Володимир Кучер.

О двійности в ґеометрії і фізиці.

I. О двійности в геометрії.

Поняття двійности є запозичене з ґеометрії, де означує воно правильну звязь тверджень, яка увидатнюється у тім, що на основі деяких замін понять можна твердження двійковим способом взаїмно підпорядкувати. Двійність може бути двояка, а саме — ґеометрична і метрична. Перша займається відношеннями положень в просторі, друга знов метрикою в просторі.

Для пізнання першої двійности вистарчить вказати на прості твердження звичайної ґеометрії простору, які взаїмно з себе виходять через заміну понять:

Точка $\rightarrow$ площа,
площа $\rightarrow$ точка,
проста $\rightarrow$ проста.

Наприклад: Дві точки визначують одну просту, а саме їх лучну. Двійне твердження: Дві площі визначують одну просту, а саме їх грану пересічи.

Дві прості, які переходять через одну точку, лежать в тій самій площі. Двійне твердження: Дві прості, що лежать в одній площі, мають одну спільну точку.

В тих судах поняття простої має значіння інваріянта.

Для вияснення двійности в метричнім пониманню можуть служити твердження сферичної триґонометрії і відповідні їм твердження гіперболічної ґеометрії. Як відомо, — з кождого твердження першої можна вивести твердження другої в сей спосіб, що дійсну вартість луча кулі r заступаємо уявною вартостю ir, або що на одно виходить, коли поміняємо звичайні кутові функції квотів $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ з гіперболічними функціями тих квотів.

І так: Твердженню достав сферичної триґонометрії:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha \tag{1}$$

відповідає в ґеометрії гіперболічної площі взір:

$$ch\frac{a}{r} = ch\frac{b}{r}ch\frac{c}{r} - sh\frac{b}{r}sh\frac{c}{r}\cos\alpha; \tag{1a}$$

взірцеви на поверхню сферичного трикутника:

$$p = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \tag{2}$$

відповідає в гіперболічній ґеометрії взір на поверхню трикутника:

$$p = r^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \tag{2a}$$

Уклад замін понять, який ту промощує перехід з одної ґрупи взорів до другої, є ось такий:

$$r \rightarrow ir$$

$$\begin{aligned} &\cos\frac{a}{r} \rightarrow ch\frac{a}{r}, \quad \cos\frac{b}{r} \rightarrow ch\frac{b}{r}, \quad \cos\frac{c}{r} \rightarrow ch\frac{c}{r}, \\ &\sin\frac{a}{r} \rightarrow -ish\frac{a}{r}, \quad \sin\frac{b}{r} \rightarrow -ish\frac{b}{r}, \quad \sin\frac{c}{r} \rightarrow -ish\frac{c}{r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Наведені вище приміри вказують, яку науково-теоретичну вартість має основа двійности. Вона передовсім упрощує галузь науки в сей спосіб, що розділює загал тверджень на дві великі ґрупи, собі взаїмно протиставлені. Лучником, що посередничить між обома ґрупами, є підпорядкування понять немов в роді якогось словника так, що знання понять одної ґрупи потягає за собою пізнання другої, о скільки стоять до розпорядимости поняття, які даються взаїмно підпорядковувати. Тому основа двійности є дійсно помічним середником, що веде до обєднання думання; можна її отже уважати льоґічно-економічною основою.

Хосен основи двійности виступає тим нагляднійше, чим ширший є обсяг судів, до яких її стосується. В наведених *вище випадках* основа двійности була лучником між судами одної і тої самої дисципліни — ґеометрії. Питання і висліди новіщої теоретичної фізики виказують, що основа двійности лучить також дві ріжні дисципліни, а саме фізику і ґеометрію.

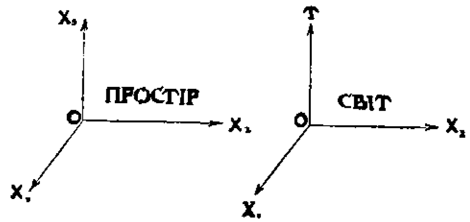
II. О двійности в ґеометрії і фізиці.

Праці Германа Мінковського показали нам дорогу, якою можна перейти з области фізикальних явищ в обсяг ґеометрії. А сею дорогою є чотиророзмірна ріжноманітність, утворена з трирозмірного простору і однорозмірного часу. Нагоду до сього кроку дала Мінковському електродинаміка тіл в русі, з якої опісля повстала спеціяльна теорія релятивноси А. Айнштайна. Остання, спираючись на клясичній основі релятивности і на постуляті постійности скорости світла, позволила відтворити „світ“ на чотиророзмірній ріжноманітности в евклідовій метриці. Ту по раз перший відкрито двійність між фізикальними і ґеометричними теоремами. Так відкрита двійність найшла згодом поширення і поглублення, коли Айнштайн розтягнув постулят рівноправности для опису законів природи на всі уклади віднесення, які можуть довільно порушатися відносно себе. А зробив він це в своїй загальній теорії релятивности, яка є рівночасно теорією ґравітації. Справа двійности між фізикальними а ґеометричними теоремами, яка виринула в спеціяльній теорії релятивности, виступила в загальній теорії релятивности ще яркійше. Розуміється, що не можна ту уживати метрики Евкліда; треба було закинути евклідову ґеометрію, а заступити її ріманівською ґеометрією. В загальній теорії релятивности маємо сю велику синтезу ґеометрії і фізики, яка представляє може найбільший крок вперед на дорозі до одноцільного пізнання природи. А при тій синтезі приходить до значіння в цілій повні економічний характер основи двійности.

