

# ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XXVII.

РЕДАГУЄ

ПРЕЗІДІЯ СЕКЦІЇ.

---

# SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XXVII.

REDIGIERT VOM

PRÄSIDIUM DER SEKTION.

---

У ЛЬВОВІ, 1928.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

## ЗМІСТ. — INHALT.

	СТОР.
1. <i>Р. Цегельський</i> : Д-р Іван Пулуж як науковий дослідник ( <i>R. Czehelskyj</i> : D-r Johann Puluj als wissenschaftlicher Forscher)	1—28
2. <i>Н. Гаморак</i> : Новий тип транспірографа ( <i>N. Hamorak</i> : Ein neuer Transpirograph)	29—36
3. <i>О. Смакула</i> : До фосфоризації алькалевих гальоїдів ( <i>A. Smakula</i> : Zur Phosphoreszenz der alkalischen Hal- loide)	37—44
4. <i>Ж. Левіцкй</i> : La spirale logarithmique et sa développante	45—48
5. <i>Ю. Гургула</i> : Окремий випадок циклоїдальних кривих. Слимаковата лінія ( <i>J. Gurgula</i> : Ein besonderer Fall der cycloidalen Kurven)	49—78
6. <i>С. Д. Чорний</i> : Формули довготи періастра та ексцентрич- ности орбіти затемнюваних змінних зір типу $\beta$ Lyrae ( <i>S. D. Tschornny</i> : Formulae of the longitude of peria- stron and of eccentricity of the orbits of the eclipsing variable $\beta$ Lyrae-Stars)	79—81
7. <i>К. Танчаківський</i> : Поляризація ртутьних електрод в роз- чинах ртутьних солей ( <i>K. Tančakivskyj</i> : Electrolysis of the solutions of mercurous salts with the mercury dropping kathode)	83—99
8. <i>П. Герасименко</i> : Поляризація сталих ртутьних електрод в розчинах ртутьних солей ( <i>P. Herasymenko</i> : Electric Polarisation of Mercury Kathodes in Solutions of Mer- curous Salts)	101—113
9. <i>М. Кравчук</i> : Про збіжність деяких ступанкових дробів ( <i>M. Krawtchouk</i> : Sur la convergence des certaines frac- tions continues)	115—128
10. <i>М. Кравчук</i> : Замітка про контурні інтеграли ( <i>M. Kraw- tchouk</i> : Sur les integrales curvilignes)	129—131
11. <i>Ю. Русов</i> : Бовова мускулятура риб деяких етологічних типів ( <i>G. Rousoff</i> : Sur la musculature des poissons de différents types ethologiques)	133—214

12. *N. Kryloff et N. Bogoliouboff*: Sur quelques critères concernant l'existence dérivées d'une fonctions d'une variable réelle 215—221
13. *B. Куцер*: О двійности в геометрії і фізиці (*W. Kučer*: Das Dualitätsprinzip in der Geometrie und Physik) 223—245
14. *М. Заруцький*: Похідна і когеренція абстрактної величини (*M. Zaryckyj*: Die Derivierte und die Kohärenz der abstrakten Grösse) 247—259
15. *Р. Цегельський*: Про українську хемічну термінологію (*R. Cehelskyj*: Über die ukrainisch chemische Terminologie) . 261—270

Др. Роман Цегельський (Львів).



## Др. Іван Пулюй як науковий дослідник.

(В десятиліття його смерті).

