Ґурґула Юрій (Рогатин).

Окремий випадок циклоїдальних кривих. Слимакована лінія.

У пошукуванні за такими величинами, які можнаби уживати як співрядні точок у просторі і які булиби незалежні від осий співрядних, ми опираючися на підставових працях Софуса Ліє, визнаємо їх у проміню осціляційного кола $\overline{R}$ і довжині дуги даної кривої лінії $\overline{s}$. Вони зовуться діфференційними інваріянтами.

Ми виведемо деякі підставові формули природної ґеометрії, які дають нам можність находити рівнання природні кривих ліній циклоїдальних. Теорія ґеометрії природної є розбудована Е. Чезаром.[1])

Насамперед ми можемо уявити собі такий уклад осий співрядних, якого початок лежить на кривій лінії і постійно зміняє своє положення. При помочи теорії векторів і розважань граничних ми доходимо до формул, які дають нам звязок між співрядними природними а співрядними цего укладу осий співрядних, який завжди є у руху.

§. 1.

Умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки на площі.

Величини: $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P}$ є подумані у значінню векторів. (Фіґ. 1.)

Точки O і O' є дві сусідні точки одної і тої самої кривої лінії, оси x-сів і x'-сів є стичними цеї кривої; оси y-онів і y'-онів є нормальними (прямовісними) цеї кривої лінії.

[1]) E. Césare — Vorles. über natürliche Geometrie. Leipzig 1901.

Проєкційне рівнання векторів на вісь $\overrightarrow{x'}$ звучить:

$$\overrightarrow{OP_{x'}} = \overrightarrow{OO'_{x'}} + \overrightarrow{O'P_{x'}}$$

де:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}$$

$$\overrightarrow{O'P_{x'}} = \overrightarrow{(x + dx)}$$

Ми одержимо отже:

$$x \,.\, \cos d\tau + y \,.\, \sin d\tau = \Delta x \,.\, \cos d\tau + \Delta y \,.\, \sin d\tau + x + dx$$

або:

$$\cos d\tau \,.\, (x - \Delta x) + \sin d\tau \,.\, (y - \Delta y) = x + dx$$

При помочи розважувань граничних ми одержимо:

$$\lim \cos d\tau = 1$$

$$\lim \sin d\tau = d\tau$$

Отже:

$$x - \Delta x + y \,.\, d\tau - d\tau \,.\, \Delta y = x + dx$$

$d\tau \,.\, \Delta y$ як величину другого порядку опускаємо.

$$-\Delta x + y \,.\, d\tau = dx$$

Ділимо рівнання через ds.

$$-\frac{\Delta x}{ds} + y \,.\, \frac{d\tau}{ds} = \frac{dx}{ds}, \text{ але: } ds = R \,.\, d\tau$$

$$\text{отже: } \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\lim \frac{\Delta x}{ds} = 1.$$

Ми одержимо отже взір:

$$\underline{\frac{dx}{ds} = \frac{y}{R} - 1} \qquad 1)$$

Проєкційне рівнання векторів на вісь $\overrightarrow{y}$-онів звучить:

$$\overrightarrow{OP_{y'}} = \overrightarrow{OO'_{y}} + \overrightarrow{O'P_{y'}}$$

або:

$$-x \,.\, \sin d\tau + y \,.\, \cos d\tau = \Delta x \,.\, \sin d\tau + \Delta y \,.\, \cos d\tau + y + dy$$

На підставі висше сказаного про розважування граничн ми маємо:

$$-x \,.\, d\tau + y = \Delta x \, d\tau + \Delta y + y + dy.$$

$$-x \,.\, \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds}$$

але: $lim\ \frac{\Delta y}{ds} = 0$, а $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$

Ми одержуємо отже:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{x}{R} \qquad 2)$$

s = дуга кривої лінії.
R = промінь осціляційного кола.

Рівнання 1) і 2) є умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки P на площі у випадку сукцессивної зміни укладу осий співрядних.

§. 2.

Точка R порушаєся на площі укладу осий співрядних x, y і творить нову криву лінію, якої природними співрядними є: $\bar{s}$, $\bar{R}$.

Лінія крива Γ має рівнання: $R = f(s)$, а лінія крива $\bar{\Gamma}$ має рівнання: $\bar{R} = f(\bar{s})$.

Величини: $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P'}$ є подумані у значінню векторів, δy, δx є пересуненнями (Verschiebungen) точки P на площі: $x-y$. (Фіґ. 2.)

Рівнання проєкційне на вісь векторів $\overrightarrow{x'}$ звучить:

$$\overrightarrow{OP'}_{x'} = \overrightarrow{OO'}_{x'} + \overrightarrow{O'P'}_{x'}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{(x + \delta x)} + \overrightarrow{(y + \delta y)}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}$$

$$\overrightarrow{O'P'}_{x'} = \overrightarrow{(x + dx)}$$

Ми одержуємо отже:

$$\overrightarrow{(x + \delta x)}_{x'} + \overrightarrow{(y + \delta y)}_{x'} = \overrightarrow{\Delta x}_{x'} + \overrightarrow{\Delta y}_{x'} + \overrightarrow{(x + dx)}$$

або:

$$(x+\delta x) \,.\, cos\, d\tau + (y+\delta y) \,.\, sin\, d\tau = \Delta x \,.\, cos\, d\tau + \Delta y \,.\, sin\, d\tau + x + dx.$$

При помочи розважувань граничних і з поминенням величин другого порядку ми одержимо:

$$lim\ cos\, d\tau = 1, \quad lim\ sin\, d\tau = d\tau$$

$$x + \delta x + (y + \delta y) \,.\, d\tau = \Delta x + \Delta y \,.\, d\tau + x + dx$$

$\Delta y \,.\, d\tau$ опускаємо, отже:

$$\delta x + y \,.\, d\tau = \Delta x + dx$$

Ціле рівнання ділимо через ds

$$\frac{\delta x}{ds} + y \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta x}{ds} + \frac{dx}{ds}$$

Але: $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$, $lim\ \frac{\Delta x}{ds} = 1.$

Ми одержуємо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1. \qquad 3)$$

Подібно випроваджуємо також:

$$\overrightarrow{(x + \delta x)_{y'}} + \overrightarrow{(y + \delta y)_{y'}} = \overrightarrow{\Delta x_{y'}} + \overrightarrow{\Delta y_{y'}} + \overrightarrow{(y + dy)}$$

або:

$$-(x+\delta x) . sin\, d\tau + (y+\delta y) . cos\, d\tau = -\Delta x . sin\, d\tau + \Delta y . cos\, d\tau + y + dy.$$

При помочи розважувань граничних ми одержуємо:

$-x . d\tau + \delta y = \Delta y + dy$; ділимо ціле рівнання через ds.

$$-x . \frac{1}{R} + \frac{\delta y}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds};\ lim\ \frac{\Delta y}{ds} = 0.$$

Отже:

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{R} \qquad 4)$$

Рівнання 3) і 4) є умовними ріжничковими рівнаннями для пересунень точок лінії кривої $\overline{\Gamma}$ на площі осий співрядних: $x-y$.

§. 3.

Відношення між кривою Γ а $\overline{\Gamma}$.

$$(d\overline{s})^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 \qquad 5)$$

Вставивши у рівнання 5) рівнання 3) і 4) одержимо:

$$d\overline{s} = ds \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{R}\right)^2}}_{\varkappa}$$

або: $d\overline{s} = ds . \varkappa$

$$\overline{s} = \int \varkappa . ds \qquad 6)$$

Відношення між: R і $\overline{R}$.

З фіґ. 2) одержимо: $\vartheta + d\overline{\tau} = d\tau + \vartheta + d\vartheta$

або: $d\overline{\tau} = d\tau + d\vartheta$, — ділимо через ds

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{d\vartheta}{ds};\ \text{але що:}\ ds = \frac{d\overline{s}}{\varkappa},$$

то маємо: $$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\varkappa}{\bar{R}},$$

отже: $$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} + \frac{d\vartheta}{ds} \qquad 7)$$

З рівнань 6) і 7) одержуємо через елімінування з них дуги s загальне природне рівнання (explicite): $\bar{R} = f(\bar{s})$.

§. 4.

Лінії кочення (Rollkurven) у співрядних природних. (Фіґ. 3.)

