

М. Куренський

(Київ).

Про трисекцію кута

в зв'язку з задачами про квадратуру кола, подвоєння куба та поділ обводу кола на рівні частини.

„L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée, comme un mouvement perpétuel“.

(Постанова Паризької Академії Наук р. 1775).

З трьох знаменитих задач старовини: задачі про квадратуру кола, про подвоєння куба та задачі про поділ кута на три рівні частини за допомогою тільки циркуля та лінійки, перші дві наче б то зараз вже не звертають на себе уваги.

З них, для першої задачі, про квадратуру кола, неможливість збудування циркулем та лінійкою довжини боку квадрата, рівного площі заданого кола, є зрозуміла для всякого, хто чув про Lindemann'ову теорему про те, що число π , яке міститься у формулі для вирахування площі кола, є число трансцендентне¹⁾, тоб-то взагалі не може бути розв'язкою якого-небудь алгебричного рівняння з цілими коефіцієнтами. Це доведено було різними математиками: Lindemann'ом, Weierstrass'ом, Hilbert'ом, Gordan'ом²⁾ та А. Марковим. Найпростіший є довід Gordan'ів. Циркулем та лінійкою взагалі можна збудувати відтинок, який визначається низкою алгебричних рівнянь 1-го й 2-го степенів, і за допомогою тільки цих приладів не можна накреслити довжини боку квадрата, що вона дорівнює $r\sqrt{\pi}$, де r є радіус заданого кола, а π є число, що його алгебричним рівнянням визначити не можна.

¹⁾ G. Hessenberg: Transzendenz von e und π . Teubner, Leipzig-Berlin, 1912, ss. 1—102.

²⁾ В. Левицький: Про переступ чисел e і π . (Збірник Секції Мат.-Пр.-Лік. Н. Т-ва ім. Шевченка, т. I, 1897, ст. 1—28).

Що до третьої задачі, про поділ заданого кута на три рівні частини за допомогою тільки циркуля та лінійки, задачі, відомої під назвою трисекції кута, то тут питання уявляється в формі більш делікатній, аніж у попередній задачі, і зараз не перестають ще працювати над розв'язанням цієї задачі багато осіб, правда, здебільшого не математиків з фаху.

Ця робота має за мету дати вичерпане та повне роз'яснення задачі про трисекцію кута і є призначена для того, щоб вияснити прикре непорозуміння, яке є зв'язане з цією задачею та яке викликає все нові й нові спроби для її розв'язання. Досить сказати, що за останні 8 років до Всеукраїнської Академії Наук надіслано було на розгляд 5 праць про трисекцію кута. Всі вони не мають ніякої вартости.

Подібне непорозуміння може виникнути й у 2-й задачі, про подвоєння куба, відомої під назвою делійської задачі, що в ній вимагається збудувати циркулем та лінійкою довжину ребра куба вдвічі більшого об'ємом за куб з заданою довжиною його боку.

В зв'язку з цими задачами стоїть також і питання про поділ обводу кола на рівні частини за допомогою тільки вказаних приладів.

* * *

I. Умовмося за допомогою циркуля відзначити віддалення між двома заданими на площі точками, переносити положення всякої точки на площі з одного місця у друге та проводити обвід кола з якою завгодно довжиною радіуса¹⁾, а за допомогою лінійки — тільки проводити прості якоїсхочемо довжини, в якому завгодно напрямку та через які схочемо одну або дві точки на площі, — тоді за допомогою тільки цих двох приладів *не можна* поділити заданого кута на три рівні частини. Ділення кута на рівні частини у такому розумінні зватимемо його *трисекцією*.

Правдивість цієї теореми впливає з таких тверджень, доведених L. Wantzel'ем²⁾.

Формули, що визначають довжини відтинків, які можна збудувати вказаними приладами, будуть „Альгебричними рівнан-

¹⁾ М. Е. Ващенко-Захарченко: Начала Евклида, Київ, 1880, ст. 86: 3-й постулат Евклида.

²⁾ L. Wantzel: Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. (Journ. Liouville, t. II, 1837, pp. 366—372).

нями, що в них не містяться“ боки прямолінійних трикутників „та тригонометричні лінії їхніх кутів вище ніж у 1-й та 2-й степенях“. „Таким чином, невідоме задачі дістанемо шляхом розв'язки низки рівнянь 2-го степеня, що їх коефіцієнти є раціональні функції даних питань та розв'язками попередніх рівнянь. На підставі цього, щоб узнати, чи можна конструкцію геометричної задачі виконати лінійкою та циркулем, треба дослідити, чи можна встановити залежність розв'язок рівняння, до якого приводить задача, від розв'язок системи рівнянь 2-го степеня, складених відповідним способом“.

L. Wantzel розглядає лише той випадок, коли рівняння задачі є альгебричне.

Взявши „низку квадратних рівнянь

$$x_1^2 + Ax_1 + B = 0; x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0; \dots x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0,$$

що в них A та B є раціональні функції заданих чисел p, q, r, \dots ; A_1 та B_1 — раціональні функції від x_1, p, q, \dots та взагалі A_m, B_m — раціональні функції від $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$ “, приходимо до висновку, що „рівняння

$$f(x) = 0$$

степеня 2^n , яке дає всі розв'язки задачі, що її треба розв'язувати за допомогою n рівнянь 2-го степеня, є конче незводне, тобто: воно не може мати розв'язок спільних з рівнянням нижчого степеня, що його коефіцієнти були б раціональні функції даних величин p, q, \dots “

„Всяка задача, що приводить нас до незводного рівняння степеня, який не є степенем числа 2, не може бути розв'язана за допомогою простої та кола“.