A. Евклідова ґеометрія а світ спеціяльної теорії релятивности.

Трирозмірний простір є предметом евклідової ґеометрії. Кожда точка такого простору є все визначена трома числами, які її підпорядковуємо в обранім укладі віднесення; сі три числа називаємо сорядними простору. Фізикальні явища відбуваються в просторі і часі, тому до опису якоїсь події (події точкової) треба вже чотирох чисел, а саме: трох співрядних простору і співрядної часу. З тої причини говоримо, що загал всякого фізикального явища становить чотиророзмірну ріжноманітність, яку називаємо „світом“. Співрядні простору і співрядна часу творять разом „співрядні світа“.

Коли хочемо протиставити собі простір і світ, то показується як конечне є стиснути бодай одну простірну співрядну світа. Тоді світ буде складатися з дворозмірного простору (площі) і часу, так що відтворення його на трирозмірнім евклідовім просторі буде можливе. В такім разі можемо звичайному простірному прямокутному укладові віднесення (x_1, x_2, x_3) протиставити формально такий самий уклад, який, построєний з двох співрядних простору (x_1, x_2) і співрядної часу t, представлятиме наш трирозмірний світ (Рис. 1.).



(Рис, 1.)

Коли в укладі сорадних світа поведемо рівнобіжний переріз до площі (x_1, x_2) в якімсь означенім відступі, т. зн. для якогось означеного часу t, тоді поведена площа відтворює всі простірні відношення в хвилі t. Кождий такий переріз рівнобіжний до площі (x_1, x_2) подає відношення в просторі все в иншім часі t; творить він збір рівночасових відношень в просторі. Такі плоскі перерізи в густо стисненім слідуванню по собі, або инакше площу рівнобіжну до площі (x_1, x_2), що порушається здовж додатної оси часу, можемо обсервувати на екрані кождого кінематоґрафу.

Своєрідна природа трирозмірного евклідового простору має свій характер в означенню міри. Його основою є теорема Піта́ґора:

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad (4$$

яка в такім виді означає квадрат віддалення точки (x_1, x_2, x_3) від початку укладу співрядних. Найважнійша істотна прикмета цього означення міри полягає у тому, що величина відступу d не залежить від добору укладу співрядних. Коли виберемо довільно другий прямокутний уклад співрядних (x'_1, x'_2, x'_3) тоді:

$$d^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \qquad (4a$$

Говоримо отже, що пітаґорейська сума квадратів, яку можемо уважати характеристичною, основною формою метричного евклідового простору, є інваріянтом супроти пересунень і скручень укладу співрядних.

Питання, чи цього рода інваріянтне означення міри істнує у трирозмірнім світі, який що правда може бути відвзорований на трирозмірнім просторі, однак в дійсности є від нього зовсім ріжний. Як анальоґію до теореми Пітаґора для трирозмірного світа з погляду спеціяльної теорії релятивности маємо квадратову форму:

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2, \tag{6}$$

де c означає скорість світла. Форма (6) є інваріянтом кождої трансформації між двома укладами віднесення, які порушаються з огляду на себе рівномірно і простолінійно. Тому величину s можемо назвати „просторо-часовим відступом" світової точки (x_1, x_2, t) від початку укладу співрядних O.

Підпорядковуючи отже кождій точці світа означене, від укладу співрядних незалежне число s, т. зн. її просторо-часовий відступ від початку укладу сорядних O, робимо те саме, що зробив у трирозмірнім евклідовім просторі Пітаґорас, будуючи свою теорему. В сей спосіб творимо в світі метрику незалежну від укладу віднесення, а в ній уґрунтовуємо ґеометрію явищ природи. В творенню цьої ґеометрії нема ніякої довільности, бо дорогу до неї показали строгі досліди фактів природи.

Питома прикмета цього нового уняття природи світа полягає в тім, що ним вводимо фізику в область ґеометрії; тим самим промощуємо дорогу між обома дісциплінами, яка веде з ґеометричного простору в світ явищ природи і навпаки зі світа до простору; а вираженням сього є субституція:

$$x_3^2 = -c^2 t^2, \quad \text{або:} \quad x_3 = +ict, \tag{7}$$

яка перетворює основну метричну форму світа:

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2$$

на основну метричну форму трирозмірного евклідового простору:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Субституція (7) лучить обсяг ґеометрії з обсягом фізики і навпаки. Показує вона, що хотяй час t як такий є в істоті чужий для змінних простору, однак уявна величина $i c t$ має характер співрядної простору, подібно як x_1 і x_2.

Субституція (7) веде до взаїмної відповідности на переміну ґеометричних і фізикальних теорем та протиставить двійно просторови — світ. Завдяки їй можна отримати з чисто ґеометричних звязків фізикальні і навпаки кожда фізикальна правильність мусить відбиватися в такійже ґеометричній. Істнування двійности фізики і ґеометрії унаглядняють низше подані її приміри.

а) Евклідова площа (x_1, x_2) — двоpозмірний світ (x_1, t).