Крива Γ є стала крива лінія (Basiskurve) о природних співрядних R, s, по якій котиться крива Π о природних співрядних R_λ, s_λ; точка P остає непорушною на площі кривої Π, це значить: вона не зміняє свойого положення зглядом цеї кривої лінії. В даній хвилі є точка O спільна для обох кривих ліній.

Крива лінія $\bar{\Gamma}$ є власне лінією кочення (Rollkurve) о співрядних $\bar{R}$, $\bar{s}$.

Щоби найти рівнання цеї кривої лінії у природних співрядних, ми послугуємося рівнаннями, найденими у попередних уступах.

Насамперед ми маємо умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки P на площі кривої лінії Π; з рівнань 1) і 2) першого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\frac{dx}{ds_\lambda} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 \qquad 8)$$

$$\frac{dy}{ds_\lambda} = -\frac{x}{R_\lambda} \qquad 9)$$

Однак тому, що крива лінія Π котиться по Γ, точка P зміняє безустанно своє положення супроти цеї лінії. Ми одержимо отже умовні ріжничкові рівнання для пересунень точок лінії кривої $\bar{\Gamma}$ на площі сталої лінії Γ; з рівнань 3) і 4) другого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \left(\frac{y}{\bar{R}}\right) + 1$$

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dy}{ds} + \left(\frac{x}{\bar{R}}\right)$$

або увільнивши рівнання від скобок ми одержимо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{y}{R} + 1 \qquad 10)$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \qquad 11)$$

Тому, що крива лінія Π котиться по кривій Γ, мусить бути: $s = s_\lambda$, або $ds = ds_\lambda$.

Отже: $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds_\lambda}$; $\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{ds_\lambda}$.

Тепер ми підставляємо рівнання 8) і 9) у рівнання 10) і 11); з цего слідує:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 + \frac{y}{R} + 1$$

або:

$$\frac{\delta x}{ds} = y\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) = \frac{y}{Q} \qquad 12)$$

$$\frac{\delta y}{ds} = -\frac{x}{R_\lambda} - \frac{x}{R}$$

або:

$$\frac{\delta y}{ds} = -x\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) = -\frac{x}{Q} \qquad 13)$$

бо:

$$\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} = \frac{1}{Q} \qquad 14)$$

Як бачимо, то крива лінія $\overline{\Gamma}$ повстає кінетичною дорогою; вона є образом руху точки P на площі кривої Γ.

З рівнань 12) і 13) одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= ds \,.\, \frac{y}{Q} \\ \delta y &= -\, ds \,.\, \frac{x}{Q} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &12' \\ &13' \end{aligned}$$

З ріжничкової ґеометрії беремо взір:

$$(d\overline{s})^2 = (\delta y)^2 + (\delta x)^2 = (ds)^2\left\{\left(\frac{y}{Q}\right)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right\}$$

$$(d\overline{s})^2 = \left(\frac{ds}{Q}\right)^2 . (x^2 + y^2)$$

або:

$$d\overline{s} = \frac{ds}{Q}\,\varrho \qquad \text{гляди фіґ 3.}$$

З цего одержуємо інтеґрал:

$$\overline{s} = \int \frac{\varrho}{Q} \,.\, ds \qquad 15)$$

де сочинник: $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$.

Відношення між R і $\bar{R}$.

$$\theta = \vartheta - \frac{\pi}{2}; \quad \text{отже: } d\theta = d\vartheta.$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{R_\lambda} + \frac{\sin\theta}{\varrho} \qquad 16)$$

рівнання знане з природної ґеометрії. Рівнання 16) є умовне ріжничкове рівнання для непорушности точки P на площі кривої лінії Π.

На підставі рівнання 7) маємо:

$$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} - \frac{d\vartheta}{ds} \qquad 17)$$

Вставивши у рівнання 17) з рівнапня 16) вираз за $\frac{d\vartheta}{ds}$ ми одержимо:

$$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_\lambda} - \frac{\sin\theta}{\varrho} = \frac{1}{Q} - \frac{\sin\theta}{\varrho} \qquad 18)$$

Тому, що $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$, $\varrho = \varkappa \,.\, Q$, ми можемо рівнання 18) написати також у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{Q \,.\, \sin\theta}{\varrho^2} \qquad 18')$$

Рівнання 15) і 18') є параметричні рівнання ліній кочення у загальному виді.

§. 5.

Тепер ми займемося лініями кривими, які носять назву **епіцикльоїдальних**; з них візьмемо під увагу цю ґрупу ліній епіцикльоїдальних, які повстають тоді, коли криві лінії Γ і Π є колами о ріжних проміннях: $R_\lambda = r$, $R = R$. Точку P приймаємо на обводі кола Π. (Фіґ. 4.)

Точка M є своєчасно точкою стичности обох кіл, ω = кут кочення.

З рисунку бачимо, що $\widehat{MP} = \widehat{MP_0} = \sigma$, а $\sigma = 2r\theta = R \,.\, \omega$.

Ми покористуємося формулами попередного уступу; і так маємо: $d\bar{s} = \varkappa \,.\, ds = \frac{\varrho}{Q} \,.\, ds$, де вираз за Q одержимо з рівнання 14), а radius vector ϱ виражуємо сінусом кута θ.

І так:

$$Q = \frac{R \,.\, r}{R + r} \qquad 19)$$

$$\varrho = 2r \,.\, sin\,\Theta \qquad 20)$$

$$ds = \varkappa \,.\, d\sigma \qquad 21)$$

Але: $\sigma = 2r\ \Theta$, $d\sigma = 2r \,.\, d\Theta$, $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$. Вставивши повисші вирази у рівнання 21), ми одержимо:

$$d\bar{s} = \frac{4r(R+r)}{R} \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta \qquad 22)$$

або: $$d\bar{s} = a \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta \qquad 22')$$

рівнання, у якому $a = \frac{4r \,.\, (R+r)}{R}$ є величиною знаною.

Ми беремо тепер під увагу рівнання 18')

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{Q \,.\, sin\,\Theta}{\varrho^2},$$

яке пишемо у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{\varrho - Q \,.\, sin\,\Theta}{\varrho^2} \qquad 18'')$$

Підставивши у рівнання 18'') вирази з рівнань 19) і 20), ми одержимо:

$$\bar{R} = \frac{4r\,(R + r)}{R + 2r} \quad sin\,\Theta \qquad 23)$$

або: $$\bar{R} = b \,.\, sin\,\Theta \qquad 23')$$

рівнання, у якому: $b = \frac{4r\,(R + r)}{R + 2r}$ є величиною знаною.

Ріжничкове рівнання 22') дає нам по інтеґрованню слідуюче рівнання:

$$\bar{s} = a \,.\, cos\,\Theta + c \qquad 24)$$

Рівнання 23') і 24) є параметричними рівнаннями лінії епіцикльоїдальної $\bar{\Gamma}$.

Поділивши рівнання 23') через b, а рівнання 24) через a, ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar{s} - c}{a} &= cos\,\Theta \\ \frac{\bar{R}}{b} &= sin\,\Theta \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

Степенуючи оба рівнання і додавши їх до себе, ми одержимо слідуюче альґебраічне рівнання епіцикльоїдальної $\bar{\Gamma}$ у природних співрядних:

$$\frac{(\bar{s}-c)^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \qquad 26)$$

З рівнань 25) і 26) ми доходимо до слідуючих заключень; по перше ми зауважуємо, що для $\Theta = 0$, $\bar{R} = 0$, ми маємо для дуги $\bar{s}$ Minimum:

$$\bar{s} = a + c$$

а для: $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\bar{R} = b$, ми одержуємо $\bar{s} = c$ (maximum).

Рахуючи дугу епіцикльоїдальної від її вершка (Scheitel), де $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\bar{s} = c = 0$, ми одержимо слідуюче рівнання цеї кривої лінії:

$$\frac{\bar{s}^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \qquad 26')$$

Як бачимо рівнання 26') є схоже з рівнанням еліпси у співрядних Декарта.