Трисекція кута залежить від рівняння

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0,$$

незводного при альгебричному a^1). Подвоєння куба залежить від завжди незводного рівняння

$$x^3 - 2a^3 = 0.$$

Задача про знаходження двох середніх пропорційних приводить до рівняння

¹⁾ У „доводі“ В. И. Лебедева (Очерки по истории точных наук, вып. 4, Петроград, 1920, стор. 47) про неможливість трисекції циркулем та лінійкою не приймається на увагу незводність рівняння і його „довід“ не зможе запевнити читача у правдивості твердження.

$$x^3 - a^2 b = 0,$$

незводному тоді, коли відношення вартостей b до a не є куб.

Тому ці задачі не можна розв'язати за допомогою лише циркуля та лінійки, коли цими приладами користуватись вказаним раніш способом.

На підставі цих тверджень запевнюємось, між іншим, і в правдивості теореми, що її висловив Gauss: „ділення кола на N рівних частин можна буде зробити за допомогою лінійки й циркуля тільки при тій умові, що первісні чинники N , відмінні від 2-ох, будуть первісні числа форми $2^n + 1$ та що вони входять у це число тільки у першому степені“¹⁾.

* * *

II. Щоб поділити заданий кут на три рівні частини, *можна*, на практиці, користуватись рухом механічного приладу, відмінного від циркуля й лінійки, або приладу з циркуля та звичайної лінійки, яка має хоч двоє ділень, хоч одно ділення, вважаючи за друге ділення один з кінців лінійки. Для цього циркуль прищиплюється або прив'язується одним кінцем до лінійки й з обох цих приладів утворюється один механізм, який при непереривному русі закреслює криву конхоїду. Спосіб ділення кута за допомогою непереривного руху механізму зватимемо *механічним*.

Для ділення заданого кута AOB на три рівні частини можна користуватися кривою лінією, що вона має назву конхоїди Нікомеда. Рівняння цієї кривої має вигляд²⁾

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2,$$

де $x = b$

є рівняння простої, точки якої M, N, P, \dots з'єднуються з початком координат O , і на промінях OM, ON, OP, \dots відкладається від точок M, N, P, \dots відтинки однакової довжини a . Коли $a > b$, тоді ця крива (її проводять через точки M_1, N_1, P_1, \dots , на віддаленнях a від точок M, N, P, \dots промінів) матиме вигляд, вказаний на рисунку I, праворуч; вона асимптотично наближається до простої $x = b$.

Щоб поділити кут AOB на три рівні частини, бік OA візь-

¹⁾ L. Wantzel, *Ibidem*, p. 369.

²⁾ Д. А. Граве: Основы аналитической геометрии, ч. I, Київ, 1911, ст. 481.

мімо за просту $x = b$, і радіусом рівним a з вершка O кута, як з центру, опишемо дугу, яка перетинатиме другий бік OB заданого кута у точці B . Візьмімо точку B за початок координат, вісь x -сів направмо вниз нормально до боку OA , а вісь y -нів — рівнобіжно до цього боку. Тоді для такої системи координат XBY конхоїда Нікомедата матиме положення, що його подано на рисунку II.

З рис. II, коли точку перетину конхоїди з дугою кола означимо через D , а точку перетину простої BD з простою AO через C , матимемо:

$$\begin{aligned} < ODB = < DBO = < DCO + < DOC; \\ < AOB = < OBD + < DCO; < AOB = 3 < EOD. \end{aligned}$$

На підставі цього, коли до кількості приладів для ділення кута на рівні частини, крім циркуля та лінійки, прилучити ще механічний прилад для конструкції Нікодемової конхоїди, тоді задача ділення кута точно на три рівні частини зробиться можливою й розв'язуватиметься оце тільки що вказаним шляхом; тому то такий спосіб ділення кута ми й умовились звати механічним способом точного ділення.

Існує й справді багато приладів, іноді досить складних (і відмінних від циркуля та лінійки) для механічного креслення конхоїди Нікомедата та інших кривих, і одночасно — для ділення кута на три рівні частини. Проф. Б. Я. Букреєв любезно мене повідомив, що в одному з німецьких університетів йому доводилось бачити більше десятка таких приладів.

За словами Прокла „Нікомед поділив кут на три частини за допомогою кривої конхоїди, властивості якої він винайшов та вказав, як її будувати. Інші геометри туж саму задачу розв'язали за допомогою квадратриси Гіппія та Нікомедата“¹⁾. Гіппій винайшов і прилад для механічного будування цієї кривої. За словами Прокла Гіппій перший винайшов квадратрису. Давній Папп подав був розв'язку ділення кута на 3 рівні частини за допомогою гіперболі та конхоїди. Розв'язок за допомогою конхоїди Папп вважає за свій власний. Розв'язок задачі за допомогою конічних перерізів подав був Декарт, — для цього доводиться перетинати коло з параболою. Ньютон, Клеро та Шаль подали були ще й інші розв'язки²⁾.

Можна зазначити ще й спосіб ділення кута за допомогою

¹⁾ В. И. Лебедев. Ibidem, стор. 47.