Ограничуємось поки-що до таких фізикальних явищ, які відбуваються тільки в однім вимірі, а передовсім в одній простій. Усуваємо отже ще одну співрядну (x_2), так, що світ зводимо до двоpозмірного твору (x_1, t) і можемо його відзорувати на плоскім укладі віднесення (x_1, x_2). Фундаментальна метрична форма цього світа буде:

$$x_1^2 - c^2 t^2, \tag{7}$$

яка через субституцію:

$$x_2 = \pm i c t \tag{9}$$

переходить в:

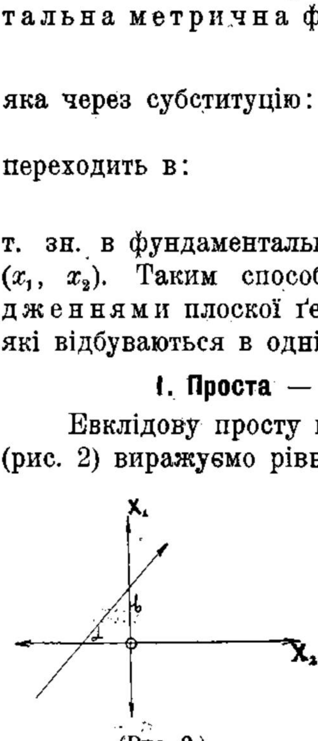
$$x_1^2 + x_2^2, \tag{10}$$

т. зн. в фундаментальну метричну форму евклідової площі (x_1, x_2). Таким способом буде можна висловлювати твердженнями плоскої ґеометрії — суди о фізикальних явищах, які відбуваються в одній простій.

I. Проста — рівномірний простолінійний рух.

Евклідову просту в прямокутнім укладі співрядних (x_1, x_2) (рис. 2) виражуємо рівнанням:

$$x_1 = x_2 \, tg\, \alpha + b. \tag{11}$$



(Рис. 2.)

Стосуючи субституцію

$$x_2 = \pm i c t$$

до рівнання простої, дістанемо в мові фізики:

$$x_1 = \pm i c\, tg\alpha\, t + b. \tag{12}$$

Дістали ми отже лінійну функцію часу t, яка визначує рівномірний рух, в данім випадку на співрядній X_1. Співчинник при t представляє скорість руху v. Таким способом дістаємо фізикальне значіння для ґеометричного поняття кута, а радше для його триґонометричної танґенти, помноженої уявною одиницею. Отже:

$$\left.\begin{aligned} v &= i\,c\,tg\alpha \\ tg\alpha &= \frac{v}{i\,c} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

або:

Підставивши останню вартість для $tg\alpha$ у взорі (12), тоді дістанемо просту двовимірного світа (x_1, t):

$$x_1 = \pm\, v\, t + b, \tag{12 a}$$

яка визначує рівномірний рух точки оживленої скоростю v в світі (x_1, t), де b означує відступ точки в часі $t = o$ від початку O укладу віднесення. Подвійний знак при v говорить, що рух точки може відбуватися або в додатнім або у відємнім напрямі оси X_1. Задержавши отже подвійний знак при субституції: $x_2 = \pm\, i\, c\, t$ бачимо, що кождій евклідовій простій відповідають у фізиці два рівномірні рухи з однаковою скоростю v, але в противних напрямах на оси X_1; при тім можемо ограничити для α інтервал: $0^0 < \alpha < 90^0$. Допустім натомість також відємні вартости для α, тоді для повного опису вистарчить брати:

$$x_2 = +\, i\, c\, t \tag{14}$$

З того виходить, що кождій простій відповідає тільки оден рівномірний рух на оси X_1, а всім простим з додатним наклоненням α відповідають рухи з додатними скоростями v в напрямі додатної оси X_1.

Завважмо дві прості з наклоненнями α' і α'', то на основі (13) і (14) преставляють вони два рівномірні простолінійні рухи зі скоростями v' і v'', а саме:

$$v' = i\,c\,tg\alpha',\ v'' = i\,c\,tg\alpha'', \tag{15}$$

з чого слідує:

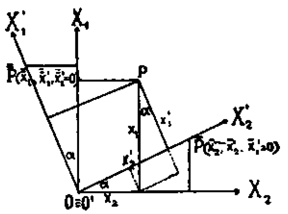
$$v' : v'' = tg\alpha' : tg\alpha''. \tag{15 a}$$

Скорости рухів є пропорційні до кутів наклонення.

2. Скрут укладу сорядних — трансформація Льоренца.

Возмім тепер під увагу скрут укладу співрядних около його початку O. Най α означає кут, о який скрутилася вісь X_2 в додатнім змислі.

Дістаємо отже знані взори (рис. 3):



(Рис. 3.)

$$x_1' = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha,$$
$$x_2' = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \tag{16}$$

Положім:

$$x_2 = i c t, \; x_2' = i c t',$$

і:

$$tang\, \alpha = \frac{v}{i c} = \frac{\beta}{i},$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, та визначім:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \; sin\alpha = \frac{\beta}{i \sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{17}$$

то підставивши ці виражіння в рівнання (16), дістанемо:

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta c t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \; i c t' = \frac{- i \beta x_1 + i c t}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

або:

$$x_1' = \frac{x_1 - v t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \; t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{18}$$

т. зн. трансформаційні взори Льоренца.

Спираючись на висновках попереднього уступу, пізнаємо зараз значіння останніх трансформаційних взорів. Викручена о кут α від оси X_2 — вісь X_2', представляє в фізикальному значінню рівномірний і простолінійний рух обсерватора зі скоростю v; він нотує свої обсервації в укладі віднесення (x_1', t). Трансформаційні взори промощують перехід від подуманого укладу віднесення в спочинку (x_1, t) до укладу, що порушається з релятивною скоростю v.

