

06 и 30360 / 30

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XXX.

РЕДАГУЄ

ПРЕЗІДІЯ СЕКЦІЇ.

SAMMELSCRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LWIW (LEMBERG)

BAND XXX.

REDIGIERT VOM

PRÄSIDIUM DER SEKTION.



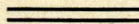
У ЛЬВОВІ 1934.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ — INHALT.

	Стор
1. <i>B. Brusider</i> : Мікроскопна будова слинових залоз у <i>Polycera quadrilatera</i> на тлі відносно у цілої групи Нарозявних (<i>Nudibranchiata</i>)	1—18
(<i>Pl. Brygider</i> : Der mikroskopische Bau der Speicheldrüsen bei <i>Polycera quadrilatera</i> auf Grund der Verhältnisse in der ganzen Gruppe der Nacktschnecken).	
2. <i>H. Мазера</i> : Хромогенізм у <i>Bact. Coli</i>	19—25
(<i>N. Мазера</i> . Über den Chromogenismus des <i>Bact. coli</i>).	
3. <i>Г. Коренець</i> : Бінарний уклад сечовина—р—толоїдина	27—37
(<i>A. Коренець</i> . Das binäre System Harnstoff-p-Toluidin).	
4. <i>Е. Вертунорох</i> : Про реакції з хлоридом алюмінія (<i>E. Wertunoroch</i> . Über die Reaktion des Al-Chlorides).	39—45
5. <i>Wl. Котецькй</i> : Versuche über Desmotropie von Diazo-amino-verbindungen und über das dem Arecolon entsprechende Benzylderivat	47—58
6. <i>Р. Єндик</i> : Надволжанські фіни в краніологічній освітленні (<i>R. Jendyk</i> . Die Wolga-Finnen in der kraniologischen Beleuchtung).	59—84
7. <i>Г. Pfeiffer</i> : Die Konstruktion eines allgemeinen Operators der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die in Bezug auf einen von Differentialquotienten aufgelöst ist	87—94
8. <i>М. Куренський</i> : Про узагальнення варіації Lagrange'а для лінійного диференціального рівняння другого порядку	95—100
(<i>M. Kuren'skyj</i> . Über die Verallgemeinerung [der Lagrange'schen Variation für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung).	
9. <i>М. Михальський</i> : Оцінка забурень деяких астероїдів через Марса, Землю, Венеру та Меркурія	101—104
(<i>M. Michal'skyj</i> . Die Schätzung der Störungen einiger Asteroiden seitens Mars, Erde, Venus und Merkur).	
10. <i>D. Mordoukhay-Boltovskoy</i> : Sur les courbures des ordres supérieures des courbes planes	105—115
11. <i>Pl. P. Dobrovolsky</i> : Intégration de l'équation de Laplace	117—123
12. <i>B. Milianczuk</i> : Zur Frage nach den Summenregeln in „erzwungenen“ Dipolmultipletts	125—128
13. <i>M. Zarycki</i> : Über eine mathematische Unterhaltung	129—134



Др. Володимир Брисідер.

Мікроскопна будова слинових залоз у *Polycera quadrilatera* на тлі відносин у цілої групи Нагозявних (*Nudibranchiata*).*)

(Der mikroskopische Bau der Speicheldrüsen bei *Polycera quadrilatera* auf Grund der Verhältnisse in der ganzen Gruppe der Nacktschnecken (*Nudibranchiata*.)

З природописного габінету III. держ. гімн. мат.-природн. типу в Станиславові.

З таблицею ч. 1. — Mit Tafel № 1.

I. Вступ.

Сьогоднішня розвідка є продовженням і доповненням моєї розвідки з 1914 р.: „Про мікроскопну будову слинових залоз у Нагозявних (*Nudibranchiata*)“ (1).

Поки-що обнімає вона собою тільки одну форму, за котрою слідуватимуть інші з групи Нагозявних.

Опрацьована *Polycera quadrilatera* належить по системі R. Bergha до *Nudibranchiata Holohepatica*, а саме до *Dorididae phanerobranchiatae*.

Матеріал, законсервований у плинні Zenkera й переведений у 70% алькоголь, одержав я з Зоологічної Станції в Неаполі завдяки ласкавості Директора цієї станції, R. Dohrma, якому на цьому місці складаю щире подяку.

Весь матеріал затоплював я в парафіні, краяв на 6 μ . грубі пластинки й красив на різні способи, принаровляючися тут до вказівок відомого підручника мікроскопної техніки Dr. V. Re-meisa (8).

*) Відчитано на III. З'їзді укр. природників, лікарів і інженерів у Львові, 25 травня 1931 р.

При цій нагоді дозволю собі подякувати також ВП. Професорам львівського університету, Др. К. Квєтнєвському й Др. І. Гіршлерові за ласкавий інтерес до нинішньої розвідки й дозвіл покористовуватися літературою їхніх Інститутів.

II. Література.

Відносно літератури, що в моїх умовах праці була перешкодою найтяжчою до поборення, являється моя розвідка з 1914 р. основною, бо майже одинокою, що відноситься безпосередно до теми в цій тваринній групі (1).

В цілій післявоєнній літературі находив я тільки розвідки, що займалися слиновими залозами інших груп м'якунів, як напр. Головоножців (F. Bottazzi і J. Verne: 2, 10), Червононожців легеньодишних (Z. Frankenberger: 4), цілком інших звіринних груп, напр. Ссавців (Motta Giuseppe: 7), або опрацьовували залозну клітину й тканинні питоменности взагалі, як G. Roskin (у Pteropoda: 9), L. F. Henneguу (в Nudibranchiata: 5) і Lutz Hildegard (у Pulmonata: Planorbis corneus: 6).

З низки наведених тут розвідок найближче до моєї теми підходить праця L. F. Henneguу'я: „Contribution a l'histologie des Nudibranches“ (5). Якнебудь ціллю її не є слинові залози, просліджуючи однак гістологічні особливости Нагоз'явних, присвячує автор рівнорядну увагу також їх слиновим залозам. Цікаву працю Henneguу-я, якої не міг я ніде в Польщі роздобути, одержав я вкінці з Парижа, в окремій відбитці, через посередництво Дра М. Лятишевського, асистента Наукового Інституту в Пулавах, якому за цю поміч у постачанні мені потрібної літератури щиро складаю подяку.

Серед форм, просліджених Henneguу-єм, не находимо на жаль Polycera-и, тому щодо літератури слинових залоз цього роду задержує ще всю важність і актуальність це все, що сказав я про Polycera quadrilineata у моїй праці з 1914 р., наводячи там дані з монографії про Нагоз'явних Alder-Hancock, з монографії Polycera-дів і інших розвідок R. Bergha й P. Pelseneera (1: стр. 403—404).

Трактуючи будову слинових залоз у Polycera quadrilatera на тлі відносин у цілої групи Нагоз'явних, я не можу здержатися від декількох завваг дотично праці Henneguу'я.

Просліджуючи істологію різних укладів, поширив він обсяг своєї праці до тої міри, що не зміг заволодіти цілковито темою

ані теоретично в узглядненні відповідної літератури, ані практично в проведенні власних обсервацій. Обмежуючися до справи слинових залоз, як моєї спеціальности, я перш усього запримічу, що авторові не була відома моя праця з 1914, яка досі являється одинокою спеціальною розвідкою по темі слинових залоз у Нагозявних, як що абстрагувати мемо від короткої розвідки Т. F. Dreyera з 1913 р.: „On the Salivary and Mouth Glands of the Nudibranchiata“, що поміщена в одному із журналів полудневої Африки, а яка ледви чи знайдеться де в Європі за виїмком може Лондону (3). Цей факт вражає тимбільше, що Henneguу видав свою працю в 1925 р., отже в 11 літ після моєї! (5). Посилаючися на праці використаних ним працюючих: Trinchese, Bergha й Hechta, він вправді наводить за ними на вступі своїх обсервацій поділ слинових залоз Нагозявних так по їх анатомічній будові, як гістологічній структурі, але на практиці не робить із нього ніякого вжитку. Навпаки він ставить цілком ненауково поділ залоз по назвам самих звірят: „On peut distinguer quatre types de glandes salivaires, que j'appellerai le type Fiona, le type Janus, le type Spurilla et le type Coryphella“. (5: стр. 436).

Тип Spurilla, названий ним „plus interessant“, опрацьовує Henneguу на породі neapolitana відносно досить старанно й заосмотрює колірним рисунком. (Pl. V. fig. 3).

Тому що цю саму форму описав я без порівняння ґрунтовніше в розвідці 1914 року й заосмотрив у 7 ілюстрацій, я вважаю себе достаточо управненим до вислову декількох критичних завваг на тему обсервацій Henneguу-я.

Перш за все вражає, що опис слинових залоз у Spurilla neapolitana кінчає автор на описі залоз усної рурки („Mundröhrendrüsen“), вважаючи їх таким робом одинокими слиновими залозами цієї тварини. Тимчасом Spurilla neapolitana має ще другу їх пару: горляно-слинові залози, для яких устійнив я назву „Pharyngealdrüsen“, та яких опис помістив я на 385—386 стороні моєї розвідки, долучаючи до нього дві ілюстрації: Taf. XIII: Fig. 26 і 27. Відсутність усякої згадки про них є доказом, що Henneguу, спіраючися на обсервації італійського дослідника, Trinchese*), разом із ним нічого про існування цих залоз не знає.

*) Trinchese S.: „Anatomia e fisiologia della Spurilla neapolitana“. Mem. d. Accad. d. Scienze d. Istituto di Bologna. S. 3. T. IX., 1878.

А ргорос обсервації першої пари залоз замічу, що так опис Непнегу-я, як також долучена ілюстрація є назагал згідні з дійсністю й розходяться тільки в ось таких подробицях із моїми спостереженнями.

Передусім автор дуже побіжно передає перебіг залозних рурок і не визначає точно місця їхнього уходу, що для номенклатури й розподілу слинових залоз є одиноко рішаче, як це устійнив Н. Simroth (1: стр. 363) і що в зв'язку з цілою будовою усного апарату зроблено в моїй розвідці.

Описуючи залозну внутрішню наболонь, автор не добачує існування вставних клітин, розміщених завжди поміж залозними клітинами. Їх прийма не виключає орясення, якому автор рішучо перечить, та яке всеж таки в кінцевій ухідній ампулі не підпадає ніякому сумнівові. Натуру залозних клітин, у яких функціональні стадії Непнегу не входить, хоча прослідити їх тут легко, визначає він слушно, як ацидофільну, тому не дуже зрозуміло виходять його слова, коли наприкінці реасумуючи опис, дефініює їхню виділину як „une substance mucoidé“. (5: стр. 438). Мікроскопний вигляд цієї субстанції устійнює він у словах: „leur contenu est à peu près homogène“ (5: стр. 437), підчас коли я стверджував завжди накопичення дрібнозернистої маси, що опорожняючи клітину, оставляла ясну, покопану порожніми ямочками плязму, з манюсенькими в ній зернятками на обводі цих ямочок.

А ргорос зовнішнього шару залозних клітин не згадує Непнегу про дуже виразну їхню оболонку, не підмічує також у описі цей незвичайно виразний контраст між плязматичною, дистальною част'ю клітини з ядром, а проксимальною, звакуолізованою. Їхню натуру дефініює як „fortement basophile“, до чого й я прихилився, якнебудь застерігся, що musikarmin і перш усього thionina давали мені нег'ативні результати.

III. Будова усного апарату.

Зовнішній усний отвір (Fig. 1:1) веде до повмистої й пофалдової усної рурки (Mundröhre) (Fig. 1:2), що поділяється виразно на два відділи: 1) долішній і 2) горішній. Оба відділи комунікують із собою тільки з переду, а впрочім відмежовані є виразно один від одного. (Fig. 1:7). Долішній відділ уважаю за властиву усну рурку (eigentliche Mundröhre) (Fig. 1:2), натомиць горішній за її ротову ямину (Mundhöhle: Fig. 1:3, Fig. 2:1).

згідно з пропозицією, яку я в моїй попередній розвідці поставив. Саме сказав я там: „Was die Mundhöhle anbelangt, so schlage ich vor, als eine solche den Endteil der Mundröhre, gleich unter der Lippenscheibe zu betrachten. Dieser Endteil ist immer in dieser Gegend bedeutend erweitert“. (1: стр. 364).

Під орясною й залозною наболонню, що вистеляє оба згадані відділи, знаходяться численні одно й більшклітинні залози, затоплені в піднаболонну лучну тканину. (Fig. 1: 4, 5). Особливо великі подибують на межі обох відділів (Fig. 1: 6). Більшклітинні з них уявляють собою цікавий тип залозного мішочка, що гуртує в собі низку одноклітинних залоз із власними проходами. Таким робом треба вважати такий мішочок морфологічно за перехідну форму між властивою одно-й-більшклітинною залозою. Подібні залози описала R. Sterner у задній ноговопідшвовитій залозі *Gastropteronia Meckelii* (Cephalaspidea).¹⁾

Уся ця залозна маса, що вистеляє стіни усної рурки, є базофільної природи. Вона краситься в гематоксиліні Delafielda, в метилевиті зелені мішанини Biondi—Ehrlich—Heidenheina, а перш за все в муцікарміні. Таким робом треба вважати залози цієї маси за слизні.

За ротовою ямною стрічаємо вже горляну масу (Schlundkopf Fig. 2). Є це кулисто-овальний твір із сильно погубленими, м'язистими стінками (Fig. 2: 2). Його нутро виповнює майже цілком великий язик (Fig. 2: 6) із обічно розвиненими язиковими хрястками, з терцем і терцевою піхвою. (Fig. 2: 3, 4, 5). На межі обох ям: 1) ротової й через язик затисненої 2) горляної (Fig. 2: 7) знаходиться губний щит (Lippenscheibe) у виді окружного сфалдування (Fig. 2: 8). Внутрішню поверхню цього фалду поволікає безструктуральна маса, ідентична з тією-ж терця: є це щокі (Fig. 2: 9). Круглий отвір (Fig. 2: 10) у губному щиті, вимощений цими щокі, є саме цим, через котрий комунікує яміна ротова з горлом.

IV. Горляні слинові залози.

Крім вищезгаданих скірних залоз, що вимощують стінки цілої усної рурки, нема тут ніяких слинових залоз. Таким робом треба сконстатувати, що слинових залоз усної рурки, для

¹⁾ R. Sterner: „Die Hautdrüsen bei den Cephalaspidea“. Extrait du bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1912. стр. 1003—1004. Pl. XLIX. Fig. 15—19.

яких устійнив я раніше назву „Mundröhrendrüsen“, ідентичну з назвою R. Bergha: „glandulae ptyalinae“, E. Hechta: „glandes prébulbaires“ і S. Trinchese: glandule salivari anteriori“, Polycera quadrilatera (подібно як і P. quadrilineata), цілком позбавлена.

Натомісць існують добре розвиті горляно-слинові залози, для яких устійнив я на основі місця їхнього уходу назву: „Pharyngealdrüsen“, заступаючи невідповідні назви попередніх авторів: „glandulae salivales“ (B), „glandes potsbulbaires“ (H) і glandule salivari posteriori“ (T).

а) Величина, ухід, положення й перебіг.

Величина горляних залоз мінімальна. Досить сказати, що своєю довжиною не рівняються вони навіть довжині буккальної маси й тому на препаратах кінчаються ще перед її закінченням. Одначе замітити треба, що в своїому перебігу в вони обильно пофалдовані (Fig. 3), тому справжня їх довжина в фактично більша.

Уходять на склепінні буккальної ями, на самім її переді, над язиком, по обох боках долішньої частини пролику. Fig. 2: 11. Fig. 3).

Остання тягнеться поздовж цілої майже буккальної маси, на хребетно-середній її лінії, в виді ринвового викаблучення наболоні самої горляної ями. (Fig. 2: 13). З цього ринвового викаблучення бере початок широкою основою горішня частина пролику, цеб-то властива вже проликова рурка (oesophagus), що веде в глибину тіла звір'яти.

В перебігу обох залозних рурок вирізнити можна часть: а) проксимальну (Fig. 2: 11, Fig. 3) й б) дистальну. (Fig. 2: 12, Fig. 4).

Проксимальна часть лежить по обох боках проликової ринви, затоплена в спеціальній ткані, що виповнює заглиблення поміж цією ринвою, а буккальною масою (Fig. 2: 14, Fig. 3: 1). В проксимальній партії залози обильно фалдуються й розплатовуються, через що на поперечному прорізі в препараті появляються в виді кількох неправильних овалів. (Fig. 2: 11, Fig. 3). Світло їх і вони самі в тут значно більше поширені, ніж у дистальній частині. (Fig. 3. і Fig. 4). В дистальній, свобідній партії, фалдуються залози куди менше, приймаючи характер більш простолівійної рурки й в тут значно вужчі. (Fig. 4). Покинувши ткань, у котрій були досі понурені, підходять вони до гори, так що появля-

ються по обох боках властивого вже пролику, після чого збігають знову в долину, аж понижче ринвового викаблучення, що в цій околиці відділившись від буккальної маси, стремить к'заводі свобідно й небаром кінчається сліпо. Добившись цього місця й минувши підпроликові нервні узли, тут саме положені, обі залозні рурки лучаються й зростаються своїми кінцями, а їхні ями проходять одна в одну. Є це випадок, досі мною в Нагозязвних необсервований. Вправді в *Archidoris tuberculata* (Cuv.) зріст такий описав я, але був він тут тільки поверховний. (1: стр. 395).

На цілому своєму пробігові заховують горляні залози нормальне відношення до проликової нервної обручки, значить є нею обняті (Fig. 2:15), подібно як це стрічаємо в інших Нагозязвних.

А ргрос ткані, в котрій проксимальна часть залоз понурена (Fig. 2:14, Fig. 3:1), згадаю, що крім звичайних, лучнотканних клітин, заключає вона численні м'язи з подовгастими ядрами (Fig. 3:2). Вони не тільки оточують ткань із зовні (Fig. 3:2), але пронизують її нутро й скорчем своїм причинюються без сумніву до обильнішого витискування залозної секреції. В часті приринвового викаблучення стрічаємо в цій ткані численні піднаболонні залози.

б) Анатомічна будова.

Анатомічно уявляють горляні залози тип залоз рурковатих (Fig. 4) поєдинчих, обильно сфалдованих, особливо в проксимальній партії, де також подекуди розплатовуються. (Fig. 3).

Не поділяються вони на часть залозну й провід, а навпаки на цілій своїй довжині, від початку до самого кінця виявляють залозний характер. Причаливши до горляної ями, звужуються й отвиряються до неї безпосередно. (Fig. 2:11, Fig. 3:3).

в) Гістологічна будова.

Гістологічно складається залоза з одного шару радше кубічних, як циліндричних залозних клітин, між котрими знаходяться елементи вставні. (Fig. 3, Fig. 4:1). З зовні об'єднує їх ядрами осмотрена *tunica propria*. (Fig. 3:4, Fig. 4:2).

Вставні клітини є дуже стиснені й тільки в горішній, трикутно поширеній частині заключають із правила маленьке, овальне ядро. (Fig. 4:1). Часами знаходиться воно по середині

клітини й є тоді рівнож дуже стиснене. (Fig. 4:3, Fig. 5:1). Вставні клітини виявляють невиразні яси; є вони довгі, грубі й спочивають на невиразній, підставній оболонці. (Fig. 3:5, Fig. 4:1, 3, Fig. 5:2).

Залозні клітини, форми переважно кубічної, особливо в дистальній частині, є без виїмки ацидофільні.

Виступають вони під двома видами, ясних (Fig. 5), що слабо красяться й темних, що красяться інтензивно. (Fig. 6). Якнебудь перемішані вони між собою, то одначе в проксимальній партії стрічається в подавляючій масі клітини ясні. (Fig. 3).

Нутро ясної клітини вповняє ацидофільна, плязматична сіточка з порожніми очками. (Fig. 5:4). При основі, або зараз над основою має вона плямкувате ядро, овальне, або неправильно полігональне, на рогах витягнуте. (Fig. 5:3). Ядро є без виразної структури, якнебудь часто вирізнути в йому можна ядерце, рівнож плямкувате й без структури. В плязматичній сіточці клітини подибуємо розсіяні, первісні зернятка: „Primärgranula“, що розмірами сягають границь мікроскопного бачення. (Fig. 5).

Нутро темної клітини виявляє густішу сіточку й тому закрашене інтензивніше. (Fig. 4, Fig. 6). Ця сіточка переповнена безліччю первісних зерняток, що причинюються рівнож до темнішого виду клітини. Ядро її, кулисте, або овальне, поміщене недалеко основи, або посередині клітини, виявляє з правила виразнішу структуру, а навіть є деколи прегарно зернисте й заключає рівнож кругле, лискуче ядерце. (Fig. 6:1). Найхарактеристичнішою одначе прикметою темної клітини є приосновна пружкуватість (Basalstreifung), базофільна й деколи дуже виразно зазначена (Fig. 6:2, Fig. 4:4). Подібну описав я в горляних залозах у *Polycera quadrilineata* (O. Fr. Müll.) і в обох залозах усної рурки в *Doto coronata* (Gm.)¹⁾

Описані клітини: темну й ясну вважаю за функціональні стадії одної й тої самої залозної клітини, якнебудь до остаточного провірення цього погляду необхідно перевести-би фізіологічні експерименти з живими тваринами, що в моїх умовах немислиме.

Обстоючи таку саму інтерпретацію залозної клітини, яку я виявив раніше в моїй першій праці (1: стр. 371—372), думаю,

¹⁾ Vide: 1: стр. 405; 378 і 380. Taf. XIV: Fig. 16; Taf. XII: Fig. 15, 16, 19.

що темна клітина є саме наставлена на початок інтензивної, секретійної діяльності. З її численних, первісних гранул повстануть обильні, видільничі вакуолі, що витиснуть плязму до міжгранулярної, а радше міжвакуолярної на оптичному прорізі сітки. Виснажене інтензивною участю в цій діяльності ядро, стратить виразну досі структуру й стане безструктурною, неправильного виду плямкою, якою її подибуємо його фактично в ясній клітині. Ясність самої-ж клітини, замість сподіваного ще темнішого закрашення, пояснюється тим, що витворені, видільничі вакуолі розпустилися без сумніву в цих наїрізномірних реакціях, яких не жалувано клітині до моменту закріплення постійного препарату, або були видалені ще раніше за життя звіряти.

Найхарактеристичнішою прикметою залозної клітини в її фазі темніє, — як я вже згадав — приосновна пружкуватість. (Fig. 4: 4, Fig. 6: 2). Як базофільний твір, вражає вона незвичайно при ацідофільнім внутрі клітини. Базофільна пружкуватість, це sui generis проблема, що зачіпає за незвичайно зложену її в літературі широко обговорювану квестію т. зв. ergastoplasm-и. Не підходячи до неї сьогодні на основі власних, оригінальних дослідів і обсервацій, я обмежуся тільки до наведення деяких вислідних даних із приналежної літератури.

На скільки йде про відому й доступну мені літературу слинових залоз м'якунів останніх літ, то Z. Frankenberger у своїй дотичній розвідці (4) не присвячує більшої завваги приосновній пружкуватості й не ставить її в ніякий, дефінітивно очеркнений зв'язок із секретійною продукцією, якнебудь просліджує перш усього секретійний цикл сливової клітини.

Дуже виразно рисує він приосновну пружкуватість у наболонних клітинах великого внутрзалозного проводу видільного в *Limax maximus* (4: фіг. 1).

В приналежнім описі каже він: „Протоплязма виявляє в около $\frac{2}{3}$ -тих основної часті волокнисту (фібрилярну) структуру, особливо добре видну в препаратах, трактованих методом Kulla, або закрашених залізистою гематоксиліною. Після закрашення сафраніною й ліхтгріном ця структура не є так добре видна. При значнішому побільшенні виявляються волокна зложеними з ланцюжків елементів дуже коротких, або навіть зернистих, уложених пр'ямово до підстави в напрямкові вершка. Ті еле-

менти красяться блідо червоно методом Kulla, чорно залізистою гематоксиліною“. (4: стр. 217—218).

Подібну пружкуватість описує він у наболонних клітинах видільних слинових проводів у *Helix pomatia*: „цитоплязма заключає численні палочки, пр'ямові до основи клітини, що пробігають її від основи аж до вершка. Ці палочки є так численні й приймають тільки після звичайного утравлення, напр. після сублімату з оцтовою кислотою — так інтенсивну закраску чорну в залізистій гематоксиліні, що треба різничкувати досить довго, щоби одержати ясний образ ядра, котре є ними, особливо на пластинках дещо грубших = 7 μ , цілковито закрите“. (4: стр. 217.)

Поза цим описом не находимо однак у Frankenbergera ніякої завваги щодо походження й значіння цієї, так виразно змальованої, структури. Питаючи за гезезою секретійних зерен, він находить її в середплязматичних мітохондріяльних зернятках, (пластах Prenant-a, Primärgranula-x Heidenheina, 4: стр. 224), одначе появи цих останніх не ставить у жадному відношенні до описаних вище базofilьних структур.

Блище до справи підходить J. Verne в своїй істологічній студії над задними слиновими залозами головоножців (*Octopus macropus* і *Eledone moschata*). (10.)

В клітинах проводів спочиваючої залози, виповнених секретійним змістом, находить він при основі смужку гомогенної, базofilьної плязми, що не виявляє ніяких хондріосомів (10: стр. 4, 5 і 6.). Щойно в клітинах залози, сповуваної до чинности, клітинах, що зміст свій видалили й часто здекапітовані виявляють у апікальній частині вид звакуолізованого зціпу, стають у приосновній смужці, визначно базofilьної плязми, видні хондріоконти. Є вони уложені здовж великої осі клітини, по обох боках об'ємистого ядра (10: стр. 7., фіг. 3.). Вкінці після слідувачих по собі подразненнях залози тратить приосновна плязма її клітин свою характеристичну базofilьність і починає краситися слабо в еозині. Такі клітини можуть виявити признаки цілковитого виснаження й в них не видно вже більше формування виділини.

Зводячи ці три функціональні стадії в один повний цикл функціональний, Verne дуже виразно підчеркує лучність секретійної чинности клітини з її приосновним, базofilьним апаратом. Приосновна, базofilьна плязма, будьто гомогенна, як рід масивної ергастоплязми („une sorte d'ergastoplasma massif“ 10:

стр. 9.), в котрій хондріом втратив оформлений вид і утворив із протоплязною одну тяглу фазу, — будьто з хондріоконтами, як виразом хондріому зрізничкованого, характеризує фазу клітинної секреції, підчас коли зник базофільности й згаданого апарату йде в парі з закінченням секретійної чинности й виснаженням клітини.

Чим та лучність обоснована, автор не просліджує.

На останнє питання дають відповідь щойно розвідки Н. Lutza з 1922 р. (6) і Gr. Roskina з 1926 р. (9), що інтерпретації базофільного апарату в залозній клітині спеціальну присвятили увагу.

Перший обіраючи матеріялом досліду *hepatopancreas* u *Planorbis corneus*, ставить собі ціллю: „Die Strukturen einer Drüsenzelle auf ihre Art, Entstehung und ihre Bedeutung im Leben der Zelle, ihre wechselseitigen Beziehungen und ihr Verhältnis zum Kern zu untersuchen“ (6: стр. 53).

Другий на залозних клітинах із плащової ями в *Pteropoda* ставить своїм завданням прослідити: а) „Das Skelett der funktionierenden Drüsenzelle“, б) „Das Problem des arbeitenden (produzierenden Apparates der Drüsenzelle“ і вкінці: в) „Wechselbeziehungen zwischen dem produzierenden u. dem stützenden Apparate der Drüsenzellen“. (9: стр. 9—100).

Не зважаючи на різний матеріял і методи досліду, доходять оба автори до згідних вислідів. Перш усього констатують, ¹⁾ що базофільна пружкуватість не є артефактом, бо можна її бачити виразно в живій клітині (Lutz: 6: стр. 78.) і закрасити *in vivo* в метилєнблакиті (Methylenblau) (9: стр. 103). ²⁾ Є вона апаратом продуктивно працюючої залозної клітини. ³⁾ а. По обсерваціям Lutza є базофільний пружок фізикальним згущенням протоплязми, що також хемічно перетворилася в субстанцію, близьку нуклеїновим кислотам (6: стр. 76). ³⁾ б. По обсерваціям знову-ж Roskin-a уявляють базоплязматичні пружки (напр. у *Caivolinia tridentata*) більше зложеноу будову: базофільну, плязматичну, овальну вісь пружка негомogeneous структури, бо заключає фібрілярні і дрібнозернисті твори, окружає її відмежовує від міжпружкової гомogeneous плязми тоненька оболонка, ідентична з цією, що твориться на границі двох хемічно й фізикально різних колоїдів (9: стр. 111—112). ⁴⁾ Оба автори погоджуються в цьому, що генетично є приосновні пружки виключно плязматичним твором і не мають нічого спільного ані з ядром і хромідіями, ані з мітохондріями, (6: стр. 76 і 82, 9: стр. 110, 113,

119.) ⁵⁾ Побіч функції підпираючого й формоустійнюючого апарату для залозної клітини на думку Roskin-a, — дають базоплязматичні філяменти по обсерваціям обох авторів початок секретійному матеріялові клітини. „Sie sind die eigentlichen Sekretbildner“—...und verkörpern den Hauptbestandteil derjenigen Substanzen, die die Sekretkugeln formen“.(6: стр. 82 і 79.) Цей процес творіння видільної субстанції описує Roskin так: на поверхні базального пружка повстають мікрокраплинки, котрі відлучившись від оболонки, дістаються до плинної гомогенної, поміж пружками положеної плязми. Нею підступають вони в гору клітини, пучнявіючи та зливаючися по дорозі разом у більші краплі й скупчення. Таким робом визначає базофільна пружкуватість також напрямок руху продуктам секретії. Один отже й той сам апарат сповняє по думці Roskin-a згідно з законом економії аж 3 чинности рівночасно: 1) підпирає клітину, 2) постачає матеріялу до процесу секретії — й 3) визначає йому напрямок руху. (Roskin 9: стр. 104 і остання глава: „Das Skelett der Drüsenzelle“).

Ні на основі давніших, ні теперішніх моїх дослідів не можу зайняти особисто ніякого критичного становища до вище зреферованих поглядів. Це може статися щойно в майбутній, окремії розвідці, що при ширшому узглядненні дотичної літератури, доборі відповідного, для експериментів податного матеріялу й застосуванні специфічних метод досліду, підійде блище не тільки до цього незвичайно інтересного й складного питання, але прослідить також співучасть ядра й інших складників залозної клітини в ході її секретійної діяльності.

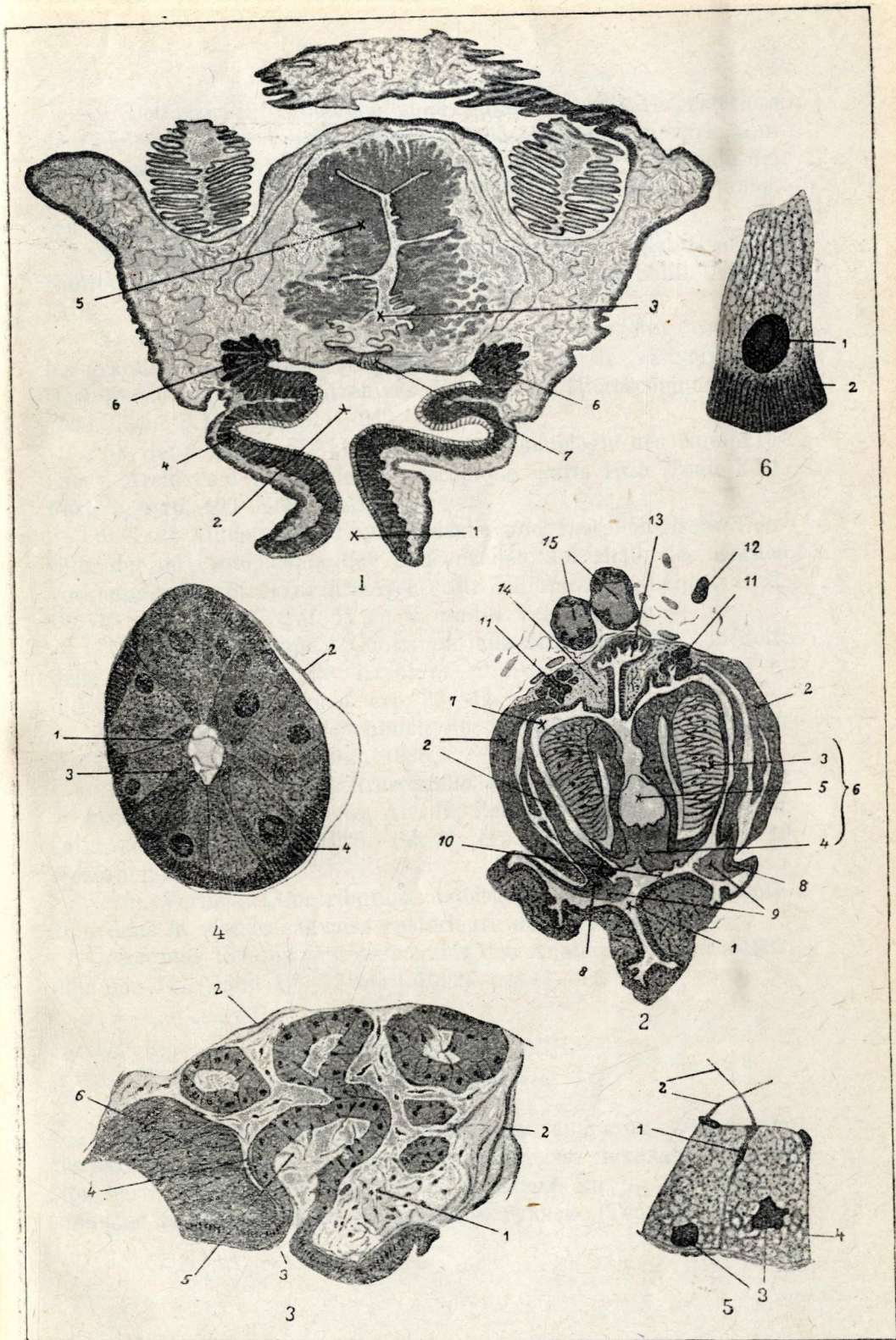
Станиславів, дня 12. V. 1931.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ. *)

(Literaturverzeichnis).

1). Brygider Wolodymyr: „Über den mikroskopischen Bau der Speicheldrüsen bei den Nudibranchiata“, Zeitschrift f. wissenschaftliche Zoologie. Bd. CX. Heft 3. Leipzig—Berlin 1914. str. 359—418. Taf. XII.—XIV.

*) Список вичисляє праці післявовнні, що безпосередно, або посередно відносяться до теми. Ціла давніца література подана в моїй розвідці ч. 1. будьто а) в списку: стр. 412—413., будьто б) наведена в тексті. До цієї розвідки я й відсилаю читача.



2. Bottazzi Fil.: „Ricerche sulla ghiandola salivare posteriore dei Cefalopodi. IV.: Attivita secretiva della ghiandola in varie condizioni sperimentali“. Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, 1921., Volume XXX., 1° Semestre. Roma. ctp. 9—12.

3). Dreyer T. F.: „On The salivary and Mouth Glands of the Nudibranchiata“. Transactions of the Royal Society South Africa. 1913. Vol. 3. p. 139—146. Figg. 6.

4). Frankenberger Zdenko: „Sur le cycle sécrétoire des cellules granuleuses (cellules à ferment) dans les glandes salivaires des Gastéropodes Pulmonés“. Archives d'Anatomie Microscopique. Paris 1923. Tome XIX. ctp. 211—240. Pl. X—XI.

5). Henneguy L. F.: „Contribution à l'histologie des Nudibranches“. Archives d'Anatomie microscopique. Paris 1925. Tome XXI. Fasc. 3, c tp. 400—468. Pl. V.

6). Lutz Hildegard: „Physiologische und morphologische Deutung der im Protoplasma der Drüsenzellen außerhalb des Kernes vorkommenden Strukturen“. Archiv für Zellforschung, Leipzig 1922. Bd. 16. ctp. 47—87. Taf. IV. u V. und 4 Tekstfiguren.

7). Motta Giuseppe: „Contributo alla fina struttura dei dotti delle ghiandole salvari“. Archives d'Anatomie d'Histologie et d'Embriologie. 1925. Vol. 4. ctp. 33—44.

8). Romeis B.: „Taschenbuch der mikroskopischen Technik“. Aufl. 12. München u. Berlin. 1928.

9). Roskin Gr.: „Die Drüsenzelle von Pteropoda“. Zeitschrift f. wissenschaftliche Biologie. Abt. B.: Zeitschrift f. Zellforschung u. mikroskop. Anatomie. 1926. Bd. 3. ctp. 99.—131. T. I. mit 19 Textabbildungen.

10). Verne J.: „Contribution histologique a l'étude de la sécrétion dans la glande salivare postérieure des Céphalopodes“.

Comptes Rendus de l' Association des Anatomistes. Paris 1922. Reunion 17. (Gand 10—12 avril 1922). ctp. 1—11.

ПОЯСНЕННЯ РИСУНКІВ.

(Erklärung der Abbildungen).

Всі рисунки виконано рисунковим апаратом Zeissa при вжитті мікроскопу Zeissa. Крім сочок Zeissa вживав я також Reicherta окуляру II і об'єктивів: 1 і Номог. Im. $\frac{1}{1}$, 18 b. Окуляр значено римською, об'єктив арабською буквою. (Табл. ч. 1.)

Fig. 1. Поперечний переріз через передню часть тіла. 1: вхід до усної рурки; 2: властива усна рурка; 3: ротова ямина; 4: піднаболонні, шкірні залози в стінках властивої усної рурки; 5: такіж залози в стінках ротової ямини; 6: особливо великі, шкірні піднаболонні залози на межі усної рурки й ротової ямини; 7: межа між ротовою яминою, а усною руркою. (Reich.: II, 1).

Fig. 2. Поперечний переріз через горляну масу. 1: ротова ямина; 2: м'язисті стінки горляної маси; 3: язикова хрястка; 4: терце; 5: терцева піхва; 6: язик; 7: горляна ямина; 8: губи; 9: щоки; 10: отвір на межі ямин: ротової й горляної; 11: горляні-слинові залози в їхній проксимальній часті; ліва рурка уходить саме до горляної ямини; 12: дістальна часть лівої горляно-слинкової рурки; 13: долішня частина пролику; 14: спеціальна ткань, у котрій понурена проксимальна часть горляно-слинових залоз; 15: узли нервні надпроликові. (Reich.: II, 1).

