Мирон Зарицький.

Похідна і когеренція абстрактної множини.

В теорії точкових множин означується деякі операції, на основі яких кождій множині A відповідають однозначно инші множини. Так н. пр. кождій множині A припорядковується її похідну A^d, її замкнення (fermenture, abgeschlossene Hülle) A^r, її обмеження (frontiere, Begrenzung) A^f, її беріг (bord, Rand) A^b, її середовину (l' interieur, das Innere der Menge) A^i, та її когеренцію A^k.

Кромі сего досліджується там деякі особливі множини, що мають якісь особливі властивости, як н. пр. замкнені (fermé, abgeschlossen), розімкненні (ouvert, offen), густі (dense, dicht), берегові (ensemble frontière, Randmengen), та ізольовані (isolé, isoliert) множини.

Тому, що оба роди наведених особливих множин є дуже важні в теорії точкових множин, давно вже досліджували учені їх основні властивости. При тому від часу появи дисертації проф. Fréchet вибирається одну із особливих припорядкованих множині A множин як основне поняття теорії, означується його істотні властивости при помочі кількох незалежних аксіомів, із сих аксіомів висновується инші властивости вибраного основного поняття, при його допомозі означується инші основні поняття і висновується їх властивости і так повстає теорія абстрактних множин, себто теорія множин, що не мають ніякої означеної якости, та про які знаємо лише се, що нам про одну якусь виконувану на них операцію каже основний уклад аксіомів.

Поняття граничної точки точкового поступу було основним поняттям в першій праці проф. Fréchet[1]). Проф. Riesz[2]) прослі-

---

[1]) M. Fréchet: Thèse. Paris 1905.

[2]) F. Riesz: Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV, Congresso internationali dei Matematici, Roma 1908.

джував поняття точки скупчення множини, а проф. Hausdorff[1]) поняття оточення точки. Проф. Куратовскі[2]) вибрав поняття замкнення множини, а проф. Серпіньскі[3]) поняття похідної множини як основне поняття теорії абстрактних множин.

В IX томі журналу Fundamenta mathematicae[4]) прослідив я загальні прикмети наступних основних понять топології: „збір околишніх точок" (l' extérier), „збір середових точок" (l' intérieur), обмеження (la frontière) і беріг (le bord). В журналі Transactions of the American Mathematical Society подав я недавно загальні властивости поняття когеренції.

В 1 § отсеї праці прослїджую деякі загальні властивости поняття похідної множини. Сі властивости висновую з укладу чотирох аксіомів, які подав в згаданій вже праці проф. Куратовскі[6]).

В 2 § подаю властивости поняття когеренції і показую, як можна при помочі сего поняття означити инші основні поняття теорії абстрактних множин[7]).

§ 1.

1. Означім поняття похідної A^d множини A наступними чотирома формулами:

$\mathrm{I_d}$: $(A+B)^d = A^d + B^d$

$\mathrm{II_d}$: $C^d = C$

$\mathrm{III_d}$: $O^d = O$

$\mathrm{IV_d}$: $A^{dd} \subset A^d$.

Літерою C зазначую простір, у якому є уміщені всі обговорювані множини, множину без елементів зазначую через O. Символ A^c значить доповнення множини A: $A^c = C - A$. Замість

---

[1]) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre 1914.

[2]) C. Kuratowski: Sur l'Operation $\bar{A}$ d'Analysis Situs. Fundam. Math. III.

[3]) W. Sierpiński: La notion de derivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits. Mathematische Annalen. 97. 1926.

[4]) M. Zarycki: Quelques notions fondamentales d'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique. Fund. Math. IX.

[5]) M. Zarycki: Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, Transactions of the Americ. Mathem. Society, 1928.

[6]) Більшу часть сих властивостей найшов проф. Куратовскі, але досі не оголосив їх друком.

[7]) Деякі висновки про когеренцію (без доказів) подав я в рефераті на I. польськім математичнім конгресі у Львові (1927). Протоколи сего конгресу ще не видруковані.