Звернути ту треба увагу ще на слідуючі обставини:

1) Трансформаційні взори (18) мають дійсну вартість під умовою, що:

$$\beta \leqq 1, \text{ або: } v < c, \tag{19}$$

т. зн. скорість світла c є в спеціяльній теорії релятивности нескінчено великою скоростю; від неї немає більшої скорости.

2) Для точки $\overline{\overline{P}}$ на оси X_1' (рис. 3), яку в рухомім укладі визначує в хвилі $t' = o$ ($x_2' = o$) відтинок $O'\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{x}}_1'$ умовленої міри, заходить реляція:

$$\overline{\overline{x}}_1{}' = \frac{\overline{\overline{x}}_1}{\cos \alpha} = \overline{\overline{x}}_1 \sqrt{1 - \beta^2} \tag{20}$$

Правда, що $\overline{\overline{x}}_1$ має таку саму довготу, що $\overline{\overline{x}}_1{}'$, однак беручи річ зі становиська спочинкового укладу в хвилі $t = o$ ($x_2 = o$), тоді рівнання (20) говорить, що довгота рухомої міри скоротилася у віднесенню до спочинкової довготи у відношенню $1:\sqrt{1-\beta^2}$; є це т. зв. контракція Льоренца.

3) Для точки $\overline{P}$ на оси $X_2{}'$ (рис. 3), в руховім укладі зазначує фізикально годинник, установлений в початку укладу ($x_1{}' = o$), якийсь інтервал часу t' — мірений від хвилі коінцеденції обох укладів. Співрядня часу рухомого укладу є:

$$\overline{x}_2{}' = \frac{\overline{x}_2}{\cos \alpha} = \overline{x}_2 \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{21}$$

або в мові фізики:

$$\overline{t'} = \overline{t} \sqrt{1 - \beta^2} \tag{21 a}$$

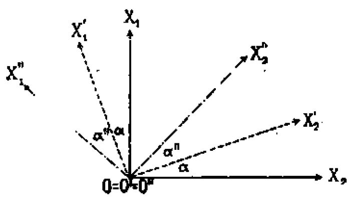
А що інтервали $\overline{t}$ і $\overline{t'}$, мірені годинником наставленим в початку спочинкового укладу ($x_1 = o$) є рівні, тому заключаємо з взору (21 а), що в наслідок вірномірного і простолінійного руху укладу зі скоростю v, хід годинника опізнюється в такій мірі, в якій скорочуються міри довготи.

3. Теорема додавання функції танґентів — теорема додавання скоростий.

Возмім під увагу три прямокутні уклади співрядних, викручені відносно себе около спільного початку $O = O' = O''$ (рис. 4). Теорема додавання функції танґентів:

$$tg\,(\alpha + \alpha') = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha'}{1 - tg\alpha\, tg\alpha'} \tag{22}$$

позваляє обчислити танґенту кута цілого скруту безпосередно з танґентів кутів поодиноких скрутів.



(Рис. 4.)

По мисли взору (13) маємо:

$$tg\alpha = \frac{v_1}{i\,c}, \quad tg\alpha' = \frac{v_{21}}{i\,c}, \quad tg\,(\alpha + \alpha') = \frac{v_2}{i\,c}, \tag{23}$$

де означують: v_1, v_2 скорости укладів (x_1', t'), (x_1'', t'') у віднесенню до укладу (x_1, t), а v_{21} скорість укладу (x_1'', t'') у віднесенню до укладу (x_1', t'). З (22) і (23) дістаємо:

$$v_2 = \frac{v_1 + v_{21}}{1 + \frac{v_1 v_{21}}{c^2}}; \tag{24}$$

а з того дальше дістаємо:

$$v_{21} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{24 a}$$

Є це **теорема додавання скоростей** спеціяльної теорії релятивности.

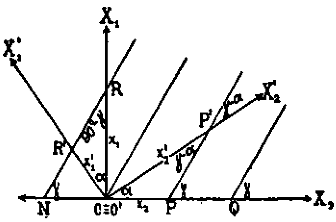
Коли підставимо в (24) $v_1 = c$, одержимо дуже дивний, вислід, а саме:

$$v_2 = \frac{c + v_{21}}{1 + \frac{v_{21}}{c}} = c. \tag{25}$$

Сей вислід дістали ми в попереднім уступі з льоренцової трансформації, а саме, що по думці спеціяльної теорії релятивности, ніяка скорість не може перевисшити скорости світла.

4. Сінусова теорема — ефект Доплєра.

Зауважмо прямокутні уклади співрядних (X_1, X_2) і (X_1', X_2') зі спільним початком $O = O'$; оси другого з них творять з вісями першого укладу кут α. Поведім дальше з початку укладів O і в точках P, Q, N рівновіддалені прості рівнобіжні, наклонені до X_2 під кутом γ (рис. 5).



(Рис. 5.)

З трикутника OPP' маємо звязь:

$$\frac{x_2}{x_2'} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma},$$

або:

$$\frac{x_2}{x_2'} = \cos \alpha \left(1 - \frac{tg\, \alpha}{tg\, \gamma}\right). \tag{26}$$

Підставивши:

$$tg\alpha = \frac{v}{ic}, \quad tg\gamma = \frac{w}{ic}, \tag{27}$$

дістаємо при застосуванню (14) і (17) двійне твердження фізики:

$$\frac{t}{t'} = \frac{1 - \frac{v}{w}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{28}$$

якого значіння заналізуємо.

Представмо собі якесь **періодичне** явище, хай би це був якийсь **тяг филь**, то обсерватор в початку укладу $O(x_1, t)$ запримітить, що **цей самий стан** буде знов повертати по упливі якогось відступу часу. Сей відступ часу T буде наворотом дрогання.