Для $\Theta = 0$, $\varrho = 0$, $\bar{R} = 0$ ми маємо острину (Spitze). Рахуючи дугу епіцикльоїдальної від цеї острини ми маємо: $\bar{s} = a + c = 0$, отже: $c = -a$; тоді рівнання епіцикльоїдальної одержує такий вид:

$$\frac{(\bar{s}+a)^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \qquad 26'')$$

Не вдаючися у дальшу дискусію ліній кривих епіцикльоїдальних, яка у свойому дальшому перебігу має свій окремий інтерес і не входить у обсяг цеї праці, — ми задержимося ще лиш на відношенню між слідуючими величинами: radius-vector-ом $= \varrho$, та промінями осціляцийних кіл: R і $\bar{R}$.

Ми маємо: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\Theta$

$$\bar{R} = b \,.\, sin\,\Theta = \frac{4r(R+r)}{R+2r}\, sin\,\Theta$$

або:

$$\bar{R} = \frac{2(R+r)}{R+2r} \quad \varrho = \mu \,.\, \varrho \qquad 27)$$

де:

$$\mu = \frac{2(R+r)}{R+2r} \qquad 28)$$

Рівнання 27) ми напишемо у іншій формі:

$$\bar{R} = \frac{2\left(1+\frac{r}{R}\right)}{1+2\frac{r}{R}} \quad \varrho \qquad 27')$$

На підставі повищих рівнань ми одержимо слідуючі вартости:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для: } R = \infty, & \text{ми маємо: } \mu = 2, & \bar{R} = 2\varrho \\ R = r, & & \mu = \frac{4}{3}, \ \bar{R} = 1{\cdot}25 \,.\, \varrho \\ R = 0, \text{ або } r = \infty, & \text{„ „} & \mu = 1, \ \bar{R} = \varrho \end{array}\right\} \qquad 28)$$

Загально ми бачимо, що: $\bar{R} > \varrho$.

Для кута $\bar{\tau}$ ми маємо рівнання:

$$d\bar{s} = \bar{R} \quad d\bar{\tau} \qquad 29)$$

або:

$$d\bar{\tau} = \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} \qquad 30)$$

Для ліній епіцикльоїдальних ми одержимо:

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \int \frac{a \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta}{b \,.\, sin\,\Theta} = \frac{a}{b} \int d\Theta \qquad 31)$$

рахуючи дугу епіцикльоїдальної від її вершка (Scheitel).

Отже: $\bar{\tau} = \frac{a}{b} \,.\, \Theta + c_1$

або:

$$\bar{\tau} = \frac{R+2r}{R} \,.\, \Theta + c_1 \qquad 32)$$

§. 6.

Окремі випадки епіцикльоїдальних кривих.

Ми візьмемо під увагу три випадки, яким підлягають лінії епіцикльоїдальні:

випадок A) для: $R_\lambda = r = \infty$ евольвента кола
„ B) „ $R = \infty$ цикльоїда
„ C) „ $R = 0$.

Що до випадку C), то ми тут можемо відріжнити дві можливости; їх розгляд буде переведений у слідуючім уступі.

Випадок A). Коло о проміни $R_\lambda = r$ переходить у лінію пряму. Перекочуючи цю пряму по сталім колі Γ (фіґ. 4) ми одержимо очевидно евольвенту цего кола.

Рівнання 26'') ми пишемо в експліцитовій формі; ми дістанемо отже:

$$\bar{R}^2 = -2\frac{b^2}{a}.\bar{s} - \frac{b^2}{a^2}\ \bar{s}^2.$$

для: $lim\, r = \infty$, ми маємо:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r \to \infty} \frac{b^2}{a} &= \frac{4\left(\frac{R}{r}+1\right).R}{\left(\frac{R}{r}+2\right)^2} = R \\ \lim_{r \to \infty} \frac{b}{a} &= \frac{\frac{R}{r}}{\frac{R}{r}+2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 34)$$

Узгляднивши формули 34) ми дістанемо природне рівнання евольвенти кола як слідує:

$$\underline{\bar{R}^2 = 2\,R\,.\,\bar{s}} \qquad 35)$$

Очевидно, що $\bar{R} = \varrho$ гл. рівнання 28).

Випадок В). Коло стале Γ о проміню $= R$ переходить у лінію пряму. Коло Π котиться тоді по цій прямій і точка P на обводі цего кола творить криву лінію, знаною в літературі під назвою цикльоїди.

Покористуючися взорами з попередного уступу ми одержимо для $R = \infty$:

$$R = 2\varrho \qquad \text{з рівнання 28)}$$

$$a = \frac{4r\left(1+\frac{r}{R}\right)}{1+2\frac{r}{R}} = 4r$$

$$b = 4r\left(1+\frac{r}{R}\right) = 4r$$

Отже: $a = b = 4r$.

Підставивши вартости за a і b у рівнання 23) і 24) ми дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= 4r\,.\,sin\,\Theta \\ \bar{s} &= 4r\,.\,cos\,\Theta \end{aligned}\right\} \qquad 36)$$

рахуючи дугу цикльоїди від її вершка (Scheitel).

З рівнань 36) ми випроваджуємо легко природне альґебраічне рівнання цикльоїди:

$$\bar{R}^2 + \bar{s}^2 = 16r^2 \qquad 37)$$

Як бачимо, рівнання 37) є схоже з рівнанням кола у співрядних Декарта.

$$\bar{\tau} = \frac{a}{b} \quad \theta + c_1 = \theta + \frac{\pi}{2} \qquad 38)$$

бо для $\theta = 0$, $c_1 = \frac{\pi}{2}$.

§. 7.

Тепер ми беремо під увагу випадок, що $R = 0$, це значить, що промінь кола сталого (des ruhenden Kreises) Γ стремить до зера і це коло переходить у точку. (Фіґ. 4.)

Цей випадок становить власне головний предмет нашої праці.

Перш за всего, оперуючи формулами, взятими із загального трактату про лінії епіцикльоїдальні, ми доходимо до висліду, що у тому випадку лінія епіцикльоїдальна не істнує, або інакше дефінюючи, вона переходить у точку (фіґ. 5).

Бо дійсно, у тому випадку коло стале Γ (фіґ. 4) переходить для $R = 0$ у точку M. Приймивши отже початок дуги епіцикльоїдальної у точці M на обводі рухомого кола Π ми з фіґ. 5 бачимо, що при обороті цего кола довкруги точки M принята точка залишуєся все на одному і тому самому місці, це значить, що образом нашої кривої лінії є власне ця точка M.

Осередок рухомого кола Π робить дорогу по обводі кола, якого осередком є точка M, а промінем промінь рухомого кола $\Pi = r$.

На підставі рівнань 28) мусить бути для $R = 0$, $\mu = 1$, $\bar{R} = \varrho$. У тому випадку $\bar{R} = 0$, $\varrho = 0$.

На основі формули: $R \,.\, \omega = 2r\theta$ ми мусимо прийти до висліду, що коли промінь сталого кола $\Gamma = R$ є рівний зеру, то також і кут θ мусить зовсім зникнути; з цего слідує, що і $\sin\theta = 0$, а також $\bar{R} = b \,.\, \sin\theta = 0$ (23'), $a : \bar{s} = a \quad \cos\theta = \infty$ (24); також: $\varrho = 2r \,.\, \sin\theta$ (20) мусить бути рівний зеру.

Для: $R = 0$ $a = \infty$, бо:

$$\lim_{R \to 0} a = \lim_{R \to 0} \frac{4r(R+r)}{R} = \infty;$$

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \frac{a}{b}\theta + c_1 \qquad \text{гл. рівнання 31), 32)}$$

а що: $d\bar{s} = a \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta$ 22'), то для $R = 0$, $a = \infty$, $\sin\theta = 0$, $\bar{R} = 0$, $c_1 = 0$, $b = 0$,

отже: $\bar{\tau} = \infty \, . \, 0$ неозначена форма.

На основі повисше сказаного ми приходимо до слідуючого твердження:

Коли промінь R сталого кола Γ стремить до зера, то — принявши за початок дуги кривої лінії точку M, яку уважаємо образом здеґенерованого кола Γ, — то тоді образом цеї кривої лінії є власне ця точка M.

Однак у тому випадку, коли ми за початок кривої лінії оберемо іншу точку на обводі кола Π відмінну від точки M, то тоді образом псевдоепіцикльоїдальної лінії буде коло о проміни: $\bar{R} = \varrho$. (Фіґ. 6.)