Вже небаром добігає десять літ від хвили, як заснув вічним сном великий український вчений, знаний із своєї наукової діяльності більше чужим, як своїм, — др. Іван Пулюй, професор німецької техніки в Празі. Імя його було свого часу, головню в останніх двох десятках літ девятнадцятого і на початку двадцятото століття, знане широким кругам фізиків та електротехніків середньої і західньої Європи, а ще і тепер, хоч фізика пішла сильно вперед у всіх своїх ділянках від часів діяльності Пулюя, цитують його праці,<sup>1)</sup> а великі підручники фізики покликаються на його досліди. Належить ще згадати, що він сконструував кільканадцять приладів власного помислу, котрі прикрашають тепер музей „Conservatoire National des Arts et Mé-tiers“ в Парижі, „Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik“ в Монахові та німецький університет в Празі, зладив перші найкращі фотографічні знимки при помочи евакуованих скляних рурок власної конструкції сейчас після відкриття Рентгена, одержав за свої прилади медалі на кількох виставах, між иншим на всесвітніх виставах в Парижі 1878 і 1881 рр. та патенти за свої винаходи в Австрії та за кордоном. Його прилади ще і тепер реклямують великі фабрики фізикальних приладів у Німеччині та Австрії.

Одначе серед нашої суспільности не знали Пулюя з наукового боку тому, що ділянка стислих наук лежала у нас до не-

<sup>1)</sup> Гл. н. пр. Erich Pietsch, „Gasabsorption unter dem Einfluß der elektrischen Entladung — clean up — und verwandte Erscheinungen“. (Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Berlin. V. 1926, стр. 217), де зацитована праця Пулюя „Strahlende Elektrodenmaterie“.

давня облогом, за те знали у нас Пулюя як співробітника Куліша при перекладах св. Письма на українську мову та як громадського діяча, що не лише стежив пильно з далекої Праги за всіма подіями на Рідній Землі, але також активно боровся у важких хвилях за права українського народу, як н. пр. против царського указу з 1876 р., що закнеблював був уста українського народу на Великій Україні на яких 30 літ, за українську мову в церкві та за український університет у Львові і з великим запалом виступав в часі всесвітньої війни за утворенням самостійної Української Держави.

Але не є нашою метою займатися громадською діяльністю Пулюя; в сій праці ходить лише о те, щоби приглянутися його науковій чинности. В тій цілі необхідно познакомитися з життяписю його тому, що перебіг його життя вирив сильне пятно на його науковій діяльності. Ся задача є о стільки облекшена, що Пулюю лишив по собі дуже докладну автобіографію, доведену до 1906 р., але ще досі не опубліковану, а крім того вже була друкована його біографія в альбумі Екштайна „Geistige Welt“ і в альманаху віденської „Січи“ з 1908 р.

Іван Пулюї уродився 2. лютого 1845 р. в Грималові в Галичині, де його батько був заможним міщанином, а в рр. 1861—65 посадником міста. До гімназії ходив в Тернополі і скінчив там свої науки 1865 р. За часів польського повстання 1863 р., коли також Українці почали думати, чиї вони діти, заложив в Тернополі громаду, до котрої належали між иньшими його приятель Володимир Ганкевич, Андрій Січинський, три брати Барвінські, Михайло Борисікевич (пізн. проф. університету) і Іван Герасимович, всі вже покійні. Отся громада мала на цілі познакомлювати своїх членів з українською історією та літературою, розширювати та піддержувати національну свідомість і підпирати літературну часопись „Мету“, що виходила у Львові під редакцією Ксенофонта Климовича до 1865 р.

Скінчивши гімназію, пішов Пулюї до Відня, де записався на теологію і був прийнятий до гр. кат. семинара, званого „Vagabund“, який розв'язано 1893 р. Попри теологічні виклади слухав також викладів математики, фізики, механіки і астрономії на філософічному факультеті та вважав науку найбільшим добром для себе так, що через математичні і фізичні виклади дуже часто і не обідав вкупі із семинаристами.