Глядач знов в початку рухомого укладу (x_1', t') визначить инший наворот дрогання T'.

Приймім, що **скорість розходження филі** в нерухомім укладі є w, то ґеометричний образ **світової лінії** наворотного стану представляє проста PP' наклонена під кутом γ до оси X'_2, а відтинок OP на оси X_2 є ґеометричним образом навороту дрогання T. Ця світова лінія перетинає ґеометричний образ **світової лінії глядача рухомого** укладу, отже вісь X_2', в точці P'. Відтинок $O'P' = x_2'$ є образом навороту дрогання T', який визначує глядач **рухомого** укладу.

Спираючись на відношенню часів реляції (28), маємо:

$$\frac{T}{T'} = \frac{1 - \frac{v}{w}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{28a}$$

Завважмо дальше, що маємо до діла з филями світла, тоді:

$$w = c, \tag{29}$$

а в такім разі:

$$\frac{T}{T'} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{30}$$

що подає **основу Допплєра** з погляду спеціяльної теорії релятивности. Заступаючи навороти T і T' частотами дрогання ν і ν', дістанемо:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{31}$$

Коли в тім рівнанню занедбаємо 2-ий степень дроба β, тоді дістанемо:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{v}{c}, \tag{31a}$$

знане виражіння на основу Допплєра з клясичної оптики.

Кожда з рівнобіжних в рівних відступах (рис. 5), поведедених до оси X_2 під кутом γ, є ґеометричним образом, як вище було згадане, світової лінії якогось означеного, все навертаючого стану руху; на примір можуть вони уявляти ґеометричні образи світових ліній всіх хребтів филї. В такім випадку ці рівнобіжні є ґеометричним образом тягу по собі наступаючих филь. Відтинки на оси X_2:

$$OP = ON = PQ = \qquad = x_2$$

дають ґеометричний образ навороту дрогання T.

Ця громада рівновіддалених рівнобіжних відтинає на оси X_1 і до неї рівнобіжних відтинки між собою рівні, величини $OR = x_1$, які треба уважати за ґеометричні образи довготи филї λ, коли x_2 є ґеометричним образом навороту T.

Сей спосіб розумування примінений до рухомого (викрученого) укладу веде до висновку, що як $O' P' = x_2'$ представляє ґеометричний образ навороту дрогання T', так відтинок $O' R' = x_1'$ є ґеометричним образом довготи филї λ' для глядача в рухомім укладі. В такім разі:

$$x_1 = \lambda, \; x_1' = \lambda'. \tag{32}$$

Коли застосуємо до трикутника $O R R'$ сінусове твердження, отримаємо:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \gamma},$$

або:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \cos \alpha \; (1 + tg\, \alpha \, tg\, \gamma). \tag{33}$$

Коли до останнього рівнання введемо взори (17) і (27), дістанемо таку фізикальну звязь:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{1 - \frac{v\,w}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \left(\text{де } : \beta = \frac{v}{c}\right). \tag{34}$$

або:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 - \frac{v\,w}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{34 a}$$

Принявши знов:

$$w = c,$$

дістаємо:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c}} \tag{35}$$

Занедбуючи другий і вищий степень дроба β, дістаємо знов знаний взір клясичної оптики:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 1 + \frac{v}{c}. \tag{36}$$

в) Евклідовий простір (x_1, x_2, x_3) — трирозмірний світ (x_1, x_3, t).

Варта звернути увагу ще на одну звязь в ґеометрії, яка веде до явища відклонення світляного луча в наслідок релятивного руху глядача.

Підпорядкуймо в евклідовім просторі (x_1, x_2, x_3) співрядній X_2 — вісь часу t трирозмірного світа (x_1, x_3, t), тоді на основі субституції (14) маємо:

$$x_2 = i\,c\,t.$$

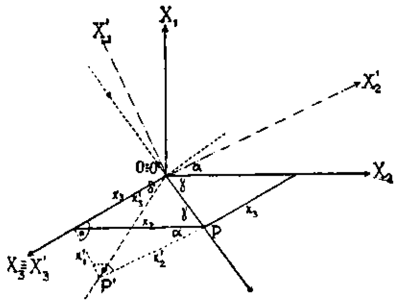
Відношення площі (x_1, x_3) простору переносяться безпосередно на площу (x_1, x_3) світа, яка представляє поле фізикальних явищ; площі (x_1, x_2) і (x_3, x_2) задержають свою роль як в просторі (x_1, x_2, x_3). З огляду на визначення оси X_2 субституцією (14), має з тої причини наш евклідовий простір бігуновий характер.

Скрутім дальше уклад співрядних (x_1, x_2, x_3) (рис. 6.) о кут α в додатнім напрямі около X_3 як оси скруту; отримаємо уклад співрядних

$$(x_1', x_2', x_3'),$$

в якім:

$$x_3' \equiv x_3. \tag{37}$$



(Рис. 6.)

