорії Lindelöf-a, Fréchet-a, Лузіна та др. Математикові і так не скажу нічого нового, а не-математика тільки непотрібно задержу. (Це все виложено ясно і докладно в цитованому в списі літератури підручнику В. Серпінського).

VII. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЛЬОГІКИ.

Їх згадую на оцьому місці тому, що саме інтуїціоністи заперечують важність 3-ої аксіоми льогіки навіть в математичних розумуваннях. Підставовими законами льогіки або „законами думання“ називаємо звичайно чотири аксіоми льогіки, а саме:

1. Закон тотожності: Те, що є, є, або: $A = A$;
2. Закон суперечності: Жадна річ не може бути і не бути водночас, або: A не є $\text{non} - A$;
3. Закон виключеної середини (*principium exclusii medii*): кожна річ мусить або бути, або не бути, або інакше: A є або B , або не — B , третьої можливості немає (*tertium non datur*);
4. Закон достаточної причини: Нічо не діється без достаточної причини.

В льогіці не приймається оцих законів думання так зовсім беззастережно. Друга і третя аксіома насуває зовсім поважні труднощі. Дехто не вважає третьої аксіоми самостійною аксіомою (Sigwart**) є тої думки, що третя „аксіома“ виходить з другої і подвійного заперечення. Wundt***) підносить щодо неї поважні сумніви. Та за те в математиці приймається оці закони беззастережно, бодай математик-формаліст послуговується згаданими законами, як чимсь samozрозумілим.

VIII. СПРОБА ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕМАТИКІВ-ФОРМАЛІСТІВ.

На оцьому місці можна, думаю, подати характеристику математика-формаліста, а саме:

*) Див. Д-р Володимир Левицький: Про переступ чисел e і π . Збірник т. I. 1897. — **) Sigwart, Logik стор. 213. — ***) Wundt. Logik I. стор. 555.

Він є аксіоматиком в такому розумінні, як вище вияснено. Згідність геометрії з собою у нього залежна від згідності арифметики з собою.

В противенстві до математика-інтуїціоніста, чи як висловлюється Н. Poincaré — прагматиста, він непохитно переконаний у можливості розв'язання кожної математичної проблеми. Типовим висказом Гільберта, оцього формаліста *par excellence*, висказом, що його він ще до сьогодні не перестає повторювати трохи не на кожному конгресі, є слова: „Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“.

В противенстві до інтуїціоніста послуговується формаліст залюбки згаданими трьома основними законами логіки. Він приймає їх як щось де як де, а в математиці самозрозумілого, без якихнебудь застережень.

В противенстві до інтуїціоніста займається формаліст залюбки описаними вже доказами існування та вважає їх чимсь високоавторитетним. Він приймає якесь поняття як існуюче, якщо в ньому тільки нема суперечностей. Натомість цілі числа „існують“ для нього щойно тоді як вдасться доказати, що в їхніх законах немає суперечностей.

IX. ТЕОРІЯ МНОЖИН ТА ЇЇ ПАРАДОКСИ.

Одним з найбільш плідних умів поміж формалістами був Georg Cantor, (1845—1918), творець згаданої вже теорії множин. Сьогодні маємо аксіоматику теорії множин, яку завдячуємо Zermelo. Кантор пробує іще дефініювати поняття множини і в цьому він нагадує трохи Евкліда. Він подає ось таку дефініцію: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens — welche die Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen“. Аксіоматика Zermelo подає інакшу дефініцію, подібну до Гільбертових дефініцій. В Канторовій можна добавувати логічну похибку *idem per idem*. Не входячи в дальшу аналіз понять, зверну таки зараз увагу на недомогання цієї теорії, які не мають аналогії в жадній іншій ділянці математики. А саме вже з самого поняття множини виходять парадокси теорії множин, до яких ми в математиці не привикли. З тих парадоксів згадаю перш за все славнозвісний парадокс Russell'a. Його можна описати менш-більш ось так: Якесь множина може містити в собі саму себе, як елемент, або ні. Так я. пр. множина усіх абстрактних понять є сама абстрактним поняттям і містить

в собі саму себе як елемент. Знову н. пр. множина всіх чисел від 1 до 10 не містить в собі самої себе як елементу. Візьмим тепер під увагу якусь множину N , що не містить в собі самої себе як елементу і візьмим під увагу множину M усіх таких множин.

Чи M містить в собі саму себе як елемент, чи ні?

Отож з одного боку можна довести, що не містить, бо сказано, що це має бути множина тільки таких множин, що не містять себе в собі як елементу.

Та знову якщо вона не містить себе сама в собі, то таки є елементом множини M , отже таки містить себе сама в собі.

З чисто формального боку оця антиномія нагадує н. пр. процес софіста Протагора з його учнем Еватльосом за заплату за перший виграний процес. Протагор доказує, що Еватльос повинен йому заплатити, бо якщо програє, то на основі присуду, а якщо виграє, то на основі умови. Зновже ж тамтой з рівною силою аргументації доводить, що якщо виграє, то не заплатити на основі присуду, а якщо програє, то не заплатити на основі умови.

