В. ЛЕВИЦЬКИЙ (Львів).

Евольвента цисоїди.*)

Коли маємо рівнання цисоїди

$$\xi(\xi^2+\eta^2)=2r\eta^2, \tag{1)}$$

тоді найдемо її евольвенту, коли виелімуємо ξ та η з рівнання 1) і рівнань:

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{2)}$$

Напишім рівнаннє 1) у виді:

$$\eta^2=\frac{\xi^3}{2r-\xi},$$

тоді різничкове рівнаннє евольвенти дістане форму:

$$\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]^2=\frac{\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]^3}{2r-\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]}. \tag{3)}$$

Щоби це рівнання з'інтегрувати, покладім:

$$y=a\pm\sqrt{b^2-(x-c)^2} \tag{4)}$$

де a b c є якісь сталі.

Тоді дістанемо:

$$y'=\pm\frac{(x-c)}{\sqrt{b^2-(x-c)^2}}, \quad y''=\pm\frac{b^2}{\left[b^2-(x-c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xi=x-(x-c)=c, \qquad \eta=a.$$

---

*) пор. розвідки автора: 1) До теорії евольвенти (Збірник математ. природн. лікарск. секції т. XXI). 2) Кривина евольвенти (ibid. т. XXIII.–XXIV). 3) La spirale logarithmique et sa développante (ibid. т. XXVII). 4) Трактриса як евольвента ланцової лінії (Записки Київськ. Інстит. Народн. Освіти 1928). 5) La astroide y su envolvente (Revista de Ciencias, Lima 1931).

Рівнаннє 1) дає в виду цього:

$$c(c^2 + a^2) = 2ra^2,$$

$$c^3 = a^2(2r - c)$$

$$a^2 = \frac{c^3}{2r - c}, \qquad a = \pm\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}}. \qquad 5).$$

Тоді дістанемо з 4):

$$y = \pm\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}} \pm \sqrt{b^2 - (x - c)^2}$$

або:

$$\left[y \pm \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}}\right]^2 = b^2 - (x - c)^2,$$

а з цього вкінці слідує:

$$(x - c)^2 + \left(y \pm \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}}\right)^2 = b^2. \qquad 6).$$

Отже:

Евольвенти цисоїди творять подвійну громаду кіл.