Fig. 3. Переріз через проксимальну частину лівої горляної слинкової залози. 1: ткань, у котрій затоплені горляно-слинові залози; 2: м'язи, що пробігають у цій ткані; 3: місце уходу залози до горляної ямини; 4: tunica propria; 5: ряси вставних клітин; 6: згубіла, м'язна стіна горляної маси. (Zeiss: Comp. IV, Arochrom. 8·0 mm).

Fig. 4. Поперечний переріз через дістальну частину лівої залозної рурки. 1: вставна клітина з трикутно поширеним верхком і ядром у йому; 2: tunica propria з ядром; 3: стиснене ядро клітини вставної; 4: базофільна пружковість залозної клітини; в ній бачимо (в клітині) ядро з ядерцем і звакуолізовану плязму з первісними зернятками; в світлі залози ряски. (Zeiss: Comp. IV, Arochrom. 3·0 $\frac{m}{m}$).

Fig. 5. Дві ясні залозні клітини з проксимальної частини. 1: вставна клітина зі стиснутим ядром; 2: ряси вставних клітин; 3: плямкуваті, безструктурні ядра залозних клітин; 4: нутро клітини виповняє звакуолізована плязма, темніща при основі, з численними розсіяними в ній зернятками. (Zeiss: Comp. IV, Reich. Homog. Im. $\frac{1}{12}$ 18 b.).

Fig. 6. Залозна клітина дістальної частини горляно-слинових залоз. 1: зернисте, темне ядро з ядерцем; 2: приосновна базофільна пружкуватість; 3: решту клітини виповняє густа плязматична сітка (звакуолізована плязма) ацідофільна з численними зернятками. (Zeiss.: Comp. IV, Reich. Homog. Im. $\frac{1}{12}$ 18 b.).

ZUSAMMENFASSUNG.

1) Es wurde nur eine Form: *Polycera quadrilatera* bearbeitet. Sie gehört nach der Systematik von R. Bergh zu den Nudibranchiata Holohepatica, namentlich zur Familie der Dorididae phanerobranchiatae.

2) Im Zenkers Gemisch konserviert und im 70% Alkohol aufbewahrt, stammt das Material von der zoologischen Station in Neapel.

3) Bei der Besprechung der betreffenden Litteratur macht der Verfasser dem französischen Gelehrten, L. F. Henneguy den Vorwurf, daß er in seiner Arbeit: „Contribution à l'histologie des Nudibranches“ (5) nicht eingehend die diesbezügliche Litteratur berücksichtigt hat. So ist ihm z. B. die Arbeit des Verfassers: „Über den mikroskopischen Bau der Speicheldrüsen bei den Nudibranchiata“ (1) nicht bekannt. Infolgedessen weist seine Beschreibung der Speicheldrüsen bei *Spurilla neapolitana*, neben einigen Ungenauigkeiten, auch eine gänzliche Unkenntnis der Pharyngealdrüsen dieser Form auf.

4) Nach der Beschreibung des Mundapparates (Fig. 1 u. Fig. 2) und der ihn begleitenden, subepithelialen Hautdrüsen (Fig. 1: 4, 6), stellt der Verfasser fest, daß *Polycera quadrilatera* — ähnlich wie *Polycera quadrilineata* — nur die Pharyngealspeicheldrüsen (Fig. 2: 11), aber keine Mundröhrendrüsen besitzt.

5) Die ersten sind tubulös und treten in der Form von zwei der ganzen Länge nach drüsigen Röhren auf. Sie münden ganz vorne an der Rückenseite des Schlundkopfes, über der Zunge, zu beiden Seiten der unteren Partie des Oesophagus. (Fig. 2: 11).

Man kann zwei Teile der Drüse, einen a) proximalen und b) einen distalen Teil unterscheiden.

Sie stellen in dem ersten Teile nicht bloß ein gewundenes, sondern auch ein gelapptes Röhren dar (Fig. 3) und sind in einem speziellen Gewebe versunken (Fig. 2: 14, Fig. 3: 1). Das letzte schließt neben den Bindegewebelementen auch zahlreiche glatte Muskelzellen ein (Fig. 3: 2).

In der distalen, freien Partie dagegen verlaufen die Drüsen als mehr geradlinige, enge Röhren. Fig. 2: 12, Fig. 4).

Nach dem Verlassen des sie umringenden Nervenschlundringes (Fig. 2: 15) laufen sie nach rückwärts, wo sie endlich miteinander verwachsen und mit ihren Lumina ineinander übergehen.

6) Histologisch ist die Wand der Drüse aus einem einschichtigen Epithel gebaut (Fig. 3, Fig. 4), das zwischen den eigentlichen, mehr kubischen, als cylindrischen Drüsenzellen die typischen, zusammengedrückten, bewimperten Stützzellen aufweist. (Fig. 4: 1, 3, Fig. 5: 1). Eine kerntragende Tunica propria umspannt die Drüse von außen. (Fig. 3: 4, Fig. 4: 2).

Sämtliche Drüsenzellen sind acidophil und treten entweder als helle, schwach gefärbte (Fig. 5), oder als dunkle, stark sich färbende Zellen auf (Fig. 6). Das Protoplasma der beiden Drüsenzellen ist vacuolisiert und weist in einem optischen Profile ein deutliches Netz von größeren Maschen in der hellen (Fig. 5: 4) und von kleineren in der dunklen Zelle auf (Fig. 6). Die beiden Drüsenzellen sind mit einer großen Menge winziger Körnchen gefüllt, die äußerst reichlich und dicht in der dunklen Zelle angehäuft sind. Der Kern der hellen Zelle ist fleckig, beinahe strukturlos, sehr oft an seinen Ecken ausgezogen (Fig. 5: 3), während die dunkle Drüsenzelle einen kugeligen, oder ovalen Kern umschließt, der eine deutlichere, körnige Struktur mit einem glänzenden, kugeligen Kernchen aufzuweisen hat. (Fig. 6: 1).

Fine sehr charakteristische Eigentümlichkeit der dunklen Drüsenzelle ist ihre basilare, basophile Streifung (Fig. 6: 2, Fig. 4: 4), betreffs derer sich der Verfasser nur auf die Anführung einiger Ansichten und Beobachtungen an der Hand der diesbezüglichen neusten Litteratur beschränkt (Frankenberger: 4, Verne: 10, Lutz: 6, Roskin: 9).

Beide Drüsenzellen, die helle und die dunkle, bilden wahrscheinlich nur Funktionsstadien eines und desselben Drüsen-elementes.

Erklärung der Abbildungen.

Sämtliche Figuren sind mit dem Zeichenapparat von Zeiss gezeichnet. Ich habe mich auch des Zeiss'schen Mikroskopes bedient. Es waren mir auch die Reichertschen Objektive: 1. und Homog. Im. $\frac{1}{12}$ 18 b. und das Reichertsche Okular: II. behilflich. Das Okular ist mit einer römischen, das Objektiv mit einer arabischen Zahl berechnet. (Taf. № 1.)

Fig. 1. Querschnitt durch den Vorderteil des Körpers. 1: Eingang in die Mundröhre; 2: eigentliche Mundröhre; 3: Mundhöhle, 4: die sich in der Wand der eigentlichen Mundröhre befindenden,

subepithelialen Hautdrüsen; 5: die in den Wänden der Mundhöhle eingebetteten, subepithelialen Hautdrüsen; 6: die an der Grenze der Mundröhre und der Mundhöhle gelegenen besonders großen, subepithelialen Hautdrüsen; 7: die Grenze zwischen der Mundhöhle und der Mundröhre. (Reich.: II, 1.).

Fig. 2. Querschnitt durch den Schlundkopf. 1: Mundhöhle; 2: muskulöse Buccalwände; 3: Zungenknorpel; 4: Radula; 5: Radulascheide; 6: Zunge; 7: Buccalhöhle; 8: Lippen; 9: Kiefer; 10: die in die Buccalhöhle führende pharyngeale Öffnung; 11: die pharyngealen Speicheldrüsen in ihren proximalen Teilen; die linke Speichelröhre mündet eben in die Buccalhöhle; 12: distaler Teil der linken, pharyngealen Speichelröhre; 13: unterer Teil des Oesophagus; 14: spezielles Gewebe, in welchem der proximale Teil der Pharyngealdrüsen versunken ist; 15: supraoesophageale Nervenganglien. (Reich.: II, 1.).

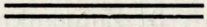
Fig. 3. Querschnitt durch den proximalen Teil der linken Pharyngealdrüse. 1: das die Pharyngealdrüse umhüllendes Gewebe; 2: die in diesen Gewebe verlaufenden Muskel; 3: Mündungsstelle der Pharyngealdrüse in die Buccalhöhle; 4: Tunica propria; 5: Wimpern der Stützzellen; 6: verdickte, muskulöse Buccalwand. (Zeiss.: Comp. IV, Apochrom. 8.0 μ /m.).

Fig. 4. Querschnitt durch den distalen Teil der linken Drüsenröhre. 1: Stützzelle mit dreieckig erweiterter Scheitelpartie und dem in ihr gelegenen Kerne; 2: die von der Epithelbasis losgerissene, kerntragende Tunica propria; 3: zusammengedrückter Kern einer Stützzelle; 4: basophile, basale Streifung einer Drüsenzelle; in letzter ist ein Kern mit einem Kernchen und das vacuolisierte mit einer Menge von Primärkörnchen gefülltes Protoplasma zu sehen; im Drüsenlumen treten deutlich einige Wimpern auf. (Zeiss.: Comp. IV, Apochrom. 3.0 μ /m.).

Fig. 5. Zwei helle dem proximalen Teile der Drüse gehörende Drüsenzellen. 1: Stützzelle mit seitlich gedrücktem Kerne; 2: Wimpern der Stützzellen; 3: fleckige, strukturlose Kerne der Drüsenzellen; 4: das Innere der Zelle ist von dem stark vacuolisierten, bei der Zellbasis dunkleren, Protoplasma erfüllt, das zahlreiche, in ihm zerstreute, Körnchen aufweist. (Zeiss.: Comp. IV, Reich. Homog. Im. $\frac{1}{12}$. 18 b).

Fig. 6. Fine von der distalen Partie der Speicheldrüse stammende Drüsenzelle. 1: körniger, dunkler Kern mit einem Kernchen;

2: basale, basophile Streifung; der übrige Zellkörper ist mit dem dichten, plasmatischen, acidophilen Wabenwerke (vacuolisiertes Protoplasma) erfüllt, in welchem zahlreiche Körnchen auftreten. (Zeiss.: Comp. IV, Homog. Im. $\frac{1}{11}$, 18 b.).



Др. Н. Мазена (Прага).

ХРОМОГЕНІЗМ У *B. COLI*.

Державний Інститут Здоровля ((Státni Zdravotni Ustav).

B. coli жовтого кольору описали 1894 р. Lehman і Levy під назвою *Bacterium coli variant luteolique facient*, котре на агарі і желатині давало жовтяві і жовті колонії і розпускало желатину на 7—11 день. Ph. Eisenberg в 1918 році описав також шість варіантів жовтого *b. coli*, що розпускало желатину. Находив він їх в стільці (faeces) хорих на черевний тиф та дизентерію а також у повітрі (*b. coli*, що живе на траві).

По формі колоній, інтенсивності пігменту, що йшов від жовтого до оранжевого, та розположенні його в колоніях він розрізняє шість гатунків жовтого *coli*. По його описуванні і фотографіям, які він подає в своїй праці, пігмент в колоніях бактерій розкладається нерівномірно і часто дає різні фігури.

Як жовте *b. coli* описане Lehman'ом і Levy'м так і *b. coli* описане Eisenberg'ом не є типовим *coli*, бо вони розпускають желатину; а група *b. typhi-coli* не має властивости розпускати желатини.

Stutzer і Kwaschnina в 1929 році нашли жовте *b. coli* в стільці хорого на черевний тиф. Це *b. coli* по своїм біологічним властивостям було типове. По термінології Bergey'a вони його зачислили до роду *Escherichia* і назвали *Escherichia flava*. Свіжі колонії цього мікроба витворювали золотожовтий пігмент; старші колонії втрачали в певній мірі цю здібність. На доданих до цієї праці фотографіях видно колонії з гладкими рівними краями, а також з вирізаними, зубчастими краями.

В 1927 році я також виростила жовтий штам *b. coli* зі стільця пацієнта хворого на черевний тиф. Це *coli* на початку було цілком звичайне без жадного пігменту і як типовий штам

його залишено для бактерійного музею. Тільки при пересіванні 4 місяці пізніше було помічено, що воно витворює золотожовтий пігмент, як *staphylokokkus aureus*. Висіяне на миски Petri'го з звичайним агаром чи желатиною це *b. coli* давало два ґатунки колоній: 1) звичайного розміру без барви з рівними краями і 2) більші з зубчатими краями, котрі на 3—4 день діставали жовтий пігмент, що здебільшого розпреділявся нерівномірно; на семий-десятий день в цих колоніях чергувалися безбарвні і жовті сектори, давали різні фігури, подібні до фігур на малюнках у Ph. Eisenberg'a. При довшій вирощуванні інтенсивність барви збільшувалася доходячи до оранжової. Цим наше *b. coli* відрізняється від *coli* описаного Stutzner'ом і Kwaschnin'ою в якому інтенсивність барви свіжих колоній з часом слабшала.

При пересіві жовтої колонії нашого *coli* на миски зі звичайним агаром виростали 1) звичайні безкольорові колонії і 2) більші зубчаті жовті колонії.

При висіванні безкольорової колонії перший час виростали тільки безкольорові нормальні колонії; і що йно за два-три місяці межи звичайними безбарвними зачинали знов з'являтися більші жовті.

Це явище повторювалося при кожному пересіві.

Безкольорові і жовті колонії були ізольовані кожна окремо і слідувалося за ними на протязі трьох років.

За цей час інтенсивність пігменту жовтих колоній значно збільшилася доходячи до темнооранжевого. При висіванні такої жовтої колонії на Petri — миски зі звичайним агаром на протязі цих трьох років кількість жовтих колоній все збільшувалася, а нормальних безбарвних все зменшувалася; а після трьох років нормальні безкольорові колонії з жовтого штама зовсім перестали рости при звичайних умовах вирощування.

З виділеного на початку з нормальної безкольорової колонії *b. coli* протягом цих трьох років нормальні колонії потрохи стали зникати і тепер ростуть колонії з зубчатими краями, котрі за кілька днів дістають блідожовтий пігмент.

Для пояснення еволюції розвитку цих двох типів з одного штама додаю схематичний образок з фотографій колоній. (табл. ч. 3.)

Пігмент цих бактерій розпускається помалу і слабо в алькоголю і ацетоні, але скоро і добре в алькалічних розчинах. (1% *Na OH*, *KOH* і др.)

Форма колоній нашого *b. coli* з зубчастими краями, їх більший розмір від звичайних колоній, а також жовтий пігмент показали мені, що маю перед собою явище диссоціації бактерій.

Відомо, що багато гатунків мікробів, висіяних на твердих поживних підложах, часто дають форму колоній, котрі значно різняться своїм виглядом від тих, що прийнято називати нормальними. Багато дослідників працювало над різними бактеріями, що дають такі аномальні форми, і помітили, що вони різняться від звичайних не тільки морфологічно, але також продукцією пігменту, слизі, ферментаційними реакціями, серологічними діланнями та різною віруленцією.

Arkwright в 1921 році в праці про диссоціацію бактерій групи тифу — коли — дизентерії описані раніш різні варіанти підвів під два типи, котрі він назвав smooth („S“) тип рівний і rough („R“) тип стряпаний.

Між одним і другим зустрічаються переходові форми „O“.

Ці назви тепер вживаються всіми. „S“ це тип нормальний, має колонії менші що-до розміру ніж тип „R“, круглі, гладенькі, з рівними краями, випуклі, блискучі, часом опалізуючі чи флюоризуючі, бульйон рівномірно мутять; суспензію з них зробити легко; рухливі у родів бактерій з активною рухливістю, патогенні у патогенних родів бактерій. „R“ форми мають колонії звичайно більші, неправильної форми з зубчастими краями, плоскі, стряпаті, гранульовані або зморщені, неблискучі, сипьоваті, чи прозорі, часом прилипли до поживного підложа. При рості на бульйоні дають на дні осад, тяжко зробити з них гомогенну суспензію, бо випадають клаптями. Втрачають рухливість і патогенність.

Бактерії „R“ типу мають нахил витворювати жовтий чи гнідуватий пігмент.

Так Philip Hadley перераховує ряд дослідників, що помітили пігмент у різних бактерій, а саме: *Vibrio cholerae*, *b. diphtheriae*, гнідуватий варіант *micrococcus citreus*, жовтуваті форми *b. typhi*, жовті і жовтуваті форми II і IV типу *meningococcus*, жовті форми *b. malleus*, *b. mesentericus*, *b. proteus*.

Про жовтий пігмент „R“ форм *b. coli* в доступній мені літературі я нічого не найшла. Тому я стала робити досліди над виділеним мною жовтим *b. coli*, щоб підтвердити свою гадку, що маю перед собою явище диссоціації. Результати моїх дослі-

дів були позитивні і показали мені, що виділене мною жовте b. coli це хромогенна „R“ форма b. coli.

Подаю морфологічні і біологічні властивості виділеного мною мікроба.

1) Бактерії як з безкольорових так і з жовтих колоній це Gram негативні палички. В жовтих колоніях палички різної довжини — від кокуватих до довгих, що тягнуться в довгі нитки. Це явище не відповідає описаному попередніми дослідниками, котрі кажуть, що „R“ форми b. coli мають бути коротші і ширші ніж „S“ форми і можуть бути прирівняні до кокоїдів. (A. V. Dulenay).

2) Бактерії з безкольорових колоній рухливі, з жовтих здебільшого нерушливі, тільки окремі екземпляри в полі зору під мікроскопом виявляють слабу здібність руху.

3) Желатини не розпускають ні безкольорові ні жовті колонії.

4) І ті і другі дають позитивну реакцію на індол.

5) Обоє редукують нітрати в нітріти.

6) Обоє дають позитивну р. з Methyl red.

7) Обоє дають негативну р. Foges Proskauer'ovu.

8) На поживних підложах Endo і Drigalsk'ого ростуть як типові b. coli і тільки дуже рідко на старих мисках (4—5 день) з'являється жовтий пігмент в деяких колоніях.

9) Молоко квасять одні і другі, утворюють кислоту і газ; молока не пептонізують.

10) Бульйон безкольорові колонії мутять рівномірно; жовті перший день дають також рівномірну муть, але за 48 годин бульйон прояснюється долі випадає седимент, а на поверхні утворюється жовта плівка. Це яскравіше помітно в малій кількості бульйону 2—5 см³; в 100 см³ довший час залишається рівномірна муть.

11) На поживнім підлозі з Eosin - methylenblau і ті і другі дають темні колонії з металевим полиском як типове b. coli.

12) Поживне підложе з цитратом обоє не змінюють.

13) На агарі з plumbum aceticum ні безкольорове ні жовте coli не дає чорної барви.

14) Стара агарова культура має запах фекалій.

15) На картоплі росте добре. Безкольорове дістає блідо-жовту барву, жовте виробляє темно-жовтий пігмент.

16) Льфлерову сироватку не пептонізують обоє; жовте утворює інтенсивно жовтий пігмент.

17) На Russel-овім поживнім підложу обое дають червоне забарвлення і газ.

18) Слідуючі цукри обое однаково квасять і витворюють газ: лактозу, декстрозу, мальтозу, рамнозу, манніт, саліцін.

19) Сахарози не квасять ні одні ні другі.

20) В лакмусовій сироватці і жовте і безкольорове зміняє фіолетну в червону барву, котра залишається.

З цього перераховування видно, що культурні реакції за винятком бульйону однакові як у безкольорової так і у жовтої форми мого *b. coli*.

Аналогічні наслідки спостерігала A. Dulenau в своїх дослідах над „S“ і „R“ формами *b. coli*.

Серологічно також як безкольорові так і жовті форми нашого *b. coli* не відрізнялися одна від другої. Певне тому, що кожна в собі мала також елементи другої. Було імунізовано по два крілики безкольоровими і жовтими формами загрітими одну годину на $56^{\circ} C$. Сироватки від усіх кріликів мали однаковий титр а саме: аглютинувала жовте *coli* 1:500, безкольорове 1:500, інше *coli communis* 1:100, інше *coli communior* 1:100. Вірулентність обох форм нашого *b. coli* безбарвного і жовтого була однакова: морщаки загинули після 24 годин по інтраперітонеальній ін'єкції одних і других бактерій. В організмі морщика жовте *coli* свого пігменту не втратило: з крові загинувшої тварини була вирощена жовта культура.

Що впливає на творення пігменту? Найголовнішу ролю тут грає старість. Чим скорше і інтенсивніше росте культура, тим раніше з'являється пігмент. На поживних підложках, що мають в собі багато виживи, як агар з асцитом, з сироваткою, Лівфлєрова сироватка, пігмент зявляється дуже скоро.

На поживних підложках з 1% фенолу а також на так званих голодних поживних підложках ріст культури іде дуже помалу, пігмент зявляється пізніше і дуже блідий. Голодні виживні підложка були слідуючі: бульйон приготовлений з Лібіг-ового екстракту без пептону і соли, 2% агар на цім самім бульйоні, 2% агар на воді без пептону і соли, просто вода як звичайна так і дестильована.

На останніх не було помітно жадного пігменту. І навіть коли з цієї води пересівалася культура на звичайний агар, то деякий час пігмент був блідий. Виняток з голодних поживних підлож робить вивар зі свіжого мяса: як на ньому самому так

і на агарі приготовленому з нього без пептону, без соли і не нейтралізованому, пігмент витворюється надзвичайно швидко і буває оранжової аж цеглясто-червоної барви.

На агарі з 1% лактози ростуть як з безкольорового так і з жовтого штаму виключно безбарвні „S“ форми і залишаються такими на завше.

На агарі з 1% декстрози, мальтози і манніту ростуть з початку безкольорові „S“ форми, котрі за кілька день починають переходити в „R“ форми зі зубчастими краями і утворюють пігмент, котрий чим далі тим темнішає, доходячи до цеглясто-червоного.

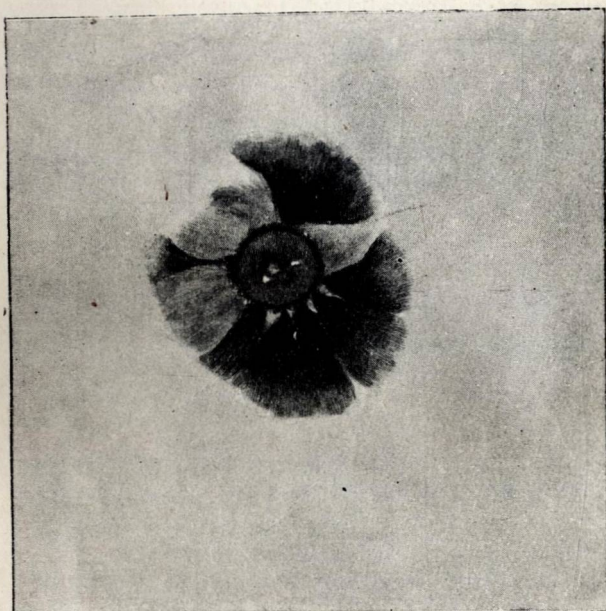
Реакція поживного підложа має вплив на силу пігменту. На алькалічному агарі *PH* 8,5 пігмент буває блідший ніж на кислім. Оптимум кислотности є між *PH* 5—6. При цій кислотности жовті колонії творять пігмент оранжовий аж цеглясто-червоний, безкольорові — дають жовті сектори. При *PH* 4,8 часом де-котрі колонії виробляють багато слизі.

Температура також впливає на творення „S“ і „R“ форм та пігмент в них. При 37° *C* пігмент з'являється вже за 24—48 годив, але буває не такий сильний, як при вирощуванні в кімнатній температурі, де ріст іде помаліше а барва пігменту густіша. При 40' до 46° *C* ростуть виключно колонії „S“ форми без жадного пігменту. Коли-ж виняти цю культуру з високої температури і залишити її при кімнатній температурі на кілька днів, то в ній знов з'явиться пігмент.

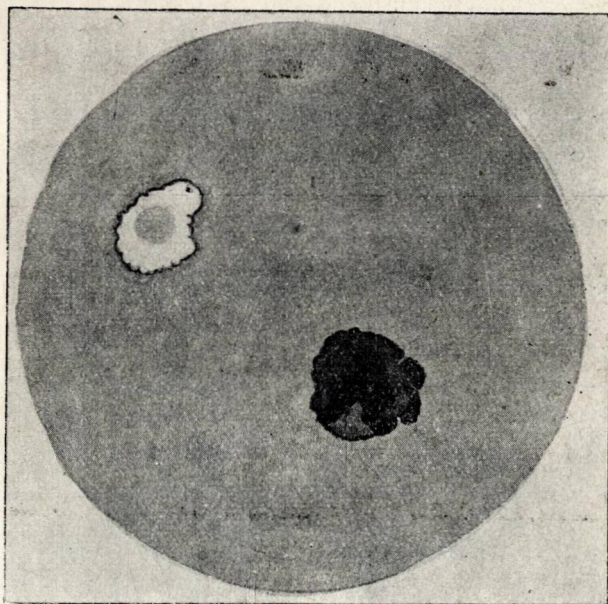
Робила я також описаний раніше експеримент зі засіванням культури на велику кількість бульйону, 200 до 300 см³. В цих умовах, як пишуть, можна дістати перехід „R“ форми в „S“ (A. Dulenau). Позитивних вислідів я не дістала.

Висіваючи на миски Petri-го з агаром засіяного бульйону, 200 см³ чи 5 см³ я діставала на протязі 20 днів зі засіяного жовтим в. солі тільки жовті колонії, а зі засіяного безкольоровим солі тільки колонії без пігменту. Експеримент зі засіванням на бульйон з 10% гомологічної аглютинуючої сироватки був переведений мною двічі. В перший раз я дістала тільки різниці в силі пігменту. Висіяне на агарові миски жовте солі з бульйону з 10% аглютинуючої сироватки крілика, імунізованого культурою жовтого в. солі, давало пігмент блідший ніж звичайно; а безкольорове в. солі, висіяне на агар з бульйону з 10% аглютинуючої сироватки крілика, імунізованого безколіровими

ТАБЛИЦА Ч. 2.

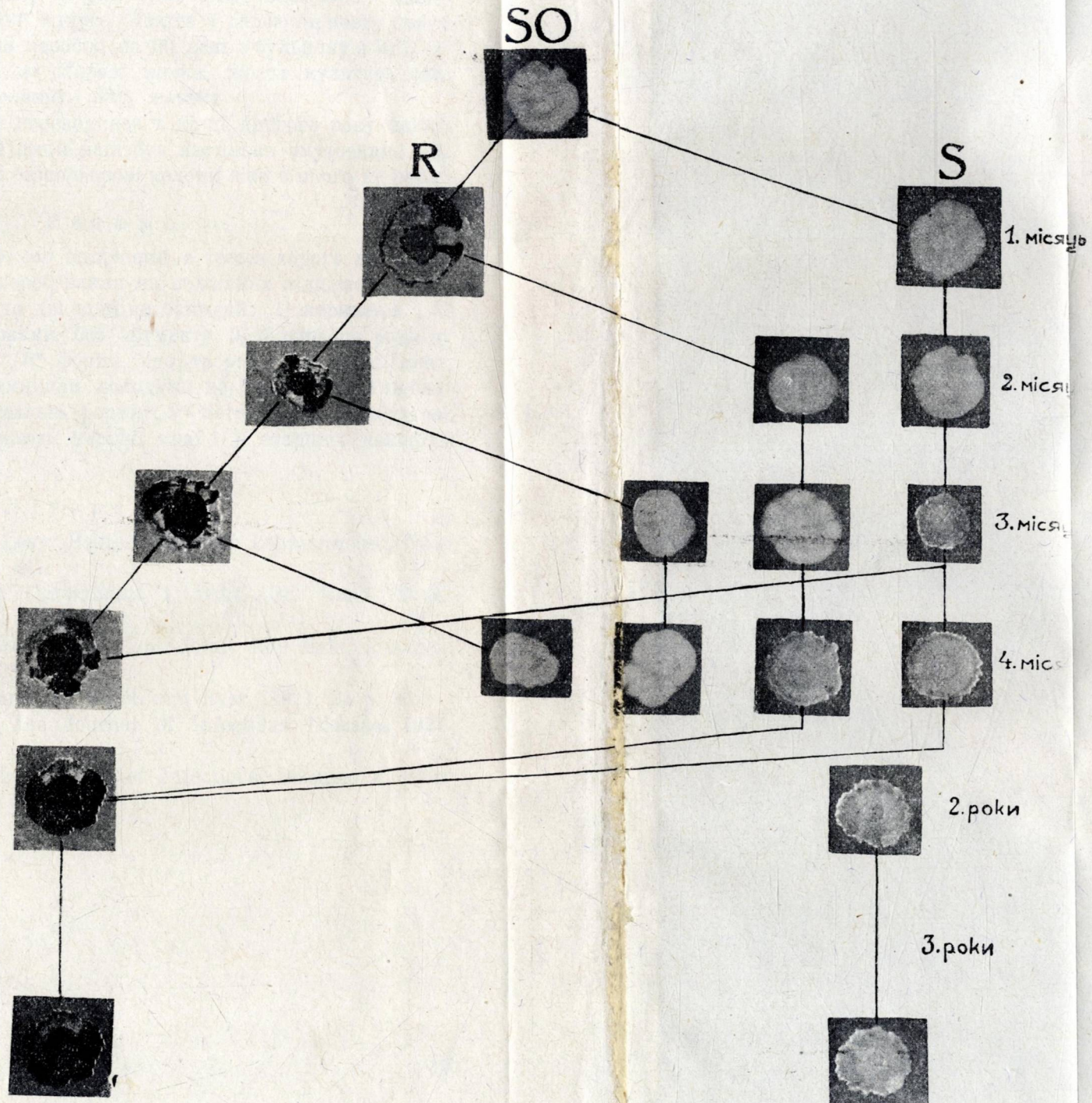


a)



б)

ТАБЛИЦЯ Ч. 3.



колоніями нашого штаму *b. coli*, було трохи нажовкле. Експеримент був переведений вдруге. Явище з силою пігменту повторилося а крім того при пересіві на 20 день з бульйону з 10% гомологічної сироватки на агарові миски, жовта культура дала 37% безкольорових колоній і 63% жовтих.

Експеримент цей переводився в кінці другого року наших дослідів, коли жовтий штам наш був настільки змутований, що при звичайних умовах безкольорові колонії вже з нього не росли

Резюме.

Типовий штам *b. coli* виділений з faeces хорого на черевний тиф за 4 місяці перебування на поживних підложах змутовався, розпадаючися на дві відміни бактерій: 1) нормальні „S“ форми з рівними краями без пігменту 2) більші по розміру з зубчастими краями „R“ форми, що творили жовтий пігмент, котрий з часом все темнішав, доходячи до оранжового і цеглясто-червоного. 3) Нормальні форми „S“ потрохи також змутовалися і за три роки мають нерівні краї і в старших колоніях блідо-жовтий пігмент.

Література.

- 1) Lehmann und Levy. Bakteriologie von Lehmann und Neumann II. Band 1927 S. 441.
- 2) Ph. Eisenberg Centralblatt f. Bakt. Or. Band 80 S. 399—400. 1918.
- 3) Stutzer und Kwaschnina. Centralblatt fuer Bakt. I. Abteilung Or. Band 113, 1929.
- 4) Arkwirght. Journ. of Pathol. and Bakt., 1921, 24 p. 36.
- 5) Philip Hadley. The Journal of Infectious Diseases 1927 v 40 p. 61.
- 6) A. Dulenay. The Journal of Infectious Diseases v 42 p. 576. 1928.
- 7) idem p. 582.

Мр. Ганна Коренець (Львів).

Бінарний уклад

сечовина — р. толюїдина.*)

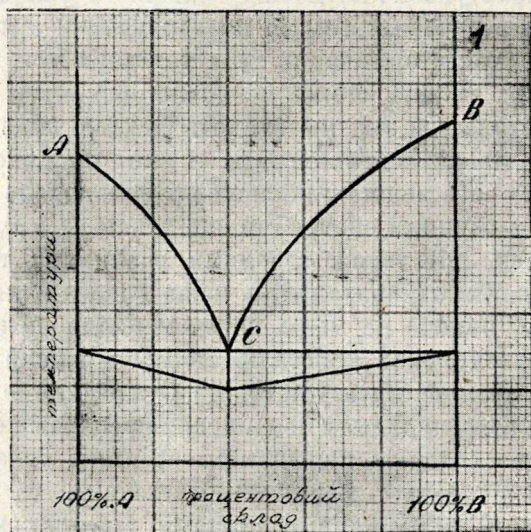
Заки приступаємо до досліду бінарного укладу якихнебудь двох хемічних речовин, мусимо познакомитися з можливостями, що заходять при стоплюванні двох хемічних тіл.

Фізичних свійств стопів не можна означити із знання фізичних властивостей тіл, що входять в склад даного стопу. Бож стопи це не тільки конгльомерати, в яких поодинокі складники уложені побіч себе менше чи більше правильно, але стопи можуть бути також хемічними сполуками, що повстали з тіл, що входять у склад стопу, або також твердими розчинами тих тіл в собі. Звичайна квантитативна аналіза може виказати лиш загальний склад стопу, одначе не може дати відповіді на питання, який є характер поодиноких кристалів стопу. — Маємо різні методи досліду внутрішньої структури стопів. Отже можемо досліджувати її мікроскопово, огляданням поодиноких препаратів стопів різного процентового складу та порівнянням форми і укладу кристалів. Коли маємо до діла з металічними стопами, то витравленням їхньої поверхні відповідними стопами відслонюємо їх кристалічну структуру. — Друга метода, що нею послуговуємося — це термічна метода. Полягає вона на досліджуванні перебігу змін температури в часі ogrівання і остигання стопу різного процентового складу. Коли досліджувана речовина не підлягає під час остигання ніяким змінам, чи то фізичним, чи хемічним, то одержуємо правильну криву. Одначе коли стоп підлягає в часі остигання змінам, що їм товаришить поглотування чи виділювання

*) Відчитано на III. З'їзді укр. природників, лікарів і інженерів у Львові в травні 1931.

тепла, то перебіг кривої ціпеніння не буде правильний. (Процеси екзотермічні зменшують швидкість остигання, ендотермічні збільшують). На основі перебігу змін температури у поодиноких спробах визначаємо вичерки, а з їхнього перебігу заключаємо, з яким типом стопу маємо до діла, зн. чи це стоп, що дає евтектику, чи повстає нова хемічна сполука, чи мішані кристали, чи може взагалі складники стопу не мішаються із собою ані в рідинному ані цїпкому стані. Отже відрізняємо: 1) Евтектичні стопи. Вони не творять спеціальних сполук. 2) Стопи тіл, що творять із собою одну чи більше хемічних сполук. 3) Стопи у формі твердих розчинів, зн. мішані кристали.

I. Евтектичні стопи виступають тоді, коли два складники (прим. *Sb-Pb*) не творять із собою ніяких хемічних сполук,



Фіг. I.

ані твердих розчинів. Тоді крива топлення (фіг. I) складається з двох відтинків, що перетинаються в точці положеній пониже точок топлення поодиноких складників, у т. зв. евтектичній точці. Є це точка найлегшого топлення. В цій точці стоп, що його концентрація відповідає складові евтектичної точки, топиться у цій найнижчій температурі цілком. Однак евтектична мішанина мимо цього, що ціпеніє в постійній температурі, не є од-

породною цїпкою фазою, а тільки мїшаниною цїпких фаз обох складників постійного складу. Отже, якщо склад мїшанини є інший як склад евтектики, то зразу викристалізує тіло, що є у надмірі, а щойно тоді викристалізовує в постійній температурі, коли мїшанина досягне складу евтектичної мїшанини. В евтектичній точці час кристалізації евтектичного стопу досягає своє максимум. Коли віддалюємося від складу евтектичного стопу в напрямі чистих складників, то цей час зменшується. При концентраціях чистих складників стопу досягає він вартість нулі.

II. Другий тип стопів, це стопи, що їх складники творять із собою одну або й більше хемічних сполук, що не розклада-

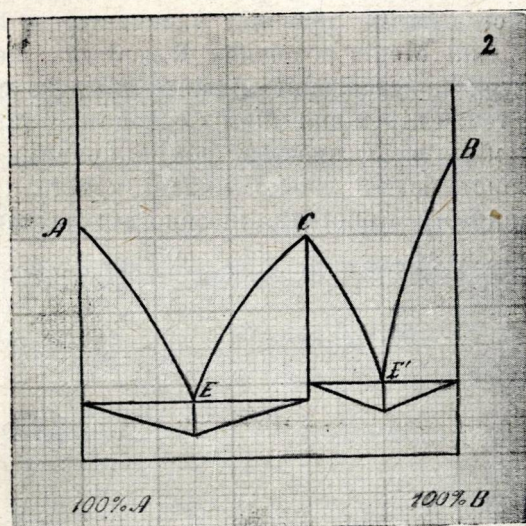


Fig. II.

ються у точці топлення. Тоді на вичерку (фіг. II) маємо стільки максимальних точок, скільки є хемічних сполук. (Прим. $Mg Zn_2$).

III. Тип стопів у формі твердих розчинів, зн. мїшаних кристалів. Повстають вони з тіл хемічно і ізоморфічно до себе зближених. Їхні складники мїшаються зі собою так у плинному як і цїпкому стані цілком, або тільки частинно. Виступають тут кристали одного складника з означеною, залежною від концентрації розтвору участю другого.

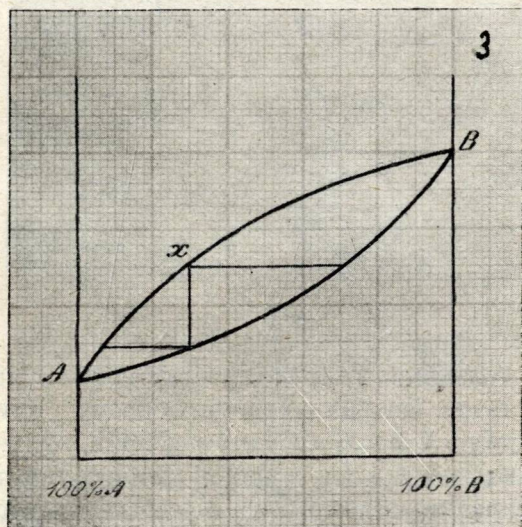
I тут відрізняємо засадничо два роди твердих розчинів:

1) Коли оба складники творять безпереривний ряд мїшаних

кристалів. 2) Коли оба складники не творять тяглою ряду ізоморфічних мішанин.