Або антиномію Епіменіда з Крети: „Усі Кретийці говорять неправду“.

Сьогодні можна навіть подати загальну рецепту, як творити такі парадокси, що з теорією множин, ані з математикою не мають нічого спільного. Russell подає н. пр. ось такий: Назв'єм якесь поняття присудимим (praeedicable), якщо воно дасться прикласти до себе самого. Так н. пр. вираз „абстрактний“ є присудимий, бо поняття абстрактності є абстрактне, отже дасться до себе прикласти. Зновже ж н. пр. вислів „конкретний“ є абстрактний, не дасться до себе прикласти, отже є неприсудимий. Роздивімся тепер, чи вислів „неприсудимий“ є присудимий, чи ні. Отже з одного боку він неприсудимий, бо не дасться прикласти до себе самого. Але ж знову з другого боку вже через те саме він саме ось тут прикладається до себе самого, є він присудимий. Таким чином оце поняття суперечне в собі, так само як поняття множини всіх множин, що не містять себе самих в собі як елементу.

Теорія множин має ще й інші антиномії, так н. пр. антиномію Burali-Forti, Zermelo-König-a, Richarda, Berry та ін. Та суттєво вони поміж собою не різняться.

X. РІЗНІ СПРОБИ ЗВІЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИКИ ВІД АНТИНОМІЙ.

Зрозуміло, що такі антиномії стають нестерпні в математиці, яка має бути зразком точності. Не диво, що були спроби усунути ці неточності. Одною з них була аксіоматизація теорії множин, що її довершив Zermelo. Його аксіоматика в багатьох деталях нагадує Гільбертову аксіоматику геометрії. В оцій аксіоматиці обмежено поняття множини до таких множин, що не доводять до парадоксів. Та немає ніякої запоруки, що такі самі антиномії не виступлять десь на іншому місці. Інші спроби ратувати математику йшли в напрямі базування математики на логіці. Проти цього напрямку Frege і Russell-a були поважні застереження (див. н. пр. Bernays — гл. літературу). Ці спроби Frege і Russell-a також не давали запоруки, що оминуть раз на все парадоксів. Та їхня заслуга ця, що вони звернули увагу на це, чим, на ділі, є взагалі математична конклюдія.

XI. ІНТУІЦІОНІСТИ, ГОЛОВНО BROUWER.

Та найбільш революційним показався в реформуванні математики напрямок, що веде свій початок від Кронекера, а репрезентований в останніх часах такими математиками як Poincaré, Borel, Brouwer, Weyl. Brouwer назвав свій напрямок інтуїціонізмом, Poincaré називав його прихильників прагматистами. Вони з цілою силою пари звертаються проти тих помічних понять, що їх математика запозичує від логіки, та доходять до цього, що відкидають цілу низку конклюдій, якими математика до тепер так пишалась. Щораз яркіше зарисовується різниця поміж новим інтуїціоністичним і формалістичним напрямком, що все ще не дає за виграну. Оця різниця показується вже в самих вихідних точках розважувань одних і других. Отож для інтуїціоністів є канonom, системою основних аксіом математики збір властивостей чисел природного ряду. Вони навіязують до слів Кронекера: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“. Тут видно також противенство до теорії згаданого вже Frege і Russell-a, що пробують подавати дефініцію цілих чисел. Та вже Гільберт закидує їм (Grundlagen VI-те вид. стор. 244.), що саме в цій дефініції вони попадають в небезпеку антиномій. Для інтуїціоніста немає ніякого змислу, шукати на оці основні закони цілих чисел якогонебудь доказу та розчленовувати їх так, як це робить формаліст. Тим самим всякі намагання, перевести для них т. зв.

„Widerspruchlosigkeitsbeweis“, для інтуїціоніста зовсім безпредметові. Так само без доказу і дефініції приймає він і ще деякі поняття з теорії множин.

В противенстві до математика-формаліста він не визнає чисто формальних доказів існування. Йому замало сказати, що якесь поняття існує, тому, що воно вільне від суперечностей. Він хоче, щоби йому це поняття показати, перевести його конструкцію. Він визнає тільки ефективні докази існування.

Інтуїціоніст не приймає беззастережно аксіоми „tertium non datur“. Так н. пр. для формаліста якесь число є або алгебричне, або трансцендентне, — tertium non datur. Інтуїціоніст допускає ще третю можливість, що питання взагалі не дасться вирішити.

Так само приймає інтуїціоніст можливість, що є проблеми, що взагалі не дадуться розв'язати.

Таке становище інтуїціоністів викликало доволі горячкову дискусію в 1900-их р.р. (Hilbert: Axiomatisches Denken, або Pasch: Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 27. з р. 1918, 228—232.).