²⁾ В. И. Лебедев. Ibidem, стор. 47, 50, 53, 54.

кривої, що вона зветься Паскалевою улиткою (слимаком Паскаля), та додати, що відомі способи будувати гіперболу та параболу по точках не розв'язують питання про поділ кола на рівні частини; способи ділення за допомогою гіперболи та параболи слід вважати лише за наближені способи, про які говоритимемо далі.

Не вдаючись до розглядання приладів для механічного креслення конхоїди Нікомеда та квадратриси Гіппія, зупинімось на одному тільки — на Нікомедовій лінійці, що її подано на рис. III¹⁾. Штифт C ховзається у прорізі лінійки AB , а лінійка CD ховзається своїм прорізом по штифту O лінійки OF ; точка D лінійки CD описує конхоїду DE , що її полюсом є точка O .

Очевидно, що закріпивши у діленні D лінійки олівець, впираючи лінійку у точці B об штифт та повертаючи її коло цього штифта так, щоб друге ділення C лінійки весь час ховзалось на простій EA , що вона лежить поза точкою B , яку вважаємо за полюс конхоїди, ми таким рухом накреслимо конхоїду Нікомеда. Нерухомий штифт у B та рухомий олівець у D можна замінити, як це показано на рис. IV, циркулем, ніжка якого з олівцем у D прищиплюється до лінійки гвинтиком та ховзається у прорізі лінійки (праворуч), або прив'язується з боку лінійки ниткою чи іншим яким-небудь способом (ліворуч). У такому механізмі „циркуль та лінійка“ ролю речі „зайвої“ відіграє „нитка“, що зв'язує одну ніжку циркуля з лінійкою. Хоч би точку C лінійки точно можна було б направляти на заданій простій EA , ми накреслили б точну конхоїду KD . На практиці, при русі точки C по простій EA , обов'язково траплятимуться похибки спостережень, конхоїда KD буде наближена і вказаний спосіб ділення кута буде механічний-наближений. Він перетворюється у точний-механічний, коли приєднати до приладу ще одну лінійку CF , на якій ховзався б гострий кінець C лінійки DC .

* * *

III. Коли лінійкою, як це й робиться техніками на практиці, дозволяється визначати також і віддалення між двома точками, що вони лежать на площі, тоді таку лінійку зватимемо звичайною лінійкою з діленнями; коли на звичайній лінійці матимемо хоч би тільки двоє ділень, то для поділу на прак-

¹⁾ Г. Попов: Изготовление математических приборов... (Физ.-Хим.-Мат.-Техн., № 8, 1929, ст. 63).

тиці заданого кута на три рівні частини *досить* буде тільки циркуля та такої лінійки з двома діленнями; вважаючи ж і кінець лінійки за окреме ділення, *досить* буде для тієї ж самої мети мати на лінійці ще тільки одно ділення. Таке ділення кута зватимемо *наближеним*.

Щоб запевнитись у правдивості цього твердження, досить звернутись до:

1) Способу Архімеда (287—212) для знаходження 3-ої частини заданого кута, за допомогою однієї леми Архімеда, що її подано у Архімедовому трактаті „Леми“¹⁾.

Коли задано буде кут AOB циркулем радіуса r , рівного віддаленню CD між двома діленнями лінійки C та D , з вершку O кута, як з центра, опишемо дугу $ABDE$; продовжимо бік AO кута й пристосуємо лінійку так, щоб одно її ділення C лежало на цьому продовженні, друге ділення D лежало б на дузі, а продовження лінійки проходило б через точку B перетину заданого кута з дугою. Дуга DE буде, як це легко бачити, третьою дуги AB (рис. V):

$$\begin{aligned} \angle DCO &= \angle DOE; \angle BDO = \angle DBO = 2 \angle DOE; \\ \angle AOB &= \angle DCO + \angle DBO = 3 \angle DOE. \end{aligned}$$

Спосіб ділення, як бачимо, ґрунтується на властивостях конхоїди Нікомеда. Він є наближений, тому що тягне за собою похибки спостережень при установці лінійки на точках C, D, B .

2) Спосіб А. Турр'а (Тіпа), що його автор доклав на Математичному Конгресі 1920 року²⁾, являє собою таку видозміну Архімедового способу: закресливши радіусом r , рівним CD , дугу, лінійку прикладаємо з того ж самого боку, де лежить і заданий кут AOB ; поставивши ніжку циркуля в D , тим самим радіусом закреслимо дугу, яка перетинатиме першу дугу в точках F та G ; кут AOF складатиме третину заданого кута AOB :

$$\begin{aligned} 3 \angle AOD &= \angle EOB; \angle FOA + \angle AOD = 60^\circ; \\ 3 \angle FOA + 3 \angle AOD &= 180^\circ; \\ 3 \angle FOA &= 180^\circ - \angle EOB = \angle AOB. \end{aligned}$$

Легко бачити, що кут FOA на рис. VI, для способу Тіпа, є вершківий кут відносно кута EOD на рис. V, для способу Архімедового.

¹⁾ Г. Н. Попов: Памятники математической старины в задачах, Госизд., 1929, стр. 10, 35. В. И. Лебедев: Ibidem, стр. 52.

²⁾ В. Niewenglowski: Sur la trisection d'un angle. (Nouvelles Annales de Mathématiques, série 5, t. 1, octobre, 1922, pp. 4—6).

