

Формули довготи періастра та ексцентричності орбіти затемнюваних змінних зір типу β Lyrae.

Щоб визначити довготу періастра α та ексцентричність e орбіти затемнюваних змінних зір типу β Lyrae, до цього часу¹⁾ користувалося приближеним рівнянням

$$w = W + 2e \sin(W - \alpha),$$

де w — справжня довгота зорі в орбіті, W — її пересічна довгота. Зазначене вище рівняння є точне до малих величин першого порядку відносно e включно. В цій досліді ми виведемо точні формули²⁾ довготи періастра та ексцентричності. Для цього умовимося відчислювати справжні довготи в орбіті від точки перетину орбіти проєкцією променя зору на площу орбіти в хвилию головного мінімум яскравості зорі. Нехай t_1, t_2, t_3, t_4 будуть відповідно хвили головного мінімум, першого максимум, побічного мінімум та другого максимум зорі, нехай ексцентричні її аномалії будуть відповідно E_1, E_2, E_3, E_4 , тоді беручи на увагу, що

$$w_1 = 0, w_2 = \frac{\pi}{2}, w_3 = \pi, w_4 = \frac{3\pi}{2},$$

за відомою формулою теоретичної астрономії можемо написати

$$-tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_1}{2}; \quad ctg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_3}{2}; \quad (1)$$

$$tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_2}{2}; \quad -ctg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_4}{2}$$

¹⁾ André Ch. Traité d'astronomie stellaire. II-e partie, pp. 199, 290.

²⁾ Ці формули були подані мною без виводу в часописі „Astronomische Nachrichten, Band 230, pp. 157—158“.

З попередніх формул дістанемо:

$$\operatorname{tg} \frac{E_1}{2} \operatorname{tg} \frac{E_3}{2} = \operatorname{tg} \frac{E_2}{2} \operatorname{tg} \frac{E_4}{2} = \frac{e-1}{e+1}$$

$$1 \pm \operatorname{tg} \frac{E_1}{2} \operatorname{tg} \frac{E_3}{2} = 1 \pm \operatorname{tg} \frac{E_2}{2} \operatorname{tg} \frac{E_4}{2} = \frac{e+1 \pm (e-1)}{e+1}$$

$$\frac{\cos \frac{E_3 - E_1}{2}}{\cos \frac{E_3}{2} \cos \frac{E_1}{2}} = \frac{\cos \frac{E_4 - E_2}{2}}{\cos \frac{E_4}{2} \cos \frac{E_2}{2}} = \frac{2e}{e+1}$$

$$\frac{\cos \frac{E_3 + E_1}{2}}{\cos \frac{E_3}{2} \cos \frac{E_1}{2}} = \frac{\cos \frac{E_4 + E_2}{2}}{\cos \frac{E_4}{2} \cos \frac{E_2}{2}} = \frac{2}{e+1}$$

$$\text{або } \cos \frac{E_3 - E_1}{2} = e \cos \frac{E_3 + E_1}{2}; \quad \cos \frac{E_4 - E_2}{2} = e \cos \frac{E_4 + E_2}{2} \quad (2)$$

Назначімо знаком n пересічний добовий рух зорі, тоді за Кеплеровим рівнянням дістанемо

$$n(t_3 - t_1) = E_3 - E_1 - 2e \sin \frac{E_3 - E_1}{2} \cos \frac{E_3 - E_1}{2}$$

$$n(t_4 - t_2) = E_4 - E_2 - 2e \sin \frac{E_4 - E_2}{2} \cos \frac{E_4 - E_2}{2},$$

або за формулами (2) маємо

$$\begin{aligned} n(t_3 - t_1) &= E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1) \\ n(t_4 - t_2) &= E_4 - E_2 - \sin(E_4 - E_2), \end{aligned} \quad (3)$$

Коли нам є відомі з спостережень зорі n , $t_3 - t_1$, $t_4 - t_2$, то поступовими наближеннями дістанемо з рівнянь (3) $E_3 - E_1$ та $E_4 - E_2$. Для цього можна користуватися з таблиць Радо¹⁾ та Остранда²⁾.

Коли нам будуть відомі $E_3 - E_1$ та $E_4 - E_2$, ми за допомогою рівнянь (1) дістанемо

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{E_3 - E_1}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \operatorname{ctg} \frac{E_4 - E_2}{2}, \quad (4)$$

відкіля дістанемо формулу для визначення α

$$\operatorname{tga} = -\operatorname{ctg} \frac{E_3 - E_1}{2} \operatorname{tg} \frac{E_4 - E_2}{2} \quad (5)$$

¹⁾ Radau R. Solution graphique du problème de Kepler. (Bulletin Astronomique. Vol. I, p. 381).

²⁾ Åstrand. Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problems. Leipzig. 1890.

З формул (4) дістанемо

$$e = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}} \quad (6)$$

Прикладім ці формули до обчислення α та e для зорі β Lyrae на підставі поданих нижче спостережень, тоді дістанемо

Дата	$t_3 - t_1$ d	$t_4 - t_2$ d	α o	e
1842—1870 ¹⁾	6.40	6.42	122.3	0.008
1870—1895 ¹⁾	6.48	6.41	210.9	0.006
1892—1912 ²⁾	6.47	6.33	187.3	0.016

Київ,
Астрономічна Обсерваторія.
12 березня 1928 року.

Summary.

Formulae of the longitude of periastron and of eccentricity of the orbits of the eclipsing variable β Lyrae-Stars.

By Prof. S. D. Tschorny.

In this paper I demonstrate the formulae for the calculation of the longitude of periastron α and of the eccentricity e of β Lyrae-Stars:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{ctg} \frac{E_3 - E_1}{2} \operatorname{tg} \frac{E_4 - E_2}{2},$$

$$e = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}}$$

which I have given in the *Astronomische Nachrichten* (Band 230) without demonstration.

Astronomical Observatory, Kiew.
1928 March 12.

¹⁾ Pannekoek A. Untersuchungen über den Lichtwechsel von β Lyrae. (*Astronomische Nachrichten*. Band 144).

²⁾ Curtiss R. H. A determination of the visual light curve of β Lyrae. (*Publications of the Astronomical Observatory of the University of Michigan*. Vol. I, p. 100).