В часі університетських студій заснував Пулюї 1865 р. товариство українських богословів, до котрого належали спершу

самі семинаристи з Галичини. Згодом пристали до нього і світські академики. В 1868 р. рішила молодь заснувати явне товариство „Січ“, котрого першим кошовим був пок. проф. Наталь Вахнянин. Вже в тім часі перекладав Пулюй на українську мову геометрію для українських гімназій, хоч їх ще не було, і молитовник для українського народу. Тоді серед української суспільности в Галичині верховодили москвофіли, що ґрупувалися біля крилошан при св. Юрі. Відси називано їх „святоюрцями“. Вони мали у своїх руках „Народній Дім“, „Ставропілітський Інститут“, „Галицько-Руську Матицю“ та гр. кат. духовні семинарі у Львові, Перемишлі таї у Відні, не допускали свідомих Українців до сих інституцій, оклеветували їх перед суспільністю як польонофілів та ішли на руку московським об'єдинителям, що почали були на Великій Україні переслідувати український рух. В ілюстрованій сатиричній газеті „Страхопудь“, що виходила тоді у Відні під опікою духовника російської амбасад Равського, підносили галицькі москвофіли на сміх „хлопську мову“ і подавали ніби переклади молитов, добираючи самі прості слова. Як раз той насміх причинився до того, що Пулюй задумав видати молитовник на рідній мові.

Тоді вже піднялася була серед нашої суспільности реакція против москвофільської „тарабарщини“, якою святоюрці писали і якою навіть вчили у школах на годинах української мови. Сю реакцію скріпили ще і твори Шевченка, що ширилися з рук до рук та навівали любов до свого рідного народа і краю. По гімназіях, духовних семинарах і на університетах повставали українські громади для плекання рідного слова. а у Львові часописи: „Вечерниці“, „Мета“ і „Правда“. В тій організаційній праці шістдесятих років 19. ст. брав Пулюй живу участь. Він познакомився 1869 р. з Кулішем, що в ті часи був головним подвижником літературного руху на Великій Україні. Куліш стратив був урядову посаду у Варшаві за те, що не хотів виректися українства, і приїхав на весні 1869 р. до Відня. Пулюй був очарований незвичайно широким світоглядом Куліша, а ще більше його великою щирістю до літературного діла в Галичині. Вони розговорювали про національні справи у Галичині і на Великій Україні, про переклади св. Письма, над котрим Куліш вже працював, і про потребу народнього молитовника. Тоді то зготував був Пулюй невеличкий молитовник для вояків-Українців, що був відрукуваний 1869 р. у Відні заходом о. Доніна, крилошанина при храмі св. Стефана у Відні, а потім викінчив біль-

ший молитовник в українській мові та передав рукопис його новоіменованому митрополитови Йосифови Сембратовичеві, складаючи йому ґратуляцію в імені академічної молоді у Відні. Митрополит обіцяв Пулюві, що дасть апробату молитовника, але опісля, вернувши до Львова, — під впливом тодішнього голови святоюрців крилош. Малиновського відмовив апробати і дозволив на спалення рукопису „по праву канонічеському“. З приводу тої події і листу Малиновського до ректора гр. кат. семинара у Відні видрукував Пулюю у Відні 1871 р. брошуру п. з. „Лист без коверти“, написав новий молитовник і видав його 1871 р. у Відні за позичені гроші.

Того самого року працював Пулюю разом з Кулішем, що замешкав з жінкою у Відні, над перекладом св. Письма на українську мову. Праця ішла дуже поволі, хоч оба працювали від рана до вечера, і Пулюю покинув був навіть на якийсь час університетські студії, щоби роботу приспішити, а по виїзді Кулішевої замешкав разом з Кулішем в одній кімнаті та жертвував весь свій час для перекладу. В маю 1871 р. був вже готовий переклад св. Письма Нового Завіта до першого соборного листа апост. Петра, гол. I. 16 і небаром потім видрукували Пулюю і Куліш переклади всіх чотирох евангелій у Відні. Опісля, перетомлені працею, роз'їхалися: Куліш у свою Мотронівку, а Пулюю до Грималова до родичів. В Грималові переклав Пулюю листи апостолів Петра, Йоанна і Юди та обявлення Йоанна Богослова і післав рукопис Кулішеви 9. серпня 1871 р. Видрукувати цілий „Новий Завіт“ пощастилося аж 1881 р. в друкарні Товариства ім. Шевченка у Львові, але на Велику Україну не наїшло св. Письмо вступу ізза указу з 18. мая 1876 р., хоч Пулюю робив заходи в Головнім Управленію по ділам печати в Петербурзі.<sup>1)</sup> В Галичині також не поширилося завдяки злегковаженню його Галичанами, як нарікає Пулюю у своїй автобіографії. Так перележало воно на складах до 1885 р. і тоді удалося Пулюві за дозволом Куліша продати наклад „Нового Завіта“ британському біблійному Товариству у Лондоні та поплатити довги за друк молитовника з 1871 р. і Нового Завіта 1881 р. Пулюю переписувався з Кулішем до 1886 р. і остав вірний йому та боронив його навіть тоді, коли Українці відсахнулися були від Куліша за його „Історію Возсєдиненія Руси“ і за його критику Шевченка. Одначе приязнь їх урвалася і Куліш ізза якоїсь маловажної справи чув жаль до Пулюя, вже не зближався до нього та помер 2. лютого