Ясно, що так далеко посунений критицизм мусів довести по просту до відкинення неодного гарного твердження математики. Між іншим для інтуїціоніста відпадає твердження, що кожна суцільна в якомусь обмеженому проміжку функція має своє maximum, або що кожна суцільна монотонна функція дасться зрізничкувати в цілому проміжку за вийком скінченної множини точок. Інтеграл Лебєга (Lebesgue), таї взагалі багато тверджень теорії функцій дійсних змінних не існує. Вона ж опирається на осьтакі твердження: 1) Що точки суцілья (Punkte des Kontinuums) творять впорядковану множину, значить, що поміж якиминьбудь двома точками має місце ось таке взаємовідношення $a \leq b$. 2) Що кожна множина є або скінчена, або нескінчена. А інтуїціоніст відкидає саме оці закони.

Та інтуїціоніст вже найбільш безпощадний супроти теорії множин. Вона виходить сильно обкривна та zdeформована; особливо становище інтуїціоністів до питання суцілья дуже відмінне від становища формалістів (Brouwer: Intuitionistische Mengenlehre). Це вже виглядає на велике спустошення. Говориться про кризу основ математики. Прийшлося ратувати становище формалістів, та таки конче перевести згаданий вже доказ згідности аритметики зі собою. Таке завдання Гільберт поставив собі в своїх „гамбурських“ працях. Останні роки принесли деяке злагіднення різниці становищ обидвох таборів. Останній з'їзд в Празі 1929 р.

показав, що можливо знайти спільну мову. Інтуїціоністи визнають вже, що математика Гільберта таки вільна від суперечностей, з другого боку формалісти признають, що вихідні точки їхніх розважувань суттєво не різняться від Брауверових. Обидва напрямки погоджує логістика (математична логіка).

ХІІ. ЗАКІНЧЕННЯ.

Чи полеміка поміж обидвома таборами колинебудь закінчиться, можна сумніватися. „Правдивими“ можна визнати обидва напрямки в тому розумінні, що зі становища чистої логіки годі котрому з них щонебудь закинути. Сьогодні обидва напрямки аксіоматизовані, так що тільки інтуїційно можна приймати або одну або другу систему аксіом. Тут виразно виступило значіння аксіоматики взагалі. Гільберт каже н. пр.: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt“. Сьогодні вже ясно, що всяке думання залежне від аксіом і про „правду“ приходить говорити на стільки, на скільки правдиві аксіоми. І оця провідна роль математики лишилася її величним завданням.

ЛІТЕРАТУРА.

H. Weyl.: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. — Mathematische Zeitschrift, Bd. 10, 1921, S. 39—79.

H. Weyl.: Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. — Mathematische Zeitschrift, Bd. 20, 1924, S. 131—150.

D. Hilbert.: Mathematische Probleme. — Vortrag, gehalten auf dem internationalen mathematischen Kongresse zu Paris 1900. Abgedr. im Archiv für Mathem. und Physik, 3 Reihe, Bd. 1, 1901, S. 44—63 u. 213—237. — Пор. також Збірник мат.-прир.-лік. секції т. VII. вип. II. 1901. бібліогр. ст. 21.

D. Hilbert.: Axiomatisches Denken. — Züricher Vortrag 1917. Mathematische Annalen, Bd. 78, 1918, S. 404—415.

D. Hilbert.: Neubegründung der Mathematik. — Abhandlungen a. d. mathem. Seminar d. Hamburgischen Univ. Bd. 1, 1922, S. 157—177.

D. Hilbert.: Die logischen Grundlagen der Mathematik. — Mathem. Annalen, Bd. 88, 1922, S. 151—165.

A. Pringsheim.: Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede 1904. München, K. B. Akademie der Wissenschaften, 44 S.

L. E. J. Brouwer.: Intuitionism and Formalism. — Bulletin of the American Mathematical Society, XX, 1913, S. 81—96

L. E. J. Brouwer.: Intuitionistische Mengenlehre. — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 28, 1919, S. 203—208.

D. Hilbert.: Grundlagen der Geometrie. 6-te Aufl. — Wissenschaft und Hypothese, Berlin u. Leipzig, 1923.

H. Weyl.: Das Kontinuum. — Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, 1932, 84 S.

F. Hausdorff.: Mengenlehre. 2-te Aufl., 285 S. 1927. — Göschens Lehrbücherei, Bd. 7.

W. Sierpiński.: Zarys teorii mnogości. 2 tom. Warszawa, MCMXXIII.

F. Klein.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage, 1-ter Bd. Berlin, 1924.

B. Russell.: The principles of mathematics. — Cambridge 1903.

A. N. Whitehead and B. Russell.: Principia mathematica I—III. Cambridge, 1910—1913.

A. Fraenkel.: Einleitung in die Mengenlehre. 2-te Aufl. Berlin, 1923, 251 Seiten.

A. Fraenkel.: Die heutigen Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik. — „Erkenntnis“, Bd. 2/4.

Rudolf Carnap.: Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik. — Diskussion über Grundfragen der Mathematik und Logik. — ibid.