А дальше поведім в площі (x_2, x_3) просту $O P$ під кутом γ до оси X_2; мет її на площу (x_1', x_3') є проста $O' P'$ (рис. 6.), наклонена до оси X_3 під кутом δ. З рисунку 6. маємо:

$$x_2 = x_3 \ ctg\,\gamma \tag{38}$$

і:

$$x_1' = x_2 \ sin\,\alpha = x_3 \ tg\delta, \tag{39}$$

з чого:

$$tg\delta = sin\,\alpha \ ctg\,\gamma. \tag{40}$$

Для фізикальної інтерпретації положім як передше в (13):

$$tg\,\alpha = \frac{v}{i c}, \ tg\,\gamma = \frac{w}{i c}, \tag{41}$$

тоді з огляду на (17) дістанемо:

$$tg\,\delta = \frac{v}{i c \sqrt{1 - \beta^2}} \ \frac{i c}{w}$$

або:

$$tg\,\delta = \frac{v}{w \sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{42}$$

де $\beta = \frac{v}{c}$.

В інтерпретації фізики скрут укладу співрядних (x_1, x_2, x_3) около X_3 як оси о кут α означає після (41) **рівномірний поступний рух** площі (x_1, x_3) в напрямі оси X_1 з релятивною скоростю v. Проста $O P$ є знов ґеометричним образом світової лінії **проміння світла** в додатнім напрямі оси X_3, а кут її наклонення γ до оси X_2 означає після (41) **скорість світла** w, яка в порожнім просторі є:

$$w = c. \tag{43}$$

Така буде інтерпретація світляного явища глядача, що обсервує перебіг явища в початку укладу O у світі (x_1, x_3, t).

Приймім, що в хвилі появи проміння світла початок рухомого укладу O' покривався з початком нерухомого укладу O. Глядач, що находиться в початку O' укладу рухомого заобсервує в світі (x_1', x_3', t) напрям проміння світла як мет його світової лінії на площу (x_1', x_3') в напрямі оси часу T; є це, як знаємо, проста $O' P'$; вона визначує напрям світляного проміння, поміченого глядачем рухомого укладу. Напрям його замикає з напрямом проміння нерухомого укладу, т. зн. осею X_3 кут δ, який означуємо як кут аберрації. Коли у взорі (42) застосуємо реляцію (43), дістанемо для кута аберрації δ:

$$tg\,\delta = \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{44}$$

або з огляду на (17):

$$\sin\delta = \beta, \tag{44 a}$$

де: $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Пропускаючи β^2 як дуже малий дріб, дістаємо:

$$tg\,\delta = \beta = \frac{v}{c}, \tag{45}$$

взір добре знаний з клясичної оптики.

В. Неевклідова ґеометрія а світ загальної теорії релятивности.

Відвзорування світа матеріяльної точки в спочинку на оборотовій поверхні.

Зауважмо світ матеріяльної нерухомої точки і обмежім його знов до двох розмірів; в такім разі маємо в нім до діла з одноромірними явищами, отже з радіяльним рухом в поли ділання матеріяльної точки. Для визначення міри сього дворозмірного світа не буде вже можна ужити метричної основної форми (8) евклідової ґеометрії, якою послугується спеціяльна теорія релятивности. Але є можливе відвзорувати такий дворозмірний світ на кривій поверхні в трирозмірнім евклідовім просторі. Тоді кождому законови фізики мусить відповідати твердження, яке належить до ґеометрії тої кривої поверхні. Тому необхідним показується, зазнайомитися з ґеометрією такої кривої поверхні, щоби послугуючись двійнуванням дійти до фізикальної правильности.

Вже Ґавсс в своїй „теорії поверхні“ (Flächentheorie) опрацював зовсім загально ґеометрію на довільній кривій поверхні. В сей спосіб подав він основу метрики кривих поверхний, якої висловом є квадрантна ріжничкова форма:

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2\, g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2; \tag{46}$$

вона заступає пітаґорейську теорему евклідової площі. Квадрат елементу лука ds є функцією dx_1 і dx_2 а також представляє місцеву функцію, о скільки співчинники g_{11}, g_{12}, g_{22} є функціями x_1 і x_2.

Возьмім як примір оборотову поверхню (що в дальших уступах використаємо). Най ϱ означає радіяльну співрядну, змірену прямово до оборотової оси, z — співрядну в напрямі оборотової оси (вісь Z), а φ — кут, який рахуємо від якогось означеного зерового полуденника. Тоді в загальній формі рівнання кривої полуденника виглядає:

$$z = f(\varrho), \tag{47}$$

а квадрат лука (46) приймає знаний вид:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2\right] d\varrho^2 + \varrho^2\, d\varphi^2. \tag{48}$$

Вернім знов до питання поля матеріяльної точки. Стосуючи звичайні співрядні бігунові: r, ϑ, ψ і час t для визначення квадрату лінійного елементу світа для масового осередка в спочинку, дістанемо по думці загальної теорії релятивности:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2\,(d\,\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\,\psi) - c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2\ ^{1)}, \tag{49}$$

де α означає промінь ґравітаційного ділання поля; він є звязаний з масою m клясичної динаміки реляцією:

$$\alpha = 2\,\frac{km}{c^2} = 1{\cdot}48.10^{-28}\, m\ ^{2)}, \tag{50}$$

---

1) H. Bauer: Matemat. Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins nebst u. s. w. 1922. S. 54. 62.

2) Ibidem, pp. 60.

де співчинник $k = 6{\cdot}68.10^{-8}\ cm^2\ gr^{-1}\ sec^{-2}$, означає ґравітаційну постійну, а $c = 3.10^{10}\ cm\ sec^{-1}$, скорість світла.

Для явищ, які відбуваються тільки в радіяльнім напрямі, треба у рінанню (49) положити:

$$d\vartheta = d\psi = o,$$

тоді дістанемо:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2, \tag{49 a}$$

як визначення міри для дворозмірного світа масової точки.