<sup>1)</sup> Тепер Ленінград.

1897 р. Пулюй був двічі на Великій Україні в 1878 р. і 1880 р. та гостював за першим разом у Івана Білозерського, а другим разом у Кулішів і Александрова в Харкові. По смерті Куліша навязав Пулюй переговори з Кулішевою і репрезентантом британського біблійного товариства Мілярдом у Відні в справі видання перекладу Старого Завіта, зладженого в більшій часті Кулішем. До помочи запросив Івана Нечуя Левицького, котрий перевів четвертину Старого Завіту; сам зладив переклад „Псалмів“ і зредагував переклад Куліша, виправляючи деякі недогляди та недостачі. Се було 1903 р. Ціле св. Письмо вийшло з друку 1904 р. До перекладу св. Письма на українську мову прикладав Пулюй велику вагу. Він займався сею справою через яких 35 літ свого найкращого віку, не зважаючи на те, що був обтяжений науковою та иньшою працею, та порівнує у своїй автобіографії значіння появи українського св. Письма зі значінням перекладу Біблії Лютра для німецького народу.

По видрукуванню цілого св. Письма поновив Пулюй заходи в Головному Управленію по ділам печати в Петербурзі та в петербурській Академії Наук, щоби виднати дозвіл на висилку св. Письма до Росії, але йому відмовлено. Так само університети в Петербурзі, Києві і Харкові не прийняли його до своїх бібліотек. Дня 12. лютого 1905 р. вислав був Пулюй меморіал в обороні українського слова до президента комісії для цензурних законів Кобека і лист з проською о дозвіл поширити українські Псалтирі між раненими і недужими жовнірами-Українцями, учасниками російсько-японської війни. Але ці заходи були даремні тоді, як японський генерал Ноґі на просьбу Пулюя дозволив розширяти св. Письмо в українській мові між жовнірами-Українцями, що з російським військом попали в японський полон.

Після сього екскурзу, що кидає ярке світло на характеристику особи Пулюя, займемося дальше перебігом його студій, наукової кар'єри та оглядом наукової діяльності. З великим ентузіазмом відносився він до природних наук, а головно до фізики і електротехніки. „Колиб я“, пише він у автобіографії, „мав ще раз починати жити і працювати, то не вибрав би иньших наук, як природні. Ту вічні закони і непохитна правда“. Тому не дивно, що Пулюй, скінчивши 1869 р. теологію, не висвячувався, але, не зважаючи на горячі просьби матери, що боялася, чи з дальших студій що вийде, поїхав знов до Відня, де спершу бідував, а опісля удержувався зі стипендії та з лекцій.

В 1872 р. зробив іспит на гімназіяльного учителя матема-

тики і фізики та займався науковими дослідками у фізикальному інституті проф. Лянґа у Відні. В 1874 р. був асистентом для фізики і механіки в ц. к. морській академії у Фюме у проф. Штальберґера, де на його пропозицію припоручено Пулюєві викладати теорію тепла. При сій нагоді зладив Пулюй свій славний прилад до поміру механічного рівноважника тепла. По смерті Штальберґера був через один рік суплєвтом для вище згаданих предметів.