1) В першому випадку маємо дві речовини, що мішаються зі собою в кожному процентовому відношенні так у плинному як і цїпкому стані. Тоді маємо одну рідинну фазу і тільки одну цїпку, зн. лиш один рід мішаних кристалів. Тому складники творять тут безперервний ряд кристалів, отже і крива цїпеніння буде тяглою лінією. Треба ще тут зазначити, що концентрація обох складників інша у плинній фазі, а інша у цїпкій. Отже склад кристалів не є майже ніколи процентово той самий, що розтвору, з якого викристалізовує. Тому і лінії, що означають точки цїпеніння і топлення, є ріжні і маємо дві криві, криву топлення і кристалізації.

І в цьому типі стоїть розрізняє Rozenboom ще 3 підтипи: а) де температури кристалізації мішання ріжного процентового складу лучать точки цїпеніння чистих складників та дають криву без максимумів і мінімумів. У просторі поміж кривими початкових та кінцевих кристалізацій маємо мішані кристали в рівновазі зі стопом (рідинним). Кристали, що виділюються перші, мають

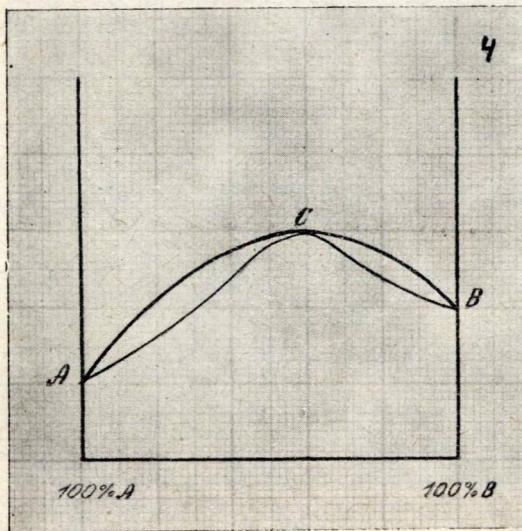


Фиг. III.

більший процент вище-кристалізуючого складника чим розчин, з якого виділюються. Через це розчин ставється щораз більше вбогий у тіло вище-кристалізуюче (температура поступенно опадає)

і під кінець кристалізації виділюються кристали багаті в тіло нище-кристалізуюче. Процентний склад тих кристалів знайдемо, коли переведемо з даної точки на кривій кристалізації (фіг. III) пряму рівнобіжну до осі рядних. Точка перерізу її з кривою кінцевих-остаточних кристалізації вказує нам процентний склад початково-кристалізуючих кристалів, а точка перерізу прямої з кривою початкових кристалізації склад останніх кристалів.

б) Температура ціпеніння тіла *A* підноситься з доданням тіла *B* і навпаки, температура тіла *B* підноситься з доданням тіла *A*. У цьому випадку крива ціпеніння має максимум, в якому виділюються кристали при постійній температурі, а їхній процентний склад є той самий, що і розчину, з якого виділюються. Тому і криві початкових і кінцевих кристалізації сходяться



Фіг. IV.

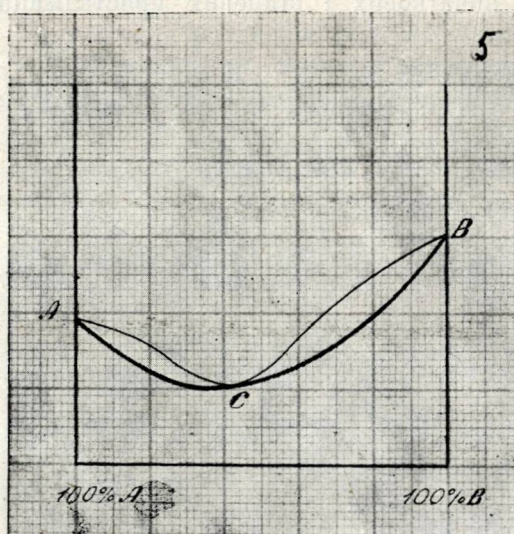
в цій точці. На відтинку кривої *AC* (фіг. IV) виділюються кристали з більшим процентом тіла *B*, якби того можна надіятися по складі даного розчину. І навпаки на відтинку *CB* виділюються кристали, що мають більший процент тіла *A*, а лишається розчин багатий в тіло *B*.

в) Третій підтип, де тіло *A* обнижує точку кристалізації тіла *B* і знов додання тіла *B* обнижує точку кристалізації тіла *A*.

Тоді крива ціпеніння (фіг. V) виказує мінімум, т. зн. опадає понище точок кристалізації чистих складників. Впрочім цей тип аналогічний до типу б).

Існування тих трох родів стопів залежить від такого правила термодинаміки: в кожній температурі концентрація того складника, що при його доданні обнижується точка ціпеніння, більша в рідинній фазі ніж у ційкій і навпаки, коли з доданням одного складника підноситься точка ціпеніння другого, то концентрація його у ційкій фазі більша чим у рідинній. Отже температура кристалізації буде постійно змінна.

2) Другий тип мішаних кристалів виступає тоді, коли оба складники не творять тяглою ряду ізоморфічних мішанив. Тут



Фіг. V.

оба складники мішаються із собою в ційкому і рідинному стані тільки в певних границях. Отже дальше додання другої речовини не впливає вже на склад мішаних кристалів, а лишень дістаємо вже другу ційку фазу, що є розчином першої речовини в другій, т. зн. це вже другий рід мішаних кристалів. Тому і крива ціпеніння того укладу не буде безпереривною-тяглою лінією, а викаже певний перелім.

І тут з Rozenboom-ом відрізняємо два підтипи: а) крива має зворотну точку — перелім, б) крива виказує мниму евтектику.

а) У першому випадку речовина B підносить точку кристалізації речовини A , отже концентрація B більша у цій фазі. Додання тіла A обнижує точку кристалізації тіла B , так що концентрація речовини A більша у рідинній фазі. Отже з розчину багатшого в речовину A відділюються кристали з більшим процентом тіла B , ніж його було в розчині, з якого випали. З розчину, в якому є більше тіла B , випадають кристали з більшим процентом речовини B , ніж у розчині. У переломовій точці, що розділює оба ці роди кристалів, маємо рідинну фазу, що відповідає цій точці, в рівновазі з обома ізоморфічними мішанинами. Тому

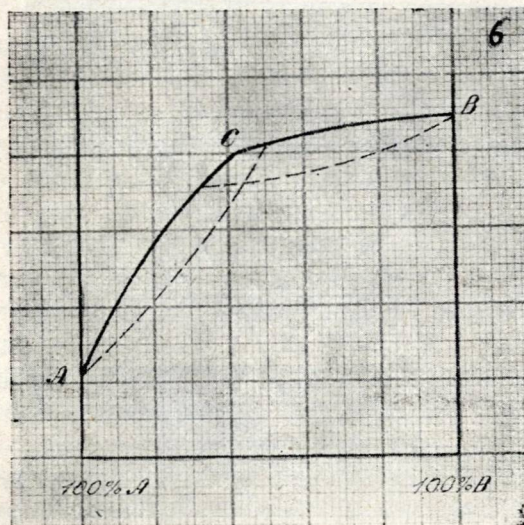


Fig. VI.

ї мусить бути у цій точці перелім, бож тут стрічаються зі собою два різні підставові тіла.

б) У другому випадку крива ціпеніння творить мниму евтектику. Цей тип стопів виступає тоді, коли точки кристалізації обох складників обнижуються за доданням другого складника доти, доки не досягнуть точки, у якій цілий розчин ціпеніє у формі мішанин обох родів мішаних кристалів. У цій мнимій евтектичній точці маємо рідинний розчин в рівновазі з обома родами мішаних кристалів. Одначе від правдивої евтектичної точки різниться вона тим, що топлення цього мнимого евтектич-

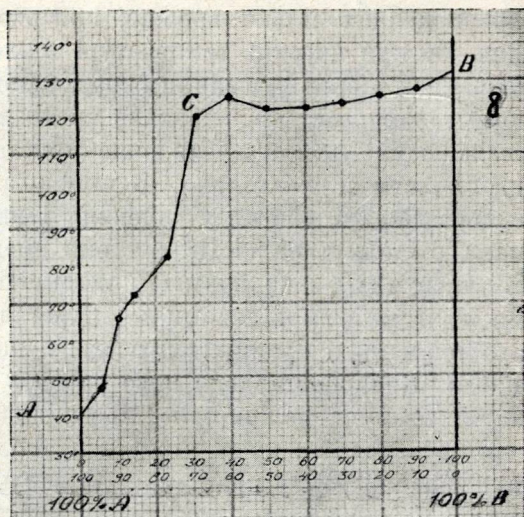
складом, ogrівала я в гліцерині, аж до стоплення (менше більше 180°). Потім виїнявши із гліцерини нотувала (що 10 секунд) зміни температури і зміни, що заходили підчас остигання стопу.

На загал стоп топився рівномірно і спокійно. Після стоплення стопу з малим процентом одного зі складників, дістала я однородний стоп, зн. в певних границях складники стопу мішалися зі собою в рідинному стані. При стопах з більшим процентом обох речовин виступали вже дві рідинні верстви — сечовини і р.-толюїдини. Кристалізація відбувається також рівномірно і спокійно. В деяких тільки спробах при охолодженні виділявся амоняк, бо при високій температурі топлення не все можна було зберечися перед частинним розкладом сечовини, що і виказано бюретовою реакцією. — Підчас кристалізації стопу викристалізовувала розумісться зразу як вище-кристалізуюча сечовина із малою участю р.-толюїдини. В міру охолодження розчин ставав щораз більш убогий у сечовину і вкінці викристалізовувала сама р.-толюїдина. — Ціпкі стопи представлялися у виді довгих, лискучих, ясно-жовтих кристаликів у суміж із платковатими жовтими кристаликами. — Дуже добре можна було обсервувати топлення і кристалізацію стопу, послугуючися ogrівачем Bagnaska. Коли поставлено його разом з препаратом стопу на столик мікроскопу, можна було, при відповідній регуляції температури, обсервувати крізь мікроскоп топлення і кристалізацію стопу, уклад і форму кристалів. На залученім термометрі контролювала я температури топлення і кристалізації поодиноких препаратів.

На основі температур, що в них у поодиноких спробах слідувала кристалізація, визначила я вичерк подвійного укладу сечовина-р.-толюїдина.

Опираючися на цих дослідах та на вичерку бінарного укладу сечовина-р.-толюїдина, можна припускати, що маємо в цьому випадку стоп, що складається з мішаних кристалів. І то за Rozenboom-ом такий тип стопу, де складники не творять тяглого ряду мішаних кристалів, а крива кристалізацій має зворотну точку — перелім (фіг. VIII). За існуванням цього саме типу стопу промовляли би такі дані: 1) Частинна розпускальність сечовини в р.-толюїдині і р.-толюїдини в сечовині. 2) Сечовина підносить точку кристалізації р.-толюїдини, р.-толюїдина обнижує точку кристалізації сечовини. Отже концентрація сечовини більша у ціпкій фазі чим у рідинній, а р.-то-

люїдини більша у рідинній фазі чим у цїпкій. Тому з розчину богатого у р.-толюїдину виділюються кристали з більшим процентом сечовини, ніж її процент у розчині, з якого виділюються, а з розчину з більшим процентом сечовини кристали із більшою кількістю сечовини, як у розчині. 3) На вичерку укладу сечовина р.-толюїдина маємо зворотну точку при процентівім складі сечовини 31% р.-толюїдини 69%. Нище тої точки, продовж кривої *AC* (фіг. VIII) мали б ми твердий розчин сечовини



Фіг. VIII.

у р.-толюїдині, а повище, продовж кривої *CB* твердий розчин р.-толюїдини у сечовині. В точці *C* стрічаються зі собою два різні тверді розчини і тому крива виказує перелім.

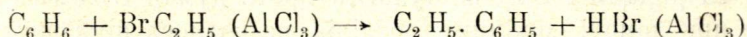
На прикінці праці складаю Високоповажаному П. Проф. Константинові Гринаковському, у якого робітні у Познані виконала я цю працю, щирю подяку за цінні ради та вказівки.

Ч.	Сечовина		р.-толюїдина		Темпера- тура ціпеніння	У в а г и
	% ваг.	% мол.	% ваг.	мол.		
I.	6	10 22	94	89.78	45°	Бруватні і білі ігlastі кристали
II.	10	16.54	90	83.46	67°	" "
III.	15	23 94	85	76.06	72°	Білаво-жовтаві кристалики.
IV.	23	34.75	77	65.25	81.8°	" "
V.	31	44.49	69	55.51	121°	" "
VI.	33	46.76	67	53.24	122°	В часі топлення виділюється NH_3
VII.	40	54.32	60	45.68	126°	Біло-жовтава кристалічна маса.
VIII.	50	64.07	50	35.93	120.5°	Виділюється NH_3 .
IX.	60	72.79	40	27.21	122°	" "
X.	70	80 63	30	19.37	123°	Біло-жовтаві кристалики.
XI.	75	84.06	25	15.94	125°	" "
XII.	80	87.71	20	12.29	128°	" "
XIII.	90	94.14	10	5.86	130.2°	" "
XIV.	95	97.14	5	2.86	131.2°	" "

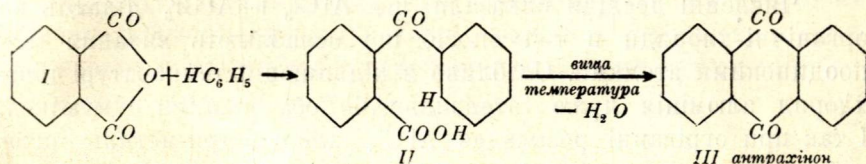
Про реакції з хлоридом алюмінія.

I. ЧАСТИНА.

Під реакцією Friedel-Crafts'а розуміється заступлення одного або більше атомів водня в ароматичних вуглеводнях алькилевою або кислотною решткою, пр.:



Реакція відбувається зовсім легко в звичайній температурі при співучасті безводного хлориду або бромиду алюмінія. В деяких випадках діляють подібно й інші безводні хлориди металів пр. хлорид заліза ($FeCl_3$),¹⁾ хлорид цинку і т. д. Крім цієї класичної реакції Friedel-Crafts'а, треба причислити тут усякі інші застосування $AlCl_3$ в промислі і науці.²⁾ Як примір згадаю тут фабрикацію орто-бензоільо-бензоєсової кислоти³⁾ з безводника фталевої кислоти і бензолу:



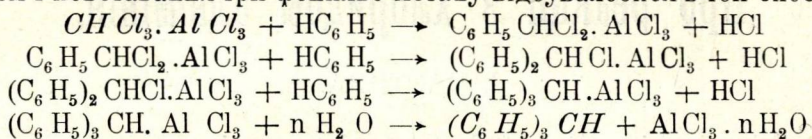
Як видно з рівняння реакції тратить кислота II у вищій температурі дуже легко воду і переходить в антрахінон, що є вихідною точкою для безчисленних аліцаринових і індантренових барвників.

Щоби зорентуватися в поясненнях різних авторів про перебіг цієї цікавої реакції, перейдемо по черзі коротко вислідити праць поодиноких авторів. При. тому поділимо їх на три групи: 1. тих,

¹⁾ E. Wertyporoch, Ber. Dtsch. Chem. Ges. **66**, 1232 (1933). ²⁾ G. Kränzlein, Aluminium-chlorid in der organischen Chemie, Verlag Chemie 1932. ³⁾ Friedel i Crafts, Comp. rend. Acad. Sciences **86**, 1370 (1878) i Heller i Schülke, Ber. Dtsch. Chem. Ges. **41**, 3627 (1908).

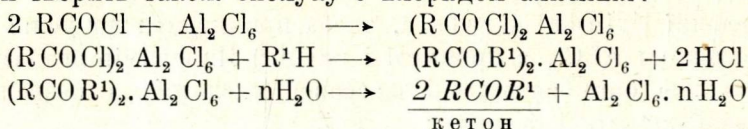
що приймали насамперед злуку $AlCl_3$ з алькилевими і кислотними хлоридами, 2. злуку хлориду алюмінія з вуглеводнями пр. бензолом, 3. злуку обох складників реакції т. в органічного хлориду і бензолу з $AlCl_3$.

I. Voeseken,¹⁾ а за ним Steele²⁾ були тої думки, що при творенні алькилевих або арилевих бензолів лучиться хлорид алюмінія перше з органічним хлоридом, а опісля ділає на них бензол. За Voeseken'ом реакція між хлороформом і бензолом і повставання три-фенильо-метану відбувалобися в той спосіб:

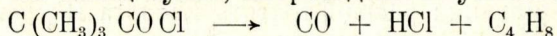


Однак інші дослідники як Guye і Wrocynski³⁾ та Schmidlin і Lang⁴⁾ не одержали ніяких сполук $AlCl_3$ з алькилевими хлоридами і тому виступають проти думки Voeseken'а. Отже при помочі хемічних дослідів не вдалося ніяк вияснити повставання алькилевих бензолів.

Найкраще досліджено реакцію повставання кетонів. Perrier⁵⁾ виказав, що з хлориду кислоти ($RCOCl$) і $AlCl_3$ повстає кристалічна сполука, котра може дальше реагувати з бензолом. Кетон творить також сполуку з хлоридом алюмінія:



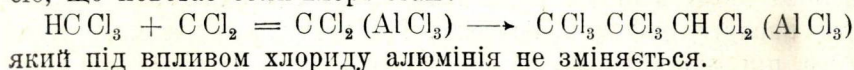
Численні досвіди виказали, що $AlCl_3$ і $AlBr_3$ ділають на органічні хлориди в той спосіб, що ослаблюють вязання між подивокими атомами. Особливо в підвишеній температурі ділає хлорид алюмінія дуже інтензивно, бо оба діланя сумуються. І так при огріванні розкладає $AlCl_3$ хлорид три-метильо-оцтової кислоти на оксид вугля, хлороводень і бутилен:⁶⁾



Дальше збільшує хлорид алюмінія ненасиченість сполук з подвійними вязаннями т. зн. збільшує шкврість приймання усяких тіл. Численні приміри тих реакцій подав Prins⁷⁾. Пр.

¹⁾ Voeseken, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas **19**, 19 (1900); **20**, 102 (1901) **22**, 301 (1903); Chem. Centralblatt **1900** I 756, **1901** I 1263, **1903** II 202. ²⁾ Steele, Proceed. Chem. Soc. London **19**, 209; Chem. Cent. blatt. **1904**, I 58. ³⁾ Guye і Wrocynski, Journ. Chim. phys. **8**, 201 (1910). ⁴⁾ Schmidlin і Lang, Ber. Destsch. Chem. Ges. **43**, 2806 (1912) ⁵⁾ Perrier, Ber. Dtsch. Chem. Ges. **33**, 815 (1900). ⁶⁾ Voeseken, Rec. Trav. Chim. Pays Bas **29**, 85 Chem. Zntl. Blatt **1910**, I 1501. ⁷⁾ Prins Chem. Zntl.blatt **1911** I 466; Rec. Trav. Chim. Pays-Bas **51**, 1065 (1932).

Хлороформ додається легко до чотири-хлоро-етилену в той спосіб, що повстає семи-хлоро-етан:

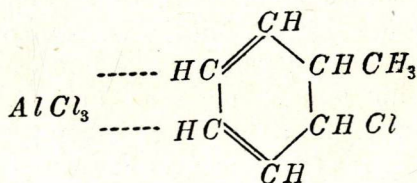


Інші дослідники приймали як перший ступінь реакції повстання сполук Al Cl_3 з бензолом. І так відкривці реакції, Friedel і Crafts¹⁾, думали, що з бензолом повстає сполука $\text{C}_6\text{H}_5\text{AlCl}_2 + \text{HCl}$, яка лучиться опісля з хлоридом аькилю або кислоти. Gustavson²⁾ мав також одержати з вуглеводнів пр. бензолу, AlCl_3 і HCl оліясті течі, яким приписував велику роль при реакції Friedel-Crafts'a. Одначе Menschutkin³⁾ що ті реакції ще раз досліджував, та мої власні досліди,⁴⁾ тих сполук не виказали.

Подібно Sabatier⁵⁾ приймає в своїм творі про каталізи як перший ступінь реакції сполуку бензолу з AlCl_3 , а опісля діланья органічного хлориду на той продукт.

III. На основі тих попередніх дослідів різних авторів видно, що при реакції Friedel-Crafts'a бензол і органічний хлорид мусять з AlCl_3 в якийнебудь спосіб злучитися, щоби могла повстати взагалі реакція. Цебто мусить повстати якась третична (ternär) сполука, що в ній булиби ослаблені вязання хлору в органічній хлориді та вязання водня з перстеном ароматичних вуглеводнів. Можна те саме інакше сказати і припускати, що AlCl_3 активує так сильно атоми Cl і H , що вони можуть виділитися як HCl , а остали решти творять аькилеві бензолі або кетони.

Що до будови тих сполук не могли різні дослідники погодитися. За Schaarschmidt'ом⁶⁾ лучиться AlCl_3 з перстеном бензолу побічними валенціі хлору, збільшує активність подвійних вязань бензолу, так що органічний хлорид лучиться з бензолом через головні валенціі.



В той спосіб повстає похідна дво гідро-бензолу. Проти такого

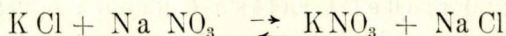
1) Friedel-Crafts, Comp. Rend. Acad. Sciences **100**, 696 (1885) 2) Gustavson Ber. Dtsch. Chem. Ges. **11**, 2151 (1878). 3) Menschutkin Journ. russ-phys. **8**, 201 (1910). 4) E. Wertyporoch Ber. Dtsch. Chem. Ges. **64**, 1376 (1931). 5) Sabatier, Katalyse in der organischen Chemie 1927 стр. 50. 6) Schaarschmidt, Ztschft. f. angewandte Chem. **37**, 287 (1924).

пояснювання реакції виступив головню Prins¹⁾, тому що не вдалося йому в ніякій реакції за Friedel-Crafts'ом виказати сполуки дво-гідро-бензолю. Ці сполуки переходять дуже легко під діланнем AlCl_3 в смолісті тіла. Prins приймає повставання похідних зложеної алюмінієво - хлороводневої кислоти: HAlCl_4 і так з одної сторони з бензолом повставав би $(\text{H}) + [\text{C}_6\text{H}_5\text{AlCl}_3]^-$, а з другої сторони пр. з хлоридом метилю $(\text{CH}_3)^+ + (\text{AlCl}_4)^-$, що реагувалиби як звичайні зйонізовані сполуки :

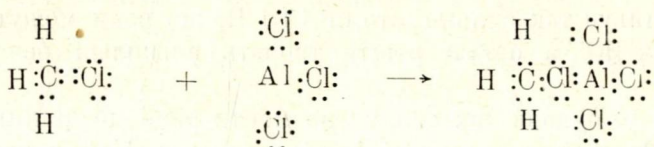
$$\text{Na} + \text{Cl}^- + \text{Ag} + \text{NO}_3^- \longrightarrow \text{Ag} + \text{Cl}^- + \text{Na} + \text{NO}_3^-$$

$$\text{H} + [\text{C}_6\text{H}_5\text{AlCl}_3]^- + (\text{CH}_3)^+ + [\text{AlCl}_4]^- \longrightarrow (\text{C}_6\text{H}_5\text{AlCl}_3)^- \text{CH}_3^+ + \text{H} + \text{AlCl}_4^-$$

Після розложення мішанини водою одержується толюоль. Подібні думки висказав Dougerthy¹⁾, котрий розліджувава реакції органічних хлоридів, бромідів і йодідів при співучасті хлориду алюмінія. При тім наступає виміна поодиноких груп, немовби відбувалася реакція між неорганічними речовинами. (виміна катіонів і аніонів).



Злуку органічних хлоридів з AlCl_3 пояснює він неповністю верхньої шкаралупи (Schale) електронів, котрі з органічним хлоридом доповнюються до восьми :

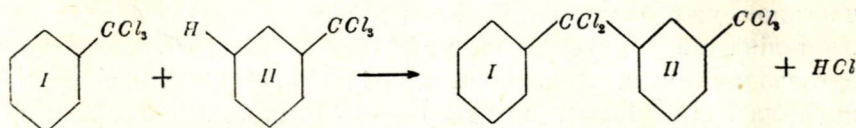


Всі ті спроби одначе не дали загального пояснення про перебіг реакції Friedel-Crafts'a, бо дослідники старалися виізолювати хемічно якунебудь посередню сполуку речовин реакції. При цьому не звертали уваги на обставину, що посередні продукти що ділають каталітично, є звичайно дуже нетривалі і переходять в тревалі речовини, що є істотою каталізи.

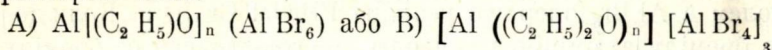
Тільки фізичні методи, (що в повіших часах знайшли широкое застосування в органічній хемії,) змогли дати вияснення синтези Friedel-Crafts'a, бо дозволювали вглубитися в реакцію даних речовин без спричинення змін в укладі реагуючих речовин. Через поміри переходу електричного струму (Leitfähigkeitsmessungen) та порушування йонів (Überführungsversuche) вдалося ще найліпше вияснити вплив AlCl_3 і AlBr_3 при цій реакції.

¹⁾ Prins, Chem. Weekblad **24**, 615 (1927). ²⁾ Dougerthy Journ. Amer. Chem. Soc. **51**, 576 (1929); Chem. Zentr. blatt **1929**, I 1796; ноп. Klipstein Ind. eng. Chem. **18**, 1328 (1926).

При досліді ділання AlCl_3 на ω -трихлоро-толюоль¹⁾ ($\text{C}_6\text{H}_5\text{CCl}_3$) завважено, що розчини проводять електричний струм і повстають продукти нормальної реакції Friedel-Crafts'a:



До систематичного прослідження розчинів броміду алюмінія (що легше розпускається в розчинниках як AlCl_3) ужив я зразу як розчинника абсолютного етеру²⁾. AlBr_3 є т. зв. псевдосіль, що складається зі зложених частин (Autokomplexe) $(\text{AlBr}_3)_n$, де $n = 2$ або 4 . Доданий розчинник лучиться з тими зложеними частинками (Solvation) і тоді повстають зйонізовані продукти з характером соли:



Згідно з дослідями правдоподібніший є останній взір (B). Через додання якихнебудь сполук з реактивними³⁾ атомовими групами (Schlüsselatome) Cl , O , S , N , $\text{C} \equiv \text{C}$ до етерових розчинів броміду алюмінія зростає сильно питома провідження електр. струму, spezifiale Leitfähigkeit = K) т. зв. витворюється третична сполука.

Для розслідження реакції повставання алькильо-бензолів вибрав я⁴⁾ етилевий бромід, в котрім AlBr_3 дуже легко розпускається і дає розчини, що проводять електричний струм. Молекулярне провідження ($K/\text{моль}$) того розчину не змінюється з концентрацією і вказує, що частиники $[\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5\text{Br})_n] [\text{AlBr}_4]_3$ є майже цілковито розложені на йони. Досліди ці виказали, що бромід алюмінія не творить з етилевим бромідом якоїнебудь ближче означеної сполуки.

Другою можливістю при реакції Friedel-Crafts'a булоби первісне поставання якоїнебудь сполуки AlBr_3 чи AlCl_3 з бензолом. Для хлориду алюмінія є це неможливе з причини нерозпускальності цієї речовини в бензолу. Розчини легко розпускального броміду алюмінія⁴⁾ в бензолу не проводять струму зовсім ($K < 10^{-9}$), так що виключене творення сполуки $[\text{C}_6\text{H}_5\text{AlCl}_3]^+$. Розчини ці є нетривкі і під діланням AlBr_3 ⁵⁾

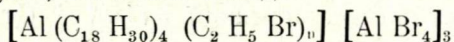
¹⁾ Wohl i Wertyporoch. Liebigs Annalen der Chemie **481**, 34 (1930)
²⁾ E. Wertyporoch, Ber. Dtsch. Chem. Ges. **64**, 1369 (1931). ³⁾ Це є всі ті сполуки, що реагують за Friedel-Crafts'ом і які вчислив у своїй праці Kränzlein l. c. ⁴⁾ Wertyporoch loc. cit. ⁵⁾ Wertyporoch i Sagel Ber. Dtsch. Chem. Ges. **66**, 1306 (1933),

повстають численні продукти, що не творяться після реакції Friedel Crafts'a.

Тому що не вдалося прямо виказати в бензолію проводячих частинок, ужито до розслідування ділання вуглеводнів (бензол, нафталіна, двофениль) розчинів $AlBr_3$ в етері. Через додання вуглеводня спадає первісний провід електричного струму, так що вуглеводні ділають як нейтральний розпускаючий засіб. Коли додати етилевий бромід, або безводник фталевої кислоти, то в обох випадках K росте. Також не вдалося мені виказати якої-небудь похідної двогідробензолію через ділання водня в стані повставання, брону і безводника нітритної кислоти. Так що пояснення реакції Friedel Crafts'a за Prins'ом і Dougerth'ом є виключені¹⁾.

Навіть воно виглядає так, що повставання комплексів між бензолом а $AlBr_3$ здержує реакцію Friedel Crafts-a. Коли до розчину броміду алюмінія в бензолію додати етилевого броміду, то провід електричного струму є слідний, як додамо біля 30% C_2H_5Br т. зн. мусить наступити витиснення бензолію через етилевий бромід. Протівно кожний розчин $AlBr_3$ в C_2H_5Br реагує після додання бензолію; причім зростає стократно питомий провід (K); рідина прибирає червоно-брунату краску; виділюються HBr і повстають етилеві бензолі. При вжитті 1 моля бензолію на 1 моль $AlBr_3$ твориться виключно шести-етильо бензол. Після додання якогонебудь насиченого вуглеводня (пр. бензини) до цієї брунатої рідини, випадає третична сполука, як тяжкий олій. Після розпущення того олій в етилевому броміді провідництво електричного струму не змінюється. Так само сильно проводять розчини $AlBr_3$ в етилевому броміді після додання шести-етильо-бензолію ($C_{18}H_{30}$).

Через електролізу (Überführungsversuche) роз'яснено склад третичної сполуки; вона має склад:



В ній має алюміній координаційне число 4, при чому ділають як перші точки зачепу подвійні вязання бензолію, бо в шести-етильо-бензолію нема реактивних (beweglich) атомів водня.

Тому, що при реакції Friedel Crafts-a головно вживається $AlCl_3$,²⁾ розширено розсліди на розчини хлориду алюмінія в хлоридах: етилевім, пропилевім, ізопропилевім, ацетилевім і бензоілевім. В усіх випадках виказано повставання реакції в третичній, барвній сполуці.

¹⁾ Wohl i Wertyporoch Ber. Dtsch. Chem. Ges. **64**, 1357 (1931). ²⁾ Wertyporoch u. Firlie Liebigs Annalen der Chemie **500**, 297 (1933) Ztschzt phys. Chem. (A) **162**, 398 (1932).

Загально можна сказати, що реакція Friedel-Crafts'a є звязана з повстанням третичної барвної сполуки, котра проводить струм. Головні реагуючі складники знаходяться в катіоні.

Про інші ділання броміду і хлориду алюмінія, як також про ділання інших безводних хлоридів металів скажу в наступній праці.

Данціг, політехніка, органічний інститут.

ZUSAMMENFASSUNG.

Auf Grund von Leitfähigkeits- und Überführungs-messungen wurde mit grosser Wahrscheinlichkeit festgestellt, dass die Friedel-Craft'sche Reaktion in einer ternären, leitenden Verbindung, bestehend aus Kohlenwasserstoff, Halogen-alkyl bzw.-acyl und Aluminiumhalogenid, vor sich geht. Dabei werden das H-Atom des Kohlenwasserstoffs z. B. Benzols und das Halogenatom einer Halogenverbindung gelockert und treten als HCl bzw. HBr aus; die beiden Reste vereinigen sich unter Bildung von Alkyl bzw. Acylbenzol.

Ing. WLADIMIR KOTEČKYJ

Versuche über Desmotropie von Diazo-amino-verbindungen und

Ueber das dem Arecolon entsprechende Benzylderivat.

I. VERSUCHE ÜBER DESMOTROPIE VON DIAZO-AMINO-VERBINDUNGEN.

Die Reaktion zwischen Benzol-diazoniumchlorid und p-Toluidin einerseits und p-Toluol-diazoniumchlorid mit Anilin andererseits liefert ein und dasselbe Produkt:

I. $C_6H_5NH-NO + H_2N C_7H_7 \rightarrow C_6H_5NH.N(OH).NH.C_7H_7$
II. $C_7H_7NH-NO + C_6H_5.NH_2 \rightarrow C_7H_7.NH.N(OH).NH.C_6H_5$ } $-H_2O \rightarrow$
 $\rightarrow C_6H_5NH-N=N-C_7H_7$ oder $C_7H_7.NH.N=N-C_6H_5$ oder ein Gemisch der beiden Körper. Die Versuche von Nölting und Binder¹⁾ und Goldschmidt, Holm²⁾ die Struktur des erhaltenen Körpers durch Spaltungen zu erklären sind negativ ausgefallen.

Im Jahre 1918 wurde gelegentlich anderer Versuche p-Nitrodiazoamidobenzol nach der Vorschrift von Nölting-Binder³⁾ hergestellt und durch Reduktion mit Ammoniumsulfid in absolut alkoholischer Lösung in ein p-Amino-diazo-amino-benzol vom Schmelzpunkt 96° übergeführt. Das von Willstätter⁴⁾ durch Verseifung des Acet-amino-diazo-amino-benzols hergestellte p-Amino-diazo-amino-benzol besass jedoch den Schmelzpunkt von 157°.

Blach⁵⁾ hat die niedriger schmelzenden Formen von p-Amino-diazo-amino-benzol und von p-Amino-diazo-amino-toluol durch Acetylierung in die entsprechenden Acetamino-diazo-amino-verbindungen übergeführt. Die acetylierten Verbindungen lieferten bei der Verseifung mit Natriumalkoholat nur die höher schmelzenden Formen von: p-Amino-diazo-amino-benzol (157°) und p-Amino-diazo-amino-toluol. Auf diesem indirekten Wege wurde die Desmotropie der beiden Formen nachgewiesen.

1) B. 20,3004 (1887). 2) B. 21,1019 (1888); 21,2557; 25,1347 (1892) 3) B. 20,3014 (1887). 4) B. 39,3490 (1906). 5) Dissertation T. H. Danzig. (1927).

Aehnliche Versuche sind auch von Disselhof¹⁾ über p-Amino-diazo-monomethylanilin und p-Amino-diazo-p-amino-chlorbenzol durchgeführt worden.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Versuche, die niedriger schmelzende Form von p-Amino-diazo-monomethyl-anilin und p-Amino-diazo-p-amino-chlorbenzol in die höher schmelzenden überzuführen, wiederholt. Es sind dabei folgende Resultate festgestellt worden.

Zunächst wurden p-Acetamino-diazo monomethyl-anilin (Smp. 162°) und p-Amino-diazo-monomethylanilin (Smp. 89-90°) hergestellt. Das durch Reduktion der entsprechenden Nitroverbindungen erhaltene p-Amino-diazo-monomethyl-anilin war so empfindlich, dass es nur bei Anwendung besonders vorsichtiger Arbeitsbedingungen gewonnen werden konnte. Schon Blach hatte festgestellt, dass die niedriger schmelzenden p-Amino-diazo-amino-verbindungen sehr unbeständig gegen Luft, Wärme und geringe Säuremengen sind. Bei p-Amino-diazo-monomethyl-anilin ist das ganz besonders merkbar. Schon ganz geringe Säuremengen in der Luft des Arbeitsraumes verursachen entweder eine Umwandlung in die Azo-Verbindung oder wirken zersetzend, indem im Laufe einiger Stunden der Körper sogar im Exsiccator über Chlorcalcium schwarz und klebrig wird. Um die Zersetzung oder Umwandlung zu vermeiden, muss beim Ausfällen der Kristalle bei möglichst niedriger Temperatur gearbeitet werden, ebenso muss die Umkristallisation möglichst rasch vorgenommen werden. Dementsprechend mussten die weiteren Umwandlungen sofort vorgenommen werden.

Die Acetylierungsversuche der niedrig schmelzenden Form der beiden Stoffe lieferten wenig erfreuliche Produkte. Die gewonnenen Körper bildeten dunkle, schmierige Massen, die sogar unter Eiskühlung und Umrühren nicht kristallinisch wurden.

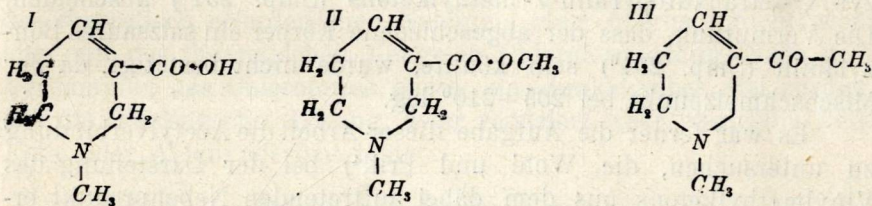
II. UEBER DAS DEM ARECOLON ENTSPRECHENDE BENZYL-DERIVAT.

Auf zwei verschiedenen Wegen ist die Synthese von Alkaloiden der Betelnuss gelungen und in den beiden Fällen hat diese zu demselben Endprodukt Arecaidin (I) geführt. Jahns²⁾ war der erste, der die obige Verbindung aus β -Pyridin-carbonsäure darstellt und dieser Verbindung eine Formel gegeben hat, ohne jedoch die Gründe für die von ihm angegebene Lage der Doppelbindung

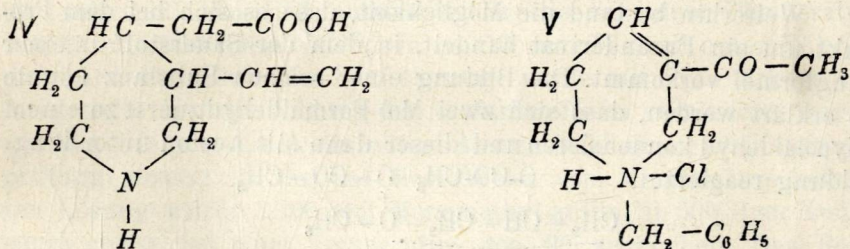
¹⁾ Diplomarbeit T. H. Danzig, 1931. ²⁾ Ar. 229,669 (1891).

anzuführen. Die Vermutungen von H. Meyer¹⁾ über die richtige Lage der Doppelbindungen hat erst eine andere Synthese des Arecaidins von Wohl und Johnson²⁾ bestätigt.