$(A^d)^d$ пишу A^{dd}. Символом $A \subset B$ або $A \rightarrow B$ зазначую, що множина A є частію множини B.

2. Тепер на основі I_d — IV_d докажу наступні теореми:

1_d: коли $A \subset B$, то $A^d \subset B^d$

2_d: $\quad (AB)^d \subset A^d B^d$

3_d: $\quad A^d B^{dc} \subset (A B^c)^d$

4_d: $\quad A^{dc} \subset A^{cd}$

5_d: $\quad A^{dcdcdcd} = A^{dcd}$.

Докази теорем 1_d — 5_d:

1_d: Коли $A \subset B$, то $B^d = A^d + B^d$ (I_d), отже $A^d \subset B^d$.

2_d: З формул $AB \subset A$ і $AB \subset B$ виходить:

$$(AB)^d \subset A^d \text{ і } (AB)^d \subset B^d \; (1_d), \text{ отже:}$$

$$(AB)^d \subset A^d B^d$$

3_d: Згідно з законами альгебричної логіки маємо:

$$A \subset AB^c + B, \text{ отже:}$$

$$A^d \subset (AB^c + B)^d = (AB^c)^d + B^d \quad (1_d,\ I_d).$$

Коли обі сторони останньої реляції помножимо через B^{dc}, дістанемо:

$$A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d B^{dc} + B^d B^{dc} = (AB^c) B^{dc} \subset (A B^c)^d.$$

4_d: З ідентичности: $A^{dc} = C A^{dc}$ виходить:

$$A^{dc} = C^d A^{dc}, \quad (II_d)$$

$$\text{отже: } A^{dc} \subset (CA^c)^d = A^{cd} \quad (3_d).$$

5_d: З формул 4_d і IV_d дістаємо:

$$A^{dcdc} \subset A^{dccd} = A^{dd} \subset A^d, \text{ отже на основі } 1_d \text{ і } IV_d:$$

$$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d, \text{ отже також:}$$

$$A^{dc} \subset A^{dcdcd} \text{ і на основі формули } 1_d:$$

$$A^{dcd} \subset A^{dcdcdcd} \qquad (\alpha)$$

З другої сторони з формул 4_d і IV_d виходить, що:

$$A^{dcdcdc} \quad A^{dcdccd} = A^{dcdd} \subset A^{dcd}$$

а дальше з формул 1_d і IV_d:

$$A^{dcdcdcd} \subset A^{dcdd} \subset A^{dcd} \qquad (\beta)$$

формули (α) і (β) разом взяті дають теорему 5_d.

3. При помочі аксіом I_d — IV_d і теорем 1_d — 5_d докажемо тепер реляції зазначені в наступних таблицях:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & & & & A^{cdcd} \arrow[dr] & & & \\ A^{cdc} \arrow[r, dashed] & A^{cddc} \arrow[r, dashed] & A^{cdddc} \arrow[r] & \cdots A^{cdd\ldots c} \arrow[r] & A^{cdcdcdc} \arrow[urr] \arrow[drr] & & & A^{dcdcd} \arrow[r] & A^{ddd\ldots} \arrow[r, dashed] & \cdots \\ & & & & & & A^{dcdc} \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\cdots A^{dd} \rightarrow A^{ddd} \rightarrow A^{d} \qquad (T_1)$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & A^{dcd} \arrow[dr] & & & \\
A^{dc} \arrow[r] & A^{ddc} \arrow[r] & A^{dddc} \arrow[r] & \cdots A^{dd..c} \arrow[r] & A^{dcdcdc} \arrow[urr] \arrow[drr] & & & A^{cdcdcd} \arrow[r] & A^{cddd} \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & & & A^{cdcdc} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$\cdots A^{cddd} \rightarrow A^{cdd} \rightarrow A^{cd} \qquad (T_2)$$

Наперед докажу, що коли: $A \subset B$ то: $A^{cdc} \subset B^{cdc}$. (γ)

Доказ: коли $A \subset B$, то $B^{c} \subset A^{c}$ і $B^{cd} \subset A^{cd}$ (1_d),
отже: $A^{cdc} \subset B^{cdc}$.