В 1875 р. дістав від міністерства освіти стипендію в сумі 800 зл. австр. і поїхав на дальші студії до Штрасбургґа, де працював у фізикальному інституті звісного проф. Кундта. Там також досягнув степеня доктора „philosophiae naturalis“. Мимоходом кажучи, Пулюй напевно стрічався у Штрасбургґу зі своїм ровесником Рентґеном, що був там спершу асистентом, а потім доцентом і надзвичайним професором. В 1877 р. габілітувався на віденському університеті на приватного доцента для досвідної фізики і викладав від 1877 р. до 1883 р. кінетичну теорію газів та механічну теорію тепла. Від 1876 р. до 1882 р. був також асистентом фізики в інституті проф. Лянґа у Відні.

За часів своєї доцентури займався кількома важними і з експериментального боку дуже трудними науковими питаннями, конструував власноручно прилади, бо у Відні не було тоді ні одного механіка, що вмів би робити скляні прилади, а на спровадження з заграниці не було грошей. Висліди тих досвідних праць майже всі видрукувані в Записках віденської Академії Наук (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien або коротше Wiener Berichte), а його прилад до означування механічного рівноважника тепла діждався премії на всевітній виставі в Парижі 1878 р. Пулюй був членом-основателем електротехнічного товариства у Відні і заложив 1882 р. журнал „Zeitschrift für Elektrotechnik“, що ще тепер виходить у Відні, а від 1908 р. називається „Elektrotechnik und Maschinenbau“.

Свої електричні прилади виставив Пулюй 1881 р. на всевітній електричній виставі в Парижі. Ті апарати, власноручно зладжені ним, були відзначені дипломом. Кілька з поміж них знаходиться у парижському музеї „Conservatoire National des Arts et Métiers“.

Помимо тих моральних успіхів переживав Пулюй в тім часі кілька розчарувань та прикростей. І так міністерство освіти відмовило йому підмоги на виріб приладів на парижську виставу, котрі мав йому зладити інститут для скляних виробів в Липську після його власних моделей.

Другою прикрою справою було те, що Пулюй за 5 літ доцентури не дістав ані шеляга, хоч, йдучи на студії до Штрасбурга, мав від міністерства обіцянку відповідної ремунерації на випадок габілітації і служби на одному із австрійських університетів. Лише за асистентуру побирав невеличку ремунерацію, але і ся кінчилася 1882 р. і він оставав без ніякого удержання. Тому рішився просити особисто міністра о приобіцяну ремунерацію за свої виклади на університеті, пожалітися на відмову субвенції на виставу в Парижі і на протекційний систем при обсаді університетських катедр. Одначе огірчений вийшов Пулюй з авдієнції, що не принесла йому нічого.

Також з иньших причин мав тоді Пулюй великі неприємности. Про се розказує він у книжочці „Кілька споминів про Куліша і його дружину Ганну Барвінок“, що вийшла 1905 р. у Відні вкупі з книжочкою його пера п. з. „Нові і перемінні звізди“. А саме в звязи зі справою Наумовича зробила віденська поліція трус у Пулюя, підозріваючи в ньому приклонника Наумовича, і забрала йому листи Куліша та Білозерського. Польські часописи подали зараз другого дня вістку, що привезуть до Львова „osobistość z Wiednia“. Ся напасть пригнобила Пулюя сильно, бо він боявся, що через те його університетська кар'єра, а тим самим і наукова вже погребана. До того ще померла його мати.

Всі ті невдачі не зразили Пулюя, бо він мав дуже витривалу вдачу, як ми вже бачили се по його тяжких заходах коло перекладу св Письма. Він не зломився і рішив піти другим шляхом, коли перший шлях не пощастився.

Тоді саме заясніла у науковому світі нова зоря — зоря електротехніки. Як тільки довідався Пулюй, що на парижській виставі появилися жарові лампи Едісона і Свана, то почав сам продумувати над найдогіднішим способом виробу вугляних каблучків для таких ламп. І дійсно винайшов він такий спосіб і дістав на нього патент. Небаром потім став він технічним директором електротехнічного бюро у Відні, що заступало також електротехнічний відділ фірми Ganz і Со у Будапешті.