Застосуймо дальше трансформацію:

$$\varphi = i\,t, \tag{51}$$

анальоґічну до трансформації (7) Мінковського, тоді (49 а) переходить в квадрат лінійного елементу кривої поверхні в трирозміровім просторі Евкліда, а саме:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) d\varphi^2. \tag{52}$$

Згадану криву поверхню можна легко відвзорувати на оборотовій поверхні особлившого рода.

В такім випадку треба приняти:

$$\varrho = c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}, \tag{53}$$

або:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \frac{\varrho^2}{c^2},$$

і утворити:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{\alpha c}{2 r^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

або:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{c^2}{2\alpha\varrho}\left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^2 \tag{54}$$

Підставивши одержані звязки (53) і (54) в (52), дістаємо (52) у виді подібнім як (48), а саме:

$$ds^2 = \frac{4\alpha^2\, d\varrho^2}{c^2 \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4} + \varrho^2\, d\varphi^2. \tag{55}$$

З порівнання (55) з (48) виходить ріжничкове рівнання для полуденникової кривої $z = f(\varrho)$ таке:

$$1 + \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{4\,\alpha^2}{c^2\left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4} = \frac{4\,r^4}{\alpha^2\,c^2}, \tag{56}$$

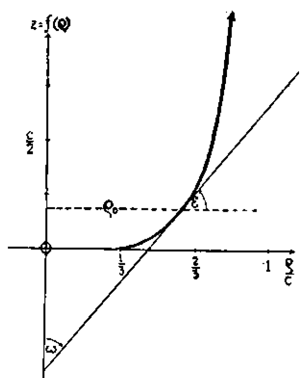
або:

$$\frac{df}{dt} = \pm \frac{\sqrt{4\,\frac{\alpha^2}{c^2} - \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4}}{\left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{4\,r^2 - \alpha^2\,c^2}}{\alpha\,c}. \tag{56a}$$

Зі звязків (53) і (56а) слідує, що тільки в області

$$c \geqq \varrho \geqq c\sqrt{1 - \sqrt{\frac{2\,\alpha}{c}}} \tag{57}$$

полуденникова крива приймає дійсні вартости. (Рис. 7.) представляє образ такої кривої для $\frac{\alpha}{c} = \frac{32}{81}$.



(Рис. 7.)

Приклади до двійности геометрії та фізики.

1. Ґеодетичні лінії на оборотовій поверхні — радіальний рух в полі масової точки.

З теорії поверхней знаємо для ґеодетичних ліній оборотової поверхні ріжничкове рівнання[1]):

[1]) H. Bauer, l. c. pp. 17 і 18.

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho}{K}\sqrt{\frac{\varrho^2 - K^2}{1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2}}, \tag{58}$$

де K означає постійну інтеґрування.

Означім луковий елемент полуденникової кривої ds_m і порівнаймо звязки (52) і (48), то виходить, що:

$$ds_m = d\varrho\sqrt{1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}. \tag{59}$$

В такім разі звязь (58) можна написати у виді:

$$\frac{ds_m}{d\varphi} = \frac{\varrho}{K}\sqrt{\varrho^2 - K^2}. \tag{60}$$

При помочи взорів (51) і (53) переводимо рівнання для ґеодетичної лінії оборотової поверхні на мову фізики, а саме дістанемо:

$$\frac{ds_m}{dt} = \frac{i\,c}{K}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\ \sqrt{c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - K^2}. \tag{61}$$

Елемент ds_m означає також елемент дороги в радіяльнім напрямі, отже відношення $\frac{ds_m}{dt}$ представляє скорість руху v в радіяльнім напрямі, якої виразом є:

$$v = -\frac{c}{K}\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left[K^2 - c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\right]}. \tag{62}$$

В нескінченнім віддаленню від масової точки, т. зн. для $\lim v = \infty$ маємо:

$$v_\infty = -\frac{c}{K}\sqrt{K^2 - c^2}.$$

або:

$$K = -\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}}. \tag{63}$$

Підставивши так визначену відємну вартість для K у (62), отримаємо:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}\right)\right]}, \tag{64}$$

або:

$$v = c \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{v_\infty^2}{c^2} - \frac{\alpha\, v_\infty^2}{r\, c^2}\right)}\,. \qquad (64\,\text{a})$$

Пропускаючи виличини, зложені з $\frac{\alpha^2}{r^2}$ і здобутка $\frac{\alpha}{r}$ і $\frac{v_\infty^2}{c^2}$ як нескінчено малі, дістанемо з (64 a) вартіст для v в першім приближенню:

$$v = c \sqrt{\frac{\alpha}{r} + \frac{v_r^2}{c^2}} \qquad (65)$$

Піднесім останнє вираження до квадрату і поділім на 2, дістанемо:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha\, c^2}{2\, r} = \frac{v_\infty^2}{2} = W\ (const), \qquad (65\,\text{a})$$

т. зн. **вираження енерґії клясичної** механіки; другий член (65 a) представляє після (50):

$$-\frac{\alpha\, c^2}{2\, r} = K \frac{m}{r} = V, \qquad (65)$$

т. є. **ґравітаційний потенціял** Нютона. В такім разі (65 a) приймає вид:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_\infty^2}{2} = V. \qquad (65\,\text{в})$$

Визначім дальше **ґравітаційне прискорення** γ. З огляду на (59) і (64 a) маємо:

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}\quad \frac{ds_m}{dt} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\, \frac{d(v^2)}{dr} \qquad (67)$$

а дальше:

$$\gamma = -\frac{\alpha\, c^2}{2\, r^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{2\,\alpha}{r} - \frac{2\, v_\infty^2}{c^2} + \frac{2\,\alpha\, v_\infty^2}{r\, c^2}\right). \qquad (68)$$

Абстрагуючи від знаку і стосуючи (50), дістанемо з останнього рівнання в **першім приближенню нютонівську** вартість прискорення тяготіння:

$$g = \frac{\alpha\, c^2}{2\, r^2} = k\,\frac{m}{r^2}\,. \qquad (69)$$

2. Стіжок стичности на рівнобіжнику оборотової поверхні — однородне поле тяготіння.

