

Transformation der Laplaces'chen Differentialgleichung im n-Dimensionalen auf generelle Koordinaten.

Es seien n zueinander orthogonale n -dimensionale Gebilde gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) &= \varrho_1 \\ f_2(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) &= \varrho_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$f_n(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = \varrho_n$$

Nach Auflösung nach $x_1, x_2 \dots x_n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n) \\ x_2 &= \varphi_2(\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n) \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_n = \varphi_n(\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n)$$

Die Orthogonalitätsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_3} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_3} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_3} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_{n-1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_{n-1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_{n-1}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_{n-1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_n} = 0$$

oder auch:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_n} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varrho_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varrho_3}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_n} \frac{\partial \varrho_3}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho_3}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial x_1} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial x_2} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_i} = 0.$$

Es sei nun die Potentialgleichung gegeben:

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0 \quad (5)$$

und diese Gleichung möge auf generalisierte n -dimensionale Koordinaten transformiert werden. Die neuen Koordinaten seien $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n$ und sie mögen mit den Koordinaten $x_1 x_2 \dots x_n$ durch die Gleichungen (1) und (2) verknüpft sein. Wir haben nun infolge (2):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial V}{\partial \varrho_n} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1^2} \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_2^2} \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_i} \right)^2 + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_n^2} \left(\frac{\partial \varrho_n}{\partial x_i} \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_k \partial \varrho_l} \frac{\partial \varrho_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho_l}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x_i^2} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x_i^2} + \dots + \frac{\partial V}{\partial \varrho_n} \frac{\partial^2 \varrho_n}{\partial x_i^2} \end{aligned} \quad (7)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

Addieren wir die n Gleichungen (7) und berücksichtigen die Orthogonalitätsbedingungen (4), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} &= \Delta_2 V = \\ &= \Delta_1(\varrho_1) \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1^2} + \Delta_1(\varrho_2) \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_2^2} + \dots + \Delta_1(\varrho_n) \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_n^2} + \Delta_2(\varrho_1) \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} + \\ &\quad + \Delta_2(\varrho_2) \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} + \dots + \Delta_2(\varrho_n) \frac{\partial V}{\partial \varrho_n} \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei bedeuten $\Delta_1(\varrho_i)$ und $\Delta_2(\varrho_i)$ die verallgemeinerten Lamé'schen Differentialparameter:

$$\Delta_1(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \quad (9)$$

$$\Delta_2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \quad (10)$$

Diese Differentialparameter berechnen wir wie folgt:

Durch Differentiation der Gleichungen (2) nach x_1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_1} &= 1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_1} &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} \frac{\partial \varrho_n}{\partial x_1} = 0$$

Multiplizieren wir nun die erhaltenen Gleichungen bzw. mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}$ und addieren mit Berücksichtigung von (3), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \right)^2 \right] \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \text{ und analog} \\ \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \right)^2 \right] \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \\ \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \right)^2 \right] \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_n} &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}.\end{aligned}\quad (12)$$

Quadrieren wir und addieren diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \right)^2 \right]^2 \Delta_1(\varrho_1) &= \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \right)^2\end{aligned}$$

und hieraus

$$\Delta_1(\varrho_1) = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} \right)^2}.$$

Analog

$$\Delta_1(\varrho_2) = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} \right)^2} \quad (13)$$

$$\Delta_1(\varrho_n) = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} \right)^2}.$$

Führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_i} \right)^2 = H_i,$$

dann bekommen die Gleichungen (13) die Form:

$$\Delta_1(q_1) = \frac{1}{H_1}, \Delta_1(q_2) = \frac{1}{H_2}, \dots, \Delta_1(q_n) = \frac{1}{H_n} \quad (13a)$$

Die Parameter $\Delta_2(q_i)$ berechnen wir nach Lamé wie folgt: mit Hilfe der Bezeichnungen (13a) erhält die Identität (8) die Form:

$$\begin{aligned} \Delta_2(V) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} + \dots + \frac{1}{H_n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} + \Delta_2(q_1) \frac{\partial V}{\partial q_1} + \\ + \Delta_2(q_2) \frac{\partial V}{\partial q_2} + \dots + \Delta_2(q_n) \frac{\partial V}{\partial q_n}. \end{aligned} \quad (8a)$$