Пулюй кинувся тепер з запалом до сеї практичної праці тим більше, що в сім бюрі вмiли як слід оцінити спосібности, знання та пильність Пулюя і призначили йому високу платню. В слідуєчім році т. є. 1883 р. виставив Пулюй на електричній виставі у Відні більшу скількість своїх апаратів і звернув на себе увагу широких кругів учених, міністерства та високопо-

ставлених осіб. При кінці вистави дістав від Верндля, генерального директора акційного товариства „Österreichische Waffenfabriks-Aktiengesellschaft“ в Steyr, оферту на консультанта тої фірми для електричних фабрикатів і для вистави, що мала відбутися в Штайр літом 1884 р. Се предложення прийняв Пулюй під дуже корисними умовами і зі застереженням, що кожної хвили буде міг, як лише схоче, вернути до наукової праці, бо все ще не тратив надії, що осягне колись свою задушевну мрію — університетську катедру. В Штайрі став Пулюй також директором фабрики своїх жарових ламп. В три місяці опісля фабрика вирабляла Пулюєві жарівки на виставу.

Весною 1884 р. в часі приготовань до вистави приїхав до Штайр секційний шеф міністерства освіти Фідлер та ще кілька осіб з міністерства. При сій нагоді звидів він також фабрику жарівок Пулюя і був дуже захоплений нею. В місяць опісля міністерство освіти іменувало Пулюя професором експериментальної та технічної фізики в німецькій техніці в Празі і також припоручило йому викладати електротехніку та провадити електротехнічні справи відповідно до потреби інститута. Одначе з огляду на великі поступи електротехнічної науки почав Пулюй 1885 р. відбувати окремі виклади з електротехніки та окремі електротехнічні справи, а в 1897 р. розширив їх ще більше. В рр. 1884 і 1885 заложив у будинку фізикального інститута пражської техніки електротехнічну робітню, машинарню для електричних машин і робітню для грубих і субтельних механічних робіт, а для фізикального інститута справив нові апарати і прибори, що відповідали вимогам новочасної науки. До помочі дістав механіка та слугу для обслуги машин.

Літом 1895 р. звидів Пулюй знаменито і модерно випосажені електротехнічні інститути у Німеччині і, вернувши зі своєї поїздки, починив усильні старання в міністерстві, щоби засновано окремий електротехнічний інститут у німецькій техніці в Празі та вивінувано його відповідно до сучасних потреб. Одначе міністерство не сповнило сього домагання Пулюя, лише у 1902 р. відділило катедру електротехніки від катедри фізики, системізувало для неї нову катедру та покликало на неї Пулюя після 18 літ тяжкої праці його у двох ділянках науки. На сім місці необхідно згадати, що три роки перед тим осягнув Пулюй найвищу гідність на техніці в Празі, а саме вибрали його ректором на 1889/90 р.

З нагоди 100-літнього ювілею німецької техніки в Празі

відзначено Пулюя 1906 р. орденом залізної корони за наукові праці і за учительську діяльність. В 1910 р. дістав титул і характер радника двора, в 1913 р. віденське електротехнічне товариство іменувало його почесним членом з нагоди 30-ліття свого існування, а дня 30. вересня 1916 р. спенсіонувався.

Годиться ще згадати, що Пулюй заложив 1888 р. електротехнічне товариство „Elektrotechnischer Verein“ в Празі, до якого належали спершу Німці і Чехи. Крім того заложив 1905 р. академічне товариство „Exkursionsfond der Hörer der Elektrotechnik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag“; се товариство мало на меті збирати фонди на допомоги для убогих студентів електротехніки, що брали участь у наукових екскурсіях під проводом Пулюя.

