Wl. Lewickyj (Léopol).

La spirale logarithmique et sa développante.

1. La spirale logarithmique decouverte par Descartes (1638) c'est la courbe dont le rapport d'un arc quelconque et le rayon vecteur correspondant est toujours constant tel que:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{AB} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{AC} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{AD} = \qquad = const.$$

c'est à dire:

$$\frac{r}{s} = const. \qquad 1)$$

La différentiation de cette équation et sa transformation en coordonnées polaires celle que:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

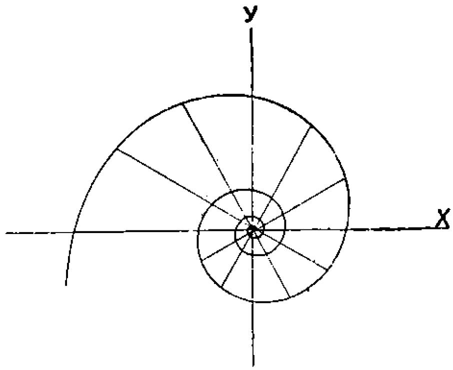
donne à nous

$$d\varphi = \sqrt{c^2 - 1}\ \frac{dr}{r}.$$

L'intégral de cette équation est:

$$r = Ce^{\alpha\varphi} \qquad 2) \qquad \left(\alpha = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad C = const.\right)$$

La spirale a la forme suivante:



Déjà J. Bernouilli (1691) a montré que la développée de la spirale logarithmique est pareille à la courbe même c'est à dire que la développée de cette courbe est aussi une spirale logarithmique. Dans la note suivante je veux donner une nouvelle démonstration du théorème reciproque et cela que la développante d'une spirale logarithmique est aussi une spirale logarithmique pareille.

Je demontrerai ce théorème par les méthodes egales à cettes ques j'ai employées dans mes notes précedentes[1]).

2) Nous obtiendrons l'équation d'une développante de la spirale logarithmique de l'équation 2) et des équations:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad \eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \tag{3}$$

Dans ce but écrivons l'équation 2) dans la forme:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = Ce^{\alpha \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}}$$

c. e. à dire:

$$\log(\xi^2 + \eta^2) - \log C^2 = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}. \tag{4}$$

La différentiation de cette équation par ξ donnera:

$$\frac{\xi + \eta \frac{d\eta}{d\xi}}{\xi^2 + \eta^2} = \alpha \frac{\xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

ou:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\alpha\eta + \xi}{\eta - \alpha\xi} \tag{5}$$

Cependant il y a:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} \frac{1}{\frac{d\xi}{dx}} \quad \text{et à l'égard de l'équation 3)}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)}{y''^2}\,[2]\text{)}, \quad \frac{d\xi}{dx} = -y'\frac{3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)}{y''^2}$$

ou:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{y'}.$$

L'équation 5) prend maintenant la forme suivante:

$$y' = \frac{\eta - \alpha\xi}{\alpha\eta + \xi}. \tag{6}$$

---

[1]) cf. Sammelschrift der math.-naturw.-ärztl. Sektion, Lemberg, Bd. XXI, S. 65 sqt.

[2]) L'importance du ce numérateur comp. l. cit.

Posant pour ξ et η les valeurs 3) nous obtiendrons au lieu de l'équation 6) l'expression suivante:

$$(x + ay)y' - (y - ax) = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}. \qquad 7)$$

C'est l'équation différentielle de la développante que nous cherchons. Mais on peut constater très facilement que l'équation au-dessus peut être satisfaite par la substitution

$$y' = \frac{x + ay}{ax - y} \qquad 8)$$

car dans ce cas il y a

$$(1 + y'^2)^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2 (a^2 + 1)^2}{(ax - y)^4}, \; y'' = \frac{(xy' - y)(a^2 + 1)}{(ax - y)^2}.$$

Mais étant

$$xy' - y = \frac{x^2 + y^2}{ax - y}$$

alors

$$y'' = \frac{(x^2 + y^2)(a^2 + 1)}{(ax - y)^3},$$

en conséquant la côté droite de l'équation 7) aura pour valeur $\frac{(x^2 + y^2)(a^2 + 1)}{ax - y}$. Cependant la côté gauche ayant la même valeur l'équation 7) devient l'identité:

$$\frac{(x^2 + y^2)(a^2 + 1)}{ax - y} \equiv \frac{(x^2 + y^2)(a^2 + 1)}{ax - y}$$

c'est à dire l'équation différentielle 7) a pour solution la valeur:

$$y' = \frac{x + ay}{ax - y}.$$

De la formule dernière suit

$$(ax - y)\, y' = x + ay$$

ou:

$$x + yy' = a(xy' - y).$$

Écrivant cette équation dans la forme:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = a\, \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

son integral a la valeur:

$$log\,(x^2 + y^2) = 2a\, arc\, tg \frac{y}{x} + const,$$

et quand nous poserons

$$const = 2 \, log \, m,$$

nous obtiendrons:

$$x^2 + y^2 = m^2 e^{2\alpha \, arc \, tg \frac{y}{x}}$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m \, e^{\alpha \, arc \, tg \frac{y}{x}}. \tag{10)}$$

Mais c'est l'équation de la spirale logarithmique, éventuelement dans le cas de m variable d'un faisceau des spirales logarithmiques pareilles à la courbe 1) donnée.

Nôtre théorème est donc démontrée.

Octobre, 1927.