Бо дійсно, коли обертатимемо коло Π довкруги точки M, то тоді точка P_0, обрана нами за початок дуги нашої кривої лінії $\bar{\Gamma}$, є завжди однаково віддалена від точки M.

На основі рівнань 28) ми дістанемо для $R = 0$ такі вартости:

$$\mu = \frac{2(R+r)}{R+2r} = 1; \quad \bar{R} = \varrho.$$

З цего слідує, що коли у випадку $R = 0$ ми зачнемо рахувати лінію епіцикльоїдальну від кождої іншої точки на обводі кола Π, яка не накриваєся з точкою M цего самого кола, то лінія псевдо-епіцикльоїдальна $\bar{\Gamma}$, яку одержимо, є колом о проміни рівнім ϱ, а тим самим рівнім $\bar{R}$, як проміневи цего самого осціляційного кола.

§. 8.

Зовсім інакше однак представляється справа тоді, коли приймемо, що коло Π о проміни $= r$ обертаєся само у собі, це значить, коли приймемо, що кожда точка цего кола виконує рух довкола його осередка. У випадку, коли цей осередок займає на площі $x - y$ все однакове положення, а точка M лежить на тім колі, ми очевидно одержимо рівнання власне цего самого кола.

До цего висліду ми можемо рахунком дійти теж в цей спосіб:

Ми уявляємо собі загально, що коло Π не лише котиться на підставовім колі Γ, але заразом обертаєся „само у собі“, це значить, що кожда точка цего кола виконує два рухи: один рух, це рух оборотовий довкруги осередка цего кола, а другий рух, це рух кочення (rollende Bewegung). (Фіґ. 7.)

Ми означуємо s_λ дугу кола Π, яка є вислідом руху кочення (roll. Bew.), а σ дугу цего самого кола, яку отримуємо в наслідок руху оборотового „самого у собі“. Підставове коло означуємо буквою Γ, рухоме коло буквою Π, а нову вислідну лінію руху оборотового і руху кочення буквою $\bar{\Gamma}$. (Фіґ. 7.)

На підставі повисше сказаного ми отримаємо отже:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_\lambda \\ s' &= s_\lambda + \sigma \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Точка $P(x, y)$ є нерозлучно звязана з колом Π, отже мусить бути:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds'} &= \frac{y}{R_\lambda} - 1 \\ \frac{dy}{ds'} &= -\frac{x}{R_\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad 40)$$

Рівнання 40) є тотожні з рівнаннями 1) і 2) першого уступу.

Але: $$ds' = ds_\lambda + d\sigma = ds + d\sigma \qquad 41)$$

З цего слідує:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad (ds + d\sigma) \\ dy &= -\frac{x}{R_\lambda} \,.\, (ds + d\sigma) \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

Але супроти кола Γ точка P зміняє постійно своє положенне; в тому випадку ми покористуємося умовними ріжничковими рівнаннями 3), 4) другого уступу для пересунень точок кривої лінії $\bar{\Gamma}$ на площі кола Γ.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} + \left(\frac{y}{R} + 1\right) \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \end{aligned}\right\} \text{ гл. рівн. 10), 11)} \qquad 43)$$

Або:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= dx + \left(\frac{y}{R} + 1\right) \quad ds \\ \delta y &= dy - \frac{x}{R} \quad ds \end{aligned}\right\} \qquad 44)$$

Покористуючися рівнаннями 42) ми одержимо:

$$\delta x = y\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) . ds + \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) . d\sigma$$

або:

$$\delta x = \frac{y}{Q} . ds + \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad d\sigma \qquad 45)$$

Анальоґічно маємо:

$$\delta y = -\frac{x}{Q} \quad ds - \frac{x}{R_\lambda} \quad d\sigma \qquad 46)$$

де: $Q = \frac{R \,.\, r}{R + r}$; для: $R = o$, також: $Q = o$.

У відсутности руху кочення, це є для $R = o$, ми маємо до діла тоді лише з рухом оборотовим; отже: $s_\lambda = s = o$; в тому випадку рівнання 45) і 46) одержують слідуючий вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad d\sigma \\ \delta y &= -\frac{x}{R_\lambda} \quad d\sigma \end{aligned}\right\} \qquad 47)$$

В тому випадку отже осередок кола Π займає на площі x—y все однакове положення. Як сказано, вислідною руху оборотового мусить бути коло. Принявши точку P на обводі кола Π, ми дістанемо як вислідну руху оборотового цеї точки це саме коло Π.

На підставі рівнання 5) третого уступу ми маємо:

$$(d\bar{s})^2 = (\delta x)^2 + \delta y)^2 = (d\sigma)^2 \left[\left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right)^2 + \frac{x^2}{R_\lambda{}^2}\right] \qquad 48)$$

Ми одержимо отже:

$$\bar{s} = \int \frac{d\sigma}{R_\lambda} \sqrt{\varrho^2 - 2\,R_\lambda \,.\, y + R_\lambda{}^2} \qquad 49)$$

бо: $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Принявши точку P на обводі кола Π ми маємо:
$R_\lambda = r, \;\; \varrho = 2r \quad sin\,\theta, \;\; y = \varrho \quad sin\,\theta = 2r \quad sin^2\theta$ (гл. фіґ. 8).

Вставивши повисші вартости у рівнання 49), ми одержимо:

$$\bar{s} = \int \frac{d\sigma}{r} \sqrt{4r^2 \quad sin^2\theta - 2r \,.\, 2r \,.\, sin^2\theta + r^2} = \int d\sigma \qquad 50)$$

для: $\sigma = 2r\,\theta, \;\; d\sigma = 2r \quad d\,\theta$

тоді: $\bar{s} = 2r \int d\,\theta = 2r\,\theta + C \qquad 51)$

Рівнання 51) власне і є рівнанням кола Π у співрядних природних. (Фіґ. 8.)

У параметричнім представленню маємо два рівнання кола:

$$y = 2r \quad sin^2\theta$$
$$x = r \,.\, sin\,2\theta$$
$$x^2 + y^2 = \varrho^2 = 4r^2 \,.\, sin^2\theta.$$

§. 9.

В уступі семім ми показали, що у випадку $R = O$, коло Π обертаєся довкруги точки M (фіґ. 5 і 6) і точка P_0 на обводі цего кола творить нове коло $\overline{\Gamma}$ о проміню $= \varrho$; у випадку, коли P_0 накриваєся з точкою M, коло $\overline{\Gamma}$ переходить у тую саму точку M.

Тепер ми приймемо, що не лише коло Π обертаєся довкруги точки M, але і точка P_0 обертаєся довкруги осередка цего кола Π (фіґ. 9). Іншими словами, коло Π обертаєся „само у собі", це є: точка P_0 обертаєся довкруги осередка цего кола з такою самою скоростю, що пряма MO' довкруги точки M. Це значить, що кут обороту ω є для кождого положення цего кола рівний кутови осередочному кола Γ' о проміни $= r$, по обводі якого порушаєся осередок оборотового кола. Цей осередочний кут числимо від додатного напряму оси y-онів підставового укладу осий співрядних $x-y$.

Навязуючи до попередних розважувань в уступах першім і другім цеї праці, ми беремо насамперед під увагу два уклади осий співрядних; один із них, означений римською цифрою (I), це кождочасний уклад осий співрядних, якого початок лежить у точці O'. Початок другого укладу осий співрядних лежить у точці M, а вісь y-онів є для обох системів спільною. Супроти кола Γ' точка P постійно зміняє своє положення на площі. Покористуючися отже укладом (I), ми дістанемо слідуючі умовні ріжничкові рівнання (з рівнань 3 і 4 другого уступу):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} - \frac{y_1}{R} + 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x_1}{R} \end{aligned}\right\} \qquad 52)$$

δx, δy — є пересуненнями точки P на площі $x' - y'$.

Точка P лежить на обводі кола Π, отже ми одержимо для непорушности цеї точки на площі названого кола слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{x_2}{R} \end{aligned}\right\} \qquad 53)$$

Рівнання 53) одержуємо з рівнань 1) і 2) першого уступу. x_2, y_2 — належать до укладу осий співрядних, означеного римскою цифрою (II).