Не важко вбачити також, що, поставивши з точки O перпендикуляр OH до боку OA заданого кута, матимемо кут GOH , що він дорівнює третині кута HOB ¹⁾:

$$\begin{aligned} \angle FOA + \angle AOH + \angle HOG &= \angle FOD + \angle DOG = 120^\circ; \\ \angle FOA + \angle HOG &= 30^\circ; \quad 3 \angle FOA + 3 \angle HOG = 90^\circ; \\ \angle AOB + 3 \angle HOG &= 90^\circ; \quad 3 \angle HOG = 90^\circ - \angle AOB = \angle BOH. \end{aligned}$$

Звидці впливає

3) Спосіб Невенгловського: до заданого гострого кута HOB прибудуємо кут BOA , доповненик попереднього до прямого; знайшовши на дузі ODB , взятій радіусом DC , точку D за способом Тіпа, з неї, як з центру, тим самим радіусом закреслимо дугу, яка перетинатиме першу дугу в точці G ; тоді матимемо кут GOH , рівний третині заданого кута HOB (рис. VII).

У цьому способі, і так само у двох попередніх (та у двох наступних), ділення тупого кута на три рівні частини не матиме труднощів, як це зазначає ще й давній математик Папп з Александрії (кін. III с.), тому що, відокремивши один, два чи три прямих кутів від заданого тупого, нам залишиться поділити на три рівні частини тільки гострий кут, що зостанеться. Що ж до поділу відокремлених прямих кутів, то розв'язка такої задачі є досить відома: будування кута в 30° зводиться до конструкції гострого кута прямокутного трикутника, один з катетів якого буде вдвічі коротший за гіпотенузу. Робити трисекцію прямого кута вміли ще Пітагорійці.

До оголошення способів Турр'а та Niewenglowsk'ого, що вони являють собою застосування властивостей Нікомедової конхоїди, існували не більш складні способи Кемпе та Савенкова, що з них останній та ще спосіб Архімеда дають найменші похибки спостережень і дають кращі наближення поділу кута.

4) Спосіб Кемпе²⁾ є такий (рис. VIII): на боці OA заданого кута AOB відкладемо довжину OA віддалення CD між двома діленнями C та D лінійки; поділивши за допомогою циркуля її лінійки відтинок OA пополам в точці P , проведемо з неї просту PC , рівнобіжну до OB , та просту PN , нормальну до OB ; лінійку пристосуємо так, щоб її ділення C лежало на простій PC , ділення D — на простій PN , а продовження лінійки проходи-

¹⁾ В. Niewenglowski: Ibidem, p. 6.

²⁾ Е. И. Игнатъевъ: Въ царствѣ смекалки или ариометика для всѣхъ. Кн. 2, Спб. 1912, стр. 182.

лоб через вершок O заданого кута, — тоді кут BOC дорівнюватиме третій частині заданого кута AOB .

Справді, поділивши відтенок CD пополам у точці P_1 та з'єднавши цю точку з точкою P , дістанемо:

$$PP_1 = P_1C,$$

тому, що ці відтинки в половини гіпотенузи DC трикутника DPC .
Це дає:

$$\begin{aligned} \angle BOC &= \angle OCP = \angle P_1PC; \quad \angle OP_1P = 2 \angle OCP = \angle POP_1; \\ \angle BOC &= \frac{1}{2} \angle POP_1 = \frac{1}{3} \angle AOB. \end{aligned}$$

Цей наближений спосіб ділення кута так само впливає з властивостей конхоїди Нікомеда: при зміні напрямку боку OB кута AOB , точка C опише конхоїду KN рис. I, що для неї протистій PR відповідає проста PN , рисунку VIII¹⁾.

5) Спосіб Савенкова²⁾, відомий до способів Турр'а та Niewenglowsk'ого, буде досить нескладний у розумінні додаткових конструкцій, коли зробити невеликі зміни у досить довгій, хоч і зрозумілій викладанні автора (рис. IX): з вершку O заданого кута AOB , радіусом, рівним віддаленню CD між двома діленнями C та D лінійки, закреслимо дугу $ACBE$; до боку OA , у точці O , поставмо нормальну OD , а через точку B проведемо просту BE , рівнобіжну до боку OA ; лінійку направмо так, щоб ділення C лежало на дузі, всередині заданого кута, ділення D — на перпендикулярі OD , а продовження лінійки проходило б через точку E зустрічі дуги з простою BE , — тоді кут AOC дорівнюватиме третій частині кута AOB .

Справді, поставивши перпендикуляр CK на основу OD з вершку C трикутника ODC , приймаючи на увагу, що проста BE в рівнобіжна до простої CK , матимемо:

$$\begin{aligned} \angle KCO &= \angle KCD = \angle AOC; \quad \angle CEB = \angle KCD = \angle AOC; \\ \sphericalangle AC &= \frac{1}{2} \sphericalangle BC; \quad \angle AOC = \frac{1}{3} \angle AOB. \end{aligned}$$

Порівнюючи рис. VII з рис. V, II, III, легко бачити, що й цей наближений спосіб впливає з властивостей Нікомедової конхоїди, хоч авторові способу і не були відомі, очевидно, ні спосіб конхоїди, ні спосіб Архімедів.

Вважаючи цей спосіб Савенкова нескладним та дотепним, признаючи також цікавими й зазначені автором інші властиво-

¹⁾ В. И. Лебедев: Ibidem, ст. 51.