За цілий час своєї діяльності на техніці в Празі був Пулюй для широких кругів електротехнічного промислу дорадником у різнородних технічних питаннях. Під його проводом і доглядом реконструовано 1896 р. електричну централю в Марівнаді, а 1897 р. збудовано електричну централю в Цвікаві. Його ради засягали і слухали, коли проєктовано електричну централю міста Праги, велику електричну централю фірми Спіро і Сини біля Гогенфурта, мійські централі в Мерані, Франценсбаді та в інших містах.

Коли вибухла війна, посвятився він опіці українських воєнних виселенців з Галичини та утворив стипендійний фонд для убогої української молоді, що студіювала на еміґрації. Помер 31. січня 1918 р., полишаючи вдову та 5 дітей.<sup>1)</sup>

Перебіг життя Пулюя мав великий вплив на його наукову діяльність. У першій частині своєї дуже плодотворної діяльності т. є. в сімдесятих роках 19. століття працював він у фізикальних інститутах проф. Лянґа у Відні та проф. Кундта в Штрасбурґу, що займалися різними проблемами модної тоді теорії газів, та мав також припоручення викладати кінетичну теорію газів і термодинаміку на віденському університеті. Се мало такий наслідок, що він займався тоді головно дослідями внутрішнього тертя газів і газових сумішок та дифузії пар. З початком вісімдесятих років звернувся він під впливом загальної тоді течії до електричних явищ у рурках з розрідженими газами, а пізніше силою свого становища на техніці в Празі присвятив він свою увагу майже виключно електротехнічним проблемам.

<sup>1)</sup> Жонатий був від 1884 р.

Третя четвертина 19. століття се час, коли творилася кінетична теорія газів. Тоді виступають А. Кроеніг, Clausius, Maxwell, Boltzmann<sup>1)</sup> та інші дослідники, здіймають величаву будівлю сеї теорії і стараються чим раз більше удосконалювати її. Ізза того появляється безліч експериментальних праць, в яких фізики досліджують як найдокладніше різнородні прикмети газів. Сюди належать також досліди внутрішнього тертя газів та дифузії їх через пороваті стіни. Сими дуже тяжкими дослідями займався і Пулюй. Принуку до них дістав він мабуть від Lang-a, проф. досвідної фізики у Відні, у котрого фізикальнім інституті робив першу свою працю під заголовком „Über die Reibungskonstante der Luft als Funktion der Temperatur“, поміщену у Записках віденської Академії Наук (69, 287, 1874); там також містить автор подяку проф. Лянґови за поміч при праці. Щоби добре вирозуміти, о що ходило Пулюєви в його праці, пригадаймо собі, що се таке внутрішнє тертя. В тій ціли пригляньмося течі, котру через потручення посудини вправлено в осціляційний рух. Вона по якомусь часі приходить до рівноваги. Причиною того є внутрішнє тертя течі, що походить від опорів, чинних поміж молекулами течі. Якщо дві сусідні і рівнобіжні верстви течі плывуть з ріжною скорістю, то швидша прискорює повільнішу, повільніша опізнює швидшу. Після Ньютона є внутрішнє тертя себто сила, з якою ділає швидша верства на одиницю повільнішої,  $R = -\eta \frac{du}{dz}$ , де  $\frac{du}{dz}$  є спадок скорости в напрямі прямовім до руху. ( $u$  є відносна скорість обох верстов,  $z$  є співрядна прямова до руху,  $\eta$  є співчинник тертя.) Ті самі розважаня можемо перенести на гази і в той сам спосіб здефініюємо внутрішнє тертя газів. Досліди кінетичної теорії газів вказують на те, що співчинник внутрішнього тертя газів не залежить від густоти їх, а тим самим від тиснення (закон Maxwell-a), але залежить від температури. Остання залежність дається виразити на основі теорії взором

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad \text{або} \quad \eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}},$$

де  $\eta_0$  є співчинник при температурі  $0^\circ$ ,  $\alpha$  співчинник розширення газів (для повітря  $\alpha = 0,003665$ ). Коли незалежність співчинника тертя  $\eta$  виказано в широких межах тиснення, то що-

<sup>1)</sup> Передтечами їх були Bernoulli 1738 і Waterston 1845.