Тепер докажу по черзі правдивість всіх реляцій, що містяться в таблиці (T_1):

1) Т.) $A^{cdc} \subset A^{cdcdcdc}$

Д.) $A^{cddc} \subset A^{cdcd}$ (4_1)

отже: $A^{cdcdc} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$ (IV_d)

$A^{cdcdcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$ $(1_d, IV_d)$

$A^{cdc} \subset A^{cdcdcdc}$.

2) Т.) $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$

Д.) $A^{cdcddc} \subset A^{cdcdcd}$ (4_1)

$A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcdd} \subset A^{cdcd}$ (IV_d)

3) Т.) $A^{cdcdcdc} \subset A^{dcd}$

Д.) Маємо: $A^{dc} \subset A^{cd}$ (4_2)

$A^{dcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$ $(1_d, IV_d)$, а на основі теореми (γ): $A^{dcdcdc} \subset A^{cdcdc}$.

Остання реляція є правдива для кождої множини, отже і для множини A^{c}, отже дістаємо:

$A^{cdcdcdc} \subset A^{dcdc}$.

4) Т.) $A^{cdcd} \subset A^{dcdc}$

Д.) З доказаної вже реляції $A^{cdc} \subset A^{dcdc}$ 1), 3) виходить що: $A^{cdcd} \subset A^{dcdcd}$ (1_d).

5) Т.) $A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}$

Д.) Маємо: $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$, отже коли ту замість A положимо A^{c}, дістаємо:

$A^{dcdcdc} \subset A^{dcd}$ і дальше:

$A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}$.

6) Т.) $A^{dcdcd} \subset A^{d}$

Д.) $A^{dcdc} \subset A^{dccd} \subset A^{dd} \subset A^{d}$ $(4_d, IV_d)$

$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^{d}$ $(1_d, IV_d)$.

Тепер мусимо доказати правдивість двох важних формул:

$$m) \quad A^{cdcdd} = A^{cdcd}$$

$$n) \quad A^{dcdd} = A^{dcd}.$$

Доказ: Маємо: $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$ 2)

$A^{cdcdcdcd} \subset A^{cdcdd}$ (1_d)

отже: $A^{cdcd} \subset A^{cdcdd}$, бо згідно з теоремою 5_d маємо: $A^{cdcdcdcd} = A^{cdcd}$.

З другої сторони маємо: $A^{cdcdd} \subset A^{cdcd}$ (IV_d).

Формули: $A^{cdcd} \subset A^{cdcdd}$ і $A^{cdcdd} \subset A^{cdcd}$ дають теорему (m).

Теорему (n) дістанемо з теореми (m), коли замість A положимо там A^c.

Тепер можемо доказати нову теорему:

(p): $A^{dd\ldots cdc} = A^{dcdc}$.

Доказ: $A^{dcdcd} \subset A^d$ (6)

а через многократне приложення теореми (n) дістаємо:

$A^{dcdcd} \subset A^{dd\ldots}$

а дальше: $A^{dcdcdcdc} \subset A^{d\ldots cdc}$ (γ)

(1'): $A^{dcdc} \subset A^{d\ldots cdc}$ (5_1)

З другої сторони маємо: $A^{dd\ldots} \subset A^d$ (IV_d)

отже:

(2'): $A^{dd\ldots cdc} \subset A^{dcdc}$ (γ).

Реляції (1') і (2') дають теорему (p).

Тепер легко вже можна доказати наступні формули:

(r): $A^{dd\ldots cd} = A^{dcd}$

(s): $A^{cdd\ldots cd} = A^{cdcd}$

(t): $A^{cdd\ldots cdc} = A^{cdcdc}$.

Докажемо тепер реляцію:

7) Т.) $A^{cdc} \subset A^{cdd\ldots c} \subset A^{cdcdcdc}$

Д.) $A^{cdd\ldots} \subset A^{cd}$, отже:

$A^{cdc} \subset A^{cdd\ldots c}$.