А що: $R = r$, то з фіґ. 9 одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= r\left(1 - 2 . sin^2 \frac{\varphi}{3}\right) \\ y_2 &= 2r . sin^2 \frac{\varphi}{3} \\ x_1 &= r . cos\left(90 - \frac{2\varphi}{3}\right) = r . sin \frac{2\varphi}{3} \\ x_2 &= 2r . sin \frac{\varphi}{3} . cos \frac{\varphi}{3} = r . sin \frac{2\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \quad 54)$$

Отже: $x_1 = x_2 = r . sin \frac{2\varphi}{3}$;

Вставивши рівнання 53) у рівнанне 52), одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 - \frac{y_1}{R} + 1 = \frac{1}{r}(y_2 - y_1) \\ \frac{\delta y}{ds} &= -\frac{2x}{r} \end{aligned}\right\} \quad 55)$$

Вставивши рівнання 54) у рівнання 55), дістанемо:

$$y_2 - y_1 = 2r . sin^2 \frac{\varphi}{3} - r + 2r . sin^2 \frac{\varphi}{3}$$

Отже:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= 4\, sin^2 \frac{\varphi}{3} - 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= -2\, sin \frac{2\varphi}{3} = -4 . sin \frac{\varphi}{3} . cos \frac{\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \quad 56)$$

Для елементу дуги нової кривої лінії, яку в описаний висше спосіб одержано, маємо слідуючий вираз із ріжничкової ґеометрії (гл. рівн. 5 з третого уступу):

$$d\bar{s} = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad 57)$$

З рівнань 56) маємо:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= (4\, sin^2 \frac{\varphi}{3} - 1) . ds \\ \delta y &= -4 . sin \frac{\varphi}{3} . cos \frac{\varphi}{3} . ds \end{aligned}\right\} \quad 56')$$

з фіґ. 9 відчитуємо: $s = r . \omega = r \frac{2\varphi}{3}$ 58)

З цего слідує: $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 16 . sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 8\ sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1 +$

$$+ 16\, sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\left[1 - sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

або: $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 8 \,.\, sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1$ 59)

59) вставляємо у 57):

$$d\bar{s} = \sqrt{8 \quad sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1} \quad \frac{2r}{3} \quad d\varphi$$

Отже: $\bar{s} = \frac{2r}{3} \int \sqrt{8 \,.\, sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1} \,.\, d\varphi$ 60)

Рівнаннє 60) є параметричне рівнаннє для дуги $\bar{s}$ нової кривої лінії, яку в цей спосіб одержуємо і яку з огляду на її форму і подібність до Паскалевої лінії назвемо лінією слимаковатою.

§. 10.

Конструкція і дискусія слимаковатої лінії у співрядних Декарта (фіґ. 10).

З фіґ. 9 дістаємо слідуючі відношення:

$$\varphi = \frac{3}{2}\omega, \text{ або: } \frac{\varphi}{3} = \frac{\omega}{2}$$

Полярне рівнання (Polargleichung) слимаковатої лінії звучить:

$$\varrho = 2r \,.\, sin \frac{\varphi}{3} \qquad 61)$$

В параметричнім представленню маємо:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \quad cos\,\varphi \\ y &= \varrho \quad sin\,\varphi \\ \text{також:} \quad x^2 + y^2 &= \varrho^2 = 4r^2 \quad sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

або:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2r \quad sin \frac{\varphi}{3} \quad cos\,\varphi \\ y &= 2r \quad sin \frac{\varphi}{3} \quad sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 62')$$

Конструкція слимаковатої лінії.

До конструкції слимаковатої лінії ми послугуємося полярними рівнаннями: $\varrho = 2r \,.\, sin \frac{\varphi}{3}$, або: $\varrho = 2r \,.\, sin \frac{\omega}{2}$; ми кладемо $r = 1$ і шукаємо для ріжних вартостий за „ω“ відповідних „radius-vector“-ів $= \varrho$. В цей спосіб ми можемо уложити на примір таку табличку для $r = 1$. $\varrho = 2 \,.\, sin \frac{\omega}{2}$, $\varphi = \omega + \frac{\omega}{2}$;

для: $\omega_1 = 30^0$, $\varphi_1 = 45^0$, $\varrho_1 = 0{\cdot}50764$,
$\omega_2 = 60^0$, $\varphi_2 = 90^0$, $\varrho_2 = 1$,
$\omega_3 = 90^0$, $\varphi_3 = 135^0$, $\varrho_3 = 1{\cdot}41422$,
$\omega_4 = 120^0$, $\varphi_4 = 180^0$, $\varrho_4 = 1{\cdot}73206$,
$\omega_5 = 150^0$, $\varphi_5 = 225^0$, $\varrho_5 = 1{\cdot}93186$,
$\omega_6 = 180^0$, $\varphi_6 = 270^0$, $\varrho_6 = 2$,

від $\omega_6 = 180^0$ до $\omega = 360^0$ іде слимаковата лінія симетрально. (У фіґ. 10 ми узяли $r = 2{\cdot}5$ cm.)

Дискусія слимаковатої лінії:

Ми беремо під увагу рівнання 62).

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\varrho \,.\, sin\,\varphi \,.\, d\varphi + cos\,\varphi \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi \\ dy &= \varrho \,.\, cos\,\varphi \,.\, d\varphi + sin\,\varphi \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 63)$$

Отже:
$$\left. y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varrho \,.\, cos\,\varphi + sin\,\varphi \,.\, d\varrho}{cos\,\varphi \,.\, d\varrho - \varrho \,.\, sin\,\varphi} \right\} \qquad 64)$$

Але: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}$, $d\varrho = \frac{2}{3} \,.\, r \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3} \,.\, d\varphi = \frac{\varrho}{3} \,.\, ctg\,\frac{\varphi}{3} \quad d\varphi$

З цего слідує:
$$y' = \frac{\varrho \quad cos\,\varphi + sin\,\varphi \quad \frac{1}{3} \quad \varrho \quad ctg\,\frac{\varphi}{3}}{cos\,\varphi \quad \frac{1}{3} \quad \varrho \quad ctg\,\frac{\varphi}{3} - \varrho \quad sin\,\varphi}$$

або:
$$y' = \frac{3 \quad cos\,\varphi \quad sin\,\frac{\varphi}{3} + sin\,\varphi \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3}}{cos\,\varphi \quad cos\,\frac{\varphi}{3} - 3 \,.\, sin\,\varphi \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}} \qquad 65)$$

a) Maxima i Minima.

Для $y' = 0$ маємо:
$$y' = \frac{3 + tg\,\varphi \,.\, cotg\,\frac{\varphi}{3}}{cotg\,\frac{\varphi}{3} - 3 \,.\, tg\,\varphi} \qquad 65')$$

Отже мусить бути:
$$3 + tg\,\varphi \,.\, cotg\,\frac{\varphi}{3} = 0$$

або:
$$3 \,.\, tg\,\frac{\varphi}{3} + tg\,\varphi = 0$$

$$tg\,\varphi = \frac{3 \quad tg\,\frac{\varphi}{3} - tg^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

З цего слідує: $$3 \,.\, tg\,\frac{\varphi}{3} = \frac{tg^3\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 3 \,.\, tg\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \,.\, tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

$$3 - 9 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) = tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 3$$

Отже: $$tg\,\frac{\varphi}{3} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\, 0{\cdot}7746 = tg\left(\pi - \frac{\varphi}{3}\right)$$

$$\varphi_1 = 113^0\ 17'\ 04{\cdot}5''$$
$$\varphi_2 = \ \ 66^0\ 42'\ 55{\cdot}5''$$

Слимаковата лінія має отже два maxim-а, де $y' = 0$, $tg\,\bar{\tau} = 0$; ці дві точки мають супроти оси y-онів симетральне положення.

Але: $y' = 0$ також тоді, коли у формулі 65) чисельник є рівний зеру.

Отже: $$3 \,.\, cos\,\varphi \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3} + sin\,\varphi \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3} = 0$$

оба члени цего рівнання мусять бути рівні зеру; це стаєся тоді, коли $\varphi = 270^0$, бо дійсно, $cos\ 270^0 = 0$,

$$cos\,\frac{270}{3} = 0,$$
$$sin\,\frac{270}{3} = 1,$$
$$sin\ 270^0 = -1.$$

Для $\varphi = 270^0$, ордината y осягає своє minimum; ми маємо:

$$y = 2r \quad sin\,\frac{\varphi}{3} \quad sin\,\varphi$$

для: $\varphi = 270^0$, $y = y_{min} = -2r$

$\varphi = 90^0$, $y = r = \varrho$ гл. формули: 61, 62'.