Diese beiden Forscher gingen von N-Methyl- β -amidopropionaldehyd-tetraäthylacetal aus, das mit Salzsäure verseift den salzsauren Arecaidin-aldehyd lieferte. Das Oxim des salzsauren Arecaidin-aldehyds mittels Thionylchlorid behandelt, führte zum Nitril, dessen Verseifung das salzsaure Arecaidin ergab. Wohl und Johnson²⁾ haben ausserdem einen Methylester des Arecaidins, das Arecolin (II), dargestellt. Es bestand damals schon die Absicht einen sauerstoffärmeren Körper dieser Reihe herzustellen, der als Ausgangsprodukt für Synthesen des Merochinens (IV) in Betracht kommen könnte. Wohl und Prill³⁾ ist es gelungen ein dem Arecaidin entsprechendes Keton, das Arecolon (III), zu synthetisieren. Die Versuche der obigen Arbeit, ein dem Arecolon entsprechendes, aber am Stickstoff nicht methyliertes, sowie ein am Stickstoff benzyliertes, Keton zu erhalten, führten zu keinem positiven Resultat.



Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit war, ein dem Arecolon entsprechendes, aber am Stickstoff einen Benzylrest enthaltendes Keton (V) darzustellen, das ein N-Benzyl- Δ^3 -tetrahydro-pyridin-methylketon ist. Der Körper ist von Interesse mit Rücksicht auf die eventuelle Abspaltung der Benzylgruppe.



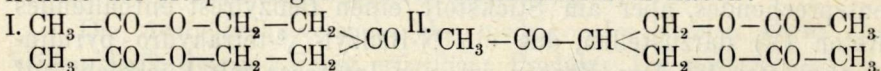
Ein Ueberschuss von Benzylamin wurde mit β -Chlorpropionaldehyd unter Zugabe einer kleinen Menge von $\text{CuJ}^4)$ auf dem Wasser-

¹⁾ M. 25, 22 (1902). ²⁾ B. 40,4712 (1907). ³⁾ A. 440,139 (1924). ⁴⁾ A. Mevis, Bull. Soc. chim. Belg. 40,726 (1931); R. Breckpot Bull. Soc. chim. Belg. 39,462 (1930).

bade erwärmt. Nach Abscheidung der freien Base wurde durch Fraktionieren im Vacuum eine Flüssigkeit erhalten, die identisch ist mit der von Wohl und Wohlberg¹⁾ durch Reduktion der Benzalverbindung erzielten und als N-Benzyl- β -amido-propionaldehyd-diäthylacetal bezeichneten Substanz. Die secundäre Base lässt sich glatt an Vinylmethylketon in ätherischer Lösung anlagern.

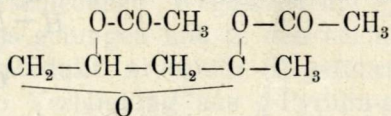
Das Anlagerungsprodukt ist ein hellgelbes Oel, im Gegensatz zur entsprechenden N-Methylverbindung beständiger bei höherer Temperatur und lässt sich durch Destillation im Hochvacuum reinigen. Die Ergebnisse der Verseifung und Ringschlussbildung mit Salzsäure nach Wohl und Johnson²⁾ und Wohl und Prill³⁾ waren nicht befriedigend, da die Kristallisation des erhaltenen Produktes eine lange Zeit erforderte und die Ausbeute schlecht war. Erst die Verseifung und Ringschlussbildung mit 50%iger Schwefelsäure führten zu guten Resultaten. Nach Beseitigung der Schwefelsäure und Eindampfen im Vacuum kristallisiert die Flüssigkeit und es lassen sich leicht die fast weissen Kristalle des salzsauren N-Benzyl- Δ^3 -tetrahydropyridin- β -methylketons (Smp. 251°) abscheiden. Die Vermutung, dass der abgeschiedene Körper ein salzsaures Benzylamin (Smp. 254°) sein könnte, wurde nicht bestätigt, da der Mischschmelzpunkt bei 205–210° lag.

Es war ferner die Aufgabe dieser Arbeit die Acetylverbindung zu untersuchen, die Wohl und Prill⁴⁾ bei der Darstellung des Vinylmethylketons aus dem dabei auftretenden Nebenprodukt erhalten hatten. Nach Analyse und Molekulargewichtsbestimmung könnte der Körper folgende zwei Strukturformeln haben:



Da eine Ketonverbindung damals nicht erhalten wurde, konnte keine dieser Formeln in Frage kommen.

Weiterhin bestand die Möglichkeit, dass es sich bei dem Produkt um ein Furanderivat handelt, in dem der Sauerstoff in einer Ringformel vorkommt. Die Bildung einer solchen Substanz könnte so erklärt werden, dass sich zwei Mol Formaldehyd zuerst zu einem Glycolaldehyd kondensieren und dieser dann mit Aceton unter Ringbildung reagiert:

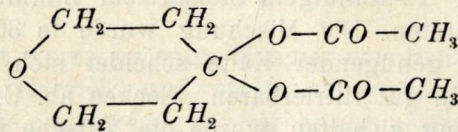


Im Falle der Bestätigung dieser Formel sollte versucht werden durch Abspaltung der beiden Acetylgruppen den Körper in α -Methyl-

¹⁾ B. 34,1922 (1901). ²⁾ B. 40,4714 (1907). ³⁾ A. 440,145 (1924). ⁴⁾ A. 440,143 (1924).

furan überzuführen. Zum Beweis der hypothetischen Formel wurde eine andere Synthese vorgeschlagen. Zu diesem Zwecke wurde Glycolaldehyd mit Aceton unter den bei der Vinyl-methylketon-darstellung angewendeten Bedingungen kondensiert und das Reaktionsprodukt acetyliert. Der Versuch verlief jedoch negativ, da eine kristallisierte Substanz nicht entstand.

In dem Reaktionsprodukt könnte ausserdem noch ein Pyronring vorliegen, in dem die beiden Acetylgruppen an dem Kohlenstoff der Ketogruppe haften. In diesem Falle musste die Abspaltung der Acetylgruppen zu einem Ketoderivat führen. Die Einwirkung von Salzsäure und Schwefelsäure führte jedoch nicht zu dem gewünschten Ergebnis.



Die Abspaltung der Acetylgruppen nach Zemplen¹⁾ mit $\frac{1}{600}$ des theoretisch erforderlichen Natriums ging überhaupt nicht, wohl aber mit der theoretischen Menge in Chloroformlösung. Nach dem Verdampfen des Chloroforms bleibt ein dunkelgelbes Oel zurück, das die Fehlingsche Lösung zwar reduziert, aber wiederum kein Keto- oder Aldehydderivat bildet.

Experimenteller Teil.

I. VERSUCHE ÜBER DESMOTROPIE VON DIAZO-AMINO-VERBINDUNGEN.

p-Acetamino-diazo-monomethyl-anilin. Smp. 162°

1/100 Mol p-Acet-phenylendiamin in ca. 40 ccm Wasser gelöst, und mit 0,025 Mol HCl angesäuert wurde bei einer Temperatur von 2° mit 1/100 Mol NaNO₂ in ca. 10 ccm Wasser unter Rühren diazotiert. Das Ende der Diazotierung wurde mit KJ-Stärkepapier festgestellt. Um die Bildung der Azofarbstoffe zu verhindern, wurde die Mineralsäure durch die nötige Menge Natriumacetat (Kongorotprüfung) ersetzt. Zu der auf diese Weise von Mineralsäure befreiten Lösung wurde 1/100 Mol Monomethyl-anilin, in 50%-iger Essigsäure gelöst, bei einer Temperatur von 2° zugegeben. Das Rohprodukt besass den Schmelzpunkt von 150°; Ausbeute 63%.

Zur Feststellung des Schmelzpunktes wurde die Substanz aus Aceton-Wasser umkristallisiert. 0,1 g des Rohproduktes wurde in 3 ccm

¹⁾ B. 60. I. 171 (1927); B. 62. I. 1613 (1929).

Aceton gelöst und mit 4,5 ccm Wasser bis zur bleibenden Trübung versetzt. Die Lösung wurde mit Eis gekühlt und die ausgeschiedenen Kristalle abfiltriert. Nach dreimal wiederholter Umkristallisation hatte die Substanz den konstanten Schmelzpunkt von 162°. Weissgelbe Kristalle.

p-Amino-diazo-monomethylanilin. Smp. 89—90°

Das Ausgangsmaterial, p-Nitro-diazo-monomethylanilin, wurde nach der von Disselhof angegebenen Vorschrift dargestellt. 0,5 g des Nitrokörpers wurden in 60 ccm absolutem Alkohol unter Erwärmen auf dem Wasserbade gelöst. In die Lösung wurde bei -15° $\frac{1}{2}$ Stunde hindurch Ammoniak (über Natronkalk getrocknet) und Schwefelwasserstoff (über P_2O_5 getrocknet) bis zur Sättigung eingeleitet. Nach 12-stündigem Stehen bei Zimmertemperatur war Lösung eingetreten. Die Mischung wurde in 300 ccm Eiswasser gegossen; bei genügender Kälte scheidet sich dabei der Niederschlag rasch in gut filtrierbaren Flocken ab. Um die Zersetzung möglichst gering zu halten, wurde die Nutsche mit etwas Eis beschickt. Der Niederschlag wurde nach sofortigem Trocknen auf der Tonplatte rasch aus Aceton-Wasser unkristallisiert. Nach dem Trocknen auf der Tonplatte im Vacuumexsiccator über Calciumchlorid hatten die erhaltenen weissgelben Kristalle einen Schmelzpunkt von 89—90°.

Werden die oben beschriebenen Verhältnisse nicht streng inne gehalten, so kann eine Umwandlung in die Azoverbindung vom Schmelzpunkt 167—168° eintreten. Dieselbe Verbindung wurde auch erhalten, als 0,1 g der Diazo-amino-verbindung (89°) in acetonischer Lösung auf dem Wasserbade $\frac{1}{2}$ Stunde erwärmt wurde. Nach Zugabe von Wasser bis zur Trübung fielen bei Eiskühlung Kristalle aus, deren Schmelzpunkt bei 167—168° lag. Der Mischschmelzpunkt mit dem oben genannten Produkt ergab keine Depression.

Ausserdem kann eine weiter gehende Zersetzung eintreten, die dunkle, schmierige Produkte liefert.

Die Acetylierung von p-Amino-diazo-monomethylanilin. Smp. 89-90°

0,5 g des reduzierten Amins in 5 ccm wasserfreiem Pyridin gelöst wurden unter Kühlung mit Kältemischung mit 0,2 ccm frisch destilliertem Essigsäureanhydrid versetzt und 3 Stunden bei Zimmertemperatur stehen gelassen. Beim Versetzen der Lösung mit Petroläther bis zur Trübung wurden schmierige Substanzen erhalten. Dieselben Resultate sind auch erzielt worden beim Ausfällen mit Wasser. Alle Versuche die Substanz umzukristallisieren, misslingen, ebenso blieben Kühlung und Anreiben ohne Einfluss.

Die Acetylierung von p-Amino-diazo-p-amino-chlorbenzol. Smp. 120°.

Die Substanz wurde dargestellt durch Reduktion von p-Nitro-diazo-p-amino-chlorbenzol (Smp. 183°) mit Schwefelammonium in absolut alkoholischer Lösung nach den Angaben von Disselhof.

0,5 g der reduzierten Verbindung in 2,5 ccm Pyridin gelöst wurden mit 0,2 ccm frisch destilliertem Essigsäureanhydrid unter Kühlung mit Kältemischung versetzt und 3 Stunden bei Zimmertemperatur stehen gelassen. Bei der Ausfällung mit Petroläther wie mit Wasser wurden stets Schmierer erhalten.

II. UEBER DAS DEM ARECOLON ENTSPRECHENDE BENZYL-DERIVAT.

In der Arbeit waren grössere Mengen von Benzylamin nötig. Die Methoden von Gabriel¹⁾ und von Mason²⁾ sowie von d'Homé³⁾ waren zu teuer, die erste wegen der verhältnissmässig kleinen Ausbeute, die letzten auch unbequem wegen der grossen Mengen des als Lösungsmittel benötigten Alkohols. Die Methode der Abspaltung des Kohlenoxyds aus dem Phenylessigsäure-amid nach Hoffmann modifiziert von Hoogewerff, van Dorp⁴⁾, war am besten zur Herstellung des Benzylamins geeignet.

Man traf aber auf Schwierigkeiten bei der Darstellung des Phenylessigsäure-amids. Die von Thomas Maxwell⁵⁾ angegebene Verseifung von Benzylcyanid mit Schwefelsäureanhydrid (Monohydrat) ist nicht befriedigend. Bei dieser Art der Verseifung tritt nach Beendigung der eigentlichen Reaktion beim Erwärmen leicht eine mit heftiger Wärmeentwicklung verbundene Zersetzung ein. Der Endpunkt der Reaktion ist leicht zu übersehen, was zu grossen Verlusten in der Ausbeute führt. Mehrere Proben führten zu einer Abänderung der Darstellungsmethode, bei der das Erwärmen wegfällt. Aus vielen Versuchen erwies sich die folgende Arbeitsweise am günstigsten.

Darstellung von Phenylessigsäure-amid:

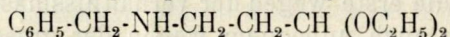
109 ccm (200 g) 95%ige Schwefelsäure werden mit 5 ccm Wasser gemischt. Die abgekühlte Lösung wird allmählich zu 98 ccm (100 g) Benzylcyanid hinzugegeben. Der Zusatz muss so langsam erfolgen, dass die Temperatur hierbei nicht über 50° steigt. Lässt man die Temperatur zu hoch steigen, so tritt eine heftige, exotherme Reaktion ein und der Inhalt des Kolbens ist dann verloren, da sich ein ganz anderes Re-

¹⁾ B. 20,2227 (1897). ²⁾ Soc. 63,1313 (1893) ³⁾ Bl. 27,739 (1902); Cr. 133,636 (1901) ⁴⁾ R. 5,253 (1886). ⁵⁾ B. 12,1764 (1879).

aktionsprodukt bildet. Die Lösung lässt man über Nacht stehen. Die hellgelbe Farbe des Benzylcyanids wird nach Zugabe von Schwefelsäure hellbraun gefärbt, über Nacht aber dunkler und zähe. Das Reaktionsprodukt wird dann in 400 g Eis gegossen, wobei sich ein weisser Brei von Phenyllessigsäure-amid abscheidet. Nach dem Schmelzen des Eises wird der Niederschlag abfiltriert und aus heissem Wasser umkristallisiert. Die Ausbeute beträgt 80—90% an reinem Produkt. Aus dem Filtrat lassen sich noch kleine Mengen des Amids durch Konzentration auf dem Wasserbade gewinnen. Beim Umkristallisieren scheidet sich ausserdem eine geringe Menge eines anderen Körpers aus, der einen niedrigeren Schmelzpunkt besitzt und dessen Löslichkeit im Wasser gering ist. Seine Untersuchung kam bei dieser Arbeit nicht in Betracht.

Das so gewonnene Benzylcyanid ist sauber und wird nach den oben angegebenen Methoden zum Benzylamin verarbeitet.

β -Benzylamino-propionaldehyd-diäthylacetal.



$\frac{1}{10}$ Mol (16,8 g) des Chlorpropionaldehyd-diäthylacetals werden mit $\frac{3}{10}$ Mol (32 g) Benzylamin unter Zugabe von $\frac{1}{200}$ Mol CuJ (0,19 g) zusammengemischt. Die Mischung wird am Rückflusskühler 8 Stunden im siedenden Wasser erwärmt. Die hierzu nötige Zeit wurde durch mit kleinen Mengen ausgeführte Vorversuche ermittelt. Die Farbe der zuerst grün gefärbten Flüssigkeit geht über gelb und braun in Kirschrot über. Später bildet sich ein grüner Brei, der aus salzsaurem Benzylamin und den gebildeten salzsauren Basen besteht. Nach dem Abkühlen werden die salzsauren Basen mit überschüssiger 50%-ger Natronlauge frei gemacht, im Scheidetrichter abgetrennt und mit Aetznatron getrocknet.

Die Basen werden im Vacuum bei 12 mm Druck der fraktionierten Destillation unterworfen und liefern folgende Fraktionen:

I.	70—80°	21 g
II.	150—158°	12 g
III.	160—170°	2 g

Im Kolben hinterbleibt noch ein dicker, dunkler Rückstand, der auch bei 1 mm Druck sich nicht mehr ohne Zersetzung destillieren lässt: Der Rückstand ist im Aether fast unlöslich, löst sich dagegen ziemlich leicht im Aceton. Bei der Destillation schäumt die Flüssigkeit stark; man muss also, um ein Uebergehen der Flüssigkeit zu vermeiden, die Destillation in einem grossen Kolben vornehmen. Bei ca. 140° sind bereits schwache Nebel zu bemerken, die scheinbar auf die Zersetzung der Ammoniumsalze zurückzuführen sind.

Die Fraktion I. wird nochmals bei gewöhnlichem Druck überdestilliert. Fast alles geht bei der Temperatur 180—183° über und enthält also den Ueberschuss von Benzylamin, der auf diese Weise zurückgewonnen wird.

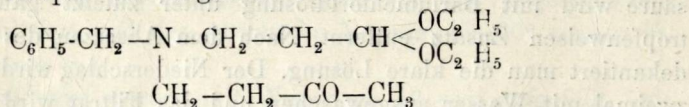
Die Fraktion II. nochmals bei 12 mm Druck destilliert geht in der Hauptmenge bei 156° über und stellt ein farbloses, im Wasser unlösliches Oel von eigenartigem Geruch dar. Seinen Eigenschaften nach ist der Körper identisch mit dem von Wohl und Wohlberg aus β -Benzal-amido-propionaldehyd-diäthyl-acetal durch Reduktion erhaltenen N-Benzyl- β -amido-propionaldehyd-diäthyl-acetal. Die Ausbeute beträgt ca. 45% der Theorie. Dieselben Versuche mit grösserer Menge des Ausgangsstoffes durchgeführt bestätigten genau dieses Resultat. Die verhältnissmässig kleine Ausbeute wird durch die gleichzeitige Bildung der tertiären Base und des Ammonium-salzes erklärt.

Die Fraktion III., welche die tertiären Basen enthalten muss, wurde im weiteren Gang der Arbeit nicht benötigt und wurde daher nicht untersucht.

Anlagerung von β -Benzylamino-propionaldehyd-diäthylacetal an Vinyl-methyl-keton.

Die Darstellung von Vinylmethylketon sowie die Anlagerung des Ketons an die secundäre Base erfolgte nach der Vorschrift von Wohl und Prill¹⁾.

3 g Base werden in 2 ccm absolutem Aether gelöst und in eine Lösung von 0,91 g Vinylmethylketon in 2 ccm absolutem Aether unter Kühlung mit Kältemischung langsam hineingetropt. Nach ca. 3 Stunden war die Reaktion vollendet und es war kein Keton-geruch mehr wahrzunehmen. Nach dem Vertreiben des Aethers bei 50° Wasserbadtemperatur im Vacuum bleibt eine hellgelbe Flüssigkeit zurück, die sich im Hochvacuum unzersetzt destillieren lässt. Die Hauptmenge geht bei 195—203° und bei 0,1 mm fast farblos über. Nach längerem Stehen färbt sich aber das so gewonnene Oel gelblich. Das Oel ist fast unlöslich im Wasser und hat einen eigentümlichen Geruch. Zur Analyse wurde die Flüssigkeit unter denselben Bedingungen nochmals destilliert. Wie sich aus der Analyse ergibt, ist der erwartete Körper von folgender Formel entstanden:



Die Ausbeute ist fast quantitativ.

0,2017 g Subst. gaben 0,5177 g CO₂ und 0,1705 g H₂O; 0,2120 g Subst. gaben 9,2 ccm N (758 mm Hg, 25°)

¹⁾ A. 440,143—144 (1924).

Ber.: C 70,34%; H 9,45%; N 4,56%

Gef.: C 70,02%; H 9,39%; N 4,57%

Verseifung und Ringschluss der Anlagerungs- verbindung.

a) Mit Salzsäure

1 Teil mit Kältemischung gekühlter Anlagerungsverbindung wird in 1 Teil ebenso gekühlter rauchender Salzsäure langsam unter Umschütteln eingetropft. Nach 2-3 stündigem Stehen der Mischung bei gewöhnlicher Temperatur wird sie im Vacuum bei einer Wasserbadtemperatur bis zu 50° zur Syrupkonsistenz eingeengt. Ein Teil des erhaltenen Produktes über Schwefelsäure im Vacuumexsiccator über Nacht stehen gelassen kristallisiert nicht. Ein anderer Teil auf dem Wasserbade auf 90° erwärmt, rasch abgekühlt und mit absolutem Alkohol angerieben kristallisiert am Rande erst nach 1-2 Wochen. Die Ausbeute an Kristallen war sehr klein und das Produkt war braun gefärbt. Wegen der syrupartigen Beschaffenheit der Mutterlauge liessen sich die Kristalle nur durch Aufstreichen auf Ton gewinnen.

Der durch Destillation nicht gereinigte Anlagerungskörper kristallisiert nach der Verseifung mit Salzsäure sogar nach ein paar Monaten nicht. Das Produkt erstarrte nach 6 Monaten zu einer dicken Masse; wurde diese mit Wasser angerieben, so schied sich ein weisser Niederschlag aus. Die Menge war aber so klein, dass eine weitere Untersuchung nicht ausgeführt wurde.

Das Verseifungsprodukt hatte einen Rohschmelzpunkt von 245°. Nach mehrfachem Umkristallisieren aus Amylalkohol hatte die Substanz einen Höchstschmelzpunkt bei 251°.

b) Mit verdünnter Schwefelsäure

1,5 g des Anlagerungsproduktes werden zu 3 ccm 50%-iger Schwefelsäure unter Kühlung mit Kältemischung und unter Umschütteln langsam zugetropft. Beim Zusammenmischen erwärmt sich die Lösung. Die Mischung wird dann 24 Stunden sich selbst überlassen. Die Schwefelsäure wird als Bariumsalz entfernt. 2/3 werden mit Bariumhydroxyd neutralisiert (gesättigte Lösung in der Wärme). Der Rest der Schwefelsäure wird mit Bariumchloridlösung unter zuletzt ganz vorsichtigem, tropfenweisen Zusatz entfernt. Nach dem Absetzen des Niederschlages dekantiert man die klare Lösung. Der Niederschlag wird auf der Nutsche zweimal mit Wasser ausgewaschen und das Filtrat wird zusammen mit der klaren Lösung im Vacuum bei einer Wasserbadtemperatur bis 50° zu einem Volumen von 3-4 ccm eingedampft. Nach dem Erhitzen auf dem Wasserbad auf 90° wird die Lösung möglichst rasch abgekühlt, wobei sich sofort die weissen Kristalle abscheiden. Falls sich keine Kri-

stalle abscheiden, muss die Lösung weiter im Vacuum bei Wasserbadtemperatur bis 50° eingengt werden. Das Filtrat von den ersten Kristallen wird wiederum auf dieselbe Weise behandelt und es lassen sich so die Kristalle 3-4 mal sofort abscheiden. Die Kristallisation des Restes ist schwieriger, die Lösung wird dunkler und dickflüssiger und die Kristalle immer kleiner und dunkler. Die letzte Mutterlauge erwärmt und abgekühlt kristallisiert erst nach mehreren Stunden. Der dabei entstehende Kristallbrei wird auf Tonplatten gestrichen, da er sich nicht abfiltrieren lässt. Das Erwärmen auf dem Wasserbade darf nur kurze Zeit dauern, da sich sonst die Lösung dunkel färbt und die Kristallisation erschwert wird. Die Kristalle lassen sich aus Amylalkohol umkristallisieren und bilden die weissen Nadeln vom Schmelzpunkt 251°.

Zur Analyse wurde die Substanz zur Entfernung der letzten anhaftenden Teile von Amylalkohol aus Aethanol umkristallisiert.

0,1574 g Sbst. gaben 0,3870 g CO₂; 0,1023 g H₂O

0,1483 g Sbst. gaben 7,3 ccm N (753 mm Hg, 21,5°)

Ber.: C 66,66%; H 7,14%; N 5,56%

Gef.: C 67,06%; H 7,22%; N 5,5%

Kondensation von Glykolaldehyd mit Aceton.

Zur Darstellung des Glykolaldehyds wurde so verfahren, dass das nach Lieben¹⁾ gewonnene Chlor-acetaldehyd-diäthylacetal nach Wohl und Emmerich²⁾ verseift wurde. Die Ausbeute an Chlor-acetaldehyd-diäthylacetal betrug 75% der Theorie und die Ausbeute an daraus hergestelltem Glykolacetal 30%. Die Verseifung des Acetals wurde in Acetonlösung vorgenommen.

7 g des Glykolacetals in 30 ccm Aceton gelöst werden mit 0,17 ccm konzentrierter Schwefelsäure und 1,8 ccm Wasser versetzt und 24 Stunden sich selbst überlassen. Nach dieser Zeit war die Reaktion beendet, wie der Titrationswert mit Fehlingscher Lösung zeigte. Da jedoch eine Methode zur Bestimmung des Glykolaldehyds nicht vorlag, musste er in Substanz dargestellt werden trotz der beim Abdampfen des Acetons eintretenden Verluste. Die Schwefelsäure wurde durch vorsichtige Neutralisation mit Bariumcarbonat beseitigt, das abgeschiedene Bariumsulfat abfiltriert und das Aceton im Vacuum bis 30° verdampft. Die Ausbeute betrug 2 g.

2 g Glykolaldehyd wurden mit Wasser zu 10 ccm aufgefüllt, mit 30 ccm Aceton zusammengemischt und mit 0,4 ccm n/1 NaOH versetzt. Nach 24 Stunden wurde das Aceton auf dem Wasserbade entfernt und dann im Vacuum destilliert, solange die Destillation ohne Zerset-

¹⁾ A. 146,192 (1868). ²⁾ Z. physiol. Chem. 384,135 (1903).

zung vor sich ging. Der Rückstand wurde mit derselben Gewichtsmenge Acetylchlorid übergossen. Nach beendeter Reaktion wurde der Ueberschuss im Vacuum abdestilliert. Das erhaltene Produkt bildete eine zähe Masse, die sogar nach dem Anreiben mit der von Wohl und Prill dargestellten Acetylverbindung nicht zur Kristallisation zu bringen war.

Spaltung der von Wohl und Prill dargestellten Acetylverbindung.

a) Mit Säuren.

Beim Erwärmen der Acetylverbindung mit schwachen oder starken Säuren war zwar ein starker Geruch nach Essigsäure wahrzunehmen, es liess sich jedoch ebenso wie bei dem ursprünglichen Körper kein Keton abscheiden. Die Acetylverbindung gab zwar beim Erwärmen mit salzsaurem 2,4-Dinitro-phenylhydrazin einen gelatinösen Niederschlag nach dem Erkalten, der sich aus Alkohol umfällen liess; die Analysenergebnisse waren aber nicht einwandfrei. Es lag wahrscheinlich ein Gemisch von unveränderter Acetylverbindung mit Dinitro-phenylhydrazin und noch einem Stoff vor, die sich nicht voneinander trennen liessen.

b) Mit Natrium nach Zemplen.

Eine Lösung von 2 g Acetylverbindung in 2 ccm Methylalkohol wurde mit einer Lösung von 1/600 des theoretisch erforderlichen Natrium-methylats in 8 ccm Methylalkohol unter Kühlung in einer Kältemischung vermischt. Es konnte keinerlei Reaktion beobachtet werden.

Die Reaktion ging aber mit der theoretischen Menge von Natrium-methylat; 2 g der Acetylverbindung wurden in 5 ccm Chloroform gelöst und unter Kühlung mit Kältemischung mit der theoretischen Menge (1,08 g) Natrium-methylat in 10 ccm Methylalkohol unter Schütteln versetzt. Es scheidet sich ein weisser Körper aus. Nach 10 Minuten wird das Reaktionsgemisch mit 20 ccm Wasser versetzt und geschüttelt bis sich alles gelöst hat. Nach Zersetzung des Zwischenproduktes mit 2 ccm Essigsäure wird die wässrige Schicht abgetrennt. Sie wird nochmals mit Chloroform ausgeschüttelt. Das Reaktionsprodukt befindet sich fast ganz in der Chloroformlösung. Nach dem Abdampfen der vereinigten Chloroformlösungen auf dem Wasserbade blieb eine braune, ölige Flüssigkeit zurück. Das Oel reduziert Fehlingsche Lösung, gibt aber weder ein Aldehyd- noch ein Keton-derivat.

zung vor sich ging. Der Rückstand wurde mit derselben Gewichtsmenge Acetylchlorid übergossen. Nach beendeter Reaktion wurde der Ueberschuss im Vacuum abdestilliert. Das erhaltene Produkt bildete eine zähe Masse, die sogar nach dem Anreiben mit der von Wohl und Prill dargestellten Acetylverbindung nicht zur Kristallisation zu bringen war.

Spaltung der von Wohl und Prill dargestellten Acetylverbindung.

a) Mit Säuren.

Beim Erwärmen der Acetylverbindung mit schwachen oder starken Säuren war zwar ein starker Geruch nach Essigsäure wahrzunehmen, es liess sich jedoch ebenso wie bei dem ursprünglichen Körper kein Keton abscheiden. Die Acetylverbindung gab zwar beim Erwärmen mit salzsaurem 2,4-Dinitro-phenylhydrazin einen gelatinösen Niederschlag nach dem Erkalten, der sich aus Alkohol umfällen liess; die Analysenresultate waren aber nicht einwandfrei. Es lag wahrscheinlich ein Gemisch von unveränderter Acetylverbindung mit Dinitro-phenylhydrazin und noch einem Stoff vor, die sich nicht voneinander trennen liessen.

b) Mit Natrium nach Zemplen.

Eine Lösung von 2 g Acetylverbindung in 2 ccm Methylalkohol wurde mit einer Lösung von 1/600 des theoretisch erforderlichen Natrium-methylats in 8 ccm Methylalkohol unter Kühlung in einer Kältemischung vermischt. Es konnte keinerlei Reaktion beobachtet werden.

Die Reaktion ging aber mit der theoretischen Menge von Natrium-methylat; 2 g der Acetylverbindung wurden in 5 ccm Chloroform gelöst und unter Kühlung mit Kältemischung mit der theoretischen Menge (1,08 g) Natrium-methylat in 10 ccm Methylalkohol unter Schütteln versetzt. Es scheidet sich ein weisser Körper aus. Nach 10 Minuten wird das Reaktionsgemisch mit 20 ccm Wasser versetzt und geschüttelt bis sich alles gelöst hat. Nach Zersetzung des Zwischenproduktes mit 2 ccm Essigsäure wird die wässrige Schicht abgetrennt. Sie wird nochmals mit Chloroform ausgeschüttelt. Das Reaktionsprodukt befindet sich fast ganz in der Chloroformlösung. Nach dem Abdampfen der vereinigten Chloroformlösungen auf dem Wasserbade blieb eine braune, ölige Flüssigkeit zurück. Das Oel reduziert Fehlingsche Lösung, gibt aber weder ein Aldehyd- noch ein Keton-derivat.

Надволжанські фіни в краніологічному освітленні.

Східня Європа не виступав на історичну арену в один час. З цього погляду її можна поділити на дві частини: південну — степову й північну — лісисту. Перша була від непам'ятних часів тереном, котрим пересувалися ряди кочовиків з Центральної Азії, задержуючися на ній довше або коротше, залежно від того, чи були досить сильні, щоб відперти дальші ряди орд, які наступали на їх плечі, орд, часто споріднених з ними. А що вже в ранній історичній добі були над берегами Чорного моря гелленські колонії, то й не диво, що про ці всі переміни ми маємо досить докладні відомості, починаючи Гесіодом, Арістархом та Геродотом, а кінчаючи Тацитом, Страбоном та Аміяном Марцеліном, не вчисляючи багато інших, що подавали деколи дуже цікаві вістки про північно-східню колонію римської імперії. Кімери, Скити, Сармати та Аляни з індоєвропейців, Гуни, Авари та Болгари з центрoазіятів — це частина плеяди прізвищ, що вишовнюють хроніки гелленських та римських істориків.

Не так мається справа з північними народами, до котрих купці та войовники дуже рідко доходили, вдоволяючися тільки переказами, що кружляли поміж народом, але ж майже завжди мали легендарно-мітичний характер. Тут грали ролю одноокі велити, грифи, безкраї пустині та самоцвіти, але ж із цих фраз тяжко дошукатися історичної істини. Тимто можна здогадуватися, що вандрівники не тільки рідко доходили на північ, але й навпаки: з півночі мало хто їхався до культурних осередків, котрі в іншому випадку могли були спокушувати своїм багатством злидених, але хоробрих номадів. Коли ми не бачимо ані перед нашою ерою ані пізніше північних міграцій, і то не таких грандіозних, що виливалися через браму народів, а куди менших, то мусимо зробити висновок, що на півночі етнічні відносини були умовно спетрифіковані, бо ж Сибір взагалі мало впливав на зміну складу північних народів.

Потвердження такої тези находимо і в старинних істориків. За північних сусідів скитів вважає Геродот (виключаємо венедев, що, як доказано, були слов'янами) андрофагів, мелянхленів і будинів. Ці саміські назви подибуємо й багато століть пізніше в Аміяна Марцеліна (IV. ст. нашої ери) „...за ними, кажуть, кочують в порізних місцях мелянхлени й андрофаги, що живляться людським мясом; усі сусідні народи покинули їх через їх нелюдський спосіб відживи й відійшли в далекі землі“. Як відомо, Аміян згадує назви народів тільки знад Чорного моря і повпорює старі назви Геродота для північних народів, а це певне стояло у зв'язку з тією петрифікацією відносин, що про неї ми згадали раніше. Цій петрифікації сприяла і лісиста околиця, не пригідна ні для кущців ні для південних кочовиків.

Такі відносини тривали так довго, доки тяглася міграція іранських народів: скитів, сарматів та алянів. В IV. ст. нашої ери починається міграція східних слов'ян, (готів при розгляді пропускаємо, бо вони дійшли до більш південних сторін), як це твердить Грушевський, починаючи скору колонізацію східних областей. Потверджують її й антропологічні досліді, як це можна міркувати зі слів Богданова, який довгоголову расу — нема сумніву, що тут можуть тільки два найчисленніші європейські типи входити в рахубу: нордійський і левантійський, що в високому проценті виступали в давніх слов'ян — стверджує у південно-західних околицях аж по Мюскву та озерний басейн. Ця колонізація це властиво експансія молодого сильзого племені, що поширює границі своїх впливів, бо властива колонізація, цебто висилані грмади з метрополій починається куди пізніше й припадає десь на XI—XII вік. Найстаршими колоніями в тому розумінні були: Ростов, Суздаль, а то й радимичів та в'ятичів треба б уважати за таких конквістадорів. Дещо пізніше колонізація приймає ще інший характер. Вона має вже не так торговельні чи експансивні ціли, а є власне більше відворотом у ліси перед дикими кочовиками, що випадали раз у раз із брами народів і закладали свої оселі над берегами рік: Уралу, Волги, Дону та Дніпра. Чи передтим аналогічно не поступали так і іранські кочовики, це повинні доказати антропологічні досліді.

Найвизначнішими представниками таких орд, що добилися в першому тисячолітті досить далеко на північ, є надволжанські болгари й хозари. Саме на той час припадає розквіт арабської могутности, що її сліди тягнуться поза північний Кавказ і що увійшла була вже у традицію, як про це свідчать культурні остан-

ки з місцевости болгар у казанській губернії. Але ці впливи не є тривалі, не вважаючи на дороги соболі та срібні лиси, так модні на тодішніх дворах арабських каліфів. Тимто, хоч як сильно перехресцуються тепер впливи різних центрo-азійських, малоазійських та центрo- а навіть північно-європейських народів (бож і варяги починають у тому часі запускатися на південний схід на своїх легких човнах, шукаючи дороги до Багдаду) — північні племена, що не жили ще досі історичним життям, виступають уже на історичну сцену, хоч, на нашу думку, з тою самою фізіономією, що перед століттями. Ще найбільшу зміну в антропологічному розумінні могли внести хозари, що жили над Озівським морем, але політично займали край між Волгою й Окою. Та хоч вони займали й далекі західні країни поза Дніпро, але ми там не подибуємо ані сліду їх антропологічного впливу. Це зрозуміле, бо ж політична організація, при малім розмірно адміністративнім апараті не може вносити жадних змін у антропологічному розумінні. Коли не подибуємо таких впливів і в безпосередніх сусідів хозар, у алянів, то не можемо їх подибати і в північних племен. Вони зіткнулися із хозарами приблизно в VIII. столітті, бож у VII. хозари жили над берегами Каспійського моря, а потім той зв'язок уривається.

Ці та інші причини витягли фінсько-угрійські племена на історичну сцену аж у так пізньому часі, хоч жили вони вже на своїх територіях від найдавніших часів у таких границях: Урал зі сходу, Льодове море з півночі, Балтійське море з заходу, а з півдня лінію лісу, як на це вказують старинні історики, дарма що Тацит своїх „Фенні“ уміщує далеко на Заході! Зі слов'янами фіни зійшлися около 600. р., як це можна міркувати з первісности запозичених висловів. В тому саме часі вони втрачають зв'язок із алянами, його переривають турецькі орди, що їх наслідниками тепер є чуваші. Зв'язок зі слов'янами мав вирішений вплив на історичну долю фінів. Це заслуга київського літописця, що він увів їх до історії. Він знає такі їх імена: між Волгою та Окою — Мордва, над долиньною Окою — Муром, над крайною Муромі — Меря, а далі на північ — Вєсь. Тепер живуть там череміси, в околицях Вятки, це так звані надволянські фіни, та пермяки в північній околиці, що мають за сусідів вотяків. Нема чого сумніватися, що це ті самі народи, які виступали іще в старовину під легендарними назвами, хоч вони дещо змінилися останніми часами через слов'янську колонізацію. Кажу дещо, бо, як доказують антропологічні досліді

1) Матеріялы по археологiи Россiи. Ч. 26. стор. 23.

над східними фінами, їх фізіономія улягла лише дрібним відхи-
лам, не вважаючи на такі великі зовнішні переміни.