Дальше: $A^{cdcdcd} \subset A^{cd}$ (6)

а також: $A^{cdcdcd} \subset A^{cdd\ldots}$ (1_d), (n)

отже: $A^{cdd\ldots c} \subset A^{cdcdcdc}$.

8) Т.) $A^{dcdcd} \subset A^{dd\ldots} \subset A^d$.

Д.) Коли в формулі 7) замість A положимо A^c, дістанемо: $A^{dd\ldots c} \subset A^{dcdcdc}$

отже також: $A^{dcdcd} \subset A^{dd\ldots}$

Реляція: $A^{dd\ldots} \subset A^d$ виходить з (IV_d).

Так доказали ми всі реляції, що містяться у таблиці (T_1). Реляції поміщені в таблиці (T_2) дістанемо, коли в таблиці (T_1) підставимо всюди A^c замість A.

4. Зазначім тепер знаком A^σ множину, що повстала з множини A через приложення до неї скінченого числа операції A^d і A^c у довільнім порядку. Так отже покажчик σ зазначує скінчений поступ, що його елементами є літери d і c.

Докажемо тепер наступні твердження:

I. Для загальної множини A всі множини типу A^σ, що містяться у таблицях (T_1) і (T_2) є ріжні (нема між ними двох множин ідентичних).

II. Ніякі инші реляції типу $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ не є правдиві для ніяких σ_1 і σ_2 (взятих із наведених таблиць) крім сих реляцій, що їх находимо у таблицях.

III. Кожда множина типу A^σ є ідентична з одною з множин, що є поміщені в таблицях (T_1) і (T_2). Правдивість твердження III. виходить з теорем (5_d), m) n) r) s) і t).

Щоби доказати теореми I і II треба сконструувати таку множину M, що має наступні властивости:

1) Коли σ_1 і σ_2 є двома ріжними покажчиками, що їх можна найти в таблицях (T_1) і (T_2), то все є: $M^{\sigma_1} \neq M^{\sigma_2}$.

2) Коли σ_1 і σ_2 є двома ріжними покажчиками, що находяться у таблицях, то ніякі реляції типу $M^{\sigma_1} \subset M^{\sigma_2}$ (ані $A^{\sigma_2} \subset A^{\sigma_1}$) не є правдиві, крім сих, що є вписані у таблицях.

Подамо тепер конструкцію такої множини.

Нехай простором C буде збір дійсних чисел відтинка: $0 \leq x \leq 1$.

A_1 = множина дійсних чисел відтинка: $0 \leq x < 1$,

A_2 = „ вимірних „ $2 \leq x < 3$,

A_3 = „ чисел: $x = 5 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

A_4 = „ відтинків: $7 - \frac{1}{2^n} < x < 7 - \frac{1}{2^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

A_5 = „ дійсних чисел відтинка: $7 < x \leq 8$,

A_6 = довільна добре упорякована (bien ordonné) множина типу ω^ω чисел положених на відтинку: $8 < x < 9$,

A_7 = ріжниця між множиною чисел відтинка: $9 \leq x \leq 10$ і довільною добре упорядкованою множиною типу ω^ω чисел положених на сім відтинку.

Коли означимо тепер похідну як множину точок скупчення, то легко можна провірити, що множина $M = \sum_{n=1}^{7} A_n$ має обі властивости 1) і 2).

5. Означимо тепер при помочі поняття похідної найважнійші поняття топології.

Множину A називаємо замкненою, коли: $A^\varphi \subset A$.

Множину A називаємо у собі густою (dense en soi), коли: $A < A^d$.

Множину A називаємо завершеною (parfait), коли: $A = A^d$.

Множину A називаємо ізольованою (isolé), коли: $A^d < A^c$.

Множину A називаємо розімкненою (ouvert), коли: $A < A^{cdc}$.

Множину A називаємо всюди густою (partout dense), коли: $A^d = C$.

Множину A називаємо береговою (ensemble frontière), коли: $A^{cdc} = 0$.

Множину A називаємо негустою (non dense), коли: $A^{dcdc} = 0$.