²⁾ Е. С. Савенковъ: Теорема доказательнаго дѣлення угла на три равныя части. Спб., 1900, стр. 5, 12.

сті хорди CE , треба згадати й про грубі помилки, в які й раніш впадало та й тепер ще впадає більшість також і інших любителів розв'язувати задачу про трисекцію кута, — помилки в тих частинах, на мій погляд, маловідомої праці Савенкова, де говорить, що „неможливість розв'язати цю проблему ніколи доведена не була, та й не може бути, а тому признання неможливості її розв'язати є не більш, як науковий, або справедливійш сказати — шкільний забобон, який, на жаль, остільки затвердився, завдяки незмінній марності всіх зроблених до цього спроб до його подолання винаходом розв'язки зазначеної проблеми...“, „...що відсутність його в науці є незаперечне свідчення її неспроможности та застою“, і що геометрія, завдяки винаходу автора, „позбувається від забобону, який її принижав, що неможливість геометрично доказового ділення всього кута на три рівні частини, — отаке ділення від цього часу рахуватиметься за таке ж нескладне й легке, як і ділення всякого кута або дуги пополам“.

Цими фразами не позбавлений здібности та дотепности автор безумовно „свідчить“ лише про „неспроможність“ та „застій“ своїх математичних знаннів, тому що, беручись за розв'язання задачі, він не знає й не розуміє постанови цієї задачі, не знає, що неможливість розв'язання її у тій постанові, у якій це розуміють математики, не тільки „ніколи доведена не була та й не може бути“ та що ця неможливість розв'язки не є „не більш, як науковий, або справедливійш сказати — шкільний забобон“, а що вона була доведена за 63 роки до появи праці Савенкова. Не розуміючи постанови задачі, автор розв'язує задачу іншого характеру й приходять до висновку, якому, проти думки автора, зовсім не судилося „позбавити“ геометрію „від забобону, який її принижав“, тому що, поперше, забобону тут ніякого нема, а є тільки непорозуміння, а по-друге, розв'язання задачі у постанові Савенкова винайшов Архімед не менш як за 2112 років раніш Савенкова, а механічний спосіб точного ділення кута на три рівні частини відомий був забагато раніш, ніж жив Архімед. Досить сказати, що у творі Паппа з Александрії *Επιπέδων μαθηματικά* подано було вже історію задач трисекції кута та подвоєння куба, а ще за часів Сократа Гіппій, що народився приблизно за 460 р. перед початком нашої ери, перший подав квадратрису та прилад для механічного її будування; ця квадратриса є не що інше, як геометричне місце точок S (рис. IX) перетину радіусів OB та протистих KC , рівно-

біжних до поземної OA , при непереривній зміні напрямків радіюсів та положень рівнобіжних.

Для наближеного ділення кута на три рівні частини користуються іноді різними приладами та „шаблонами“ з дерева, заліза й картону; ці прилади пристосовують безпосередньо до заданого кута. В результаті це дає таке ж грубе наближення, як, наприклад, застосування лекала для креслення кривих. Рішуче засуджуючи всякі складні прилади з 4-х лінійок на шарнірах, прилад Марі Гильгейна з двох пар лінійок, „трисектор“ з 2-х коротких лінійок та з двох довгих з прорізами¹⁾ та інші подібні прилади, зупинімося на найпростішому з них — на приладі Grivel'a.

Прилад французького професора Grivel'a²⁾ являє собою залізну пластинку, форми вказаної на рис. X майже в натуральну величину. Ця пластинка складається з лінійки GRI , півкола MEL та з довільної форми приростку IVE . Ширина лінійки GR та її довжина ER довільні; бік RIE лінійки мусить бути дотичний у точці E до півкола MEL з поперечником ME , а віддалення кінця V приростка IVE від центру півкола також мусить дорівнювати довжині його поперечника, так що довжина основи MV приладу дорівнює потроєній довжині радіуса.

Щоб поділити заданий кут AOB за допомогою цього приладу, треба пристосувати широку частину приладу в середині кута та, направивши просту RE через вершок O кута, за кінець R приладу тягнути його до себе, доки його широкі частини не упруться у боки заданого кута у точках A та B . Тоді:

$$\angle AOL = \angle LOE = \angle EOB = \frac{1}{3} \angle AOB.$$

До запевнення у правдивості цього твердження прийдемо відразу, порівнявши між собою прямокутні трикутники рис. XI. Коли порівняємо рис. XI з рис. VIII для наближеного ділення кута за способом Кемпе, то бачимо, що точки O в обох рисунках означають вершок заданого кута, точка A дотику півкола з боком кута OA на рис. XI відповідає точці N на рис. VIII, а точка L на рис. XI відповідає точці D на рис. VIII.

З'ясоване в останнім та в попереднім розділі приводить нас до запевнення у правдивості твердження III.

¹⁾ Г. Попов: Изготовление математических приборов..., ст. 55—57, Журнал „La Nature“, 1891.

²⁾ В. Niewenglowski: Ibidem, pp. 7—9. Г. Попов: Изготовление... ст. 58.