Зводячи легендарні імена старовинних істориків із тепе-
рішніми фінськими назвами, ми послуговувалися здогадами То-
машка. Томашек ідентифікує черемісів із андрофагами та мелянхле-
нами, вотяків і зиріян з будинами. Його докази здебільша лінгві-
стичні (напр. назва пермських вотяків, що називають себе „Уди“,
малаб походити від вотяцького слова ву (вода). Приймаючи цю гіпо-
тезу ми водночас мусимо прийняти, що будини емігрували в більш
північні околиці під напором чорноморських кочовиків, бо Геродот,
хоч і вміщує їх в лісних околицях, то далеко більше на південь,
ніж їх теперішні садиби. При цьому варто звернути увагу на фізич-
ну характеристику тих північних геродотових народів. Геродот опи-
сує будинів як — *ἔθνος γλαυκόν τε πάν ἰσχυρῶς ἐσσι καὶ πυρρόν*¹⁾.
Гіпократ для скитів подає ідентичну, аж дивно, характеристику:
„*Πυρρόν δὲ τὸ γένος ἐστὶ τὸ Σκυθικόν*...“²⁾ Виходилоб, що
між обома народами сутньої різниці нема!! В обох випадках маємо
до діла з нордійським описом яснооким і та ясноволосим. Одначе
дальший опис тіла скитів у Гіпократа не підходить під характери-
стику північного типу, він нагадує більше ценроазійський. Що він
виступав у скитів — що до того сумнівів нема, бож і вони мігрували
в 7. столітті з Центральної Азії. Цей здогад потверджують і мірку-
вання Арістотелеві: *διὰ τὴ Αἰθιοπες μὲν οὐλότριχες, Σκύθαι δὲ καὶ οἱ πρὸς
ἄρκτον ἐσθύτριχες*³⁾. Тут ми мали простоволосість скитів, андро-
фагів, мелянхленів та будинів, бо Арістотель міг мати на думці
тільки цих останніх, пишучи „*οἱ πρὸς ἄρκτον*“. Якже тоді погодити
іранських скитів, які могли мати азійську домішку, з фінами з їх
передовсім азійським характером? Пояснити собі цю справу ми
зможемо тільки тоді, коли відділимо один від одного обидва висло-
ви, яких уживають у характеристиці Геродот і Гіпократ: „*γλαυκόν*“
та „*πυρρόν*“. і приділимо їх до цілком різних морфологічних
однот. Але й тоді характеристика старовинних буде тільки вказів-
кою на те, чого нам можна і слід сподіватися при антропологічних
аналізах, коли брати до помочі модерний апарат. Що між народами
північно-східньої Європи і тим самим і між надволжанськими
фінами, були представники нордійського типу, в тому нічого див-
ного нема, бож скити були аж надто близькі їх сусіди, щоби протя-

1) Цитую за В. В. Латішевм: Извѣстія древних писателей о Скитіи
и Кавказѣ. С. Петербург. 1896.

2) op. cit.

3) op. cit.

гом століть до них не дібралися представники ясних блондинів, хоч би вже навіть наслідком воєнних заверюх у степах. Тут справа тільки в процентовому відношенні. Я міркую, що і знаменитого історика і знаменитого природника збили з пантелику психологічні наставлення: вони-ж як геллени уважали за справжніх людей тільки гелленів, а тим часом у своїх подорожах стрінули й серед диких таких самих яснооких, яких бачили в себе в Гелладі й записали це як різке явище. Прикмета простоволосости тих народів у Арістотеля наводить на думку, що прикметник „*πυρρόν*“ краще віднести до барви шкіри, ніж волосся, бо ж волосся як „*πυρρόν*“ було б скоріш „руде“, ніж „золотисте“, ясне, а рудих узагалі подибується небагато, але ж зате бувають вони скрізь і ні Геродот, а тим менше Гіпократ не потребували б аж цього зокрема підносити. Таким чином шкіра більш підходить під поняття, тай самі геллени, (крім поетичної мови не вживали на означення ясного волосся²⁾ терміну *πυρρόν*.

Подібні психологічні наставлення подибуємо і в пізніших істориків. Амیان Марцелін описує алянів як приналежних до нордійського типу, хоч Гіпократ ще до нього описує фазіянів¹⁾ як чисто кровних монголів. Бо ж як, коли не психологічними наставленнями можна собі пояснити те, що серед сучасних східніх фінів ледви 3.6 процент ясно-, а аж 86 процент темноволосих? Отже тільки упередження до всяких „однооких“, „вошоїдів“³⁾ вирішило про повстання характеристики, яку дехто хотів би поширити на цілу південно-східню Європу. Розуміється, що простоволосий (Арістотель) і жовтошкірий (Геродот, Гіпократ) тип, т. зн. центр-азійський, витиснули пізніше зовсім європейські елементи: у скитів він як напливовий і малочисельний, зникає розмірно рано, а в андрофагів, мелянхленів і будинів задержався по сьогодні.

Виступає тут протилежна субституція: жовтий елемент міг бути заступлений тільки там, де ті елементи, що субституували, могли взагалі бути передовсім на чорноморських степах. Антропологічні досліді над краніологією скитів указують на велитенську перевагу в них північного типу. Як побачимо пізніше, протилежне становище займають „узагалі народи півночі“ в Арістотеля, де

1) Фазіяни — мешканці в над ріки Фазиди; уміщували її в різних часах по обох боках Кавказу. Отже мала вона мігичне забарвлення. Імовірно була це Кубань, Гінаніс. над котрою мешкали східні скитські орди: сармати та аляни.

2) ξανθός, ясноволосий, русявий.

3) φθειροφάγοι.

стрічаємо передовсім азійські елементи, і ця тамошня первісність типів задержується на цілі століття. Для нас дуже цікаве те, що на цю субстанцію звернув свою увагу й геніяльний Гіпократ! Він каже, що від „скіснооких здебільшого родяться скіснооки“. Далі інформує він нас про штучну здовженість голови, але додає, що „цей звичай не має вже сили через помішання довгоголових із іншими“ т. зн. з короткоголовими, від котрих одначе почали родитися довгоголови! Уважаючи модерної номенклятури: генетика й селекція були чинниками у згаданій вище субституції. Довгоголовість Гіпократа вияснює нам і причину помилок старовинних при описі ясного типу. Довгоголовість, на думку Гіпократа вважалася за шляхотнішу породу. Це було прикметне для раси володарів, а чужинці стрічалися безпосередно, переважно, коли не виключно, саме з ватажками, і тільки посередно з їх підданими, в яких бичили те, що найбільше впадало в око — шкіру.

З наведених міркувань виходить, що вже старовинні звернули увагу на існування нордійських і азійських елементів у Східній Європі. Наше завдання показати, яку антропологічну підставу у східних фінів могли мати їх погляди.

КРАНІОЛОГІЧНИЙ МАТЕРІЯЛ.

Краніологічний матеріал, що ми його проаналізували при допомозі статистичних метод, походить передусім із могили в селі Малий Полом вятської губернії; — тільки два черепи (чч. 1256 і 1255) взяті з могили в симбірській губернії. На підставі археологічних находів означено їх вік на IX. століття нашої ери. Як виходить із уводу, ці черепи можемо віднести до надволяжанських фінів. Матеріал проаналізовано при допомозі методи подібностей й різниць. Осягнувши ідентичні висліди, публікуємо тільки матеріал опрацьований методом різниць, бо він обіймає собою цілість.

„Оборник Музея Антропологии и Этнографии“, том VIII., стор. 239—252, містить праці Г. Ф. Дебеца: „Черепи из финских могильников“, де автор опублікував і пробував проаналізувати матеріал, що є предметом і нашої розправи. Здається, Г. Ф. Дебец відкинув а пріорі методу різниць, бо вона, як він каже, „не может дать ущутительных результатов, когда типы резко различны по количеству“. Через те він користувався краніоскопійною методою, на підставі котрої подав загальну характеристику цілої групи черепів, відділяючи від неї тільки черепи ч. ч. 1333 і 1322.

Опублікований матеріал має велике значіння для краніології

Східної Європи не тільки з огляду на свій час, але ще й тому, що з того самого віку маємо серію алянських черепів, майже сусідніх під географічним оглядом. Перевести докладне порівняння обох матеріалів можна тільки так, що розібемо й фінську групу на поодинокі расові елементи та знайдемо їх процентове відношення між собою, бо щоб ціла група крім двох вичислених черепів, виявляла той самий тип, як цього хоче Г. Ф. Дебец, можна було вже наперед сумніватися.

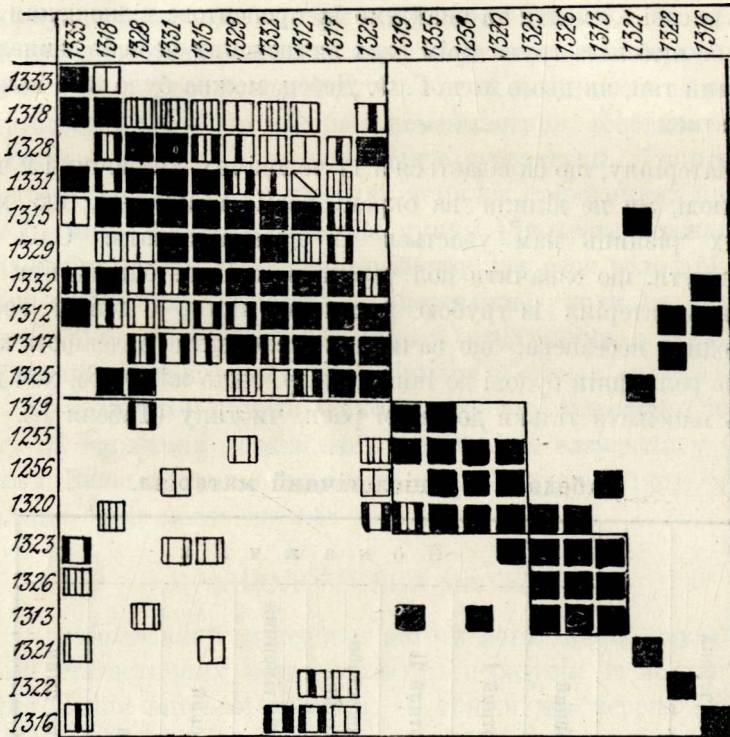
Матеріалу, що складається з 11 чоловічих 7 жіночих і 2 черепів молоді, ми не ділили на окремі серії, вважаючи, що мимо полових різниць нам удасться їх проаналізувати. Слід тут підчеркнути, що означити пол черепа в серії, де більше ніж 50% становить матеріал із грубою й тяжкою кістю, є доволі тяжк), бо заходить небезпека, що зачислимо елементи з легкою кістю і менше рельєфній будові до іншого полу, себто жіночого, хоч вони будуть належати тільки до іншої раси, чи типу (Табеля І.).

Табеля І. Краніологічний матеріал.

Число черепа	Пол	Показчик							
		головний	висотний I	висотний II	широкостево-висотний	чолово-тім'яний	лицевий	носа	очних ямки
1333	—	—	—	—	—	60·3	52·2	44·9	84·6
1318	—	77·6	—	60·9	—	63·3	—	—	78·9
1328	—	77·1	74·5	63·3	96·5	69·7	47·5	58·1	76·2
1331	—	74·7	72·5	64·9	97·0	65·4	—	—	—
1315	—	77·2	—	64·5	—	66·1	—	—	—
1329	—	79·2	72·5	65·2	91·5	66·7	51·5	56·0	71·1
1332	—	79·9	73·2	64·2	91·6	65·7	—	—	—
1312	—	81·4	74·5	64·4	91·6	67·4	48·3	50·0	79·5
1317	—	79·7	74·7	65·9	96·8	68·3	48·6	50·9	73·2
1325	—	79·1	—	60·4	—	69·7	47·4	51·6	75·6
1319	—	71·6	—	—	—	73·7	47·2	55·3	77·8
1255	—	72·3	69·2	60·5	95·7	73·1	52·2	54·9	76·2
1256	—	74·1	72·4	58·9	97·8	74·5	51·8	49·6	73·8
1320	—	73·1	—	59·1	—	68·4	—	—	—
1323	—	75·3	—	63·7	—	71·0	55·8	52·1	84·9
1326	—	73·3	76·1	62·8	103·9	72·6	55·4	51·9	84·6
1313	—	75·8	76·3	61·6	100·7	75·0	—	—	—
1321	—	77·6	83·8	69·8	107·9	69·1	50·7	47·2	74·4
1322	—	87·2	—	66·6	—	67·4	—	48·1	76·2
1316	—	83·2	—	65·9	—	67·6	—	53·6	85·0

АНАЛІЗА МАТЕРІАЛУ.

У склад аналізованого матеріалу увійшло 20 черепів, найменші їх різниці з'ясовані на діаграмі ч. 1 і рисунку ч. 1. Ділиться



Діаграма ч. 1.

він на три виразно зарисовані групи; три черепи, що залишилися, творають собою різко відділені елементи, що нав'язуються своїми вартостями до першої групи. Слабі нав'язання першого блоку черепів порозкидані по цілому полі, тісніше лучаються між собою черепи другого та третього блоку, де центральне місце займає череп ч. 1320, дуже ймовірно, з огляду на брак більшої кількості покажчиків.

До першого блоку увійшло 10 черепів (50.0%) від ч. 1333 до ч. 1325. До черепа ч. 1333, поза дев'ятою вартістю черепа ч. 1318, не маємо жадних нав'язань, хоч сам череп лучиться з групою досить сильно. Механічна сполука елементів наступила внаслідок сильного ушкодження черепа ч. 1333, де дивним дивом збереглася тільки лицева частина.

Цей череп вирізняється від цілої групи своїм вузьким чолом (60.3), довшим лицем (52.2), найвузчим у цілій серії носом (44.9)

та високими, як на нашу серію, очними ямами (84.6). Середня арифметична характеризує їх як середньо довгі, середньо високі і не

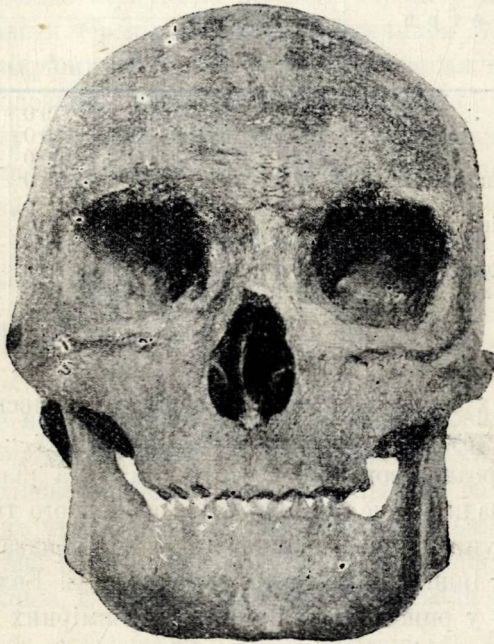


Рисунок ч. 1.

значно широкі, з низьким, широким носом, середньо високими очними ямами та помірним чолом (Табеля II.).

Табеля II. Середні типів.

Показчики	Т и п и					
	п	р	а	ι	λ	τ
Головний	78.4	72.8	74.8	77.6	87.2	83.2
Висотний I	73.7	70.8	76.2	83.8	—	—
„ II	63.7	59.5	62.7	69.8	66.6	65.9
Шир.-висотний	93.7	96.8	102.3	107.9	—	—
Лицевий	49.3	50.4	55.6	50.7	—	—
Носа	51.9	53.3	52.0	47.2	48.1	53.6
Очних ямин	77.1	75.9	84.8	74.4	76.2	85.0
Чолово-тімений	66.3	72.4	72.9	69.1	67.4	67.6

В абсолютних розмірах відзначається ця група значною довжиною черепа (179.9) й шириною (140.6), невеликою висотою (132.3) найнижчою в цілм матеріялі, найвужчим чолом (92.8) й (115.6), низьким лицем (65.2), але широким (193.7 і 132.5) та середнім обємом черепа (1367.4) (Табеля III.).

Табеля III. Діаметри типів.

Діаметри	Т и п и					
	π	ρ	α	ι	λ	τ
Довжина	179.9	185.5	181.3	179.0	165.0	167.0
Ширина	140.6	135.0	135.7	139.0	144.0	139.0
Висота	132.3	134.5	141.0	150.0	—	—
Найменша ширина чола	92.8	97.8	99.0	96.0	97.0	94.0
Найбільша " "	115.6	114.8	115.7	—	124.0	109.0
Висота горіш. лица "	65.2	67.7	69.5	72.0	68.0	52.0
Ширина " "	103.7	109.0	102.5	108.0	105.0	97.0
Ширина щоки	132.5	134.0	125.0	142.0	—	—
Об'єм черепа	1367.4	1392.7	1314.0	1451.0	1244.0	1222.0

Виділені середні ми порівнювали з іншими й європейських і азійських елементів. До порівняння вживали ми в першому випадку середніх краніологічного матеріалу львівської козацької могили¹⁾, у другому монгольського матеріалу, опублікованого Райхером²⁾ проаналізованого С. Клімком³⁾. Та різниці і в однім і в другім випадку є, не сутні супроти азійського типу, палеоазійського π , як супроти преслов'янського β , хоч обидва ці типи, як це вже доказали інші антропологи, наприклад Е. Бельц⁴⁾, а за ним С. Клімек³⁾, і у описових прикметах і в вимірних істотно не різняться між собою. Ми рishаємося тут означити описані групи палеоазійським типом. Дуже можливо, що череп ч. 1333 належить до тихоокеанського типу ξ , як це можна вносити з його показчиків, так різних від показчиків палеоазіятів; щоб тут рishитися, треба оглянути його описові прикмети (Табеля IV.).

Табеля IV. Типові черепи козацької могили.

Показчики	Т и п и				
	α 657	ρ 613	β 653	$\gamma(\lambda)$	λ 608
Головний	74.2	73.2	79.7	83.3	90.7
Висотний I.	75.6	73.2	68.7	75.1	76.7
" II.	69.8	65.6	68.7	—	75.0
Шир.-висотний	99.3	97.0	86.2	90.6	84.6
Чолово-тімений	68.2	70.9	67.6	67.1	58.3
Лицевий	54.6	54.2	50.8	54.6	45.3
Носа	47.9	51.1	54.7	49.9	58.7
Очних ямин	84.6	75.0	71.7	85.5	69.8

¹⁾ R. Jendyk, Analiza kranjologiczna lwowskiej mogily kozackiej, Kosmos, 1931

²⁾ M. Reicher, Untersuchungen über die Schädelform der alpenländischen u. mongolischen Brachycephalen, „L. Morph. Anthr.“ XVI.

³⁾ S. Klimek, Studja nad kranjologją Azji półn., środ. i wsch., Kosmos 1928.

⁴⁾ E. Baelz, Menschenrassen Ostasiens mit spezieller Rücksicht auf Japan, „Zeitschr. f. Ethnol.“ XXXIII.

У склад другого бльоку ввійшло 4 черепи (20%): від числа 1319 до 1320. Череп ч. 1319 займає в цьому бльоку становище на крилі; з цього можна міркувати, що його характер мішаний. Різняться він від решти черепів головним показником (71.6) нижшим лицем (47.2) та ширшим носом (55.3). Читання показників у цьому типі є такі: в головному між 71.6 — 74.1, висотному I між 69.2—72.4, в висотному II між 58.9—60.5, в широкостево-висотному, 95.7—97.8, в голово-тімennomу між 68.4—74.5, в лицевому між 47.2—52.2, в показнику носа між 49.6—55.3, в показнику очних ямин між 73.8—77.8. Порівнюючи цей тип із виділеними елементами в інших популяціях, знаходимо його найбільшу схожість із левантійським типом, від котрого його дещо різнить показник носа. Та як ми вже при іншій нагоді зазначили, в цьому показнику відзеркалюється тип, що є панівний над цілою популяцією. Спостерігаємо це явище й на Кавказі, де вузьконосіть елементів спричинена арменоїдним типом γ і в західній Європі, де зазначається вплив нордійського типу. Дуже можливо, що палеоазійський елемент саме таким чином зазначив своє спільне співжиття. Ствердження цього явища потягає за собою можливість, що обидва типи довше схрещувалися, а вслід за цим довше існували разом.

Третій блок складається з трьох черепів (15.0%) чч. 1323, 1326 і 1313. Читання показників у цьому типі взагалі майже мінімальні. Середня характеризує їх як довгоголові (74.8) зі значною висотою (76.2 і 62.7), малою шириною (102.3) з довгим лицем (55.6), широкавим носом (52.0), вищими за середні очозими яминами (84.8) та широким чолом (72.9). В абсолютних діаметрах цей тип черепів відзначається досить значною довготою (181.3), не великою шириною (135.7), зате найбільшою висотою (141.0), найширшим чолом (99.0 і 115.7), чи не найдовшим (69.5), але при тому найвужчим лицем (102.5 і 125.0) та середнім об'ємом черепа (1314.0). Є це, як бачимо, типова характеристика нордійського типу, з виїнятком показника носа, що й доказує порівняння з козацьким черепом типу α ч. 657.

Дальший череп ч. 1321 є посередньоголовий (77.6) з дуже значною висотою (83.8 і 69.8!!), при тому з малою шириною супроти до висоти (107.9) зі середнім лицем (50.7), середнім носом (47.2), низькими очними яминами та широким чолом (69.1). Така характеристика найбільше зближається до нордійсько-середземноморського мішанця північно західного типу. З азійських елементів могли б тут у рахубу входити паціфічний та ескімоський

тип, але ж значні різниці в деяких показниках, передовсім у показнику очних ямин не дозволяють прийняти таку можливість.

Передостанній череп ч. 1322 найбільш короткий (87.2) зі середньою висотою (66.6), з середньошироким носом (48.1), з помірними яминами очей (76.2) та помірним чолом (68.4). Ця характеристика насуває нам думку, що цей тип приналежний до лапоноїдного.

Останній череп ч. 1316 теж короткий (83.2), досить високий (65.9), з середнім чолом (67.6), високими очними яминами (85.0) та широким носом (53.6). Деякі прикмети можна вяснити молодим віком черепа. Дебец означив його вік як *juvenis*. Залишаючи на боці лице, цей череп містить у собі правильну характеристику краніологічного типу. Можуть тут у рахубу входити два типи: з європейських — субнордійський γ , і з азійських — центрально-азійський τ . Субнордійський тип вважають мішанцем нордійсько-лапоноїдного з вузьким носом саме навпаки, як у нашому випадку. Тому зачисляємо його як приналежного до центрально-азійського типу μ (Табеля V.).

Табеля V. Середні азійських типів.

Показники	Т п п	
	μ	τ
Головний	79.9	83.1
Висотний	70.9	69.4
Шир.-висотний	89.0	83.5
Чолово-тімений	67.5	63.2
Лицевий	52.3	52.2
Носа	51.2	53.5
Очних ямин	80.5	77.6

В *norma verticalis* творять наші типи такі форми за класифікацією Дж. Серджі: палеоазійський тип має найчислоннішу — овоїдну форму (6 *ovoides*, 2 *elipsoides* і 2 *pentagonoides*) левантійський творить еліпсоїдну форму (2 *elipsoides*, 1 *ovoides* і 1 *pentagonoides*), в нордійському типі виступають усі три згадані форми; останні три черепи такі: лапоноїдний — *sphaeroides*, північно-західні — *elipsoides*, центральноазійський *ovoides*. (Табеля VI.).

Табеля VI. Форми черепів по класифікації Серджі'ого.

Т и п и	Форма черепа в norma verticalis				Р а з о м
	Elipso- ides	Ovoides	Pentago- noides	Sphaero- ides	
Палеоазійський	2 ₍₃₎	6 _(4.5)	2 ₍₂₎	—	10
Левантійський	2 _(1.2)	1 _(1.8)	1 _(0.8)	—	4
Нордійський	1 _(0.9)	1 _(1.35)	1 _(0.6)	—	3
Північно-західний	1 _(0.3)	—	—	—	1
Лапоноїдний	—	—	—	1 _(0.05)	1
Центрально-азійський	—	1 _(0.45)	—	—	1
Разом	6	9	4	1	20

Щоб переконатися, чи покриваються расові типи із краніоскопійною характеристикою в norma verticalis, ми обчислили для них теоретично сподівані вартости, приймаючи, що між ними нема тіснішого зв'язку, чи власне в 45.0%, якщо не будемо вчислювати і тихоокеанського типу ξ на 5.0%. (Табеля VII.).

Табеля VII. Типи в процентівім відношенні.

Т и п и	%	
	Цілого матеріялу	Без муромських черепів
Палеоазійський	(45.0) 50.0	(50.0) 55.56
Левантійський	20.0	11.11
Нордійський	15.0	16.16
Північно-західний	5.0	5.56
Лапоноїдний	5.0	5.56
Центрально-азійський	5.0	5.56
Тихоокеанський	(5.0)	5.56)

Табеля дає нам образ тільки для двох типів: палеоазійського й лапоноїдного: для першого мала б бути форма, що найчастіше виступає ovoides, для лапоноїдного — sphaeroides. Інші вартости не мають значіння. Розглядаючи козацькі черепи⁵⁾ за краніоскопійною методою Серджі, ми там теж могли ствердити для лапоноїдів ту саму форму.

Збираючи висліди нашої аналізи, ми стверджуємо між фінськими черепами такі расові типи: палеоазійський π на 50.0%, левантійський ρ в 20.0%, нордійський α на 15.0%, північнозахідній ι на 5.0%, лапоноїдний на 5.0% і центрально-азійський на

⁵⁾ І. с.

5.0%. Годиться зазначити, що муромські черепи були б приналежні до левантійського типу. (Табеля VII.).

У загальних рисах характеристика, що її подав Г. Ф. Дебец, збігається з нашою в типі *γ*, з винятком передовсім висоти й чола, що їх змінив у Дебеца наш тип *α*, *ι*.

СТАТИСТИЧНА АНАЛІЗА ЧЕРЕМІСЬКИХ ЧЕРЕПІВ.

Спеціальне зацікавлення повинно збуджувати в нас питання, який антропологічний склад людности, коли не тієї самої території, то бодай сусідньої — в пізніших часах. Відповідь на це питання дає нам аналіза череміських черепів, опрацьована Ів. Раковським у праці п. з. „Кости Черемісів з давних гробів у Тоншаєві костромської губернії“. (Матеріяли до укр. етнології Т. XVII.), 1918. Львів. Цей знаменитий морфолог в обширному творі подав нам докладний образ 18 черепів, що їх походження означено на XVII—XVIII. століття. Велике значіння цих черепів для антропології фінів вияснив уже сам автор, кажучи про них на іншому місці: „Der ganze Bezirk von Wetluga ist durch Urwälder und grundlose Sümpfe von der Welt abgeschnitten, so dass die Kommunikation mit demselben auch jetzt nur während der Wintermonate möglich ist. Darum ist auch bis heute in diesen Gegenden die Russifizierung noch sehr wenig vorgeschritten, und die Bewohner dieses Bezirkes werden immer noch als Vertreter der echten Tscheremissen betrachtet“ (стор. 137). А далі йдуть такі авторові вияснення: „Die Vergleichung der anthropologischen Merkmale der oben genannten Tscheremissen-Skelette mit denen aller anderen angrenzenden Völkergruppen beweist uns, dass die Tscheremissen anthropologisch zu den Ostfinnen gehören was auch den Ergebnissen der ethnographischen und linguistischen Forschungen entspricht“ (ст. 140). Треба б сподіватися, що з нашими надволянськими фінами череміси мають бодай ту саму або подібну антропологічну фізіономію. Ясно, що внаслідок великого протягу часу нам треба числитися з деякими змінами прикмет у черепах, хоч би це була й та сама територія. Тимто нам слід увагу звернути не так на кождо прикмету зокрема, як на їх комплекс і висоту зросту, яку І. Раковський обчислив для чоловіків на 163.5 см. і 154.0 для жінок. Діється це тому, що на ізольованій території, внаслідок постійного схрещування тих самих елементів, могли повстати відхили в морфологічних прикметах антропологічних типів на загальному підкладі означеної кількості расових первнів. Коли при расовій аналізі відкинути зріст, територію, з котрої черепи

походять, то уваги автора щодо історичної перспективи, які ми подали в цитатах та нарешті ці наші власні вступні завваги, можуть нас легко звести на зовсім хибні шляхи. Не можна залишати на боці краніоскопійних та описових прикмет, які, як пізніше побачимо, матимуть для нас основне значіння.

Зібравши свої досліді, автор доходить до такої морфологічної характеристики черепів:

1.) об'єм досить малий, хоч слід їх ще зачислити до евенкефальних;

2.) вони мезатікефальні за поділом Топінара, а субдоліхокефальні за поділом Бреки, з більшим нахилом до доліхокефалії ніж до брахікефалії;

3.) неврокраніум середньовисоке, ортокефальне, але низькі й високі черепи теж трапляються;

4.) чоло помірно широке, в жінок відповідно ширше;

5.) лице в чоловіків трохи видовжене, у жінок відповідно ширше;

6.) орбіти високі й помірно широкі;

7.) ніс досить короткий і помірно широкий;

8.) щоки слабо розвинені;

9.) арогнатизм тільки слабо зазначений, черепи переважно майже ортогнатичні;

10.) порівняння аналогічних розмірів і показників у чоловіків і жінок показує, що полові різниці з правила тільки слабо зазначені.

З огляду на нерівномірну збереженість черепів ми поділили матеріал на дві частини: добре збережені й пошкоджені черепи. До першої частини ввійшли такі чоловічі й жіночі черепи: ♂ 1, 2, 3, 4, 5, 8, ♀ 12, 13, 14, 15, 16; 17; дитячого черепу ми не брали взагалі до расової аналізи з огляду на його дуже малий вік: 6 років. (Табеля VIII.). Означивши расову приналежність добре збережених, ми порівнювали всі інші черепи з виділеними середніми, а потім із найбільш характеристичними черепами даного типу, влючуючи їх або вже до існуючого расового типу, або створюючи новий, як воно сталося з черепами ч. ч. 6, 7 і 11.

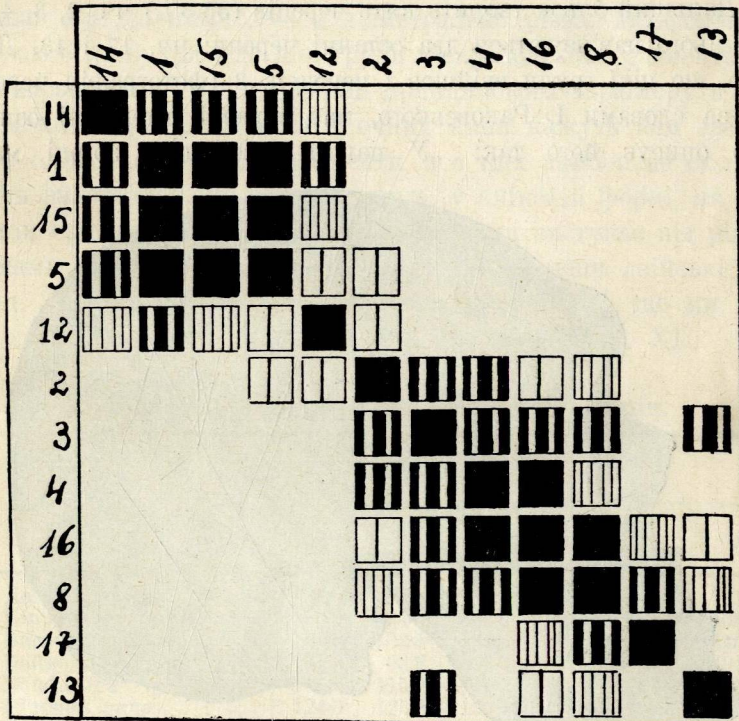
Статистичну аналізу ми перевели методом подібності, користуючись такими сімома показниками: головним, висотним I, широкостним висотним II, чолово-тім'яним, лицевим, носа й очних ямин.

Досить сильно навізується до описаної групи жіночий череп ч. 14. Є він довгий (73.6), низький (69.0 і 58.6), середньо-широкий

Табеля IX. Середні типів.

Показчики	Т и п и			
	ε	α	π	ξ
Головний	73·6	77·1	78·8	76·8
Висотний I	69·0	76·8	70·7	71·3
" II	58·6	66·2	63·9	64·0
Широкоство-висотний	93·8	99·8	89·7	92·8
Чолово-тімений	71·7	70·0	66·7	66·2
Лицевий	53·2	56·1	55·5	53·5
Носа	47·9	46·6	48·1	44·6
Очних ямин	81·6	84·5	87·6	93·5
Піднебіння	88·4	88·5	93·7	97·4

(93.8) з широким чолом (71.7), середньо-широким лицем (53.2), помірним носом (47.9), найнижчими очними ямами (81.6) і широким піднебінням (88.4). У загальних формах він творить сла-



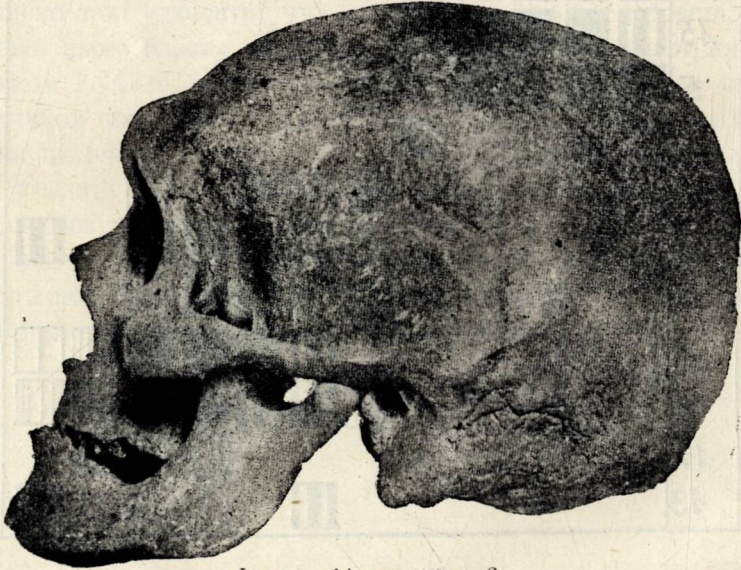
Діяграма ч. 2.

бо зарисований пятикутник із заокругленою задньою частиною кости, в горішній частині сплющений і має дашковату лобину. Є це без сумніву іберійсько-острівний тип. Дуже подібним до нього є чоловічий череп ч. 10, що відрізняється від попереднього в показниках тільки більшою висотою (62.8) та вузким чолом (65.5). (Таб. X.).

Табеля X. Середні череміських черепів.

Показники	Т и п и						
	А добре за- хованих черепів	ϵ	α	π	ξ	λ	γ
Головний	77.5	73.8	77.1	78.3	76.8	86.0	80.7
Висотний I	72.7	68.5	76.8	70.7	71.3	73.2	81.9
" II	—	60.7	66.2	63.9	64.0	64.0	70.2
Широкоство-висотний	93.9	92.9	99.8	89.7	92.8	85.0	101.5
Чолово-тімений	68.1	68.6	70.0	66.4	66.2	61.4	68.1
Лицевий	55.2	53.2	56.1	55.5	53.5	—	—
Носа	46.9	47.9	46.6	49.5	44.6	—	—
Очних ямин	86.9	81.6	84.5	86.7	93.5	—	89.2
Піднебіння	—	88.4	88.5	93.8	97.4	—	—

Дальший блок творить п'ять черепів (35.3%) чч. 2, 3, 4, 16, 8. До нього нав'язуються два останні черепи: чч. 17 і 13. Дуже цікаво, що цієї групи ввійшов і череп ч. 3 (фотографія черепа), який за словами І. Раковського, має виразні літекоідні ознаки. Автор описує його так: „У нашій невеличкій збірці маємо



Фотографія черепа ч. 3.

власне один такий череп, що відзначається помітно розвиненими, згаданими пітекоїдними признаками;..... відрізняється він від усіх інших черепів особливими, питомими прикметами: чоло усіх інших черепів особливими, питомими прикметами: чоло незвичайно низьке й сильно похилене взад, орбіти дуже сильно вистають уперед, надбровні дуги могутні і згубілі, на лобині легко зазначені „гребені“: чоловий, вінцевий і тіменних ліній, причім на тіменних лініях легко помітний слід роздвоєння, лицеві кости дещо сильніше розвинені, як пересічно в інших черепів, беріг кости носової хоч острій, все-ж таки із помітним рівчиком, а вкінці долішня щока сильно розвинена“ (1918. стор. 24—25). Цитована характеристика дуже важна, тим більше, що вона буде нам правити за „живий критерій“ при расовій аналізі, яку ми перевели механічним способом. Череп ч. 3, злучившись високовартостевими коефіцієнтами з іншими черепами цієї самої групи, означає нам їх расову приналежність. На підставі статистичної аналізи могли б ми такий череп зачислити до левантійського чи північно західного типу. Але ж морфологічна характеристика Дж. Серджи, який так далеко посунувся, що черепи середземно-морської раси називав аж „гарними“, — є діаметрально різна. Морфологічною будовою зближується до цієї групи з європейських елементів преслов'янський тип, але ж різниці принципового характеру в таких показниках, як лиць, носа й очних ямин кажуть нам звернути увагу більше на азійські елементи, а з них найбільше сюди підходить палеоазійський тип π , правда, у змінній формі, як це ми бачили при попередній аналізі. Що цей тип виступає під різними формами в Азії, ми можемо бачити, порівнявши азійські матеріали. Тим то нам не заваджає ніщо припустити, що ми маємо тут до діла з варіантом палеоазійського типу. (Таб. XI.).

Табеля XI. Діаметри череміських черепів.

Д і я м е т р и	Т и п и					
	ϵ	α	π	ξ	λ	γ
Довжина черепа.	181·0	174·0	180·5	179·0	179·0	171·0
Ширина „	133·5	134·0	141·3	137·5	154·0	138·0
Висота „	124·0	133·5	125·6	127·5	131·0	140·0
Найменша ширина чола	95·0	93·8	94·6	91·0	94·5	94·0
Найбільша „	113·0	115·8	114·8	112·0	114·0	115·0
Ширина лиць	124·0	125·3	126·6	128·0	—	124·0
Висота „	66·0	70·3	69·5	68·5	—	—
Об'єм черепа.	1355·0	1336·3	1393·2	1415·0	1425·0	1395·0

Як можна бачити з діаграми, бльок творить осередок із черепами ч. ч. 4, 16, 8, які різняться від інших більшою висотою й шириною, довгим лицем, ширшим носом і вищими очними яминами. Середня репрезентує ці черепи як середньодовгі (78.8), середньонизькі (70.7 і 63.9) й широкі (89.7) з середнім чолом (66.7), довгим лицем (55.5), середнім носом (48.1), властиво високими очними яминами (87.6). Дуже замітні діаметри цього типу в мізковій частині: довжина має 180.5, ширина 141.3, а висота тільки 125.6. В чолі (94.6 і 114.8), в ширині (126.6) і висоті (69.5) лиця займає середні форми. У верхній нормі маємо по два черепи круглаво яйцеваті і слабо п'ятикутні та один поздовжно яйцеватий: у задній нормі — три п'ятигранні та два заокруглені, в бічній — чотири сплюснені й один заокруглений, у передній — чотири дашкуваті та один заокруглений.

З пошкоджених черепів досить схожий череп ч. 9 із головним покажчиком 75.8, чолом 64.9, носом 56.6 та очними яминами 82.1. Оглядаючи його в верхній нормі, — матимемо поздовжно-яйцевату форму, в задній — п'ятикутну, в бічній — сплюснену, в передній — заокруглену.