Через відповідні операції можна з кождої множини A дістати инші множини, що є функціями сеї множини. Подаю означення найважнійших із таких функкій:

Множину $A^i = A \,.\, A^{cdc}$ називаємо середовиною (intérieur) множини A.

Множину $A^f = A A^{cd} + A^c A^d$ називаємо обмеженнєм (frontière) множини A.

Множину $A^b = A A^{cd}$ називаємо берегом множини A.

Множину $A^r = A + A^d$ називаємо замкненнєм (fermeture) множини A.

Легко можна провірити, що множина A^d є все замкнена, A^{dc} є все у собі густа, а множина A^{dcd} є завершена.

6. Усі теореми, що їх досі доказано, є логічними консеквенціями аксіомів I_d — IV_d. Легко можна доказати, що спійність (connexité) простору не є консеквенцією сих аксіомів. Коли хочемо мати уклад аксіомів, з якого можна вивести спійність простору, треба до аксіомів I_d — IV_d додати ще аксіому:

V_d: Коли: $A^d < A < A^{cdc}$, то: $A = 0$ або $A = C$.[1]

Докажемо тепер дві наступні теореми:

I. Простір C є спійною множиною.

II. Лише множина без елементів (O) і простір C є множинами і замкненими і розімкненими.

Доказ теореми I:

Множину A називаємо спійною, коли не можна найти таких двох множин M і N, щоби:

$$\alpha)\ M \neq O,\ N \neq O,$$
$$\beta)\ M + N = A,$$
$$\gamma)\ MN + MN^d + M^d N = O.$$

[1]) Дещо аксіому рівноважну аксіомі V_d і її консеквенції можна найти у моїй ноті: Про спійність простору, Збірник, мат.-прир.-лік. секції Н. Т. ім. Ш., том XXVI.

Приймім умову, що простір C можна розділити на такі дві множини M і N, щоби для них формули α), β) і γ) були правдиві.

З формул виходить, що: $N = M^c$ (бо $M + N = O$). Отже дістаємо: $MM^{cd} + M^d M^c = O$, або:

$$MM^{cd} = O, \quad M^d M^c = O.$$

З останніх формул виходить:

$$M < M^{cdc} \text{ і } M^d < M, \text{ отже:}$$

$$M^d < M < M^{cdc}$$

На основі формул α), β), γ) множина M не може бути ані множиною без елементів, ані ідентична з цілим простором. Із сего виходить на основі акс. V_d, що формула $M^d < M < M^{cdc}$ є неможлива. А що остання формула є консеквенцією умови, що простір не є спійний, то і ся умова є незгідна з акс. V_d і простір є множиною спійною.

Доказ теореми II.:

Множина без елементів і простір є множинами замкненими і розімкненими, бо:

$$O^d = O, \quad O < O^{cdc} = O; \qquad C^d = C, \quad C < C^{cdc} = C.$$

Треба ще доказати, що ніяка инша множина не може бути і замкнена і розімкнена. Така множина A мусілаби мати наступні властивости:

$$A^d < A \text{ і } A < A^{cdc},$$

а се є незгідне з акс. V_d.

7. Щоби доказати незалежність аксіом I_d — V_d, треба означити для якогось простору похідну на пять ріжних способів так, щоби кожда дефініція була згідна із всіми аксіомами крім одної.

Нехай простір складається з трох елементів a, b, c, отже $C = (a, b, c)$. В наступній таблиці подаємо пять дефініцій похід-

	I_d	II_d	III_d	IV_d	V_d
$O^d =$	O	O	(a, b, c)	O	O
$(a)^d =$	O	O	(a, b, c)	(a, b)	(a)
$(b)^d =$	O	O	(a, b, c)	(b, c)	(b)
$(c)^d =$	O	O	(a, b, c)	(c, a)	(c)
$(a, b)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(a, b)
$(b, c)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(b, c)
$(c, a)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(c, a)
$(a, b, c)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(a, b, c)

ної множин сего простору. Кожда з дефініцій є згідна з чотирома аксіомами, а незгідна з одною аксіомою зазначеною над тим стовпцем, у якім є виписані означення похідної всіх множин простору.