а) Sinus половини кута стіжка стичности — прискорення тяготіння Нютона.

Зауважмо **оборотовий стіжок**, виставлений на рівнобіжнику оборотової поверхні $z = f(\varrho)$, якого промінь виносить:

$$\varrho_0 = c\sqrt{2 - \frac{a}{r_0}}, \tag{70}$$

тоді для нього маємо:

$$\frac{df}{d\varrho} = const.$$

Означім дальше 2ω як кут осевого перерізу стіжка, тоді дістанемо звязь, яку бачимо на (рис. 7.), а саме:

$$\frac{df}{d\varrho} = tg\,\varepsilon = tg\,\omega; \tag{71}$$

з того знов дістанемо:

$$1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2 = 1 + ctg^2\,\omega = \frac{1}{sin^2\,\omega}. \tag{71a}$$

Коли в рівнанню (56) напишемо r_0 місто r [стосовно до (70)] і порівнаємо його з (71 a), тоді отримаємо:

$$\frac{1}{sin\,\omega} = \frac{2\,r_0^2}{a\,c}$$

або:

$$sin\,\omega = \frac{a\,c}{2\,r_0^2}. \tag{72}$$

Порівнуючи знов (72) з (69), маємо:

$$g = c\,sin\,\omega, \tag{73}$$

т. зн. sinus половини **кута** стіжка стичности, є **пропорційний до прискорення тяготіння** g Нютона в **одроднім** поли.

б) Ґеодетичні лінії оборотового стіжка — свобідне падання.

Ріжничкове рівнання **ґеодетичних ліній** стичного стіжка виходить з взору (58) при застосуванню звязку (71 a), отже:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho\,sin\,\omega}{K}\sqrt{\varrho^2 - K}, \tag{74}$$

або:

$$\frac{K}{\varrho^2 \sqrt{1 - \frac{K^2}{\varrho^2}}} = \sin \omega \, d\varphi. \tag{74 a}$$

По з'інтеґруванню отримаємо:

$$(\varphi - \varphi_0) \sin \omega = \arccos \frac{K}{\varrho}, \tag{75}$$

або:

$$\varrho \cos [(\varphi - \varphi_0) \sin \omega] = K, \tag{75 a}$$

де φ_0 є постійною інтеґрування. Коли заложимо, що для $\varphi = \varphi_0$ приймає вартість $\varrho = \varrho_0$, то в такім разі:

$$K = \varrho_0. \tag{76}$$

Рівнання (75 а) приймає тоді вид:

$$\varrho \cos [(\varphi - \varphi_0) \sin \omega] = \varrho_0. \tag{77}$$

Коли до останнього рівнання введемо взір трансформаційний:

$$\varphi_0 = i t_0 \tag{78}$$

і застосуємо попередні взори (53), (70) і (73), тоді (77) напишемо у виді:

$$\sqrt{1 - \frac{2 g r_0}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2 g r_0^2}{c^2 r}} \cos \left[i (t - t_0) \frac{g}{c} \right]. \tag{79}$$

Знаючи однак, що:

$$\cos i x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

можемо (79) написати також у виді:

$$\sqrt{1 - \frac{2 g r_0}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2 g r_0^2}{c^2 r^2}} \left[e^{\frac{g}{c}(t - t_0)} + e^{-\frac{g}{c}(t - t_0)} \right]. \tag{80}$$

Отримане рівнання визначує нам **рух матеріяльної точки в однороднім поли тяготіння** з нютонівським прискоренням з погляду **загальної теорії релятивности** є це **релятивістичне** представлення **свобідного падання**. r_0 є ту відступом (і то дуже великим) вихідної точки руху від маси, що витворює поле; отже:

$$r_0 - r = s << r_0 \tag{81}$$

означає в **першім приближенню дорогу**, відбуту **свобідним паданням**.

В кінці звернім ще увагу на перехід до клясичної фізики. Дістанемо се, коли $\frac{g}{c}$ і $\frac{s}{r_0}$ уважатимемо як малі величини першого ряду і обчислимо (80) з огляду на (81) в першім приближенню; тоді найдемо:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{r_0 - s} \backsim 1 + \frac{s}{r_0}. \tag{82}$$

Положім дальше для упрощення:

$$t_0 = 0, \tag{83}$$

тоді з (80) дістанемо:

$$1 - \frac{g\, r_0}{c^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{g\, r_0}{c^2}\left(1 + \frac{s}{r_0}\right)\right]\left(2 + \frac{g^2}{c^2} t^2\right),$$

або:

$$1 - \frac{g\, r_0}{c^2} = 1 - \frac{g\, r_0}{c^2} - \frac{g}{c^2} s + \frac{g^2}{2\, c^2} t^2$$

та наконець:

$$s = \frac{g}{2} t^2, \tag{84}$$

т. зн. знаний взір на дорогу свобідного падання клясичної механіки.

У Львові, в травні 1928 р.