Останні два черепи, хоч і не лучаться між собою додатними коефіцієнтами, мусимо вважати за дуже схожі між собою як варіанти того самого типу. Індивідуальні різниці в головнім висотнім, лицевім і ямин очних мало переступають, а то й узагалі непереступають границі двох одиниць. Тільки покажчик носа черепів ч. 17 є 46.2, а ч. 13—42.9, творячи тим самим трохи більшу зміність.

У діаметрах — поза довжиною черепа: 182 і 176 — знаходимо здебільшого ті самі вартости. З огляду на вузьке чоло, високі очні ямини й широке піднебіння обидва черепи зачисляємо до тихоокеанського типу §.

Залишається нам іще обговорити три черепи: чч. 6 і 7 та ч. 11. Ані в будові ані в вимірах нема сутніх різниць між черепами ч. 6 і 7 — вони становлять той самий тип. Є це черепи з дуже високим головнім покажчиком (86.0), з дуже значною висотою (73.2 і 64.5), але дуже великою шириною (85.0) і дуже вузьким чолом (61.4). На жаль, лицева частина не збереглася. В діаметрах ці черепи визначаються значною довжиною (179.0), дуже великою шириною (154), розмірно великою висотою (131) й помірним чолом (94.5, 114.0). Як бачимо, низький покажчик чола повстав унаслідок великої ширини черепа. А так, обидва черепи мають

найбільший об'єм (1425) а в усіх нормах — з винятком верхньої, де маємо раз круглаву і раз круглаво яйцевату, з творають заокруглені форми. Є це без сумніву черепи лапоноїдного типу (Табеля XI.).

Останній череп ч. 11 є підкрумлоголовий (80.7), дуже високій (81.9 і 80.9), але що з огляду на висоту не широкий (101.5); з помірно широким чолом (68.1) й високими очними яминами (89.2). Своєю довжиною (131) він не замітний, зате вирізняється своєю шириною (138) й висотою (140). В усіх інших вимірах займає посереднє становище: чоло — 94 і 115, ширина лиця — 124, об'єм — 1395. З морфологічного боку він згори повздовжно яйцеватий, з заду п'ятикутний, з боку заокруглений, зпереду дашкуватий. Через брак лицевих ознак тяжко вирішити расову приналежність цього черепа. Справу вияснює дещо високий показчик очних ямин, що у сполучі з іншими доводить його расову приналежність до субнордійського типу γ . (Таб. XII.).

Табеля XII. Типи в процентах.

Т и п и	%
Іберо-острівний ϵ	11.8
Нордійський α	23.5
Субнордійський γ	5.9
Лапоноїдний λ	11.8
Пацифічний ξ	11.8
Палеоазійський π	35.3
Разом	100.1

Збираючи результати статистичної аналізи, ми доходимо до виділення таких расових елементів: типу π в 35.3%, типу α в 23.5%, типу ϵ , λ і ξ в 11.8%, а типу γ в 5.9%.

Порівнюючи висліди обох аналіз фінських матеріалів, завважуємо найперше між череміськими черепами відсутність — левантійського й північно-західного типу — та центральноазійських первнів. Затє виступають три інші: іберійсько-острівний, субнордійський і тихоокеанський тип. Бачимо тут, що на місце двох європейських і одного азійського типу приходять теж два європейські і один азійський, але ж з іншим забарвленням. Та коли сполучити найбільше схожі між собою первні у групи — то дістанемо майже те саме чергування зі зміною в нордійському типі. Пересув нордійського типу та друге в черемісів треба вважати за вислід проникання слов'янських первнів. Пониження палео-

азійського типу з 50% на 35.3% зрозуміле з огляду на географічне положення. Череміси живуть більше на заході, отже й засяг найчисленнішого типу мусів меншати щораз більше на захід і з огляду

Табеля XIII. Порівняння типів в процентах.

Народність	Т и п и								
	π	ρ	α	ι	λ	τ	ϵ	γ	ξ
„Вятчани“ IX. в.	(45 0) 50 0	20 2	15 0	5 0	5 0	5 0	—	—	(5 0)
Череміси XVII. в.	3: 3	—	23 5	—	11 8	—	11 8	5 9	11 8

на віддалення від свого східного осередку і з огляду на те, що протягом історії його випихали інші елементи європейського походження. Між лапоноїдними елементами зникне різка процентова протилежність, коли ми злучимо їх в одну групу. Різниця вийде тоді заледви на 1.8. Значна різниця заходить у середземноморській групі. Причини можемо дошукуватися в моментах історичного характеру, себто, що цей тип держався передусім водного шляху від закруту Волги просто на північ, нав'язував торговельні зв'язки з північними племенами, славними зі своїх дорогих кожусків, причому його витискали з заходу нордійські елементи, як на це вказує процентове відношення того типу у східній і західній території. Загадкою залишається тихоокеанський тип. Є він або останком старої людности, що зберігся у неприступних болотах, людности, що її слід стрічаємо навіть у Скандинавії або виступав він загально в північно-східній Європі, тільки ми не вирізнили його в більшому проценті в попередній групі з огляду на невелику скількість краніологічного матеріялу. Це питання залишається покищо отвертим. (Таб. XIII.).

З наведених уваг робимо висновок, що між обома популяціями, не вважаючи на великий протяг часу, є стисла паралельність, як це зрештою передбачив своєю тонкою інтуїцією й наш заслужений антрополог Іван Раковський.

ПОРІВНЯННЯ.

Одною з причин, чому ми рішилися заналізовану серію черепів визначити за приналежну передовсім до азійських первнів, була неможливість прикласти без очевидних протирічностей закону про чисельність типів та закону середньої арифметичної.

Найближча з географічного погляду популяція до фінської є алянська⁶⁾. Вона теж проаналізована шляхом індивідуалізації. В порівнянні користуємося елементами виділеними статистичними методами, а не використовуємо закону про чисельність типів. (Таб. XIV.).

Табеля XIV. Порівняння алянських і фінських типів.

Назва народу	Т п п и									
	ξ	ε	ρ	α	γ	β	ι	π	λ	τ
Фіни . .	(5·0)	—	20·0	15·0	—	—	5·0	(45·0)	5·0	5·0
Аляни . .	—	13·2	42·1	23·7	14·0	7·1	—	—	—	—

Серед алянів, що їх могила у Верхнім Салтові походить з того самого віку, що й могила фінів, ми вирізнили такі краніологічні типи: іберійсько-острівний, левантійський, нордійський, субнордійський та преслов'янський. На чоло вибивається левантійський тип (42.1%) зі своїм основним типом ε (13.2%) друге місце займає нордійський тип (23.7). У фінів на перше місце вибивається палеоазійський тип (50.0%), а якщо ще будемо протиставляти і два інші типи — λ, τ, — що мають осідок в Азії, європейським, то тоді процент зростає до 60.0%. Важніше становище займає левантійський тип (20.0%), що з другим середземно-морським мішанцем і з північно-західним типом творить 25% цілоти. Нордійський тип виступає щойно на третьому місці. З цього порівняння бачимо, що обидві популяції стоять одна супроти одної на бігуновому становищі. Аляни мають європейський характер і то південно-європейський, фіни азійський і то, як виходило б із антропологічної мапи Азії С. Клімка²⁾, північно-західній, що обіймає ціле річище Обу й далші території на захід. У світлі цих результатів інакшого забарвлення набирає оголошена недавно антропологічна карта Європи, трохи фантастична, бо Е. Банзе³⁾ переводить у ній засяг азійських типів через цілу Росію аж на Україну поза Харків. (Таб. XV.).

З інших популяцій найподібнішими краніологічними серіями до наших фінів, є черепи новгородців, мерян, а далі полян із XII. віку та сіверських цвинтарів. Коли нав'язувати до новгородян, то

1) R. Jendyk, Czaszki alańskie z VIII—IX. wieku, „Kosmos“ 1930. Tom 55.

2) S. Klimek, Dalsze studia nad kranjologją Azji, „Kosmos, 55.

3) E. Banse, Rassenkarte Europas.

Табеля XV. Порівняння найподібніших серій.

Назва	Показники				
	Головний	Висотний	Чолово-тіменний	Очних ямни	Носа
Фіни	77·3	74·5	68·8	78·1	53·2
Новгородяни	77·7	74·8	68·0	79·8	53·4
Меріяни	75·5	74·5	68·9	79·1	51·3
Поляни з XII в.	75·9	72·8	69·5	77·5	52·0
Сіверські цвентарі	79·7	74·2	68·0	80·1	52·7

це вказувало б на давні взаємини з західними територіями надволжанських фінів та на північну колонізацію слов'ян, яка в такому випадку була розмірно стара, але дуже нечисельна. Лучба з мерянами є ясна з огляду на спокрівлення.

Спеціального насвітлення потребує левантійський тип, бо ж палеоазійський є тільки продовженням в Європу тієї північно-західньої території Азії, де він збитою масою виступає, а нордійський може бути головно преставником тих, що заверталися з іранських племен перед нападами зі сходу чи навіть заходу. Як ми вже згадували на іншому місці⁷⁾, процент цього типу, що далі на захід меншає, причому зростає щораз більше процент нордійського типу. Це явище можемо поширити й на північні землі Східньої Європи, та тільки з тією зміною, що тут меншає чисельність обох типів: *ρ*, *α*, тип *ρ* менше, тип *α* більше — на користь азійських елементів. Виходило б з того, що побережжя Чорного моря — це осередок левантійського типу, з якого він розходить ся на північ та на захід. Коли перейти оком цілу низку народів у наших степах від найдавніших часів, то найскорше можна б віднести його до кімерійської людности, яку остаточно залила хвиля скитів, насуваючи з Азії, а яка, як це вже інші доказали, була передовсім нордійська. Але ж бо ми знаємо, що кімери — це трацьке плем'я, отже передовсім таке саме нордійське, а нордійські сліди трацьких племен зазначилися не тільки а антропологічному складі народів Східньої Європи, але і східньої частини Середземного моря і то так далеко, що навіть змінили характер первісної тамошньої культури (Крета). Тимто можна б припустити, власне з огляду на Закавказзя, що левантійський тип треба віднести до передкімерійської людности, яка

⁷⁾ Р. Єндик, Індоевропейці на Закавказзі. Записки Мат.-прир. Секції Н. Т. Ш., Львів, 1930, Т. 28.

злилась з кімерійцями, після їх переходу з наддунайської долини в чорноморські степи. Є ще й друга можливість: скити й кімерійці були переважно нордійського типу, отож можливо, що східні скитські племена, які в різних часах жили над Каспійським морем та у підніжжях Кавказу, переміщувалися із сусідніми племенами левантійського типу так сильно, що первісний нордійський тип уступив на друге місце. Колиж згадані племена, головно сармати й алани, перейшли на Чорноморські степи, перенесли згадані левантійські первні й до західніх скитських племен, а переходячи опісля дальше на захід, зазначають свій шлях згаданим уже відношенням антропологічних типів, який бачимо у черепів, знайдених в полишених ними гробовищах.

Левантійський і нордійський тип у фінських племен треба б у такому випадку віднести до цих двох можливостей, і щодо фінів одна і друга — ймовірна. Через те, що могутність левантійського типу була стара, то не диво, що обидва муромські черепи взагалі, а левантійська група зокрема творять такий високий процент.

Попередня аланська робота дала образ антропологічних відносин у чорноморських степах перед напором турецьких і монгольських орд. Тут знову ми свій дослід зв'язали з іншими матеріалами, тим то ця стаття може дати образ антропологічного складу людности північних лісистих територій, творячи спільне звено з сіверськими черепами, які можна нав'язати й до алянів і до фінів.

Львів, 6. XI. 30.

ЛІТЕРАТУРА.

1. М. С. Грушевський: Історія України. Т. I. Львів. 1904.
2. Г. Ф. Дебец: Черепа із финских могильников. Сборник М. А. Э. Т. VIII.
3. M. Ebert: Südrussland im Altertum. 1921.
4. Р. Єндик: Индоевропейці на Закавказзі. З *Мат.-прир. Секції Н. Т. III* Том 28,
5. R. Jendyk: Czaszki alańskie z VIII—IX. w., Kosmos. 1930. T. 55.
6. R. Jendyk: Grecja starożytna pod względem antropologicznym. Arch. N. T. 1933.
7. R. Jendyk: Analiza kranjologiczna lwowskiej mogiły kozackiej.
8. J. Kollmann: Beiträge zur Kranjologie d. europ. Völker. Arch. f. Anthr. 1881.
9. S. Klimek: Studja nad kranjologją Azji półn. środ. i wsch, Kosmos. 52.
10. В. В. Латишев: Извѣстія древних писателей о Скитіи и Кавказѣ. С. Петербург. 1896.
11. Матеріали по архелогіи Россіи. Nr. 26.
11. E. Minkowska: Wyniki zastosowań metody diagnozy różniczkowej do określenia składników ludności europejskiej. Kosmos. 1925.

12. Л. Нидерле: Человѣчество в доисторическія времена. Петербург. 1898.
13. L. Niederle: Puvod a počatky slovanu vychodnich. 1924. Прага.
14. Pauly - Wissow: Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft. Stuttgart 1839—1852 (також нові видання).
15. Ів. Раковський: Кости Черемісів з давних гробів у Тоншаєві костромської губернії. Матер. до укр. етнології. Т. XVII. 1918. Львів.
16. J. Rakowsky: Ein Beitrag zur Anthropologie der Tscheremissen. Mitteil. der anthrop. Gesellschaft in Wien, B. XLV. 1915.
17. J. Czekanowski: Das Typenfrequenzgesetz. Anthr. Anzeiger. 1928. V.
18. J. Czekanowski: Das Mittelwertgesetz. Verhand. Ges. f. Phys. Anthr. 1930. IV.
19. Г, Н. Чучукало: Верхне-салтовских черепа. Мат. по Антр. України. 1928. II.
20. H. Beidler: Die Skythen u. ihre Nachbarvölker. Arch. Anthr. 1914. XIII.
21. W. Tomaschek: Kritik d. ält. Nachrichten über den skythischen Norden. Sitzungsberichte d. kais. Akad. Wien. 1888 i 1889.
22. Ю, Павло Гринцевич: Опыт физической характеристики восточных Славян. См. по Славянов. 1910. Т. III.

ZUSAMMENFASSUNG.

Den Gegenstand unserer Abhandlung bildet das von H. F. Debec und I. Rakowsky veröffentlichte kranilogische Material. Das erste Material stammt aus dem Gouvernement Kostroma und sein Alter wurde auf das XVII. Jahrhundert bestimmt, das andere aus dem Gouvernement Wiatka, sein Alter wurde aber auf Grund archäologischer Entdeckungen auf das IX. Jahrhundert festgesetzt. Die Rassenanalyse wurde mit Hilfe statistischer Methoden durchgeführt, wobei folgende anthropologische Typen unterschieden wurden.

Das Herabsinken des paläoasiatischen Typus von 45% auf 35·3% ist aus Rücksicht auf die geographische Lage leicht erklärlich. Das Material von I. Rakowsky stammt nämlich aus den westlicheren Gebieten, wodurch der Bereich des zahlreichsten Typus, sowohl aus Rücksicht auf seine Entfernung vom ostasiatischen Zentrum, wie auch wegen seiner Verdrängung durch andere anthropologische Typen europäischer Abstammung während der historischen Entwicklung beschränkt werden mußte. Unter den kurzköpfigen Typen verschwindet der Prozentgegensatz, wenn wir den laponoidischen und zentralasiatischen Typus in eine Gruppe vereinigen. Der Unterschied in der Mittelmeergruppe findet seine Erklärung einerseits darin, daß dieser Typus sich vorwiegend an den Wasserweg vom Wolgas Knie gradaus nach Norden hielt und, wie es die historischen Quellen bestätigen, den Lederhandel mit den nördlichen Stämmen führte, zweitens, daß er vom Westen her durch die nordischen Stämme, welche demselben Ziele entgegenstrebten, zurückgedrängt wurde, was in dem Prozentverhältnisse der Typen den Ausdruck findet.

Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, besteht zwischen den beiden Populationen, ungeachtet des großen Zeitraumes, ein enger Zusammenhang, wozu besonders der erschwerte Verkehr, sogar im Gouvernement Kostroma, beitragen hat; dadurch wurde das Eindringen neuer Rassenelemente verhindert und die Bevölkering des Gouvernement Kostroma behielt ihren ursprünglichen Charakter.

GEORG PFEIFFER (Kyjiv)

Die Konstruktion eines allgemeinen Operators der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die in bezug auf einen von Differentialquotienten aufgelöst ist.

Die unabhängigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung :

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (1)$$

mögen durch:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \quad (2)$$

bezeichnet wergen.

Die Koeffizienten:

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \quad (3)$$

des Operators:

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (4)$$

der Gleichung 1) müssen, nach S. Lie¹⁾, so beschaffen sein, dass die Identität:

$$XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f), \quad (5)$$

λ — willkürliche Funktion der unabhängigen Variablen,

$$X(\eta_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=2}^n \left\{ X(\eta_i) - Y(\xi_i) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

oder was dasselbe ist, die Identitäten:

$$X(\eta_1) = \lambda, \quad (7)$$

$$X(\eta_i) = \lambda \xi_i + Y(\xi_i), \quad (8)$$

$$i = 2, 3, \dots, n,$$

erfüllt werden.

Die Identitäten (7), (8) gehen für das Auffinden der Koeffizienten (3) das Jacobische System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mehrerer Funktionen:

¹⁾ s. Lie und Fr. Engel: Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, B. I, 1888, s. 138 — 143).

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} = \lambda,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \eta_2}{\partial x_n} = \lambda \xi_2 + \left(\eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \right),$$

(9)

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \eta_n}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} = \lambda \xi_n + \left(\eta_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \right),$$

Die Integration des Systems (9) fordert das Auffinden der Integrale des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\eta_1}{\lambda} = \frac{d\eta_2}{\lambda \xi_2 + \left(\eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \right)} =$$

(10)

$$= \frac{d\eta_n}{\lambda \xi_n + \left(\eta_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \dots + \eta_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \right)},$$

welchem, wie leicht zu sehen ist, die Integrale (2) genügen.

Wenn man die übrigen Integrale des Systems (10), die Integrale (2) ausgenommen, durch:

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \quad (11)$$

bezeichnet, so wird die allgemeine Lösung des Systems (9) die Form haben:

$$F_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) = 0$$

(12)

$$F_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) = 0$$

F_1, F_2, \dots, F_n — willkürliche Funktionen der Argumente, oder was dasselbe ist:

$$\chi_1 = \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

(13)

$$\chi_n = \Psi_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ — willkürliche Funktionen der Argumente.

Die Koeffizienten (3) werden aus den Gleichungen (12) — (13) gefunden; der erste von ihnen η_1 stellt die Lösung der allgemeinen linearen Gleichung (7):

$$X(\eta_1) = \lambda \quad \text{dar.} \quad (14)$$

Bezeichnen wir die partielle Lösung der Gleichung (14) durch r_1 :

$$X(r_1) = \lambda. \quad (15)$$

Sie ist die willkürliche Funktion der unabhängigen Veränderlichen, welche mit der Funktion λ durch die Beziehung (15) verbunden ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (14) ist:

$$\eta_1 = r_1 + \Theta_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (16)$$

Θ_1 — willkürliche Funktion der Argumente.

Die Beziehung (5) nennen wir vollständig, wenn $\lambda \geq 0$, und homogen, wenn $\lambda = 0$.

Die vollständige Beziehung (5) hat die partielle Lösung:

$$Y(f) = r_1 X(f). \quad (17)$$

Indem wir in der Beziehung (5) die Transformation:

$$Y(f) = Z(f) + r_1 X(f), \quad (18)$$

$$Z(f) = \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad (19)$$

$$\zeta_1 = \eta_1 - r_1 = \Theta_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (20)$$

$$\zeta_i = \eta_i - r_1 \xi_i, \quad (21)$$

$i = 2, 3, \dots, n,$

durchgeführt haben, gehen wir zur homogenen Beziehung:

$$XZ(f) - ZX(f) = 0 \quad \text{über.} \quad (22)$$

Der letzten gehört die partielle Lösung:

$$Z(f) = X(f). \quad (23)$$

Der homogenen Beziehung (22) entspricht ein einfacheres Jacobisches System, als (9):

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} = \zeta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} = \zeta_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n};$$

wir bekommen, indem wir in das System (9) $\lambda = 0$ setzen, ein einfacheres System, als (10), von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\xi_1} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\zeta_1}{0} = \frac{d\zeta_2}{\zeta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}} =$$

$$= \frac{d\zeta_n}{\zeta_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}},$$

welches die Integrale:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \quad \text{und} \quad x_1 = \zeta_1 \quad (26)$$

besitzt.

Die erste Beziehung (13):

$$\zeta_1 = \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (27)$$

ist der Beziehung (20) äquivalent.

Die Integration des Systems (25) kann in zwei Teile geteilt werden: die Integration des Systems:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n}, \quad (28)$$

mit den Integralen (2), und die Integration des Systems:

$$d\zeta_1 = 0; \quad (29)$$

$$\frac{d[\zeta_2]}{dx_1} = \zeta_1 \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \right] + [\zeta_2] \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \right] + \dots + [\zeta_n] \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} \right], \quad (30)$$

$$\frac{d[\zeta_n]}{dx_1} = \zeta_1 \left[\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} \right] + [\zeta_2] \left[\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} \right] + \dots + [\zeta_n] \left[\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} \right],$$

wo die Klammern zeigen, dass die Veränderlichen x_2, x_3, \dots, x_n durch ihre Ausdrücke aus den Gleichungen:

$$\varphi_1 = c_1, \varphi_2 = c_2, \dots, \varphi_{n-1} = c_{n-1} \quad (31)$$

ersetzt sind.

In dem Systeme (29), (30): ist

$$\zeta_1 = K_1 = \text{const.} \quad (32)$$

Die Integrationskonstanten des Systems (29), (30) mögen durch:

$$K_1, K_2, \dots, K_n \quad (33)$$

bezeichnet werden.

Dieselben sind Funktionen der Konstanten:

$$c_1, c_2, \dots, c_{n-1}. \quad (34)$$

Um das allgemeine Integral des Systems (24) und, folglich, auch des Systems (9) aus dem allgemeinen Integrale des Systems (29), (30) zu bekommen, muss man im letzten Systeme die Konstanten (33) durch die Ausdrücke (13) ersetzen.

Wenn man beachtet, dass für die beliebige Funktion W der unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n die Identität:

$$\frac{d[W]}{dx_1} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} \right] + [\xi_2] \left[\frac{\partial W}{\partial x_2} \right] + \dots + \xi_n \left[\frac{\partial W}{\partial x_n} \right], \quad (35)$$

stattfindet, so kommt man leicht zum Schlusse, dass der partiellen Lösung (23) der homogenen Beziehung (22) die partielle Lösung:

$$\zeta_1 = 1, [\zeta_2] = [\xi_2], \dots, [\zeta_n] = [\xi_n] \quad (36)$$

des Systems (29), (30) genügt; ausgenommen bei $\zeta_1 = K_1 = \text{const.}$ des Systems (30).

Dem Systeme (30) bei $\zeta_1 = K_1 = \text{const.}$:

$$\frac{d[\zeta_2]}{dx_1} = [\zeta_2] \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \right] + [\zeta_n] \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} \right] + K_1 \left[\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \right], \quad (37)$$

$$\frac{d[\zeta_n]}{dx_1} = [\zeta_2] \left[\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} \right] + [\zeta_n] \left[\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} \right] + K_1 \left[\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} \right]$$

gehört die partielle Lösung:

$$[\zeta_2] = K_1[\xi_2], \quad \dots \quad [\zeta_n] = K_1[\xi_n]. \quad (38)$$

Indem wir die Operatoren der linearen homogenen Differentialgleichung, die in allgemeiner Form geschrieben war, suchten²⁾, gab uns die Lösung (23) der Beziehung (22) die Möglichkeit die Integration des Systems, welches dem Systeme (29), (30) entspricht, auf die Integration des homogenen Systems (n-1)^{ter} Ordnung und Quadratur zurückzuführen. Im vorliegenden Falle, in dem Systeme (29), (30) ist die Quadratur (29) schon abgesondert; es bleibt noch das allgemeine System (n-1)^{ter} Ordnung (37) mit der partiellen Lösung (38) zu integrieren.

Wenn man das System von n-1 unabhängigen partiellen Lösungen des verkürzten Systems (37) durch:

$$\begin{aligned} &[\zeta_2^1], [\zeta_3^1], & [\zeta_n^1], \\ &[\zeta_2^2], [\zeta_3^2], & [\zeta_n^2], \end{aligned} \quad (39)$$

$$[\zeta_2^{n-1}], [\zeta_3^{n-1}], & [\zeta_n^{n-1}],$$

bezeichnet, so werden das allgemeine Integral des Systems (37) und die allgemeinen Integrale der Systeme (24), (9) folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} [\zeta_2] &= K_1[\xi_2] + K_2[\zeta_2^1] + & + K_n[\zeta_2^{n-1}], \\ [\zeta_3] &= K_1[\xi_3] + K_2[\zeta_3^1] + & + K_n[\zeta_3^{n-1}], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} [\zeta_n] &= K_1[\xi_n] + K_2[\zeta_n^1] + & + K_n[\zeta_n^{n-1}]; \\ & \zeta_1 = \Psi_1, \\ \zeta_2 &= \Psi_1 \xi_2 + \Psi_2 \zeta_2^1 + & + \Psi_n \zeta_2^{n-1}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \Psi_1 \xi_n + \Psi_2 \zeta_n^1 + & + \Psi_n \zeta_n^{n-1}; \\ & \eta_1 = r_1 + \Psi_1; \\ \eta_2 &= r_1 \xi_2 + \Psi_1 \xi_2 + \Psi_2 \zeta_2^1 + & + \Psi_n \zeta_2^{n-1}, \\ \eta_n &= r_1 \xi_n + \Psi_1 \xi_n + \Psi_2 \zeta_n^1 + & + \Psi_n \zeta_n^{n-1}. \end{aligned} \quad (42)$$

²⁾ G. Pfeiffer. La construction des opérateurs d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1929. pp. 177-182.

Daraus bekommt man die Form des allgemeinen Operators der Gleichung (1):

$$Y(f) = (r_1 + \psi_1)X(f) + \psi_2 Y_2(f) + \dots + \psi_n Y_n(f) = \\ = \sum_{j=2}^n \psi_j Y_j(f) + \varrho X(f), \quad (43)$$

wobei:

$$Y_2(f) = \zeta_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad (44)$$

$$Y_n(f) = \zeta_2^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \zeta_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

die partiellen Operatoren der Gleichung (1) darstellen, welche unter sich und vom trivialen Operator $X(f)$ unabhängig sind; ϱ ist die willkürliche Funktion der unabhängigen Veränderlichen.

Das Resultat ist dasselbe, wie auch in unseren Artikel, welcher in der Anmerkung (2) annotiert wurde; nur die Form der partiellen Operatoren ist einfacher geworden.

Es muss interessant sein, eine praktische Methode der Konstruktion des allgemeinen Operators (43) der Gleichung (1) zu geben; zu dieser Frage gehen wir über.

Schreiben wir die Gleichung (1) in der Form:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{\omega} K(f) = 0, \quad (45)$$

$$K(f) = \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (46)$$

$$\omega = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)}, \quad (47)$$

$$\xi_{1+h} = \frac{(-1)^h}{\omega} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_h, x_{h+2}, \dots, x_n)}, \quad (48) \\ h = 1, 2, \dots, (n-1),$$

und untersuchen die gegenseitige Beziehung von zwei Gleichungen:

$$K(f) = 0, \quad L_\tau(f) = 0 \quad (49)$$

τ — beliebige Zahl der Reihe 1, 2, $(n-1)$,

$$L_\tau(f) = \frac{D(f, x_1, \varphi_1, \dots, \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)} = \\ = - \frac{D(f, \varphi_1, \dots, \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)}. \quad (50)$$

Die Gleichungen (49) besitzen $(n-2)$ gemeine Integrale:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \dots, \varphi_{n-1} \quad (51)$$

und ausserdem, haben je ein Integral:

$$\varphi_\tau, \chi_1. \quad (52)$$

Sie stellen ein vollständiges System, folglich:

$$KL_\tau(f) - L_\tau K(f) \equiv \lambda_\tau K(f) + \mu_\tau L_\tau(f), \quad (53)$$

$$LK(x_1) \equiv -\lambda_\tau K(x_1), \quad KL_\tau(\varphi_\tau) \equiv \tau_\tau L_\tau(\varphi_\tau), \quad (54)$$

$$L_\tau(\varphi_\tau) = (-1)^\tau \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} = (-1)^\tau \omega,$$

$$K(x_1) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} = \omega, \quad (55)$$

$$\lambda_\tau = -L_\tau(\log \omega), \quad \mu_\tau = K(\log \omega). \quad (56)$$

Auf Grund der Formeln (53), (56) kommen wir zum Schlusse³⁾, dass das System der Gleichungen:

$$X(f) = \frac{1}{\omega} K(f) = 0, \quad Y_\tau(f) = \frac{1}{\omega} L_\tau(f) = 0 \quad (57)$$

bei beliebigem τ ein Involutionssystem ist:

$$XY_\tau(f) - Y_\tau X(f) \equiv 0. \quad (58)$$

Die infinitesimalen Transformationen:

$$Y_\tau(f), \quad (59)$$

$$\tau = 1, 2, \dots, (n-1),$$

sind die Operatoren der Gleichung (1), die unter sich und vom trivialen Operator:

$$X(f) = \frac{1}{\omega} K(f) \quad (60)$$

unabhängig sind.

In dieser Weise hat der allgemeine Operator der Gleichung (1) die Form:

$$Y(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \varrho X(f) =$$

$$= \frac{1}{\omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j L_j(f) + \varrho K(f) \right\}; \quad (61)$$

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n-1}$ sind willkürliche Funktionen der Integrale (2), ϱ — willkürliche Funktion der unabhängigen Veränderlichen.

³⁾ G. Pfeiffer. Théorèmes expliquant une série des questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre; C. R. de l'Acad. d. Sciences de l'URSS, 1929, pp. 172 — 182.
La construction des opérateurs d'une équation linéaire, homogène aux dérivées partielles du premier ordre. (Wird bald veröffentlicht).

Beispiel.

Nehmen wir die Gleichung:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (62)$$

mit den unabhängigen Integralen:

$$\varphi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \varphi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}. \quad (63)$$

Für sie wird:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \\ &= \frac{1}{x_1^{n-1}} \frac{D(x_2, x_3, \dots, x_n)}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} = \frac{1}{x_1^{n-1}}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} V_r(f) &= - \frac{D(f, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_r, \dots, x_{n-1}, x_n)} = \\ &= - \frac{1}{x_1^{n-2}} \frac{D(f, x_2, \dots, x_r, x_{r+2}, \dots, x_n)}{D(x_2, x_3, \dots, x_r, \dots, x_{n-1}, x_n)} = \\ &= - \frac{1}{x_1^{n-2}} \frac{D(f, x_2, x_3, \dots, x_r)}{D(x_2, x_3, \dots, x_r, x_{r+1})} = \frac{(1)^r \partial f}{x_1^{n-2} \partial x_{r+1}}. \end{aligned} \quad (65)$$

Daher folgt, dass die Form des allgemeinen Operators der Gleichung (62):

$$Y(f) = x_1 \left(\tilde{\omega}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \tilde{\omega}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + \tilde{\omega}_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + \varrho X(f) \quad (66)$$

ist, wobei $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \dots, \tilde{\omega}_n$ die willkürlichen homogenen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen nullten Grades, ϱ — willkürliche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind.

М. КУРЕНСЬКИЙ (Ленінград).

Про узагальнення варіації Lagrange'a для лінійного диференціального рівняння другого порядку.

Щоб знайти загальний інтеграл неоднородного лінійного рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (1)$$

коли знайдено буде загальний інтеграл

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \quad (2)$$

однородного рівняння

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad (3)$$

або намагаються розшукати частинний інтеграл y_1 рівняння (1), і тоді буде:

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + y_1,$$

або, як це найбільше й трапляється, застосовують варіацію Lagrange'a для визначення функцій $c_1(x)$, $c_2(x)$; тоді загальний інтеграл рівняння (1) напишеться так:

$$y = c'u_1 + c''u_2 + u_1 \int \frac{u_2 r dx}{\Delta(u_2, u_1)} + u_2 \int \frac{u_1 r dx}{\Delta(u_1, u_2)}, \quad (4)$$

при чім $\Delta(u_1, u_2)$ означає визначник Вронського для частинних розв'язок u_1, u_2 .*)†

Спосіб варіації Lagrange'a в тому вигляді, як його звичайно викладають в курсах інтегрування диференціальних рівнянь, в підручниках, в спеціальних монографіях то що, дає єдину можливу комбінацію 2-ох квадратур, що її вказано в формулі (4).

В літературі можна зустрінути ще один спосіб варіації постійних, відомий під назвою способу Cauchy; загальний інтеграл пишуть за допомогою означених інтегралів. Спосіб Cauchy приводить до тих самих квадратур, що і спосіб Lagrange'a**).

*) E. L. In s e. Ordinary Differential Equations, London, 1927, p. 123.

**) E. Goursat. Cours d'analyse mathématique, t. II, Paris, 1925, pp. 443 — 444.

сталой a можна давати які завгодно числові значіння, стає більш легке, ніж виконання Lagrange'вих квадратур у (4)-му.

Легко переконатися, що інші інтегровальні комбінації рівняння (7) приведуть до ускладнення вигляду загального неоднородного рівняння, тому що вони дадуть різні вирази цього інтеграла тільки завдяки трем квадратурам.

Лише тоді, коли ми задамо собі одну з функцій $K_1(x)$, $K_2(x)$ похідною $f'(x)$ довільно взятої функції $f(x)$, ми зможемо виразити загальний інтеграл двома тільки квадратурами.

Поклавши, для прикладу, $K_1(x) = (ax + b)'$, можна написати

$$c_1(x) = ax + b,$$

і $c_2(x)$ дістанемо двома квадратурами з виразів, які матимуть постійну a .

4. У виразі

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + z(x)$$

функція $z(x)$ перестав бути обов'язково частинним інтегралом неоднородного рівняння, коли c_1 та c_2 вважати за функції x -са. Три функції $c_1(x)$, $c_2(x)$, $z(x)$ зв'язані будуть залежністю

$$-z'' + pz' + qz + c_1'(2u_1' + pu_1) + c_2'(2u_2' + pu_2) + c_1''u_1 + c_2''u_2 = r.$$

Поклавши

$$z' + c_1'u_1 + c_2'u_2 = a = \text{const.},$$

можна написати:

$$c_1'u_1' + c_2'u_2' = r - qz - ap; \quad r - qz - ap = b = \text{const.};$$

$$y = c'u_1 + c''u_2 + \frac{r - ap - b}{q} + u_1 \int \frac{bu_2 - u_2' \left[a - \left(\frac{r - ap - b}{q} \right)' \right]}{\Delta(u_2, u_1)} dx + \\ + u_2 \int \frac{bu_1 - u_1' \left[a - \left(\frac{r - ap - b}{q} \right)' \right]}{\Delta(u_1, u_2)} dx.$$

Коли a та b будуть довільно задані функції, тоді ми зможемо написати безліч інших відповідних форм загального інтеграла. Колиж ми візьмемо

$$a = b = 0,$$

ми матимемо таку найпростішу форму загального інтеграла, відмінну від Lagrange'вої форми (4):

$$y = c'u_1 + c''u_2 + \frac{r}{q} + u_1 \int \frac{u_2' \left(\frac{r}{q} \right)'}{\Delta(u_2, u_1)} dx + u_2 \int \frac{u_1' \left(\frac{r}{q} \right)'}{\Delta(u_1, u_2)} dx.$$

Коли $\frac{r}{q} = \text{const.}$, тоді загальний інтеграл неоднородного рівняння дістанемо з загального інтеграла однородного рівняння зовсім без квадратур:

$$y = c'u_1 + c''u_2 + \frac{r}{q},$$

с. т. $\frac{r}{q}$ є частинний інтеграл неоднородного рівняння.

Коли тільки на одну з величин c_1, c_2 дивитимемося як на функцію x -са, матимемо формули вигляду:

$$\begin{aligned} z' + c_1'u_1 &= a; \quad c_1'u_1' = r - qz; \\ c_1' &= \frac{a - z'}{u_1}; \quad u_1'z' - u_1qz = au_1' - ru_1, \end{aligned}$$

і зможемо визначити загальний інтеграл за допомогою не менше як 3-ох квадратур.

5. Для варіації довільних сталих можливий є ще один останній шлях. Коли функція $\bar{v}(x)$ є частинний або загальний інтеграл однородного рівняння, тоді загальний інтеграл неоднородного рівняння можна шукати в формі

$$y = \bar{v}(x) \cdot z(x),$$

що дає:

$$r = z'(2\bar{v}' + p\bar{v}) + z''\bar{v}; \quad z' = \zeta; \quad \zeta' + \left[2\frac{\bar{v}'}{\bar{v}} + p \right] \zeta = \frac{r}{\bar{v}};$$

$$y = c'\bar{v} + \bar{v} \int \frac{r\bar{v}e^{\int p dx} dx + c''}{\bar{v}^2 e^{\int p dx}} dx, \quad (9)$$

і ми бачимо, між іншим, що найшовши тільки частинний інтеграл $\bar{v}(x)$ для однородного рівняння, матимемо загальний інтеграл неоднородного рівняння вигляду аналогічного (5)-тому, за допомогою лише 3-ох квадратур, а застосування способу варіації Lagrange'a привело нас до потреби виконати 4 квадратури:

$$u_1 = \bar{v}; \quad u_2 = \bar{v} \int \frac{dx}{\bar{v}^2 e^{\int p dx}};$$

$$y = c' \bar{u} + c'' \bar{v} \int \frac{dx}{\bar{v}^2 e^{\int p dx}} - \bar{v} \int e^{\int p dx} \int \frac{dx}{\bar{v}^2 e^{\int q dx}} r \bar{u} dx + \\ + \bar{v} \int \frac{dx}{\bar{v}^2 e^{\int p dx}} \int \bar{v} e^{\int p dx} r dx.$$

Коли

$$\bar{v} = c_1 u_1 = c_2 u_2 \equiv \varphi(x),$$

де c_1 та c_2 є постійні, тоді вираз (9) матиме тільки дві квадратури, тому що

$$e^{-\int p dx} = \Delta(u_1, u_2).$$

Вважаючи ж c_1 та c_2 за функції, прийдемо до нових результатів:

$$y = \varphi(x) z(x); \quad z'' \varphi + z'(2\varphi' + p\varphi) + z(\varphi'' + p\varphi' - \psi) = r,$$

і

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = \varphi$$

$$c_1(u_1'' + p u_1') + c_2(u_2'' + p u_2') = \psi$$

Через те, що

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1'' + p u_1' & u_2'' + p u_2' \end{vmatrix} = p \Delta + \Delta' = 0,$$

маємо

$$\psi = \frac{u_i'' + p u_i'}{u_i} \varphi \quad i=(1, 2),$$

с. т. невідомі функції $\varphi(x)$, $z(x)$ повинні задовольняти таке рівняння:

$$z'' \varphi + z'(2\varphi' + p\varphi) + z \left(\varphi'' + p\varphi' - \frac{u_i'' + p u_i'}{u_i} \varphi \right) = z;$$

для кожної визначеної функції z існує визначена функція φ , яка задовольняє це рівняння.

