

Різнничкове рівняння модулової еліптичної функції $J(\tau)$.

1. Як відомо, еліптична модулова функція $J(\tau)$ дається представити або у формі¹⁾:

$$J(\tau) = \frac{\left\{ \frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{h^{2n}}{1-h^{2n}} \right\}^3}{h^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1-h^{2n})^{24}} \quad 1)$$

де: $h = e^{\pi i \tau}$, $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ($2\omega_1$ та $2\omega_2$ первісні періоди еліптичних функцій), або коли візьмем означення з теорії еліптичних функцій:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \kappa^2 = \lambda \text{ (модул)}$$

у виді:

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2} \quad 2)$$

при чому:

$$\lambda(\tau) = 16 h \left[\frac{\prod (1 + h^{2n})}{\prod (1 - h^{2n})} \right]^8 \quad 3)$$

З теорії еліптичних модулових та автоморфних функцій відомо, що $J(\tau)$ є автоморфною функцією²⁾ з групою

$$\left(\tau, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) \text{ де } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Далі звісна є річ, що кожна автоморфна функція має те свойство, що її шварціяня поділений квадратом похідної дає на

¹⁾ Пор. пр. В. Левицький: Еліптичні функції модулові (Записки Наук. Тов. ім. Шевченка т. VII), де подано літературу того предмету.

²⁾ Ibid.

вислід також автоморфну функцію¹⁾; а що кожна автоморфна функція є алгебраїчною функцією якоїнебудь другої автоморфної функції тої самої групи, тож для кожної автоморфної функції $F(z)$ мусить існувати алгебраїчна реляція:

$$G \left(F(z), \frac{\{F(z), z\}}{F'(z)^2} \right) = 0 \quad 4)$$

де $\{F(z), z\}$ є символ Cayley'а на означення шварціана

$$\frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)^2$$

2. В нинішній ноті пошукаємо ріжничкового рівняння 3. порядку форми 4), яке на основі теорії мусить сповняти функція $J(\tau)$.

В тій цілі в формі 2) функції $J(\tau)$ вставимо:

$$\lambda^2 - \lambda = u(\tau) \quad 5)$$

а в виду сего дістанемо

$$\frac{27}{4} J(\tau) = \frac{(1+u)^3}{u^2} \quad 6)$$

Звідси поступенне ріжничкування дасть нам:

$$\frac{27}{4} J' = \frac{u'(1+u)^2(u-2)}{u^3} \quad 7)$$

$$\frac{27}{4} J'' = \frac{u''(1+u)^2(u-2)}{u^3} + \frac{6u'^2(1+u)}{u^4} \quad 8)$$

$$\frac{27}{4} J''' = \frac{u'''(1+u)^2(u-2)}{u^3} + \frac{18u'u''(1+u)}{u^4} - \frac{6(3u+4)u'^3}{u^5} \quad 9)$$

З рівнянь 8) та 7) дістанемо:

$$\frac{J''}{J'} = \frac{u''}{u'} + \frac{6u'}{u(1+u)(u-2)},$$

а з 9) та 7):

$$\frac{J'''}{J'} = \frac{u'''}{u'} + \frac{18u''}{u(1+u)(u-2)} - \frac{6(3u+4)u'^2}{u^2(1+u)^2(u-2)}.$$

В виду сего дістанемо на: $\frac{J'''}{J'} - \frac{3}{2} \left(\frac{J''}{J'} \right)^2$:

$$\{J(\tau), \tau\} = \{u, \tau\} - \frac{6u'^2}{u^2(1+u)^2(u-2)^2} [(u+1)^2 + 2u^2]. \quad 10)$$

¹⁾ Пор. В. Левицький: Короткий начерк теорії автоморфних функцій. (Збірник мат.-прир. секції Наук. Тов. ім. Шевченка VII. 2).

Утворім тепер вираження $\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2}$, то дістанемо:

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{\{u, \tau\}}{J'(\tau)^2} - \frac{6u'^2 [(u+1)^2 + 2u^2]}{u^2(1+u)^2(u-2)^2 J'^2}$$

А що:

$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau)} = \frac{u'(u-2)}{u(1+u)} \quad (11),$$

т. є.

$$u(1+u) = \frac{J}{J'} u'(u-2),$$

то останнє рівняння дасть:

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{\{u, \tau\}}{J'^2} - \frac{6[(u+1)^2 + 2u^2]}{J^2(u-2)^2} \quad (12).$$

Вставмо тепер по правій стороні:

$$J'^2 = \frac{u'^2(u-2)^2 J^2}{u^2(1+u)^2}$$

то дістанемо:

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{\{u, \tau\} u^2 (1+u)^2}{u'^2 (u-2)^2 J^2} - \frac{6[(u+1)^2 + 2u^2]}{(u-2)^4 J^2}$$

або

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{1}{(u-2)^2 J^2} \left[\frac{\{u, \tau\} u^2 (1+u)^2}{u'^2} - \frac{6[(u+1)^2 + 2u^2]}{(u-2)^2} \right] \quad (13)$$

Коли отже вставимо в рівняння 10) за J z , дістанемо рівняння різничкове 3. порядку: 14)

$$\left[\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 \right] - \left[\frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2} \left(\frac{u''}{u'} \right)^2 \right] = - \frac{6u'^2 [(u+1)^2 + 2u^2]}{u^2(1+u)^2(u-2)^2}$$

якого одним інтегралом є функція:

$$z = \frac{(1+u)^3}{u^2}$$

яке отже сповняє модулова функція $J[\lambda(\tau)]$. Рівняння 12) написане при допомозі z у формі:

$$(u-2)^4 \{z, \tau\} \frac{z^2}{z'^2} = (u-2)^2 (u+1)^2 \{u, \tau\} \frac{u^2}{u'^2} - 6[(u+1)^2 + 2u^2] \quad (15)$$

дає шукану алгебраїчну реляцію:

$$G\left(z, \frac{\{z, \tau\}}{z'^2}\right) = 0,$$

де z є модуловою еліптичною функцією J .