Справді, який би не був нескладний прилад, відмінний від лінійки та циркуля, у його конструкцію повинні входити елементи, які мають не менше за одного віддалення між відповідними крайніми точками, що вони лежать або на кінцях, або між кінцями ліній, що обмежують форму приладу. Так, наприклад, навіть у найпростішому приладі, у приладі Grivel'a маємо віддалення між центром L сегмента і точками на його дузі та ще рівне попередньому віддалення від кінця сегмента E до кінця V приростку. Виходячи ж тільки з одного віддалення MV , ми мусимо, для конструкції приладу, поділити це віддалення на 3 рівні частини ML , LE , EV , що їм відповідають 4 ділення: M , L , E , V .

Користуючись цим найпростішим приладом для наближеного поділу кута, ми повинні будемо стежити за положенням 3-х його точок A , B , O , помилкове установлення яких приведе нас до 3-х похибок, які дає цей прилад. Найкращим приладом для наближеного поділу кута треба вважати той, який має найпростішу конструкцію та дає найменшу похибку. Такий прилад і є звичайна лінійка, що вона має хоч двоє і, навіть, одне ділення. У конструкції цього приладу відіграє роль тільки одно віддалення — віддалення між діленнями C та D лінійки.

Тоді як у приладі Grivel'a треба слідкувати за 3-ма точками рисунку, користуючись лише однією єдиною комбінацією його установлення, для лінійки з двома діленнями треба стежити також за 3-ма точками рисунку, проте ці точки рисунку можна замінити на інші, і правильність поділу кута можна перевіряти не менш як 5-ма різними комбінаціями установлення лінійки. Зокрема, встановлення лінійки за способами Архімеда та Савенкова приводить, взагалі кажучи, до найменшої похибки, тому, що при діленні гострих кутів, лінійка за цими способами перетинатиме відповідні прості та дуги під найбільшими кутами, а через це матиме найменшу кількість спільних точок.

Для наближеного ділення кута на рівні частини можна було б застосувати ще також і „ділительну“ машину з мікрометричним гвинтом.

* * *

З'ясовуючи способи механічного поділу кута за допомогою конхोїди (а також ще квадратриси та Паскальової улитки) та наближеного поділу за допомогою тільки циркуля та звичайної лінійки, я не мав на оці вивчити для наближеного поділу кута

всі способи, які існують та які є можливі, й зупинився докладно на досить великій кількості 5-ох мені відомих, де вживається виключно лише циркуль та лінійка, на механічному наближеному способі, що я його подав і де теж вживається тільки циркуль та лінійка, та на одному способі наближеного ділення за допомогою найпростішого після циркуля та лінійки приладу, шаблону Grivel'a, щоб дати читачеві відповідний простір вибору для мети практичного наближеного поділу кута на три рівні частини; я розташовував ці способи у порядку історичного ходу ідей та надавав перевагу способам Архімеда й Савенкова.

Викладене у першому розділі цієї праці повинно заповнити читача у неможливості трисекції кута за допомогою циркуля та лінійки в тому розумінні, як це вважали давні математики.

Викладене у другому та третьому розділі може дати читачеві надію винайти ще який-небудь спосіб ділення кута на три рівні частини у тому розумінні, як це вважають техніки та практики. Зміст цих розділів, за мою думкою, мусив би заповнити читача також і у марності та нецікавості таких винаходів, тому що вони не дадуть нічого кращого з практичного боку так для наближеного ділення кута на три рівні частини, як, гадаю, і для будування конхоїди Нікомедя, щоб робити поділ кута за допомогою непереривного руху механізму.

Є підстави для того, щоб у появленні „розв'язок“ трисекції кута обвинувачувати й деяких керівників методики математики. Справді, у цікавій книжці В. І. Лебедева читаємо: „конструкцію точки C можна здійснити за допомогою лінійки з діленнями“, і не вказується, що цей поділ кута (Архімедів) є лише наближений-графічний, точність якого залежить від точності установки лінійки з діленнями. Поділ „можна зробити за допомогою конхоїди або конічних перерізів“, при чому вказується тільки на гіперболу та параболу, що їх, очевидно, доведеться креслити по точках за допомогою лекала, тоб-то приблизно, і не вказується, що спосіб ділення завдяки конічним перерізам, гіперболі й параболі, буде наближений¹⁾. Проф. Г. Попов радить вчителям математики, щоб їхні учні робили доповіді про трисекцію кута, при чому подає, як матеріал, складні прилади для наближеного ділення кута, ніде не вказуючи, що це приводить тільки до наближеної розв'язки задачі, що вона не має нічого спільного з трисекцією кута; вважає, як і Лебедев

¹⁾ В. І. Лебедев: Ibidem, ст. 53.

(примітка на стор. 171), що довід неможливості трисекції полягає тільки у зведенні задачі до кубічного рівняння, не зупиняючись на питанні про його незводність; ставить, нарешті, рядом дві такі фрази: „Чому саме ця задача не розв'язується за допомогою циркуля та лінійки? Розв'язати задачу, користуючись лемою Архімеда (за допомогою клаптика паперу)“¹⁾. У останній фразі автор має на оці спосіб Архімеда наближеної розв'язки задачі, але не вказує, що це є лише наближена розв'язка, наближене ділення кута, а не його трисекція. Таке ж непорозуміння може ще більш виникнути у читача, завдяки невдалій постановці задачі, коли він читатиме також і цитовану вже цікаву книжку автора „Памятники математической старины в задачах“. Так само й у Е. І. Ігнат'єва читаємо: „Разом з цим конче розуміється, що геометрична лінійка не має ділень. Коли б на її ребрі було хоч всього два знаки та коли б дозволялось їми користуватись і в додаток пересувати лінійку, прилагоджуючись до фігури, тоді задача про поділ кола на три рівні частини (що вона не розв'язується у елементарній геометрії), одразу ж може бути розв'язана“, і далі подається „розв'язку“ — наближений спосіб Кемпе²⁾. Треба підкреслити, що „прилагодження до фігури“ може бути приблизне, та що лінійкою, за Евклідом, ми з'єднуємо лише дві точки на площі. Це все може привести до того, що учні не довірятимуть запевненням своїх педагогів про неможливість трисекції кута та робитимуть не корисні, а шкідливі винаходи, шкідливі насамперед через те, що вони забирають багато марно витраченого часу.