Легко можна переконатися, що аксіоми I_d — V_d є правдиві в евклідовім просторі, коли A^d означимо як множину точок скупчення множини A. Однак крім сего можна їх також прикладати у загальнійших абстрактних просторах.

Аксіома I_d каже, що операція A^d є адитивна.

З аксіоми IV_d виходить, що похідна є все замкнена.

Аксіома V_d є рівноважна теоремі: Множина без елементів і простір є одинокими множинами, яких обмеження є множиною без елементів.

§ 2.

1. G. Cantor назвав множину $A^k = AA^d$ когеренцією множини A. Колиж хочемо означити похідну множини A через її когеренцію, то бачимо, що похідної не можна означити як функцію когеренції, т. зн. що коли на загальній множині A будемо виконувати операції A^k і A^c, та будемо творити логічні суми і добутки на множинах типу A^σ, то не дістанемо такої множини, що означувалаби загально похідну множини A. Про правдивість сеї замітки можна легко переконатися. Означім похідну так, як її означується в теорії точкових множин і нехай A буде множиною, якої елементами є обернені вартости цілих додатних чисел: $A = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$. Коли C є множиною дійсних чисел, то легко можна переконатися, що всякі можливі льоґічні операції виконувані на множинах A, A^k і A^c дають все лише одну з наступних множин: A, A^c, O, C, а нема між ними похідної множини A, яка є множиною, що має лише один елемент, яким є число O.

Однак похідну можна означити при помочі когеренції, коли допустимо також формули, що представляють реляції між множиною і її елементами. Кажемо іменно, що елемент „a“ є елементом похідної A^d, коли: $a \varepsilon \{A + (a)\}^k$.[1])

Покажемо, що ся дефініція є рівноважна звичайній дефініції похідної в таких клясах, у яких для похідної є правдиві дві наступні формули:

---

[1]) $a \varepsilon A$ значить, що „a“ є елементом множини A. (a) значить множина, що має лише один елемент „a“.

$$a)\quad (A+B)^{d} = A^{d} + B^{d}$$
$$b)\quad (a)^{d} = O.$$

Доказ:

Коли $a \,\varepsilon\, \{A + (a)\}^{k}$, то:

$$(a) \subset \{A + (a)\}^{k} = \{A + (a)\}\{A^{d} + (a)^{d}\} = \{A + (a)\}A^{d} \subset A^{d}.$$

З другої сторони, коли:

$$(a) \subset A^{d}, \text{ то також:}$$

$$(a) \subset (a)\,.\,A^{d} \subset (a)A^{d} + A\,A^{d} = \{A + (a)\}\{A^{d} + (a)^{d}\} = \{A + (a)\}^{k}.$$

Бачимо, що наша дефініція похідної придатна в клясах (L) і (H) Fréchet'a. Можна її також прикладати і в таких просторах, у яких похідна не мусить бути замкнена. Треба лише, щоби були правдиві формули a) і b).

Коли вже маємо означення похідної при помочі когеренції, то можна вже означити при помочі когеренції і инші основні поняття топології.

Так н. пр. множину A називаємо замкненою, коли з реляції:

$$a \,\varepsilon\, \{A + (a)\}^{k}$$

виходить що: $\qquad a \,\varepsilon\, A.$

Множину A називаємо в собі густою коли з реляції: $a \,\varepsilon\, A$ виходить, що: $a \,\varepsilon\, \{A + (a)\}^{k}$.

Замкнення A^{r} множини A можна означити в наступний спосіб: $\qquad a \,\varepsilon\, A^{r}$ коли: $a \,\varepsilon\, A + \{A + (a)\}^{k}$.

2. Загальні властивости когеренції виведемо з наступних трох незалежних аксіомів:

I_{k}: $\quad A^{k} + B^{k} \subset (A+B)^{k}$

II_{k}: $\quad A^{k} \subset A$

III_{k}: $\quad A^{ckck} = A^{kckc}$.