Поклавши, наприклад, $z = A = \text{const.}$, можна написати:

$$c_1' u_1 + c_2' u_2 = B = \text{const.}; \quad c_1' u_1' + c_2' u_2' = \frac{r}{A} - Bp.$$

і функція $\varphi(x)$ визначиться через $c_1(x)$, $c_2(x)$ двома квадратурами, що вони для того частинного випадку, коли $A=1$, $B=0$, стають квадратурами Lagrange'a,

Можна написати безліч виглядів 2-ох квадратур, вважаючи A та B за довільно задані, але визначені функції.

Поклавши, скажімо, $z = A = \text{const.}$,

для $c_1' u_1 + c_2' u_2 = f(x)$ матимемо $c_1' u_1' + c_2' u_2' = \frac{r}{A} - pf(x) - f'(x)$;

для $c_1' u_1' + c_2' u_2' = - \left(\frac{r}{Ap} \right)'$ матимемо $c_1' u_1 + c_2' u_2 = \frac{r}{Ap}$

і т. д.

М. МИХАЛЬСЬКИЙ (Одеса).

Оцінка забурень деяких астероїдів через Марса,
Землю, Венеру та Меркурія.

Для орбіти забурюваного астероїда p' на початкову епоху t_0 маємо початкові елементи: a' —більша піввісь, e' —ексцентричність ($e' = \sin \psi'$), φ' —нахил, Θ' —довгота вступуючого вузла, $\tilde{\omega}'$ —довгота перигелія, ε' —середня довгота епохи t_0 , n' —середній добовий рух; середня довгота астероїда на епоху t буде l' ; забурена середня довгота астероїда на епоху t буде $l_0' = \varepsilon' + n'(t - t_0)$, де $(t - t_0)$ виображається в середніх сонцевих добах. Маса астероїда є $m' = 0$.

Для орбіти забурюючої планети P (Марс $\♂$, Земля $\♁$, Венера $\♀$ або Меркурій $\♿$), будемо користуватися з аналогічних означень (тільки без черток у горі): $a, e, \psi, \varphi, \Theta, \tilde{\omega}, \varepsilon, n, l, l_0, m$.

Через $\delta a', \delta e', \delta \varphi', \delta \Theta', \delta \tilde{\omega}', \delta \varepsilon', \delta n', \delta l'$ будемо визначати забурення (першого порядку щодо маси m) елементів астероїда, що залежать від планети P та одержуються за час $(t - t_0)$. Елементи орбіти планет p' й P будемо відносити до середньої екліптики епохи T_0 .

Ми будемо тут розглядати в зв'язку з планетою P такий астероїд, що для нього: 1) елементи e' й φ' малі, 2) відношення $\frac{a}{a'} = \alpha$ є невелике (приблизно $\alpha \leq 0,3$), при чому величина $i'n' - n$ значно відрізняється від нуля (приблизно $|i'n' - n| \geq 100''$), коли ціле число $i' > 5$.

Остання умова показує, що тоді довгоперіодичні члени відповідної пертурбаційної функції R' будуть не нижче 5-ого порядку відносно малих величин e, e', φ, φ' ; а членами такого високого порядку ми можемо нехтувати. Такого типу астероїд ми будемо визначати через Γ_P (де $P = \♂, \♁, \♀$ або $\♿$).

Легко помітити, що для астероїда $\Gamma_{\♂}$ (себто, коли розглядаються забурення астероїда від Марса) повинно бути $n' \leq 350''$; для астероїда $\Gamma_{\♁}$ повинно бути $n' \leq 680''$; для астероїда $\Gamma_{\♀}$ повинно бути $n' \leq 1100''$; для астероїда $\Gamma_{\♿}$ повинно бути $n' \leq 1500''$. До типу астероїда $\Gamma_{\♂}$ належить невелика кількість малих планет (наприклад астероїди троянської групи, з малими елементами e' й φ'). До типу астероїда $\Gamma_{\♀}$ можна віднести приблизно 20% усіх малих планет (наприклад: *Hugie* (10), *Thémis* (24), *Doris* (48), . . .). До типу $\Gamma_{\♁}$ й $\Gamma_{\♿}$ належать майже усі астероїди (з ма-

лими елементами e' й φ'). Таким чином взагалі знайдеться багато малих планет, що відповідають умовам астероїда Γ_r .

Щоб оцінити вікові та короткоперіодичні забурення астероїда Γ_r планетою P ($=\sigma, \delta, \varphi, \xi$), можна очевидно застосувати формули (C) абсолютних забурень, що я дістав їх для троянця *Nestor*'а (659) (*Astronomische Nachrichten*, В. 238, N 5694; цю статтю для короткості будемо означати через „M⁽¹⁾“). Ці формули досить близько відповідають методі механічної квадратури (варіація довільних постійних). Таким чином, комбінуючи формули (C) з методом механічної квадратури, можна значно скоротити обчислення забурень астероїда від усіх великих планет; наприклад забурення від $\delta, \sigma, \mu, \dots$ обчислюємо механічною квадратурою а забурення від φ й ξ за формулами (C)²).

Формули (C) застосуємо наприклад для обчислення забурень астероїда *Polyhymnia* (33) Землю, хоч цей астероїд й не зовсім підходить під тип Γ_5 (для нього $n' = 733''$, $a = 0,35$, а елемент $\psi' \sim 20^\circ$). Беремо початкову епоху $t_0 = 1873$ July 17,0 (Mean time Berlin); для цієї епохи елементи $a' e'$. . . для астероїда беремо з дослідів Newcomb'a: „On the mass of Jupiter and the orbit of Polyhymnia“ (*Astronomical Papers of the American Ephemeris*, Vol. V, p. 391); елементи a, e, \dots для Землі беремо наприклад із моїх дослідів „M“ (після відповідної редукації).

Тоді згідно з формулами (C) дістанемо:

$$\begin{aligned} \delta\varphi' &= 0, \quad \delta\theta' = -0''.0002(t-t_0), \\ \delta n' &= +0''.0188 - 0''.0136 \cos(l_0' - l_0) - 0''.0002 \cos(l_0' - 2l_0 + 101^\circ) - \\ &\quad - 0''.0066 \cos(2l_0' - l_0 + 18^\circ), \\ \delta\varphi' &= -0''.4 + 0''.0188(t-t_0) + 1''.0 \sin(l_0' - l_0) + 0''.7(2l_0' - l_0 + 18^\circ), \\ \delta\varepsilon' &= 1''.1 + 0''.0049(t-t_0) - 2''.7 \sin(l_0' - l_0), \quad (D') \\ \delta\tilde{\omega}' &= +4''.8 + 0''.00021(t-t_0) + 1''.8 \sin(l_0' + 18^\circ) + 4''.6 \sin(l_0' + 18^\circ) + \\ &\quad + 2''.2 \sin(2l_0' - l_0 + 18^\circ) + 2''.1 \sin(3l_0' - l_0 + 36^\circ), \\ \delta\psi' &= -2''.0 + 1''.6 \cos(l_0' + 18^\circ) + 0''.9 \cos(2l_0' - l_0 + 18^\circ), \\ \text{де } l_0' &= 319^\circ + 732''.8175(t-t_0), \quad l_0 = 295^\circ + 3548''.19283(t-t_0). \end{aligned}$$

За формулами (D'), наприклад для момента $t = 1888$ November 8 (Greenwich mean midnight) матимемо такі забурення нашого астероїда Землю:

$$\delta n' = 0''.000, \quad \delta\varphi' = +104'', \quad \delta\varepsilon' = +30'', \quad \delta l' = \delta\varepsilon' + \delta\varphi' = +134, \quad \delta\tilde{\omega}' = +13'', \quad \delta\psi' = 0''.$$

Для тогож самого момента t механічна квадратура (дослід Newcomb'a, p. 427) дає:

$$\delta n' = +0''.002, \quad \delta\varphi' = +102'', \quad \delta\varepsilon' = +31'', \quad \delta l' = \delta\varepsilon' + \delta\varphi' = +133'', \quad \delta\tilde{\omega}' = +16'', \quad \delta\psi' = -1''.$$

¹) В формулах (C) на стор 93—94 треба виправити такі друкарські помилки: ¹) у 2-м рядку вгорі після . . . $\sin(2\varepsilon' - \varepsilon - \omega')$] треба поставити — замість +, ²) у 6-м рядку після . . . $\sin(3l_0' - l_0 - 2\omega)$ треба поставити — замість +.

²) Треба зауважити, що для ξ інтервал механічної квадратури доводиться брати дуже малий, не більше як 10 день (для Венери — не більше як 20 день); 40 — денний інтервал для цих обох планет ніяк не підходить, хоч його й вказують автори (наприклад Tisserand: *Traité de la Méc. céleste*, T. IV, p. 192).

Ми помічаємо, що навіть для астероїда (33) формули (С) абсолютних забурень дають результати, близькі до результатів механічної квадратури. Тому цілком незрозуміло, длячого Newcomb вводив в результати механічної квадратури (що відносяться до Землі) поправку $+1''.27 - 0''.024963 t$, про яку він говорить на сторінці 401 свого дослід. Ця поправка відповідає (приблизно) сумі постійних та вікових членів для $\delta q'$ та $\delta e'$ (а саме — в наших формулах (D'), — величині $+0''.7 + 0''.0237(t - t_0)$), взятої із знаком мінус. Виходить, що взагалі Newcomb, обраховуючи за-

бурення, що походять від Землі, для інтеграла $\int_{t_0}^t dF(t)$ брав тільки змінний член $F(t)$, замість повної різниці $F(t) - F(t_0)$ ¹⁾. Через те рядок (4) у таблиці V дослідів Newcomb'a має систематичну похибку (досить значну для середньої довготи астероїда); отже значіння для маси Юпітера, що одержав в цім досліді Newcomb, мені здається за недосить певне²⁾. Таким чином нові досліді про масу Юпітера набувають цілком актуального значіння. В таких дослідях доводиться брати на увагу забурення астероїда, спричинені усіми великими планетами; тут, я сподіваюся, й можуть стати в пригоді формули (С) статті „М“.

У відповідних випадках астероїдів (не типа I_T) можуть бути значні довгоперіодичні члени пертурбаційної функції R' , 3-ого й 4-ого порядку що до малих e, e', φ, φ' . Коли астероїд p' підлягає довгоперіодичним забуренням від планети $P(= \text{♁, ♀, ♃, ♄})$ зазначених порядків, при чому $\alpha = \frac{a}{a'}$ не дуже значне (приблизно $\alpha \leq 0.35$), то відповідні головні члени пертурбаційної функції будуть такі:

$$\frac{1}{fm} \cdot R'_{(3)} = \left(-\frac{a'}{3a^2} + \frac{16}{3} \frac{a}{a'^2} \right) \cdot e'^3 \cdot \cos(4l_0' - l_0 - 3\tilde{\omega}')^3, \quad (B_{(3)})$$

$$\frac{1}{fm} \cdot R'_{(4)} = \frac{3125}{384} \frac{a}{a'^2} \cdot e'^4 \cdot \cos(5l_0' - l_0 - 4\tilde{\omega}')^4 \quad (B_{(4)})$$

Тоді формули (А) статті „М“ дають такі додаткові члени забурень:

¹⁾ Tisserand теж покладає $(\delta q')_{\text{secul.}} = 0$ (Tr. de Méc. cél., T. I, p. 338), що як бачимо, не відповідає механічній квадратурі.

²⁾ У останньому досліді (що до маси Юпітера) Osten'a за цю похибку не згадується (Astronomische Nachrichten, B. 232, N 5557).

Треба зауважити, що значіння Юпітерової маси, що одержав Newcomb,війшло в його дальші фундаментальні досліді (напр. Astronomical Papers of the American Ephemeris, Vol. VI).

³⁾ Le Verrier, Annales de l'Observatoire Impérial de Paris, T. I, p. 274, 287.

⁴⁾ Ibidem, p. 291.

$$\delta\varphi'_{(3)} = 0, \quad \delta\theta'_{(3)} = 0, \quad \delta n'_{(3)} = \frac{4mn'^2}{4n'-n} \cdot \frac{a'^3 - 16a^3}{a'a^2} \cdot e'^3 [\cos(4l'_0 - l_0 - 3\tilde{\omega}') - \cos(4\varepsilon' - \varepsilon - 3\tilde{\omega}')],$$

$$\delta\varrho'_{(3)} = \frac{4mn'^2}{(4n'-n)^2} \cdot \frac{a'^3 - 16a^3}{a'a^2} \cdot e'^3 [\sin(4l'_0 - l_0 - 3\tilde{\omega}') - \sin(4\varepsilon' - \varepsilon - 3\tilde{\omega}')] - \frac{4mn'^2}{4n'-n} \cdot \frac{a'^3 - 16a^3}{a'a^2} \cdot e'^3 \cdot \cos(4\varepsilon' - \varepsilon - 3\tilde{\omega}') \cdot (t - t_0)$$

$$\delta\varepsilon'_{(3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a'^3 + 32a^3}{a'a^2} \cdot \frac{mn'}{4n'-n} \cdot e'^3 [\sin(4l'_0 - l_0 - 3\tilde{\omega}') - \sin(4\varepsilon' - \varepsilon - 3\tilde{\omega}')], \quad (C_{(3)})$$

$$\delta\tilde{\omega}'_{(3)} = - \frac{a'^3 - 16a^3}{a'a^2} \cdot \frac{mn'}{4n'-n} \cdot e' [\sin(4l'_0 - l_0 - 3\tilde{\omega}') - \sin(4\varepsilon' - \varepsilon - 3\tilde{\omega}')],$$

$$\delta e'_{(3)} = - \frac{a'^3 - 16a^3}{a'a^2} \cdot \frac{mn'}{4n'-n} \cdot e'^2 [\cos(4l'_0 - l_0 - 3\tilde{\omega}') - \cos(4\varepsilon' - \varepsilon - 3\tilde{\omega}')].$$

$$\delta\varphi'_{(4)} = 0, \quad \delta\theta'_{(4)} = 0, \quad \delta n'_{(4)} = - \frac{15625}{128} \cdot \frac{mn'^2}{5n'-n} \cdot \frac{a}{a'} \cdot e'^4 [\cos(5l'_0 - l_0 - 4\tilde{\omega}') - \cos(5\varepsilon' - \varepsilon - 4\tilde{\omega}')],$$

$$\delta\varrho'_{(4)} = - \frac{15625}{128} \cdot \frac{mn'^2}{(5n'-n)^2} \cdot \frac{a}{a'} \cdot e'^4 [\sin(5l'_0 - l_0 - 4\tilde{\omega}') - \sin(5\varepsilon' - \varepsilon - 4\tilde{\omega}')] + \frac{15625}{128} \cdot \frac{mn'^2}{5n'-n} \cdot \frac{a}{a'} \cdot e'^4 \cos(5\varepsilon' - \varepsilon - 4\tilde{\omega}') \cdot (t - t_0), \quad (C_{(4)})$$

$$\delta\varepsilon'_{(4)} = \frac{3125}{96} \cdot \frac{mn'}{5n'-n} \cdot \frac{a}{a'} \cdot e'^4 [\sin(5l'_0 - l_0 - 4\tilde{\omega}') - \sin(5\varepsilon' - \varepsilon - 4\tilde{\omega}')],$$

$$\delta\tilde{\omega}'_{(4)} = \frac{3125}{96} \cdot \frac{mn'}{5n'-n} \cdot \frac{a}{a'} \cdot e'^2 [\sin(5l'_0 - l_0 - 4\tilde{\omega}') - \sin(5\varepsilon' - \varepsilon - 4\tilde{\omega}')],$$

$$\delta e'_{(4)} = \frac{3125}{96} \cdot \frac{mn'}{5n'-n} \cdot \frac{a}{a'} \cdot e'^3 [\cos(5l'_0 - l_0 - 4\tilde{\omega}') - \cos(5\varepsilon' - \varepsilon - 4\tilde{\omega}')].$$

Але я не маю відповідного матеріалу (здобутого методом механічної квадратури), щоб оцінити, оскільки ці формули (разом з формулами (C)) можуть бути корисні.

D. MORDOUKHAY-BOLTOVSKOY (Rostov-Don).

Sur les courbures des ordres supérieures des courbes planes.

§ 1. La forme de la courbe dans un point est caractérisée par la courbure ou par son rayon de courbure

$$R = \left| \frac{(1 + y'^2)}{y''} \right| \quad (1)$$

dont l'expression dépend de la seconde dérivée y'' . La caractéristique suivante est la direction de l'axe de la déviation¹⁾, qu'on peut définir de la manière suivante: on réunit le point M avec le milieu de la corde infiniment voisine et parallèle à la tangente. L'angle δ , que l'axe de la déviation fait avec la normale est défini par la formule suivante:

$$\operatorname{tg} \delta = y' - \frac{(1 + y'^2) y'''}{3 y''^2} \quad (2)$$

de sorte que δ dépend de la troisième dérivée.

La notion de l'axe de la déviation se généralise de la manière suivante.

On prend dans M la courbe osculatrice de la famille

$$\Phi(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (3)$$

avec n paramètres a_1, a_2, \dots, a_n et on porte sur la courbe donnée:

$$(f(x, y) = 0) \quad (4)$$

des axes égaux

$$\sphericalangle MP = \sphericalangle MR$$

On mène les droites PQ et RS, qui satisfont aux conditions:

1) $PQ \parallel RS$

2) Les arcs MQ et MS qui sont coupés

sur la courbe (4) et la courbe osculatrice (3) sont égaux.

La position limite de OC, qui réunit les milieux de RS... 0 et PQ... C sera l'axe de la déviation de $f=0$ par rapport à $\Phi=0$.

¹⁾ Transon. Recherche sur la courbure des lignes et des surfaces. Journ. de Liouville. 1841. t. 4. p. 191.

Salmon-Fiedler. Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Leipzig 1882.

D. Mordoukhay-Boltovskoy. Sur les courbure des courbes planes. Annales de l'Inst. Polyt. de Varsovie 1907.

§ 2. En désignant les coordonnées de (P, Q) par $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, (R, S) par $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ et en prenant pour $O.. OM$, pour $O\bar{X}..$ la tangente MT nous aurons l'expression suivante de la condition 1)

$$(y_2 - y_1) (\xi_2 - \xi_1) - (x_2 - x_1) (\eta_2 - \eta_1) = 0 \quad (5)$$

En vertu de la seconde condition

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(s_1), \quad x_2 = \varphi(s_2) \\ y_1 &= \psi(s_1), \quad y_2 = \psi(s_2) \\ \xi_1 &= \overline{\varphi}(s_1), \quad \xi_2 = \overline{\varphi}(s_2) \\ \eta_1 &= \overline{\psi}(s_1), \quad \eta_2 = \overline{\psi}(s_2) \end{aligned} \quad (6)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j s^j, \quad a_1 = 1 \\ \psi(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j s^j, \quad b_1 = 0 \\ \overline{\varphi}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j s^j, \quad \alpha_1 = 1 \\ \overline{\psi}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j s^j, \quad \beta_1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

La condition de l'osculation de (3) et (4) nous donne

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= a_j \\ \beta_j &= b_j \end{aligned} \right\} j \leq n \quad (9)$$

L'équation (5) établit la liaison entre s_1, s_2 . Tous les termes $s_1^k s_2^l$ ($k \leq n, l \leq n$) se détruisent et nous avons après l'abréviation par $(s_2 - s_1)$ l'équation entre s_2, s_1 , dans laquelle nous n'écrivons que les termes de $n+1, n+2$ degrés par rapport à s_1, s_2 :

$$(b_{n+1} - \beta_{n+1}) (s_2^{n+1} - s_1^{n+1}) + (b_{n+2} - \beta_{n+2}) (s_2^{n+1} - s_1^{n+1}) + b_1 \alpha_{n+1} (s_2 + s_1) (s_2^{n+1} - s_1^{n+1}) = 0 \quad (10)$$

Dans le développement

$$s_2 = (s_2)_0 + (s'_2)_0 s_1 + \frac{(s''_2)_0}{2} s_1^2 + \dots \quad (11)$$

$(s_2)_0 = 0, (s'_2)_0 = \lim_{s_1 \rightarrow 0} \left(\frac{s_2}{s_1} \right)$ doit non seulement réel, mais aussi négatif parce que MP et MQ ont des signes différents.

De (10) on tire :

$$(b_{n+1} - \beta_{n+1}) (s'_2)^{n+1} - 1 + (b_{n+2} - \beta_{n+2}) (s'_2)^{n+1} - 1 s + b_1 \alpha_{n+1} s_1 (s'_2 - 1) (s'_2)^{n+1} - 1 + \dots = 0 \quad (12)$$

Nous n'aurons qu'une racine réelle et négative $(s'_2)_0 =$

$\lim_{s_1 \rightarrow 0} \frac{s_2}{s_1} = -1$ que pour $\overline{n+1}$ pair et n impair.

En posant $\frac{s_2}{s_1} = \omega$ nous aurons :

$$(b_{n+1} - s_{n+1}) (\omega^{n+1} - 1) + (b_{n+2} - s_{n+2}) (\omega^{n+2} - 1) s + b_1 \alpha_{n+1} s_1 (\omega + 1) (\omega^{n+1} - 1) = 0$$

et par différentiation :

$$(n+1)(b_{n+1} - s_{n+1}) \omega^n \omega' + (b_{n+2} - s_{n+2}) (\omega^{n+2} - 1) + b_1 \alpha_{n+1} (\omega + 1) (\omega^{n+1} - 1) + A s_1 + B s_1^2 = 0$$

Pour $s_1 = 0$ $\omega_1 = -1$

$$\omega'_0 = - \frac{2 (b_{n+2} - s_{n+2})}{(n+1) (b_{n+1} - s_{n+1})}$$

$$\frac{s_2}{s_1} = \omega = \omega_0 + \omega'_0 s = -1 - \frac{2 (b_{n+2} - s_{n+2}) s_1}{(n+1) (b_{n+1} - s_{n+1})}$$

$$s_2 = -s_1 - \frac{2 (b_{n+2} - s_{n+2}) s_1^2}{(n+1) (b_{n+1} - s_{n+1})}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = - \frac{(b_{n+2} - s_{n+2}) s_1^2}{(n+1) (b_{n+1} - s_{n+1})} +$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = b_2 s_1^2 +$$

$$tg \delta_n = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = - \frac{(b_{n+2} - s_{n+2})}{(n+1) b_2 (b_{n+1} - s_{n+1})} \quad (13)$$

Pour $n=1$

$$tg \delta_1 = tg \delta = - \frac{\beta_2}{2 \beta_2^2}$$

$y_1 = \frac{s_1^2}{2 \rho} - \frac{\rho'}{6 \rho^3} s_1^3 +$ ρ étant le rayon de la courbure et par suite

$$tg \delta = \frac{\rho'}{3 \rho} \quad (14)$$

d'où on tire facilement la formule (2) de Transon.

§ 3. Nous obtenons la première série des courbures et des vecteurs des courbures :

(σ_1, τ_1) (σ_2, τ_2) (σ_3, τ_3) . . . (σ_n, τ_n) en commençant par l'axe de la déviation. $\sigma_1 = \delta$ est l'angle entre cette axe et normale. τ est la longueur du vecteur de l'axe de la déviation définie par l'intersection avec l'axe de la déviation infiniment voisine. La seconde paire pour l'axe de la déviation du second ordre (σ_2, τ_2) s'obtient en prenant pour $\Phi=0$ la courbe $\sigma_1 = \text{const.}$, pour laquelle on obtient $\tau = \infty$. De la même manière on construit

$$(\sigma_3, \tau_3) (\sigma_4, \tau_4) \quad (\sigma_n, \tau_n)$$

Il est important de souligner le rôle suivant de l'axe de la déviation dans la théorie des courbes planes :

Il faut distinguer trois classes suivantes des grandeurs :

1) dépendentes du choix des axes des coordonnées OX , OY .

II) indépendentes de OX, OY , mais qui peuvent dépendre du choix d'un point de la courbe c'est à dire de la coordonnée sur la courbe.

Tel est l'arc s , qui peut être compté d'un point quelconque ou l'angle de la contingence ω .

III) Les grandeurs qui ne dependent que de la forme de l'élément de la courbe en point M .

Les équations naturelles de deux types:

$$\Omega(\varrho, \omega) = 0 \quad (15)$$

$$\Theta(\varrho, s) = 0 \quad (16)$$

lient les grandeurs de II, III classes et par conséquent sont indépendentes de choix des coordonnées (ω, y) .

Elles donnent pour y l'équation différentielle du second ordre, qui depend du choix du point initial de s et ω .

Par suite les intégrales contiennent 3 constantes arbitraires, qui sont définies, si on donne OX, OY .

Remarquons qu'on doit les grandeurs de II classe diviser en deux sous-classes:

II₁, qui dépendent de la coordonnée sur courbe ou de M_0

II₂, qui ne dépendent pas de M_0 et sont définies seulement par l'élément de la courbe, auquel appartient le point M et par consequent se conservent, si on enlève la reste de la courbe.

Tel est l'équation:

$$H(\varrho, \delta) = 0 \quad (17)$$

où ϱ est le rayon de la courbure, δ l'angle que l'axe de la déviation fait avec la normale de la courbe. Nous l'appellerons équation absolument-naturelle.

§ 4. La seconde série

$$(\pi_1, \varrho_1) (\pi_2, \varrho_2) (\pi_3, \varrho_3) \dots$$

se commence par $\pi_1 = 0$ et ϱ_1 vecteur-normale à la courbe égal au rayon de la courbure ϱ .

Il est facile à voir qu'en portant sur la courbe d'un point ordinaire M dans les deux côtes $\frown MP = \frown MQ = s$ et en réunissant M et le milieu ($PQ = 0$) nous obtenons comme position limite la normale de la courbe.

Le terme suivant c'est l'axe circulaire du premier ordre.

Cette axe s'obtient comme la position limite de la droite qu'on obtient de la manière suivante:

On porte sur la courbe donnée

$$\frown MQ = \frown MP = s$$

et sur la conference osculatrice

$$\frown MS = \frown MR = s$$

et les milieux des cordes PQ et RS on réunit par la droite OQ .

Les axes circulaires des ordres superérieurs s'obtiennent de la même façon comme les axes de la déviation en prenant pour la courbe osculatrice (3) $\pi_1 = \text{const}$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \varphi(s), & x_2 &= \varphi(-s) \\
 y_1 &= \underline{\psi}(s), & y_2 &= \underline{\psi}(-s) \\
 \xi_1 &= \underline{\varphi}(s), & \xi_2 &= \underline{\varphi}(-s) \\
 \eta_1 &= \underline{\psi}(s), & \eta_2 &= \underline{\psi}(-s)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$\varphi(s) = \sum_{j=1}^{j=\infty} a_j s^j, \quad a_1 = 1
 \tag{7}$$

$$\psi(s) = \sum_{j=1}^{j=\infty} b_j s^j, \quad b_1 = 0$$

$$\overline{\varphi}(s) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j s^j, \quad \alpha_1 = 0$$

$$\overline{\psi}(s) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_j s^j, \quad \beta_1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \alpha_i \\ b_i &= \beta_i \end{aligned} \right\} i \leq n
 \tag{9}$$

En supposant l'osculation des $n = 2m - 2$ ou de $n = 2m - 1$ ordres nous allons définir la position limite (O de la droite qui réunit les milieux des cordes PQ et RS).

Les coordonnées de O (milieu de PQ)

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \sum_{j=1}^{j=\infty} a_{2j} s^{2j}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \sum_{j=1}^{j=\infty} b_{2j} s^{2j}$$

de C (milieu de RS):

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_{2j} s^{2j}$$

$$\overline{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_{2j} s^{2j}$$

Pour l'angle ($CO \dot{M} N$) nous avons la formule suivante:

$$\operatorname{tg} \pi_m = \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{2n}}{b_{2n} - \beta_{2n}}
 \tag{19}$$

§ 5. Au moyen d'un calcul très pénible mais tout à fait élémentaire on obtient d'abord

$$a_4 = -\frac{y'' y'''}{8} \quad b_4 = \frac{y^{(IV)} - 2y'''}{24}$$

Pour avoir l'expression générale des α_4, b_4 il faut exprimer $y'', y''', y^{(IV)}$ en $\varrho, \varrho', \varrho'', \dots, \varrho' = \frac{d\varrho}{ds}$ et remplacer $\varrho, \varrho', \varrho''$ par leurs expressions générales en $x, y, y', y'', y''', y^{(IV)}$.

Pour le système spécial des axes des coordonnées ($O \equiv M, OX \equiv MT$) $\varrho = \frac{1}{y''}, \varrho' = -\frac{y'''}{y''^2}$

$$\varrho'' = \frac{(3y''^3 - y^{(IV)})y'' + 2y''^3}{y''^3}$$

d'où

$$y'' = \frac{1}{\varrho} \quad y''' = -\frac{\varrho'}{\varrho^2} \quad y^{(IV)} = \frac{3}{\varrho^3} - \frac{\varrho''}{\varrho^2} + \frac{\varrho'^2}{\varrho^3} \quad (20)$$

$$\alpha_4 = \frac{\varrho'}{8\varrho^3} \quad b_4 = \frac{1 - \varrho\varrho'' + \varrho'^2}{24\varrho^3} \quad (21)$$

En définissant la circonférence osculatrice par les équations suivantes :

$$\xi = \varrho \sin \frac{s}{\varrho}$$

$$\eta - \varrho = \varrho \cos \frac{s}{\varrho}$$

on obtient

$$\xi = \varrho \left(\frac{s}{\varrho} - \frac{s^3}{6\varrho^3} + \dots \right)$$

$$\eta = \frac{s^2}{2\varrho} - \frac{s^4}{24\varrho^3} + \dots$$

d'où $\alpha_4 = 0 \quad \beta_4 = -\frac{1}{24\varrho^3}$

$$tg \pi_2 = \frac{3\varrho'}{2 - \varrho\varrho'' + \varrho'^2} \quad (23)$$

En remplaçant ϱ par son expression générale (1) on obtient :

$$tg \varepsilon = \frac{3(A + B\lambda)y''^2}{C + D\lambda + E\lambda^2} \quad (24)$$

$$\lambda = 1 + y'^2$$

$$A = 3y'y''^2$$

$$B = -y''^3$$

$$C = y''^2 (2y''^3 + 9y'^2 y''^2 - 6y' y''^4)$$

$$D = y''^2 (-3y''^3 - 10y' y''^4) + 2y''^5$$

$$E = y^{(IV)}y'' + y''^3$$

L'équation

$$\Theta(\delta, \varepsilon) = 0 \quad (25)$$

est l'équation spécifique de la courbe qui caractérise les propriétés intérieures de la courbe (entre les grandeurs des II, III classes), qu'on doit distinguer des propriétés extérieures qui se définissent par la dimension de la figure donnée et par le choix des axes des coordonnées.

Tel est l'équation entre l'angle de la contingence et l'angle de la torsion dans la théorie des courbes de la double courbure.²⁾

§ 6. Comme la courbure ordinaire les courbures des ordres supérieures sont des invariants par rapport à la groupe des transformations des coordonnées :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y &= y_0 + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha\end{aligned}\quad (26)$$

L'ensemble des courbures (nous dirons — la famille) définie par l'équation

$$\Theta (x, y, y' \dots y^{(n)}) = R_n = \text{const} \quad (27)$$

où $\Theta = R_n$ est la courbure de n -me ordre reste invariant pour les transformations des coordonnées (26) : chaque courbe de la famille (27) passe dans une courbe de la même famille.

Mais on ne peut pas conclure, que chaque courbe de la famille peut être transformée en chaque courbe donnée de cette famille comme cela a lieu pour la circonférence dont tous les points ont la même courbure.

Si

$$H (x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

se transforme en

$$H (x_1, y_1, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}) = 0$$

nous devons avoir

$$c_j^{(1)} = q_j (c_1, c_2, \dots, c_n, x_0, y_0, \dots, \alpha)$$

j = 1. 2. . n

Pour que pour les (x_0, y_0, α) convenables et c_j donnés nous pouvions obtenir pour $c_j^{(1)}$ les valeurs arbitrairement données, il est nécessaire, que $n \leq 3$.

De cette remarque la discussion de la courbure en sens ordinaire ($n=2$) et de l'axe de la déviation acquiert intérêt particulier.

La discussion, qui suit, montre que pour $n=2$ nous avons l'équation :

$$\Theta (x, y, y', y'') = 0$$

qui pour Θ arbitraire ne peut pas définir chaque courbe donnée.

Mais pour $n=3$ nous obtenons notement l'équation absolument naturelle, qui définit les courbes, qui ne diffèrent que par la position c'est à dire les mêmes courbes, mais dans les positions différentes et il faut ajouter, que cette équation est la seule possible qui caractérise en ce sens—la courbe plane.

Si nous ajouterons à la transformation des coordonnées encore la transformation de la similitude et au lieu de (26) nous prendrons les équations suivantes :

²⁾ Hoppe. Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion. Journal de Crelle, P. 63. 1863. p. 122.

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\y &= x_0 + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha\end{aligned}\quad (28)$$

il sera bien naturel d'attendre qu'au lieu de l'équation absolument naturelle se placera l'équation spécifique de la courbe.

Dans ce mémoire je ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui nous allons tout de suite développer, mais beaucoup plus compliquée.

§ 7. Nous allons d'abord démontrer que chaque équation différentielle du second ordre :

$$f(x, y, y', y'') = 0 \quad (29)$$

qui définit la famille des courbes planes avec la propriété de § 6 doit se ramener à la forme suivante :

$$Ry'' = (1 + y'^2)^{3/2} \quad (30)$$

et exprimer l'invariabilité de la courbure.

Pour définir graduellement la forme de f nous divisons la transformation (26) en deux transformations de la translation :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x_1 \\y &= y_0 + y_1\end{aligned}\quad (31)$$

et transformation de la rotation

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha \\y_1 &= x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha\end{aligned}\quad (32)$$

L'équation

$$f(x + x_0, y + y_0, y', y'') = 0$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de (x_0, y_0) et par suite, quand on les remplace par des fonctions arbitraires de (x, y) .

En posant $x_0 = -x, y_0 = -y$ nous obtenons :

$$f(0, 0, y', y'') = 0.$$

Ainsi nous pouvons supposer que dans le côté gauche de (29) (x, y) n'entrent pas explicitement.

Pour la rotation de $OX-OY$ nous avons :

$$f \left[\frac{\sin \alpha + y'_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha}, \frac{y''_1}{(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3} \right] = 0$$

Si l'équation $f(y', y'') = 0$ nous donne $y'' = \Theta(y')$ nous avons

$$y''_1 = (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3 \Theta \left(\frac{\sin \alpha + y'_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha} \right) = \Theta(y'_1)$$

Cette équation doit avoir lieu identiquement pour chaque valeur de y'_1 , car autrement $y'_1 = \text{const}$ et dans ce cas l'équation (29) se ramène à $y'' = 0$ c'est à dire à (30), correspondant à $R = \infty$.

Donc

$$(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3 \Theta \left(\frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha} \right) = \Theta(\xi).$$

Pour $\xi=0$ $\cos^3 \alpha \Theta(\operatorname{tga}) = c$, c étant constante.

En posant $\operatorname{tga} = u$ nous avons

$$\Theta(u) = c(1+u^2)^{3/2}$$

et l'équation (29) se ramène à la forme

$$y'' = c(1+y'^2)^{3/2}$$

c'est à dire à (30).

§ 8. Nous allons maintenant faire la même discussion pour l'équation du 3. ordre :

$$f(x, y, y', y'', y''') = 0 \quad (33)$$

D'abord par la transformation de la translation nous nous persuadons qu'elle se ramène à la forme

$$f(y', y'', y''') = 0 \quad (34),$$

d'où

$$y''' = \Theta(y', y''). \quad (34)$$

En passant ensuite à la rotation nous avons

$$y''''_1 (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha) + 3 \sin \alpha y''_1{}^2 = (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3.$$

$$\Theta \left[\frac{\sin \alpha + y'_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha}, \frac{y''_1}{(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3} \right] \quad (35)$$

d'où en vertu de (34) :

$$\Theta(y'_1, y''_1) (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha) + 3 \sin \alpha y''_1{}^2 = (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3.$$

$$\Theta \left[\frac{\sin \alpha + y'_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha}, \frac{y''_1}{(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3} \right] \quad (35)$$

Prenons d'abord le cas où cette égalité est identique par rapport à y'_1 et y''_1 .

Pour obtenir Θ en fonction de (ξ, η)

$$\xi = y'_1 \quad \eta = y''_1$$

nous allons différentier par rapport à (ξ, η, α) l'identité :

$$\frac{\Theta(\xi, \eta) (\cos \alpha - \xi \sin \alpha) + 3 \sin \alpha \eta^2}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3} = \Theta \left[\frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha}, \frac{\eta}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3} \right]$$

ou

$$\Theta(\xi, \eta) (\cos \alpha - \xi \sin \alpha) + 3 \sin \alpha \eta^2 = (\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3 \Theta(u, v)$$

$$u = \frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha}, \quad v = \frac{\eta}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3}$$

Dans les égalités qu'on obtient

$$(\cos \alpha - \xi \sin \alpha) \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} - \bar{\Theta} \sin \alpha = -3(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^4 \sin \alpha + \\ + (\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^5 \left[\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial u} u'_{\xi} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial v} v'_{\xi} \right] \quad (37)$$

$$(\cos \alpha - \xi \sin \alpha) \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \eta} + 6 \sin \alpha \cdot \eta = (\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^5 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial v} v'_{\eta} \quad (38)$$

$$\bar{\Theta}(-\sin \alpha - \xi \cos \alpha) + 3 \cos \alpha \eta^2 = 5(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^4 (-\sin \alpha - \xi \cos \alpha) \bar{\Theta} + \\ + (\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^5 \left[\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial u} u'_{\xi} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial v} v'_{\xi} \right] \quad (39)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}(u, v)$$

En posons les valeurs suivantes :

$$u'_{\xi} = \frac{1}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^2} \quad v'_{\xi} = \frac{3 \eta \sin \alpha}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3}$$

$$u'_{\alpha} = \frac{1 + \xi^2}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^2} \quad v'_{\alpha} = \frac{3 \eta (\sin \alpha + \xi \cos \alpha)}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^4}$$

et ensuite posons $\alpha = 0$.