Так само стоїть і питання з задачею про подвоєння куба та з задачею про поділ обвіду кола на рівні частини.

Першу з цих задач не можливо розв'язати згідно з змістом першого розділу, але нема достатніх підстав вважати неможливість її наближеної розв'язки за допомогою циркуля та звичайної технічної лінійки, яка має певну якусь ширину та довжину та менші боки якої мають прямі кути з довгими боками. Навіть більше: існує механічний спосіб точної конструкції, за якою креслять так звану цисоїду Діоклеса, за допомогою Ньютонового способу, що він вимагає, як механічного приладу, звичайнісінького косинчика³⁾. Крім Діоклеса та Ньютона, розв'язки задачі про подвоєння куба за допомогою механізмів подали були: Платон

¹⁾ Г. Попов: „Изготовление...“, ст. 58.

²⁾ Е. И. Игнат'ев: Ibidem, ст. 181—183.

³⁾ Г. Попов: „Изготовление...“. ст. 62.

(прилад з двох прямокутих косинчиків), Архит, Менехейм (розв'язка наближена, за допомогою перетину двох парабол), Аполоній, Вьста, Декарт, Грегорі та інші¹⁾.

Так само не має значіння, з теоретичного боку, наближена розв'язка, за допомогою циркуля та лінійки з діленнями, задачі про поділ обводу кола на рівні частини кількістю, відмінною від тієї N , яка визначається сукупністю чинників у вигляді різних степенів 2-х та перших степенів первісних чисел форми $2^n + 1$. З попереднього безпосередньо випливає, що коли користуватись лінійкою з діленнями, то можна зробити наближений поділ обводу кола на таку кількість рівних частин, що у цьому числі кількості може бути чинником, крім степеня 2-х та перших степенів первісних чисел $2^n + 1$, також і степень числа 3.

Викладеного у вступі є досить, щоб не тільки не робити спроби виконати квадратуру кола, бо вона є неможлива з причини трансцендентности числа π , а й не витрачати марно часу на ознайомлення з математичними працями під такими назвами, як наприклад: Klimaszewski: La solution de quadrature du cercle, Paris, 1896²⁾.

Наближені вирахування довжини боку квадрата за допомогою Бінгового прямокутного трикутника та за допомогою „геометричних будовань“ π та $\sqrt{\pi}$, що їх подали були Коханський, Соне, Шпехт та інші³⁾, також не мають ніякого теоретичного значіння.

Зрозуміло й не дивно, що, за словами Плутарха⁴⁾, Анаксагор, сидючи у в'язниці за безбожжя та відгоняючи від себе нудьгу математичними розвагами, працював над квадратурою кола, тоді як було б дивно, як би хто-небудь почав приділяти цьому багато уваги тепер, і коли за давніх часів Аристофан висмівав квадратурників („я тобі зроблю квадратове коло“, — комедія „Птиці“⁵⁾), то далеко більше можуть посміятись над квадратурниками зараз.

1) В. П. Лебедев: Ibidem, pp. 41—45.

2) В. Левицький: Ibidem, p. 28.

3) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики, № 9, 1904; № 5, 1905.

4) Плутарх: De exilio, розд. 17.

5) В. П. Лебедев: Ibidem, pp. 55, 56.