Правдивість сих формул виходить з дефініції поняття когеренції ($A^{k} = A\,A^{d}$), та з аксіомів I_{d} — IV_{d}.

Доказ I_{k}:

$$A^{k} + B^{k} = A\,A^{d} + B\,B^{d}, \quad (A+B)^{k} = (A+B)(A+B)^{d} =$$
$$= (A+B)(A^{d} + B^{d}) = A\,A^{d} + B\,B^{d} + B\,A^{d} + A\,B^{d},$$

отже: $\qquad A^{k} + B^{k} \subset (A+B)^{k}.$

Доказ II_{k}: $\quad A^{k} = A\,A^{d} \subset A.$

Доказ III_{k}:

$$A^{ckck} = (A^{c}A^{cd})^{ck} = (A + A^{cdc})^{k} = (A + A^{cdc})(A + A^{cdc})^{d} =$$
$$= (A + A^{cdc})(A^{d} + A^{cdcd}) = (A + A^{cdc})A^{d} = A\,A^{d} + A^{cdc}A^{d} =$$
$$= A\,A^{d} + A^{cdc}.$$

$$A^{kckc} = (A\,A^{d})^{ckc} = (A^{c} + A^{dc})^{kc} = \{(A^{c} + A^{dc})(A^{c} + A^{dc})^{d}\}^{c} =$$
$$= \{(A^{c}+A^{dc})(A^{cd}+A^{dcd})\}^{c} = \{A^{c}A^{cd}+A^{dc}A^{cd}+A^{c}A^{dcd}+A^{dc}A^{dcd}\}^{c} =$$
$$= \{A^{c}A^{cd} + A^{dc} + A^{c}A^{dcd} + A^{dc}\} = \{A^{dc} + A^{c}(A^{cd} + A^{dcd})\}^{c} =$$

$= \{A^{dc} + A^c A^{cd}\} = A^d(A + A^{cdc}) = AA^d + A^d A^{cdc} = AA^d + A^{cdc}$,
отже: $A^{ckck} = A^{kckc}$.

3. При помочі аксіом I_k — IV_k докажемо тепер наступні формули:

1_k: коли $A \subset B$, то $A^k \subset B^k$
2_k: $(AB)^k \subset A^k B^k$
3_k: $O^k = O$
4_k: $C^k = C$
5_k: $A^{ck} \subset A^{kc}$
6_k: $(A - B)^k \subset A^k - B^k$
7_k: $A^{kckk} = A^{ckckck}$
8_k: $A^{kkck} = A^{kckckc}$.

Докази:

1_k: Коли $A \subset B$, то з акс. I^k виходить:

$$A^k + B^k \subset B^k, \text{ отже:}$$
$$A^k \subset B^k.$$

2_k: Маємо: $AB \subset A$ і $AB \subset B$, отже:

$$(AB)^k \subset A^k \text{ і } (AB)^k \subset B^k, \qquad (1_k)$$

а через вимноження дістаємо:

$$(AB)^k \subset A^k B^k.$$

3_k: З акс. II_k виходить:

$$O^k \subset O, \text{ або: } O^k = O.$$

4_k: Щоби доказати теорему 4_k, треба наперед доказати, що когеренція кождої множини є частиною когеренції простору, т. зн. що для кождої множини M є правдива реляція $M^k \subset C^k$.

Коли в акс. I_k положимо: $A = M$, $B = C$, то дістанемо:

$$M^k + C^k \subset (M + C)^k = C^k, \text{ отже:}$$
$$M^k \subset C^k.$$

Положім тепер: $M = A^{ckc}$,
то дістанемо: $A^{ckck} \subset C^k$, а також:
$A^{kckc} \subset C^k$. (акс. III_k)

Положім: $A = O$, то:
$O^{kckc} \subset C^k$.

Але: $O^{kckc} = O^{ckc} = C^{kc}$, (3_k)
отже: $C^{kc} \subset C^k$,
$C^{kc} \cdot C^{kc} = O$, $C^k = C$.