De (19) on obtient l'équation partielle suivante

$$4 \Theta \xi + 3 \eta^2 = (1 + \xi^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + 3 \eta \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad (41)$$

avec le système des équations ordinaires

$$\frac{d \xi}{1 + \xi^2} = \frac{d \eta}{3 \eta \xi} = \frac{d \Theta}{4 \Theta \xi - 3 \eta^2}$$

avec deux intégrales :

1) qu'on obtient de l'équation

$$\frac{3 \xi d \xi}{1 + \xi^2} = \frac{d \eta}{\eta}$$

et qui se ramène à

$$\eta = D (1 + \xi^2)^{3/2} \quad (42)$$

et 2) qu'on obtient de l'équation :

$$\frac{d \xi}{1 + \xi^2} = \frac{d \Theta}{4 \xi \Theta + 3 D^2 (1 + \xi^2)^3}$$

ou

$$\frac{d \Theta}{d \xi} = 4 \xi \Theta = 3 D^2 (1 + \xi^2)^3$$

d'où

$$\Theta = (1 + \xi^2)^3 [C + D^2 \xi]$$

L'intégrale générale de (41) est

$$\Theta = \frac{3 \eta^2 \xi}{1 + \xi^2} + (1 + \xi^2)^3 \varphi \left[\frac{(1 + \xi^2)^{3/2}}{\eta} \right]$$

φ étant le signe de la fonction arbitraire.

Ainsi la forme de l'équation (29) doit être suivante:

$$y''' = \frac{3y''y'}{1+y'^2} + (1+y'^2)\varphi \left[\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right]$$

ou

$$y' - \frac{y'''(1+y'^2)}{3y''^2} = \psi \left[\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right] \quad (43)$$

ou en définitive

$$tg \delta = \psi(R) \quad (43)'$$

§ 9, Il nous reste encore à démontrer que l'égalité (36) ne peut pas être l'équation invariante par rapport à la transformation (26).

En effet en vertu de (7) nous devons avoir

$$\frac{\Theta(y', y'') (\cos \alpha - y' \sin \alpha) + 3 \sin \alpha y''^2}{(\cos \alpha - y' \sin \alpha)^2} - \Theta \left[\frac{\sin \alpha + y' \cos \alpha}{\cos \alpha - y' \sin \alpha}, \frac{y''}{(\cos \alpha - y' \sin \alpha)^3} \right] = H \left[\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right]$$

En posant

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \zeta, y' = \xi$$

nous avons

$$\frac{\Theta \left[\xi, \zeta \sqrt{1+\xi^2} \right] (\cos \alpha - \xi \sin \alpha) + 3 \sin \alpha \zeta^2}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^2} - \Theta \left[\frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha}, \frac{\zeta \sqrt{1+\xi^2}}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3} \right] = H(\zeta)$$

pour ξ, ζ, α arbitraires.

En posant $\xi=0$ nous aurons pour (ζ, α) arbitraires:

$$\Theta(0, \zeta) \frac{1}{\cos \alpha} + H(\zeta) = \Theta \left(tg \alpha, \frac{\zeta}{\cos^3 \alpha} \right)$$

Pour $\alpha=0$ nous avons $H(\zeta)=0$.

En résumant nous pouvons dire que

$$R = \text{const}$$

est la seule famille des courbes dépendantes de deux paramètres telle que chaque courbe de la famille peut être ramenée à la coïncidence avec chaque autre courbe de la même famille.

$$\Omega(\delta, R) = 0$$

δ étant l'angle entre l'axe de la déviation et la normale de la courbe, est la seule famille des courbes dépendantes de 3 paramètres avec telle propriété et pour chaque courbe autre dans une telle famille défini par l'équation absolument-naturelle.

Intégration de l'équation de Laplace.

Soit proposé d'intégrer l'équation de Laplace

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1)$$

U étant dans l'électromécanique et hydrodynamique une fonction potentielle. Donc si l'on désigne au dedans du champ newtonien une surface de niveau $U = \text{const.}$, on en déduit que.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cdot p + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot p^2 + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot r = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cdot q + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot q^2 + \\ + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot t = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cdot q + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cdot p + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot p q + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot s = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

en supposant

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s.$$

Dans le cas où les directions des axes de coordonnées sont, de même les directions des tensions principales au dedans du champ on a, d'après transformation de coordonnées que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

Donc dans le cas présent les équations (2) prennent la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot p^2 + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot r = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot t = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot p q + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot s = 0 \quad (3)$$

En éliminant les $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

entre les équations (1) et (3) on aura cette équation différentielle aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{vmatrix} 1, 1, 1, 0 \\ 1, 0, p^2, r \\ 0, 1, q^2, t \\ 0, 0, pq, s \end{vmatrix} = pq(r+t) - s(p^2 + q^2 - 1) = 0 \quad (4)$$

On sait bien que par chaque point d'une surface $U = \text{const}$ il passe deux lignes de courbure représentées par l'équation différentielle

$$\left[pqt - (1+p^2)s \right] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left[(1+p^2)t - (1+q^2)r \right] \frac{dy}{dx} + \left[(1+p^2)s - pqr \right] = 0.$$

Comme les deux séries de ligne de courbure se coupent à l'angle droit sur la surface donnée, on a selon la nature des racines de l'équation du second degré que

$$\frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2)s - pqt} = -1.$$

D'une autre manière

$$\begin{vmatrix} s, -r, q \\ t, -s, -p \\ q, -p, 0 \end{vmatrix} = pq(r-t) - s(p^2 - q^2) = 0 \quad (5)$$

Il est aisé à contrôler que les équations différentielles (4) et (5) expriment la même ligne de courbure sur la surface de niveau $U = \text{const}$. quand cette ligne prend la forme

$$\frac{s}{2pq} = \frac{r}{2p^2-1} = \frac{t}{2q^2-1} = \frac{r+t+s}{2(p^2+q^2+pq-1)} = \omega \quad (6)$$

En ayant égard à l'équation (1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

on aura, d'après l'addition des (3), que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} (p^2 + q^2 + pq - 1) = - \frac{\partial U}{\partial z} (r + t + s).$$

D'une autre manière

$$\frac{s}{2pq} = \frac{r}{2p^2-1} = \frac{t}{2q^2-1} = \frac{r+t+s}{2(p^2+q^2+pq-1)} = - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}{2 \frac{\partial U}{\partial z}} = \omega \quad (7)$$

Suivant le théorème que la somme des courbures de deux sections normales, perpendiculaires entre elles, est constante, à l'aide de l'équation

$$\left[tr - s^2 \right] R^2 - \left[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs \right] \sqrt{p^2+q^2+1} \cdot R + \left[p^2+q^2+1 \right]^2 = 0$$

qui donne le rayon de courbure R d'une section normale faite dans une surface de niveau $U = \text{const}$, on aura

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+p^2)t + (1+q^2)rp - qs}{[p^2 + q^2 + 1]^{3/2}} = \text{const} = C$$

Donc en raison des (7) on a

$$\frac{p^2 + q^2 - 2}{[p^2 + q^2 + 1]^{3/2}} = \frac{C}{\omega} = -2C \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}} \quad (8)$$

Mais

$$p = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial U}{\partial z}} \quad (9)$$

les x et y étant des variables indépendantes. Donc

$$-\frac{C}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} \quad (10)$$

Dans le cas des variables indépendantes y et z ou z et x on aura analogiquement pour chaque système des axes de coordonnées rectangulaires, comme $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const}$:

$$\begin{aligned} -\frac{C}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2}, \\ -\frac{C}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} \quad (11) \end{aligned}$$

L'addition des (10) et (11) étant opérée, on aura d'après simplifications, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2} + \\ + \frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

Ce—qui sous la forme de l'invariant suivant

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

qui d'après les réductions, prend la forme

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^4 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^4 = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \quad (14)$$

représent un premier des intégrales de l'équation $\nabla^2 U = 0$ de Laplace, qui l'auteur a découvert ici pour la première fois, Selon la nature des trois nombres quadratiques réels on a toujours

$$a^4 + b^4 + c^4 > a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^4 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^4 > \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$$

C'est pourquoi seulement les grandeurs imaginaires ou complexes des x, y et z satisfont à l'invariant (14) excepté le cas quand

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

et le cas des intégrales singulières

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 = 0, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Donc la surface de niveau $U = \text{const.}$ doit être une surface à deux nappes, conformément à partie réelle et à partie imaginaire de la fonction U , sous la forme $U = U_1 + i U_2$. Soit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = c$$

Selon la nature des trois nombres quadratiques on a identiquement

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 4(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)$$

En outre cela on a en raison de (14) que

$$\text{Donc} \quad a^4 + b^4 + c^4 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2.$$

$$ab+bc+ca = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

et l'invariant

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad (17)$$

Ainsi la (16) apparut sous la forme d'une équation différentielle

$$pq+p+q=0 \quad (16 \text{ bis})$$

qui, d'après la différentiation tour à tour par rapport à x et y , prend la forme

$$s^2 - rt = 0. \quad (a)$$

Donc on peut en déduire que chaque surface de niveau au dedans du champ laplacien doit être une surface développable à deux nappes.

En vertu des conditions précédentes

$$\frac{s}{2pq} = \frac{r}{2p^2-1} = \frac{t}{2q^2-1} \quad (6 \text{ bis})$$

l'équation (18) prend la forme immédiatement suivante

$$2p^2+2q^2-1=0 \text{ ou } p^2+q^2-1 = -(p^2+q^2) \quad (b)$$

et les équations (4) et (5), dans le cas présent, sont

$$pq(r+t)+s(p^2+q^2)=0 \text{ et } pq(r-t)-s(p^2-q^2)=0 \quad (18)$$

Pour avoir les équations (18) aux dérivées partielles des surfaces de niveau en quantités finies on différenciera la fonction arbitraire

$$z = \Phi[Ax^2i, By^2i] \quad (19)$$

A et B étant des constantes, par rapport à x et y . Comme dans ce cas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = pi, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = qi, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -t \text{ et } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -s$$

on aura telles les équations différentielles suivantes:

$Aqx - Bpy = 0, -Asx - Bry + Aqi = 0, -Atx - Bsy - Bpi = 0$
qui peuvent subsister simultanément à condition que

$$-i \begin{vmatrix} q, -q, -p, 0 \\ -s, -r, Aqi \\ -t, -s, Bpi \end{vmatrix} = pq(Br + At) + s(Bp^2 + Aq^2) = 0 \quad (20)$$

En posant $A=1+i$ et $B=1-i$, où $i = \pm \sqrt{-1}$, on aura l'équation (20) en forme

$$-i \begin{vmatrix} q, -p, 0 \\ -s, -r, (i+1)qi \\ -t, -s, (i-1)pi \end{vmatrix} = pq(r+t) + s(p^2+q^2) - i[pq(r-t) - s]^2 = U_1 + i U_2 = 0 \quad 21$$

De cette manière l'équation (19) doit être, pour les équations (18), en quantités finies,

$$z = \Phi[(1+i)x^2i, (1-i)y^2i] \text{ ou } \varphi [(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] = 0 \quad (22)$$

comme une expression des équations (18). Ainsi donc détermine la surface de niveau au dedans du champ laplacien cette équation suivante:

$$U = U_1 + i U_2 = \varphi [(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] = \text{const} \quad (23)$$

Remarque. On peut en déduire que à l'oeuvre la fonction U , d'après la transformation des coordonnées suivant les formules d'Euler aux trois angles arbitraires, au tournant les axes des coordonnées, prend la forme

$$U = f(x+yi) + F(x+zi) + \Phi(y+zi)$$

les fonctions f , F et Φ étant arbitraires. En effet, dans le cas présent, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= f''(x+yi) + F''(x+zi), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -f''(x+yi) + \Phi''(y+zi), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \\ &= -F''(x+zi) - \Phi''(y+zi) \end{aligned}$$

Donc, d'après l'addition, on aura $\nabla = 0$.

Dans le cas général par rapport aux trois axes des coordonnées on obtiendra

$$\begin{aligned} \varphi_1 [(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] &= 0, \quad \varphi_2 [(1+i)y^2i, (1-i)z^2i, x] = 0, \\ \varphi_3 [(1+i)z^2i, (1-i)x^2i, y] &= 0 \quad (23 \text{ bis}) \end{aligned}$$

Donc les trois fonctions arbitraires déterminent la surface de niveau au dedans du champ laplacien, à savoir

$$\begin{aligned} U = U_1 + i U_2 = \varphi_1 [(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] + \varphi_2 [(1+i)y^2i, (1-i)z^2i, x] + \\ + \varphi_3 [(1+i)z^2i, (1-i)x^2i, y] = \text{const} \quad (24) \end{aligned}$$

Pour déterminer seulement la réelle nappe d'une surface de niveau (23) on doit appliquer cette méthode suivante. Prenant en considération que l'équation

$$\begin{vmatrix} s, -r, q \\ t, -s, -p \\ q, -p, 0 \end{vmatrix} = pq(r-t) - s(p^2 - q^2) = 0 \quad (5 \text{ bis})$$

est la suite de l'élimination des x et y entre les trois équations suivantes:

$$sx - ry + q = 0, \quad tx - sy - p = 0 \quad \text{et} \quad qx - pq = 0$$

on peut en déduire que la surface U_2 doit être une surface de révolution.

En effet, en différenciant l'équation différentielle des surfaces de révolution $qx - py = 0$ tour à tour par rapport à x et à y on aura $sx - ry + q = 0$ et $tx - sy - p = 0$. Donc l'équation (5 bis) en quantités finies doit être

$$z = \Psi(x^2 + y^2) \quad \text{ou} \quad \psi(x^2 + y^2, z) = 0 \quad (25)$$

La partie imaginaire de la fonction $U=U_1+iU_2$ prend la forme

$$U_2 = \psi(x^2 + y^2, z) = \text{const} \quad (26)$$

dans le cas d'une surface de niveau. En effet les équations

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t} \quad (c)$$

qui servent à déterminer les ombilics de la surface (26), démontrent les conditions (6 bis) pour la surface $U=U_1+iU_2$ en total et satisfont à la surface U_2 . Ainsi une partie réelle U_1 de la fonction U doit être

$$U_1 = \varphi[(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] - i\psi[x^2+y^2, z] \quad (27)$$

Donc on aura réelle nappe sous la forme

$$U_1 = \varphi[(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] - i\psi[x^2+y^2, z] = \text{const} \quad (28)$$

pour la surface de niveau. Dans le cas général on a la réelle partie d'une surface de niveau sous la forme

$$U_1 = \varphi_1[(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z] + \varphi_2[(1+i)y^2i, (1-i)z^2i, x] + \\ + \varphi_3[(1+i)z^2i, (1-i)x^2i, y] - i[\psi_1(x^2+y^2, z) + \psi_2(y^2+z^2, x)(y^2+z^2, x) + \psi_3(z^2+x^2, y)] = \text{const} \quad (29)$$

Ainsi donc les six fonctions arbitraires déterminent chaque réelle nappe d'une surface de niveau au dedans du champ laplacien.

Comme la formules (29) et (24) découlent de les invariants (16) ou (17), on peut encore à démontrer cet invariant suivant:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \\ = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^4 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^4 \quad (30)$$

d'une autre manière

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \\ = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \quad (31)$$

Il est aisé à vérifier, d'après la différentiation des (16) et (17), que

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (32)$$

Kiev, mars 1933.



B. MILIANCZUK.

Zur Frage nach den Summenregeln in „erzwungenen“ Dipolmultipletts.

Die „verbotenen“ Spektrallinien werden bekanntlich entweder der spontanen elektrischen Quadrupolstrahlung oder der magnetischen Dipolstrahlung oder der „erzwungenen“ Dipolstrahlung zugeschrieben. Das Erfülltsein der Summenregeln für die Intensitäten und Übergangswahrscheinlichkeiten der Quadrupolmultipletts wurde von Rubinowicz¹⁾ bewiesen. Auf Grund vollkommener Analogie zwischen den Intensitätsformeln für elektrische und magnetische Dipolstrahlung²⁾ ist zu erwarten, dass auch für die Intensitäten der normalen magnetischen Dipolmultipletts die Summenregeln bestehen. Die Summenregeln sind also erfüllt für alle bisher bekannten spontanen Übergänge. Das Bestehen der Summenregeln für die „erzwungenen“ Dipolmultipletts wurde von Ornstein und Burger³⁾ und von Sambursky⁴⁾ auf dem experimentellen Wege mit verschiedenen Versuchsergebnissen untersucht. Die Messungen von Ornstein und Burger ergeben die Intensitätsverhältnisse im Cd-Triplett 2^3P-4^3F 1:3:2:1. Dagegen hat Sambursky auf Grund der Intensitätsmessungen in den „erzwungenen“ Dubletts 2^3P-3^3P des Ag I und 2^3P-4^3F des Cu I vermutet, dass die Summenregeln in „erzwungenen“ Multipletts nicht erfüllt sind. Den Gegenstand der vorliegenden Notiz bildet die Untersuchung der Erfüllbarkeit der Summenregeln in normalen „erzwungenen“ Dipolmultipletts.

Die allgemeinen Formeln für Übergangswahrscheinlichkeiten in „erzwungenen“ Dipollinien im Falle eines Einelektronenatoms sind am anderen Orte gegeben⁵⁾. Bei Behaltung der dort benutzten Bezeichnungen sind sie in der Form:

$$W_{J+2}^J = \frac{2}{3} \varepsilon^2 F^2 (C_{J+2}^J)^2 (J+1)(J+2)(2J+1)(2J+3)(2J+5),$$

$$W_{J+1}^J = \frac{1}{3} \varepsilon^2 F^2 (J+1)(2J+1)(2J+3) [(C_{J+1}^J)^2 J(J+2) + (D_{J+1}^J)^2],$$

1) A. Rubinowicz, Zs. f. Phys. 65, 662, 1930.

2) Vgl. H. C. Brinkman, Dissertation Utrecht, 1932.

3) L. S. Ornstein u. H. C. Burger, Die Naturwiss. 15, 32, 1927.

4) S. Sambursky, Zs. f. Phys. 68, 774, 1931.

5) B. Milianczuk, Acta Phys. Polon. III, 123, 1934.

$$W_J^J = \varepsilon^2 F^2 (2J+1) \left\{ \frac{4}{9} (C_J^J)^2 J(J+1) (2J-1)(2J+3) + 2J(J+1) + \frac{1}{3} (D_J^J)^2 J(J+1) + 2 \left[({}^J A_{+1} + {}^J B_{+1}) (J+1)^2 + ({}^J A_{-1} + {}^J B_{-1}) J^2 + \frac{2}{3} C_J^J J(J+1) \right]^2 \right. \quad (1)$$

$$W_{J-1}^J = \frac{1}{3} \varepsilon^2 F^2 J (2J-1) (2J+1) \left[(C_{J-1}^J)^2 (J^2-1) + (D_{J-1}^J)^2 \right],$$

$$W_{J-2}^J = \frac{2}{3} \varepsilon^2 F^2 (J-1) J (2J-3) (2J-1) (2J+1)$$

darstellbar.

Wir wollen die Formeln (1) auf das Mehrelektronenatom verallgemeinern. Für normale Multipletts lassen sich $\alpha_{n, L_1, J_1}^{n, L, J}$ in der Form

$$\alpha_{n, L_1, J_1}^{n, L, J} = \beta_{L_1, J_1}^{L, J} \gamma_{n, L_1}^{n, L}$$

darstellen ¹⁾, worin $\gamma_{n, L_1}^{n, L}$ nur von n, L, n_1, L_1 abhängen und $\beta_{L_1, J_1}^{L, J}$ durch

$$\begin{aligned} \beta_{J, L}^{J, L} &= \frac{R(J, L)}{J(J+1)} \\ \beta_{J-1, L}^{J, L} &= \beta_{J, L}^{J-1, L} = - \frac{\sqrt{P(J+L) Q(J-L-1)}}{J \sqrt{(J-1)(J+1)}} \\ \beta_{J, L-1}^{J, L} &= \beta_{J, L}^{J, L-1} = \frac{\sqrt{P(J+L) Q(J-L)}}{J(J+1)} \quad (2) \\ \beta_{J, L-1}^{J-1, L} &= \beta_{J-1, L}^{J, L-1} = \frac{\sqrt{Q(J-L-1) Q(J-L)}}{J \sqrt{(2J-1)(2J+1)}} \\ \beta_{J-1, L-1}^{J, L} &= \beta_{J, L}^{J-1, L-1} = \frac{\sqrt{P(J+L-1) P(J+L)}}{J \sqrt{(2J-1)(2J+1)}} \end{aligned}$$

gegeben. Die Ausdrücke $P(J+L)$, $Q(J-L)$ und $R(J, L)$ sind durch

$$\begin{aligned} P(J+L) &= (J+L)(J+L+1) - S(S+1), \\ Q(J-L) &= S(S+1) - (J-L)(J-L+1), \\ R(J, L) &= J(J+1) + L(L+1) - S(L+1) \end{aligned} \quad (3)$$

bestimmt. J, L, S sind die resultierenden Quantenzahlen.

1) L. Rosenfeld, Zs. f. Phys. 57, 835, 1929.

Aus (1), (2) und (3) ergeben sich die allgemeinen Formeln für die Intensitäten in normalen „erzwungenen“ Dipolmultipletts. Aus der Abhängigkeit der Koeffizienten ${}^J_1A_{\pm}$ und ${}^J_1B_{\pm}$ von J in Gl. (5), (6) und (7) der oben zitierten Arbeit folgt ohne weiteres, dass die Summenregeln in „erzwungenen“ Dipolmultipletts im allgemeinen nicht erfüllt sind.

Wir nehmen an, dass die Feinstrukturaufspaltungen der Terme $E(n, L, J)$, $E(n', J', L')$ und $E(n_1, L_1, J_1)$ im Vergleich mit den Term-aufspaltungen $E(n, L, J) - E(n', L', J')$ und $E(n_1, L_1, J_1) - E(n', L', J')$ klein sind. Dann werden die Koeffizienten ${}^J_1A_{\pm}$ und ${}^J_1B_{\pm}$ in erster Näherung von J unabhängig. Für den Übergang $L \rightarrow L \pm 2$ ergeben sich dann die Relationen:

$$D_{J-1}^J = D_{J+1}^J = D_J^J = 0. \quad (4)$$

Für die Intensitäten im Falle eines Übergangs $L \rightarrow L \pm 2$ erhält man dann nach einiger Umrechnung die Formeln (bis auf

den gemeinsamen Faktor $3 \left\{ \sum_{n'} \frac{\gamma_{L-1, n'}^{L, n} \gamma_{L-2, n_1}^{L-1, n}}{E(n, L) - E(n', L-1)} + \sum_{n'} \frac{\gamma_{n_1, L-2}^{n_1, L-2} \gamma_{n, L_1}^{n_1, L-1}}{E(n_1, L-2) - E(n', L-1)} \right\}^2$:

$$\begin{aligned} W_{J-2}^J &= \frac{P(J+L-3)P(J+L-2)P(J+L-1)P(J+L)}{(J-1)J(2J-1)(2J+1)}, \\ W_{J-1}^J &= 2 \frac{P(J+L-2)P(J+L-1)P(J+L)Q(J-L)}{(J-1)J(J+1)(2J+1)}, \\ W_J^J &= 6 \frac{P(J+L-1)P(J+L)Q(J-L)Q(J-L+1)}{J(J+1)(2J-1)(2J+3)}, \\ W_{J+1}^J &= 2 \frac{P(J+L)Q(J-L)Q(J-L+1)Q(J-L+2)}{J(J+1)(J+2)(2J+1)}, \\ W_{J+2}^J &= \frac{Q(J-L)Q(J-L+1)Q(J-L+2)Q(J-L+3)}{(J+1)(J+2)(2J+1)(2J+3)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ähnlich berechnet man die Intensitätsformeln für $L \rightarrow L \pm 2$. Sie stimmen mit den von Rubinowicz¹⁾ für Quadrupolmultipletts gegebenen überein. Bezeichnet man mit $V_{L', J}^{L, J}$ die Übergangswahrscheinlichkeit für eine „erzwungene“ Dipollinie, die einem Übergange $L, J \rightarrow J', L \pm 2$, entspricht, so bestehen die Summenregeln:

$$V_{L', J-2}^{L, J} + V_{L', J-1}^{L, J} + V_{L', J}^{L, J} + V_{L', J+1}^{L, J} + V_{L', J+2}^{L, J} = V_{L'}^L$$

¹⁾ A. Rubinowicz, a. a. O.

$$g_{J-2} V_{L',J}^{L,-2} + g_{J-1} V_{L',J}^{L,J-1} + g_J V_{L',J}^{L,J} + g_{J+1} V_{L',J}^{L,J+1} + \\ + g_{J+2} V_{L',J}^{L,J+2} = \bar{V}_L^{L'}$$

$V_{L'}^L$ und $\bar{V}_L^{L'}$ sind von der inneren Quantenzahl J unabhängig und g_J bezeichnet das statistische Gewicht eines stationären Zustandes mit der inneren Quantenzahl J . Die Richtigkeit der Summenregeln wurde (für betrachtete Näherung) durch Versuchsergebnisse von Ornstein und Burger bestätigt. Wie eine genauere Rechnung zeigt, lassen sich diese Summenregeln, unter denselben Annahmen auch auf die Übergänge $L \rightarrow L \pm 1$ und $L \rightarrow L$ verallgemeinern.

Es ist mir eine angenehme Pflicht Herrn Prof. Dr. S. Szczeniowski für sein förderndes Interesse an meiner Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Lemberg, Institut für theoretische Physik
der Universität.

MIRON ZARYCKI, (Lemberg).

Über eine mathematische Unterhaltung.

Die Unterhaltungsmathematik erfreut sich in neuester Zeit großer Beliebtheit sowohl in weiten Kreisen der Gebildeten, als auch bei den hervorragenden Mathematikern. Es werden sogar Universitätsvorträge über mathematische Spiele gehalten.*)

Ich gebe im Folgenden die mathematische Theorie einer mir von Frau Marie Hubert mitgeteilten Kartenunterhaltung.

1.

Wir betrachten zwei Mengen von Elementen :

$$\begin{aligned} a_n &= 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ b_n &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

und bilden alle Paare von diesen Elemente so, daß in jedem Paare an erster Stelle ein Element a_n und an der zweiten Stelle ein Element b_n steht. Es ist leicht zu sehen, daß wir auf diese Weise 28 verschiedene Symbole ($a_n b_n$) erhalten. Wir nennen das Symbol ($a_n b_n$) eine „Karte“, die Zahl a_n den „Wert“ und die Zahl b_n die „Farbe“ dieser Karte.

2.

Wir ordnen jetzt die 28 Karten unseres Systems, indem wir die Formeln angeben, welche den Wert a_n und die Farbe b_n der Karte (a_n, b_n) in Abhängigkeit von der Ordnungszahl n bestimmen.

Es bedeute $R\left(\frac{x}{y}\right)$ den Rest, welchen man beim Dividieren von x durch y erhält.

Es sei :

$$b_n = R\left(\frac{n}{4}\right) \text{ für } n \neq 4m+4 \quad 1)$$

$$b_n = 4 \quad n = 4m+4 \quad 2)$$

wo $m=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Die Farben b_n erhalten also der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, .

*) Solche Vorträge wurden z. B. gelegentlich vom Prof. Gerhard Kowalewski gehalten. Im J. 1930 erschien bei B. G. Teubner das von ihm verfaßte sehr interessante Büchlein über „Alte und neue mathematische Spiele“.

Man beweist leicht, daß der Ausdruck $\frac{n+3b_n}{4}$ für jedes n eine ganze Zahl ist.

Es ist nämlich :

$$\begin{aligned} \text{für } n = 4m+1 & \quad \frac{n+3b_n}{4} = \frac{4m+1+3}{4} = m+1 \\ n = 4m+2 & \quad = \frac{4m+2+6}{4} = m+2 \\ n = 4m+3 & \quad = \frac{4m+3+9}{4} = m+3 \\ n = 4m+4 & \quad = \frac{4m+4+12}{4} = m+4 \end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt die Werte a_n durch folgende zwei Formeln:

$$a_n = \frac{n+3b'_n}{4}, \quad 3)$$

wenn der, nach dieser Formel berechnete „Wert“ a_n einen der Werte 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 annimmt, und

$$a_n = \frac{n+3b_n}{4} + 7, \quad 4)$$

wenn der Ausdruck $\frac{n+3b_n}{4}$ einen der Werte 1, 2, 3 bekommt.

Es ist leicht zu sehen, daß die nach den Formeln 3) und 4) berechnete Zahl a_n für $n=1, 2, 3, \dots, 27, 28$ einen der Werte 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 annehmen muß. Für jedes n erhalten wir dabei ein anderes Paar (a_n, b_n) .

Die Formeln 1), 2), 3), 4) bestimmen eine Ordnung im System der Amben (a_n, b_n) und wir können jetzt folgende Tabelle der geordneten Karten aufschreiben:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$a_n =$	8	9	10	4	9	10	4	5	10	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8	6	7	8	9	7	8	9	10
$b_n =$	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

$$\{a_n, b_n\} = (8,1), (9,2), (10,3), (4,4), (9,1), (10,2), (4,3), (5,4), (10,1), (4,2), (5,3), (6,4), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (5,1), (6,2), (7,3), (8,4), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4), (7,1), (8,2), (9,3), (10,4).$$

Wir wollen nun näher betrachten, für welche Nummern n man beim Berechnen von a_n die Formel 4) anwenden muß, d. h. für welche n man die Ungleichheit $\frac{n+3b_n}{4} < 4$ bekommt.

Aus der letzten Ungleichheit bekommt man die Bedingung $n < 16 - 3 b_n$ und für besondere Werte von b_n erhält man:

für $b_n=1$ ist $n < 13$	also $n=1, 5, 9$
$b_n=2$ $n < 10$	„ $n=2, 6$
$b_n=3$ $n < 7$	„ $n=3$
$b_n=4$ $n < 4$	was der Bedingung $b_n=4$ widerspricht.

Die sechs Paare (a_n, b_n) mit den Nummern $n=1, 2, 3, 5, 6, 9$, nehmen also eine gewisse Sonderstellung in unserem System der Karten ein. Wir beweisen jetzt, daß in diesen und nur in diesen Fällen die Ungleichheit $a_n - b_n \geq 7$ gilt.

Wir bekommen nämlich aus der Formel 4):

$$\begin{aligned} 4 b_n - 3 b_n &= n + 28 \\ 4 a_n - 4 b_n &= n + 28 - b_n \\ a_n - b_n &= 7 + \frac{n - b_n}{4} \end{aligned}$$

Es ist aber für $n=1, 2, 3, 5, 6, 9$: $n \geq b_n$, also:

$$a_n - b_n \geq 7$$

Für $n \neq 1, 2, 3, 5, 6, 9$ bekommen wir aus der Formel 3):

$$\begin{aligned} 4 a_n - 3 b_n &= n \\ 4 a_n - 4 b_n &= n - b_n \\ a_n - b_n &= \frac{n - b_n}{4} \leq 6 \text{ für } n \leq 24 \text{ und auch} \end{aligned}$$

für $n=25, 26, 27, 28$, weil für die 4 letzten Werte von n $b_n = 1, 2, 3, 4$ ist.

3.

Das Endziel unserer „Theorie“ ist die Angabe der Formel, die jedem Paare (a_n, b_n) eine bestimmte Nummer zuordnet. Wir müssen zuerst beweisen, daß eine solche Zuordnung eindeutig sein muß, daß also $m \neq n$ ist, wenn wenigstens eine der Bedingungen $a_m \neq a_n$, $b_m \neq b_n$ erfüllt ist.

Man bekommt entweder beide Werte a_m und a_n aus einer und derselben der beiden Formeln 3) und 4), oder aber a_m aus der Formel 3) und a_n aus der Formel 4).

Im ersten Falle erhielten wir aus der Formel 3) oder aus der Formel 4) (wenn wir $m=n$ annehmen):

$$4 (a_m - a_n) = 3 (b_m - b_n).$$

Wäre $b_m \neq b_n$, so müßte die Differenz $b_m - b_n$ durch 4 teilbar sein, was aber nicht möglich ist. Wäre $b_m = b_n$, so müßte auch $a_m = a_n$ sein.

Im zweiten Falle erhielten wir aus der Formel 3) und aus der Formel 4):

$$\begin{aligned} m = 4 a_m - 3 b_m &= 4 a_n - 3 b_n - 28 = n, \\ 4 (a_m - a_n) &= 3 (b_m - b_n) - 28, \end{aligned}$$

was auch nicht möglich ist, weil $b_m - b_n$ durch 4 nicht teilbar ist und im Falle $b_m = b_n$ wir annehmen müßten: $a_m - a_n = 7$, was den Voraussetzungen $a_n \leq 10$, $a_m \geq 4$ widerspricht.

Es kann also jeder Karte nur eine Ordnungsnummer zugeordnet werden.

Die Zuordnung selbst bekommt man leicht aus den Formeln 3) und 4).

Ist nämlich $a_n - b_n \leq 6$, so bekommen wir aus der Formel 3):

$$n = 4 a_n - 3 b_n \quad \text{I)}$$

Ist aber $a_n - b_n \geq 7$, so erhalten wir aus der Formel 4):

$$n = 4 a_n - 3 b_n - 28 \quad \text{II)}$$

Wir können die beiden Formeln I) und II) in eine Vorschrift zusammenfaßen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir Folgendes:

Ist $a_n - b_n \leq 6$, so ist:

$$n = 4 a_n - 3 b_n = 4 a_n - 4 b_n + b_n = 4(a_n - b_n) + b_n \leq 24 + b_n \leq 28.$$

Ist aber $a_n - b_n \geq 7$, so erhalten wir:

$$n + 28 = 4 a_n - 3 b_n = 4(a_n - b_n) + b_n \geq 28 + b_n \geq 29$$

Wir können jetzt folgende allgemeine Regel angeben:

Die Ordnungsnummer einer Karte ist gleich der Differenz des Vierfachen von ihrem Werte und des Dreifachen von ihrer Farbe, oder derselben um 28 verminderten Differenz, wenn sie mehr als 28 beträgt.

4.

Wir wollen schließlich unser System von geordneten Amben auf die anfangs erwähnte Kartenunterhaltung anwenden.

Man halte in der Hand 28 mit dem Bildern nach unten gekehrte Spielkarten in solcher Anordnung, daß die oberste Karte As Treff ist, die zweite darunter König Treff, dann Dame Treff, Bube Treff, 10 Treff 9 Treff und 8 Treff. Dann kommen: As Karo, König Káro u. s. w. 8 Karo, As Herz, bis 8 Herz und As Pik bis 8 Pik. Jede von 28 Karten hat jetzt von oben nach unten gezählt eine Nummer, z. B. 10 Herz hat die Nummer 19, 9 Pik die Nummer 27 u. s. w.

Wir stellen jetzt die Karten auf den Tisch in vier Teilreihen in folgender Anordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 14, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13 \\ 20, & 21, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19 \\ 26, & 27, & 28, & 22, & 23, & 24, & 25 \end{array}$$

In der ersten Reihe liegen also sieben Karten von As Treff bis 8 Treff. In zweiter Reihe liegen alle Karo, aber jede Karte um

einen Platz nach rechts verschoben und 8 Karo kommt nach links an den Anfang. Weiter kommt in der dritten Reihe As Herz unter König Karo, König Hertz unter die Dame Karo u. s. w., am Anfang der dritten Reihe liegen 9 Herz und 8 Herz. In der vierten Reihe liegen alle Pik in der Reihenfolge 10, 9, 8, As, König, Dame, Bube.

Jetzt legen wir wiederum alle Karten aufeinander und zwar in folgender Anordnung:

Unten kommt 26 (d. h. 10 Pik), darauf 20 (9 Herz), darauf 14 (8 Karo), dann 1, 27, 21, 8, 2, 28, 15, 9, 3, 22, 16, 10, 4, 23, 17, 11, 5, 24, 18, 12, 6, 25, 19, 13, 7, so daß die oberste Karte 7 d. h. 8 Treff ist.

Endlich legen wir die oberste Karte d. h. 8 Treff auf den Tisch, rechts davon die zweite von oben d. h. 13 (9 Karo), rechts davon die dritte (10 Herz) u. s. w. in einer Reihe bis zu der 28-ten Karte. Die letzte Karte am rechten Ende der Reihe ist jetzt 10-Pik die vorletzte 9 Herz u. s. w. Alle 28 Karten liegen jetzt in einer Reihe und ihre Anordnungsweise ist nicht leicht zu bestimmen. Man achte darauf, daß die Karten während des ganzen Spieles mit den Bildern nach unten gekehrt sein sollen,

Das Spiel beruht nun darauf, daß wir jede beliebige verlangte Karte aufdecken können. Weil die Karten auf verschiedene Weise zerlegt und zusammengenommen wurden und ihre einreihige Anordnung schwer zu übersehen ist, erscheint das „Erraten“ der Stelle der verlangten Karte sehr merkwürdig für denjenigen, der die Theorie des Spieles nicht erlernt hat.

Wir ordnen den Karten folgende „Werte“ zu:

A=7, König=6, Dame=5, Bube=4, 10=10, 9=9, 8=8.

Die Farben bekommen folgende Nummern:

Treff=1, Karo=2, Herz=3, Pik=4.

Jeder Karte entspricht jetzt eineindeutig ein Paar von Zahlen aus dem von uns betrachteten System $\{a_n, b_n\}$. Z. B. ist: 9 Herz = (9,3), As Pik = (7,4), Bube Treff = (4,1) u. s. w.

Man überzeugt sich leicht, daß die letzte einreihige Anordnung der Spielkarten auf dem Tische mit der Anordnung entsprechender Symbole (a_n, b_n) im oben behandelten System identisch ist.

Es gilt also auch hier dasselbe allgemeine Gesetz, welches jeder Karte ihre Nummer eindeutig zuordnet.

Will z. B. jemand, daß man Dame Karo d. h. (5,2) aufdecke, so berechnen wir leicht im Kopfe $n = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$, zählen in der Reihe der zugedeckten Karten von links nach rechts bis 14 und decken die 14-te Karte auf.

Verlangt jemand 10 Treff d. h. (10,1) so berechnen wir $n = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 1 - 28 = 9$ und decken die 9-te Karte auf.

Dem Uneingeweihten wird es immer wunderbar erscheinen, wenn jemand jede verlangte Karte ohne viel nachzudenken aufdecken kann, ja sogar dann, wenn man ihm die betreffende Regel mitteilt.