In dieser Identität setzen wir der Reihe nach: $V = q_1, V = q_2, \dots, V = q_n$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial q_2^2} + \dots + \frac{1}{H_n} \frac{\partial^2 q_1}{\partial q_n^2} + \Delta_2(q_1) \frac{\partial q_1}{\partial q_1} + \\ + \Delta_2(q_2) \frac{\partial q_1}{\partial q_2} + \dots + \Delta_2(q_n) \frac{\partial q_1}{\partial q_n} = 0 \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial^2 q_2}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial q_2^2} + \dots + \frac{1}{H_n} \frac{\partial^2 q_2}{\partial q_n^2} + \Delta_2(q_1) \frac{\partial q_2}{\partial q_1} + \\ + \Delta_2(q_2) \frac{\partial q_2}{\partial q_2} + \dots + \Delta_2(q_n) \frac{\partial q_2}{\partial q_n} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial^2 q_n}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 q_n}{\partial q_2^2} + \dots + \frac{1}{H_n} \frac{\partial^2 q_n}{\partial q_n^2} + \Delta_2(q_1) \frac{\partial q_n}{\partial q_1} + \\ + \Delta_2(q_2) \frac{\partial q_n}{\partial q_2} + \dots + \Delta_2(q_n) \frac{\partial q_n}{\partial q_n} = 0. \end{aligned}$$

Daraus können wir schon $\Delta_2(q_i)$ berechnen. Multiplizieren wir nämlich (14) bzw. durch $\frac{\partial q_1}{\partial q_1}, \frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial q_n}{\partial q_1}$ und addieren, so ergibt sich mit Rücksicht auf (3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_1^2} \frac{\partial q_i}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_2^2} \frac{\partial q_i}{\partial q_1} + \dots + \\ + \frac{1}{H_n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_n^2} \frac{\partial q_i}{\partial q_1} + \Delta_2(q_1) H_1 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_1} \right)^2 \right] \quad (16)$$

und

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1}. \quad (16a)$$

Differenzieren wir wieder die erste der Gleichungen (3) nach ϱ_2 , so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_2^2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_2^2} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = - \frac{1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} \\ \text{und analog} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_3^2} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varrho_n^2} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \varrho_1} \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

Hiemit ist:

$$\begin{aligned} \Delta_2(\varrho_1) &= - \frac{1}{2H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{2H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} + \\ &\quad + \frac{1}{2H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \dots + \frac{1}{2H_1 H_n} \frac{\partial H_n}{\partial \varrho_1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{oder} \quad \Delta_2(\varrho_1) &= - \frac{1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\lg \frac{H_1}{H_2 H_3 \dots H_n} \right) \\ \text{Analog} \quad \Delta_2(\varrho_2) &= - \frac{1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\lg \frac{H_2}{H_1 H_3 \dots H_n} \right) \\ \Delta_2(\varrho_n) &= - \frac{1}{2H_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_n} \left(\lg \frac{H_n}{H_1 H_2 \dots H_{n-1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Um nun negative Vorzeichen durch positive zu ersetzen und den Nenner 2 fortzuheben, setzen wir noch

$$H_1 = \frac{1}{h_1^2}, \quad H_2 = \frac{1}{h_2^2}, \dots, \quad H_n = \frac{1}{h_n^2};$$

dadurch erhalten die Gleichungen (18) die Form:

$$\begin{aligned}\Delta_2(q_1) &= h_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\lg \frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \right) \\ \Delta_2(q_2) &= h_2^2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\lg \frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \right)\end{aligned}\quad (18a)$$

$$\Delta_2(q_n) = h_n^2 \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\lg \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right)$$

und die Gleichung (8) die Form:

$$\begin{aligned}\Delta_2 V &= h_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} + h_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2} + \dots + h_n^2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} + \\ &+ h_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\lg \frac{h_n}{h_2 h_3 \dots h_n} \right) \frac{\partial V}{\partial q_1} + h_2^2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\lg \frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \right) \frac{\partial V}{\partial q_2} + \dots + \\ &+ h_n^2 \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\lg \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right) \frac{\partial V}{\partial q_n}\end{aligned}\quad (8b)$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}\Delta_2 V &= h_1 h_2 \dots h_n \left[\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\lg \frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \right) + \right. \\ &+ \frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\lg \frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \right) + \dots + \\ &\left. + \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} + \frac{\partial V}{\partial q_n} \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\lg \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right) \right].\end{aligned}\quad (8c)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\lg \frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \right) &= \\ &= \frac{h_2 h_3 \dots h_n \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - h_1 h_3 \dots h_n \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \dots - h_1 h_2 \dots h_{n-1} \frac{\partial h_n}{\partial q_1}}{(h_2 h_3 \dots h_n)^2} = \\ &= \frac{h_2 h_3 \dots h_n \frac{\partial h_1}{\partial q_1} - h_1 \frac{\partial (h_2 h_3 \dots h_n)}{\partial q_1}}{(h_2 h_3 \dots h_n)^2} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \right)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\lg \frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \right) \\ \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\lg \frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right)\end{aligned}$$

Hiermit erhält die Gleichung (8) endlich die Form:

$$\Delta_2 V = h_1 h_2 \dots h_n \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \varrho_n} \left(\frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \frac{\partial V}{\partial \varrho_n} \right) \right] \quad (8d)$$

Die Anwendung der letzterhaltenen Gleichung auf n-dimensionale Kugelkoordinaten und ihre Lösung bleibe einer besonderen Arbeit vorbehalten.