5_k: Маємо: $A^{ck} \subset A^c$ (акс. II_k)
а дальше: $A \subset A^{ckc}$,
але: $A^k \subset A$ (II_k)
отже: $A^k \subset A^{ckc}$
$A^{ck} \subset A^{kc}$.

6_k: Згідно з теоремою 2_k маємо:

$$(AB^c)^k \subset A^k B^{ck} \subset A^k B^{kc} = A^k - B^k.$$

7_k: Коли в акс. III_k за A положимо A^c, то дістаємо:

$$A^{kck} = A^{ckckc}$$

$$A^{kckk} = A^{ckckck}.$$

8_k: При доказі останньої теореми мали ми реляцію:

$$A^{kck} = A^{ckckc}.$$

Положім ту A^k за A, то дістанемо:

$$A^{kkck} = A^{kckckc}.$$

4. Тепер розглянемо проблєму анальоґічну до сеї, яку ми досліджували в § 1. 4.

Докажемо, що правдиві є реляції інклюзії, що містяться у наступних таблицях:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \to & A^{ckc} & \to & A^{ckkc} & \to & A^{ckkkc} & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
A^{k} & \to & A^{ckck} & \to & A^{ckkck} & \to & A^{ckkkck} & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
A^{kk} & \to & A^{ckckk} & \to & A^{ckkckk} & \to & A^{ckkkckk} & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
A^{c} & \to & A^{kc} & \to & A^{kkc} & \to & A^{kkkc} & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
A^{ck} & \to & A^{kck} & \to & A^{kkck} & \to & A^{kkkck} & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
A^{ckk} & \to & A^{kckk} & \to & A^{kkckk} & \to & A^{kkkckk} & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot &
\end{array}$$

Що кожда множина є частиною множини, яка лежить у таблиці над нею, виходить з акс. II_k.

Треба ще лише доказати, що кожда множина є частиною, що лежить у таблиці на право від неї. Вистане доказати се для першого ряду таблиці.

(II_k) $\quad A^{ck} \subset A^c$, отже $A \subset A^{ckc}$

(1_k) $\quad A^{ckk} \subset A^{ck}$, $\quad$ " $\quad A^{ckc} \subset A^{ckkc}$

(1_k) $\quad A^{ckkk} \subset A^{ckk}$, $\quad$ " $\quad A^{ckkc} \subset A^{ckkkc}$ і т. д.

Другу таблицю дістаємо з першої через підставлення A^c на місці A.

При помочі теорем III_k, 7_k і 8_k можна кожду множину, що повстала через приложення до неї скінченого числа операції A^c і A^k перетрансформувати ідентично на одну з множин, що містяться у таблицях. Отже нема инших множин типу A^σ крім сих, що їх находимо у таблицях.

Всі множини, що є у таблицях, є ріжні і нема між ними ніяких инших реляцій інклюзії, крім сих, що їх находимо у таблицях. Можна се легко провірити на множині M, що є сумою двох множин A_1 і A_2, які означиємо в наступний спосіб:

A_1 є якою небудь упорядкованою (bien ordonné) множиною типу $(\omega+1)^{\omega+1}$ зложеною з точок відтинка: $0 < x < 1$,

A_2 є ріжницею між відтинком: $1 < x < 2$ і якоюсь добре упорядкованою множиною типу $(\omega+1)^{\omega+1}$ зложеною з точок сего відтинка.

5. Доказом незалежности аксіомів I_k — III_k є наступна табеля:

$C = (a, b, c)$	I_k	II_k	III_k
$(O)^k =$	O	O	O
$(a)^k =$	(a)	O	O
$(b)^k =$	(b)	O	O
$(c)^k =$	(c)	O	O
$(a, b)^k =$	O	(a, b, c)	O
$(b, c)^k =$	O	(a, b, c)	O
$(c, a)^k =$	O	(a, b, c)	O
$(a, b, c)^k =$	(a, b, c)	(a, b, c)	O

Простір C є ту множина зложена з трох елементів: $C = (a, b, c)$. Під кождою аксіомою находимо такі дефініції усіх множин простору, що не є згідні з сею аксіомою, а згідні з иншими аксіомами.