$y' = 0$ також для: $\varphi = 0$ і для $\varphi = 540^0$, це значить, що у точці M вісь x-сів є стичною кривої лінії (дві стичні накриваються).

Ми ще завважуємо, що для: $\varphi = 90^0$, $tg\,\bar{\tau} = y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, а для: $\varphi = 450^0$, $tg\,\bar{\tau} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$, отже: $\bar{\tau} = 30^0$, згл.: $\bar{\tau} = 150^0$.

Точка P_2 є подвійною точкою (Doppelpunkt) і крива лінія має в тій точці дві стичні.

Слимаковата лінія має 4 особливі точки, для яких: $y' = tg\,\bar{\tau} = \infty$, це є такі точки, у яких стичні ідуть рівнобіжно до оси y-онів.

З рівнання 65') одержуємо:

$$cotg\,\frac{\varphi}{3} - 3 \quad tg\,\varphi = 0$$

або: $$tg^4\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 4 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{1}{3} = 0 \qquad 66)$$

Рівнання 66) є рівнанням 4-ої степени.

З цего слідує: $$tg\,\frac{\varphi}{3} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}} \qquad 67)$$

β) Промінь осціляційного кола слимаковатої лінії.

I. Особливий випадок: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Покористуємося формулами 61) і 62)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \quad cos\,\varphi \\ y &= \varrho \quad sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

$$\varrho = 2r \quad sin\,\frac{\varphi}{3} \qquad 61)$$

$$dx = -\varrho\,.\,sin\,\varphi\,.\,d\,\varphi + cos\,\varphi\,.\,d\,\varrho$$
$$dy = \varrho\,.\,cos\,\varphi\,.\,d\varphi + sin\,\varphi\,.\,d\varrho$$
$$d\,\varrho = \frac{2r}{3} \quad cos\,\frac{\varphi}{3} \quad d\,\varphi$$

для: $$\varphi = \frac{\pi}{2},\ d\varrho = \frac{r\sqrt{3}}{3} \quad d\,\varphi,\ \ \varrho = r,\ \ d^2\varrho = -\frac{r}{9} \quad d\varphi^2$$

$$dx = -\,r\,.\,d\,\varphi,\ dy = \frac{r\sqrt{3}}{3} \quad d\,\varphi$$

$$d^2x = -\,\varrho \quad cos\,\varphi \quad d\varphi^2 - 2 \quad sin\,\varphi \quad d\varphi \quad d\varrho + cos\,\varphi \quad d^2\varrho$$
$$d^2y = -\,\varrho \quad sin\,\varphi \quad d\varphi^2 + 2 \quad cos\,\varphi \quad d\varphi \quad d\varrho + sin\,\varphi \quad d^2\varrho$$

для: $$\varphi = \frac{\pi}{2},\ \ d^2x = -\,2 \quad d\,\varphi \quad d\,\varrho$$
$$d^2y = -\,\varrho\,.\,d\varphi^2 + d^2\varrho$$

або: $$d^2x = -\,\frac{2r\sqrt{3}}{3} \quad d\,\varphi^2$$

$$d^2y = -\,r \quad d\,\varphi^2 - \frac{r}{9} \quad d\,\varphi^2$$

$$y'' = \frac{dx\,.\,d^2y - dy\,.\,d^2x}{(dx)^3} = \frac{\frac{10}{9}\,.\,r^2\,.\,d\varphi^3 + \frac{2}{3}\,.\,r^2\,.\,d\varphi^3}{r^3 \quad d\varphi^3}$$

$$y'' = -\,\frac{16}{9r};\ \ y' = tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = -\,\frac{r\sqrt{3}}{3r} = -\,\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad 68)$$

для $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{9}\right)^3} \quad 9r}{16} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \qquad 69)$$

або:

$$\overline{R} = r \quad cos\, 30^0 \qquad 69')$$

З рівнання 68) слідує, що для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\tau} = 150^0$.

Твердженнє: Стична у точці P_2 для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ перетинає криву лінію на оси x-сів в точці N (фіґ. 10). Друга стична перетинає цю саму криву лінію по другому боці оси y-онів теж на оси x-сів; вісь y-онів є для обох точок пересічи осию симетрії.

Доказ: У трикутнику рівнобічнім $MO'P_2$ висота $\overline{P_2 L}$ є рівна проміневи осціляцийного кола $\overline{R}$ для точки P_2 слимаковатої лінії (фіґ. 10).

Для $\varphi = 360^0$, $x = \varrho = 2r \,.\, sin\, \frac{\varphi}{3} = 2r \,.\, sin\, 60^0 = r\sqrt{3}$

отже: $\quad tang\, \overline{\tau}' = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

З рівнання 68) маємо: для $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$tang\, \overline{\tau} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ або: } tang\, \overline{\tau} = -\, tg\, (180 - \overline{\tau}')$$

Також: $\quad \sphericalangle MP_2 L = \sphericalangle P_2 NM$

А що: $\quad \sphericalangle MP_2 L = 30^0$, то також

$\sphericalangle P_2 NM = 30^0$

отже: $\quad tg\, 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\, \overline{\tau}'$; $\overline{\tau}' = 30^0$

а: $\overline{\tau}' = 150^0$.

Нота: Формулу 69) ми можемо одержати також в слідуючий спосіб:

$$y'' = \frac{dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x}{(dx)^3} = \frac{\varrho \,.\, d\varphi\, (\varrho d\varphi^2 - d^2\varrho) + d\varrho \,.\, 2d\varrho \,.\, d\varphi}{-\, \varrho^3\, d\varphi^3}$$

отже: $$y'' = \frac{\varrho^2 \,.\, d\varphi^3 - \varrho \,.\, d\varphi \,.\, d^2\varrho + 2d\varrho^2 \,.\, d\varphi}{-\, \varrho^3 \quad d\varphi^3}$$

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{d\varrho}{\varrho \,.\, d\varphi}\right)^2\right]^{3/2} \cdot \varrho^3 \quad d\varphi^3}{\varrho^2 d\varphi^3 - \varrho \,.\, d\varphi \,.\, d^2\varrho + 2 \quad d\varrho^2 \,.\, d\varphi}$$

$$\overline{R} = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho \cdot \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} = \frac{(12 \cdot \varrho^2)^{3/2}}{27\left(\varrho^2 + \frac{2}{3}\varrho^2 + \frac{\varrho^2}{9}\right)}$$

або:
$$\overline{R} = \frac{3 \cdot \varrho \cdot \sqrt{12}}{12} = \varrho\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varrho = 2r \quad sin\,\frac{\varphi}{3}, \text{ для: } \varphi = \frac{\pi}{2},\ \varrho = r$$

Отже: $\overline{R} = r\,\frac{\sqrt{3}}{2} = r \quad cos\ 30^0$, цей самий вислід, що у формулах 69, 69'.