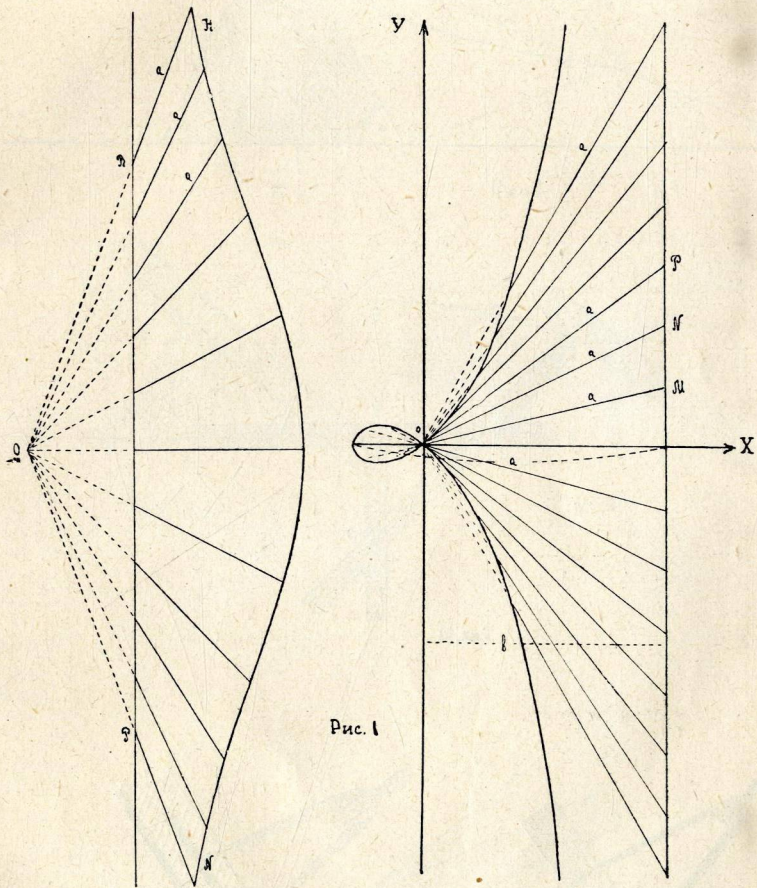
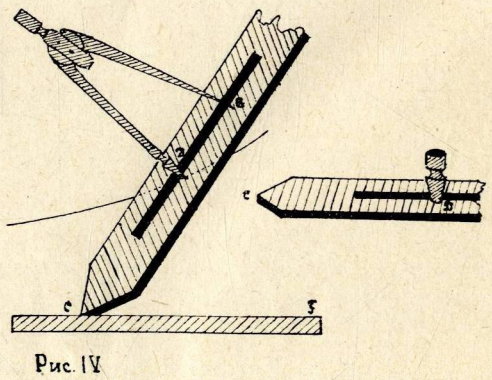
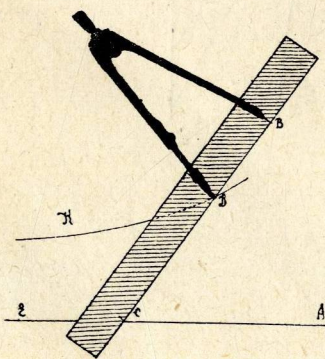
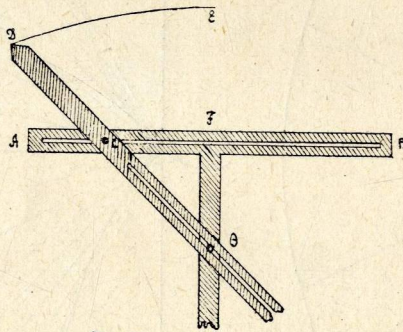
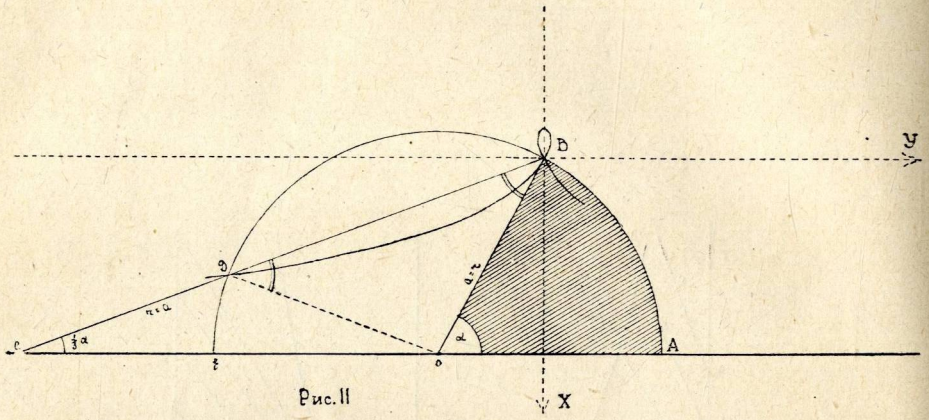


Рис. 1



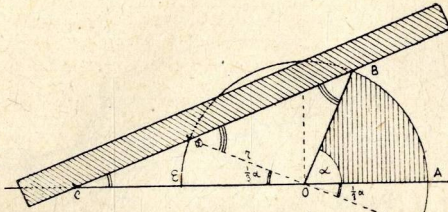


Рис. V

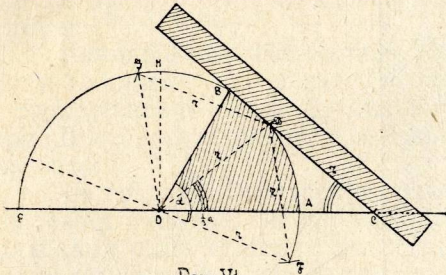


Рис. VI

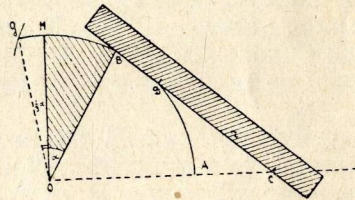


Рис. VII

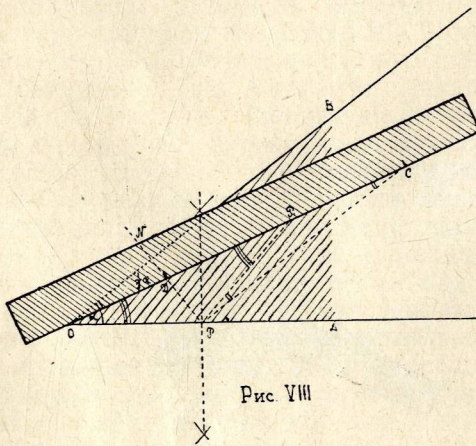


Рис. VIII