II. Загальний випадок:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\left(\frac{dy'}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)} \qquad 70)$$

$$y' = \frac{3 \cdot cos\,\varphi \quad sin\,\frac{1}{3}\varphi + sin\,\varphi \cdot cos\,\frac{1}{3}\varphi}{cos\,\varphi \cdot cos\,\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot sin\,\varphi \quad sin\,\frac{1}{3}\varphi} = \frac{B}{A} \qquad \text{гл. форм. 65)}$$

$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2}\Big\{ A\,(cos\,\varphi \quad \frac{1}{3} \quad cos\,\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot sin\,\frac{1}{3}\varphi \cdot sin\,\varphi +$$

$$+ cos\,\frac{1}{3}\varphi \cdot cos\,\varphi - sin\,\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot sin\,\frac{1}{3}\varphi) - B\,(- cos\,\varphi \cdot \frac{1}{3}\,sin\,\frac{1}{3}\varphi -$$

$$- cos\,\frac{1}{3}\varphi \cdot sin\,\varphi - 3 \cdot sin\,\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot cos\,\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot sin\,\frac{1}{3}\varphi \quad cos\,\varphi)\Big\}$$

Або:
$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2}\Big\{ A\,(2\,cos\,\varphi \cdot cos\,\frac{1}{3}\varphi - \frac{10}{3} \cdot sin\,\frac{1}{3}\varphi \cdot sin\,\varphi) +$$

$$+ B\,(2\,sin\,\varphi \cdot cos\,\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}\,sin\,\frac{1}{3}\varphi \cdot cos\,\varphi)\Big\}$$

Отже:
$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{A.\,C + B.\,D}{A^2} = \frac{A.\,\frac{dB}{d\varphi} + B.\,\frac{dA}{d\varphi}}{A^2} \qquad 71)$$

A, B, C, D є функціями φ.

$$\left.\begin{aligned} A &= \cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \quad \sin\varphi \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \\ B &= 3\cos\varphi \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi + \sin\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi \\ C &= 2\cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \sin\varphi = \frac{dB}{d\varphi} \\ D &= 2 \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \cos\varphi = -\frac{dA}{d\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad 72)$$

$$x = 2r \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \cos\varphi$$

$$dx = \frac{2r}{3}\left(\cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \sin\varphi\right) = \frac{2r}{3} A \,.\, d\varphi$$

отже: $$y'' = \frac{3\,(A \,.\, C + B \,.\, D)}{2r \,.\, A^3}; \quad y' = \frac{B}{A}; \qquad 73)$$

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{2r\,(A^2 + B^2)^{3/2}}{3\,(AC + BD)} \qquad 74)$$

Окремі випадки: для: $\varphi = 90^0$, $A = -\frac{3}{2}$,

$$B = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C = -\frac{10}{6}, \quad D = +\sqrt{3};$$

$$\overline{R} = \frac{2r\sqrt{\left(\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\right)^3}}{3\left(\frac{3}{2} \quad \frac{10}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \sqrt{3}\right)} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = r \,.\, \cos 30^0$$

Для: $\varphi = 0^0$, $A = +1$, $B = 0$, $C = +2$, $D = 0$, $\overline{R} = \frac{r}{3}$;

Для: $\varphi = \pi$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $C = -1$, $D = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12}.$$

Для: $\varphi = 2\pi$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = +\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $C = -1$, $D = +\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12};$$

Для: $\varphi = \frac{3\pi}{2}\,(270^0)$, $A = +3$, $B = 0$, $C = +\frac{10}{3}$, $D = 0$,

$$\overline{R} = \frac{9}{5} \,.\, r.$$

γ) Дуга слимаковатої лінії.

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2} \qquad 75)$$

але: $$y' = \frac{B}{A},\ dx = \frac{2r\,A}{3}\,.\,d\varphi$$

Отже: $$s = \int \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}\ \frac{2r\,A}{3}\,.\,d\varphi = \frac{2r}{3}\int \sqrt{A^2 + B^2}\ d\varphi$$

$$C = 0.$$

Але:

$$A^2 = cos^2\varphi\,.\,cos^2\frac{1}{3}\varphi + 9\,sin^2\varphi\,.\,sin^2\frac{1}{3}\varphi - 6\,.\,cos\,\varphi\,.\,cos\frac{\varphi}{3}\,.\,sin\,\varphi\,.\,sin\frac{\varphi}{3}$$

$$B^2 = 9cos^2\varphi\,.\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + sin^2\varphi\,.\,cos^2\frac{1}{3}\varphi + 6\,.\,cos\varphi\,.\,sin\frac{1}{3}\varphi\,.\,sin\varphi\,.\,cos\frac{1}{3}\varphi$$

Отже: $$A^2 + B^2 = 9\ \ sin^2\frac{1}{3}\varphi + cos^2\frac{1}{3}\varphi = 8\,.\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1.$$

З цего слідує:

$$s = \frac{2r}{3}\int \sqrt{8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}\,.\,d\varphi \qquad 76)$$

Як бачимо, рівнанне 76) є тотожне з рівнанням 60) попередного уступу.

δ) Параметричне представленне слимаковатої лінії для природних співрядних.

Рівнання 74) звучить: $$\overline{R} = \frac{2r\,(A^2 + B^2)^{3/2}}{3\,(AC + BD)}$$

Підставивши у цьому рівнанню за A, B, C, D їх вирази з рівнань 72), ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \overline{R} &= \frac{r}{3}\,\frac{(8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1)^{3/2}}{(4\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1)} \\ \text{також:}\quad s &= \frac{2r}{3}\int \sqrt{8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}\,.\,d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 77)$$

Рівнання 77) є параметричними рівнаннями слимаковатої лінії для природних співрядних.

Інтеґрал $\int \sqrt{8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}\,.\,d\varphi$ є інтеґралом еліптичним.

є) Еволюта слимаковатої лінії.

Параметричні рівнання для еволюти слимаковатої лінії у співрядних Декарта звучать:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2r\left(\sin\frac{\varphi}{3}\,.\,\cos\varphi - B.\,K\right) \\ \eta &= 2r\left(\sin\frac{\varphi}{3}\sin\varphi + AK\right) \end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

де: A, B K є функціями φ.

$$K = \frac{8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}{6\left(4\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1\right)} \qquad 79)$$

або:

$$K = \frac{(3\,.\,\bar{R})^{2/3}}{6\,.\,r^{2/3}\sqrt[3]{4\quad\sin^2\frac{\varphi}{3} + 1}} \qquad 79')$$

Напр. для: $\varphi = 0$, $x = y = 0$

ми маємо: $A = +1$, $B = 0$, $K = +\frac{1}{6}$

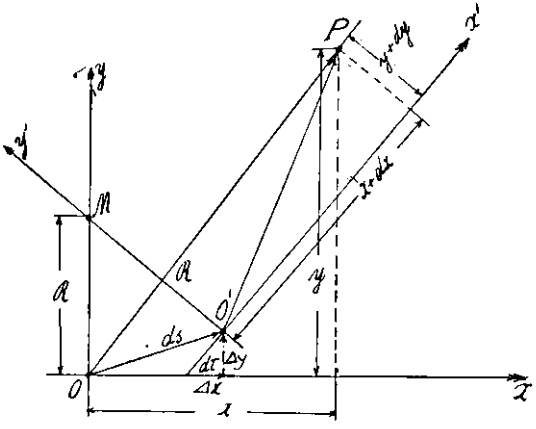
$\xi = 0$, $\eta = \frac{r}{3} = \bar{R}$ гл. стр. 72.

для: $\varphi = 90^0$, $x = 0$, $y = r$

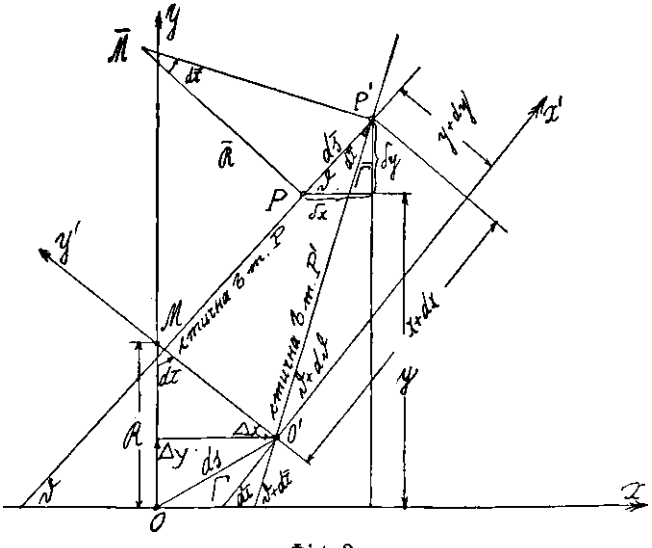
ми маємо: $A = -\frac{3}{2}$, $B = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, $K = +\frac{1}{4}$

$\xi = -\frac{r\sqrt{3}}{4}$, $\eta = r - \frac{3r}{4}$ це і співрядні точки L у фіґ. 10.

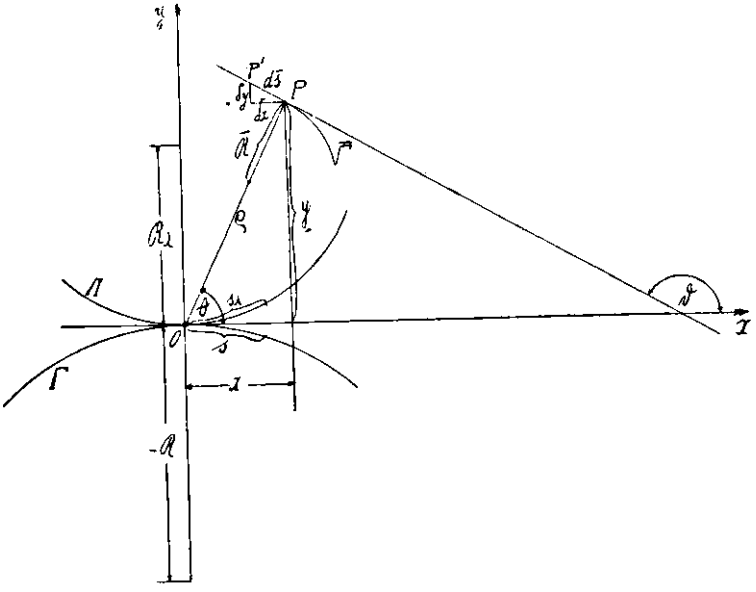
Як бачимо, будова рівнань 78) у дечому подібна до рівнань 62') для слимаковатої лінії.


P
y+dy
x'
y
y'
M
x+dx
R
a
y
O'
ds
dx
Δy
O
Δx
x
x

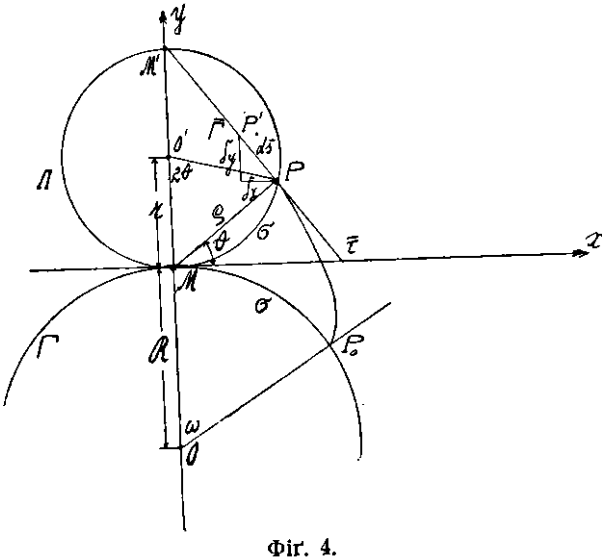
Фіґ. 1.


y
M
dx
P'
y+dy
X'
R
ds
dy
P
dx
y'
M
dx
R
Δx
O'
Δy
ds
x+dx
y
O
X

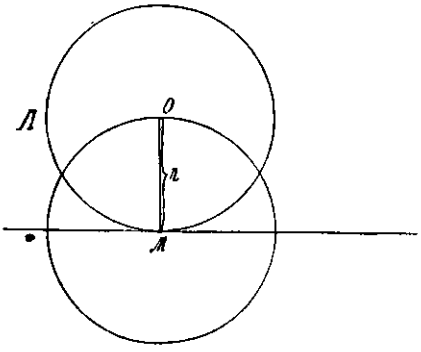
Фіґ. 2.



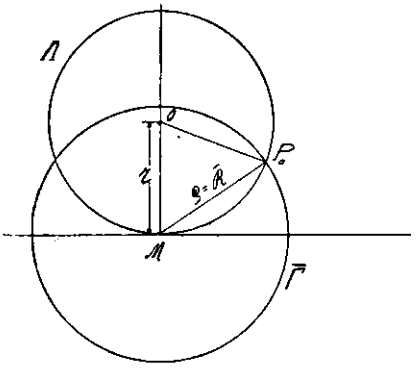
Фіґ. 3.



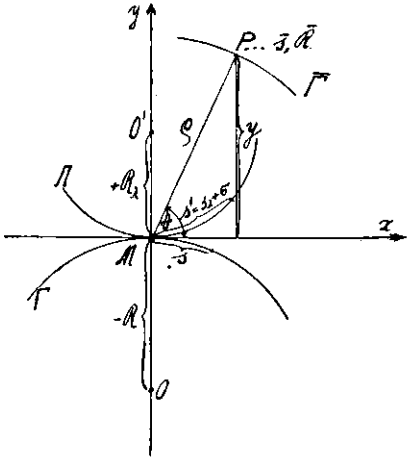
Фіґ. 4.



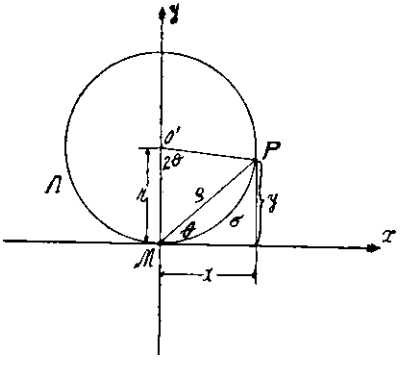
Фіг. 5.



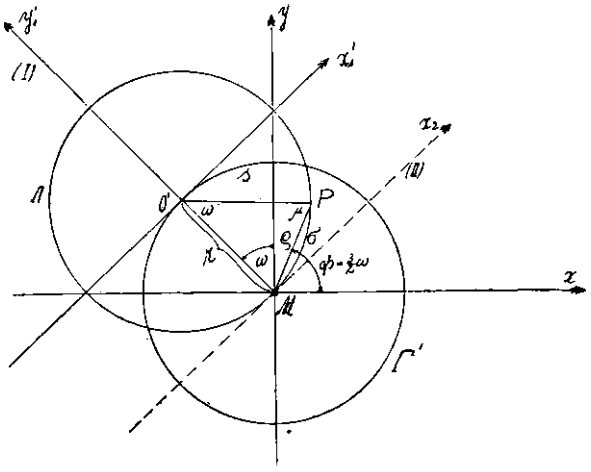
Фіг. 6.



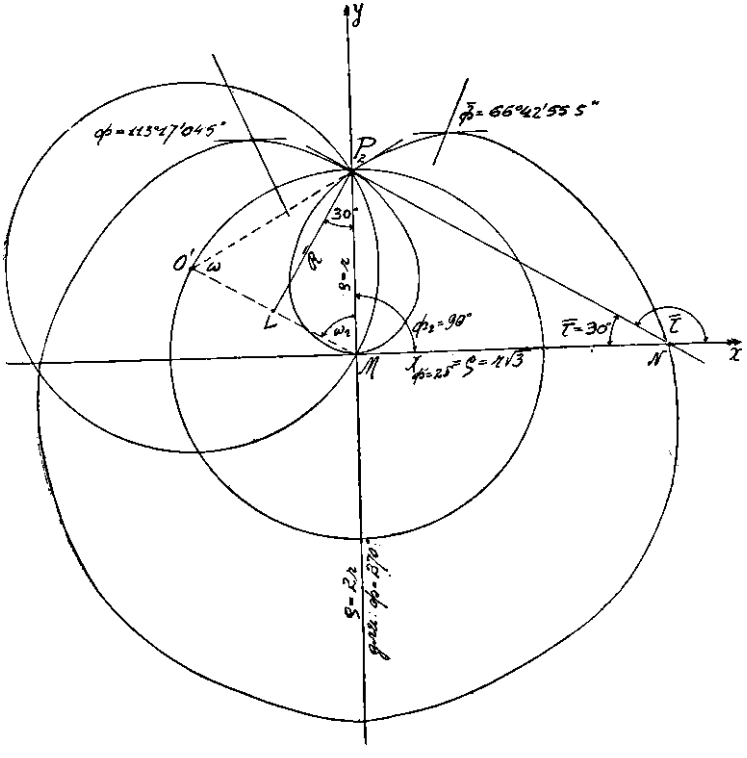
Фіг. 7.



Фіг. 8.


y'
y
x'
(I)
x₂
(II)
s
P
O'
ω
r
ω
φ
σ
φ = ½ω
x
M
Γ'

Фіґ. 9.


y
φ = 113°47'04.5"
φ̄ = 66°42'55.5"
P₂
30°
O'
ω
R
s = r
L
ω₂
φ₂ = 90°
φ̄ = 30°
φ̄
M
N
x
s = 2r
φ = 22°, φ = 0.70

Фіґ. 10.