до впливу температури на  $\eta$  зауважано певну незгідність. І саме Пулюй поставив собі за задачу дослідити залежність внутрішнього тертя газів від температури таї ужив до своїх pomірів транспіраційної і осціляційної методи. Перша полягає на міренню скорости, з якою газ перепливає через дуже вузькі рурки, друга на обсервації пригасання осціляції якогось тіла, уміщеного в газі, н. пр. осціляції круглої поземой плиточки, що є зачіплена на нитці та може обертатися довкруги неї як оси; сей осцілюючий кружок є уміщений поміж двома рівнобіжними нерухомими кружками так, що лише газ, замкнений поміж сими кружками, має вплив на спинювання осціляції середнього кружка. Шість праць перевів Пулюй над тертям газів та опублікував їх в Записках віденської Академії Наук.<sup>1)</sup>

Перші дві праці виконав він у фізикальнім інституті віденського університету і обі випечатав під тим самим заголовком „Über die Reibungskonstante der Luft als Funktion der Temperatur“; третю із тих праць п. з. „Über die Abhängigkeit der Reibung der Gase von der Temperatur“ виконав у фізикальнім інституті проф. Кундта у Штрасбургу, котрий разом з проф. Варбургом робив також досліди над внутрішнім тертям газів.<sup>2)</sup> Четверта праця Пулюя має заголовок „Über die Reibung der Dämpfe“, а пята і шеста „Über die innere Reibung in einem Gemische von Kohlen-säure und Wasserstoff“.

Вислідом першої праці є сконстатовання факту, що вище згаданий теоретичний взірєць, подаючий звязь поміж співчинником внутрішнього тертя повітря а температурою  $\eta = \eta_0 (1 + at)^{\frac{1}{2}}$ , не відповідає дійсности. Впрочім те саме сконстатували були вже давніше Maxwell і O. Meyer. Перший з них подав рівнання  $\eta = \eta_0 (1 + at)$ , другий  $\eta = \eta_0 (1 + at)^{\frac{3}{2}}$  тоді, як у Пулюя виложник температурного чинника  $(1 + at)$  виносить приблизно  $\frac{2}{3}$ . Для температури 0° находить Пулюй  $\eta_0 = 0,00017877$  при допомозі транспіраційної методи, змодифікованої проф. Лянгом. В другій праці бере Пулюй під увагу також співчинник совгання повітря по стінах рурки (Gleitungskoeffizient) і находить майже

<sup>1)</sup> Wiener Berichte. II. Abt. 69, 70. 1874; 73. 1876; 78. 1878; 79. 1879 (дві праці). Порівн. також: Carl's Repertorium f. Physik 13, 1877, 293. Annal. d. Phys. u. Chem. Neue Folge. 1877, S. 296. — Замітка: Wiener Berichte мають ширшу назву: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien.

<sup>2)</sup> Kundt u. Warburg. Pogg. Ann. 155, 156, 1875.

такий самий вислід, як передше, а саме виложник температурного співчинника  $n$  є мало що менший від  $\frac{2}{3}$ . (Точні вартости:  $n = 0.590609 \pm 0.009510$ , коли у першій праці  $n = 0.652776 \pm \pm 0.020893$ ).

В третій праці ужив Пулюй осціляційної методи, робив досліди з кімнатним повітрям, двоокисом вугля і воднем та доказав, що тертя не у всіх газів змінюється однаково з температурою. І так для повітря найшов він виложник температурного співчинника  $n = 0,72196 \pm 0,01825$ , кругло  $\frac{3}{4}$ ; для  $CO_2$   $n = 0,91654 \pm 0,01394$  (майже 1); для  $H_2$   $0,69312 \pm 0,01088$  т. зн.  $\frac{2}{3} < n < \frac{3}{4}$ . В праці „Über die Reibung der Dämpfe“ визначив співчинники внутрішнього тертя ріжних пар, як водяної, алькоголю, бензолу, ацетону, етеру, і доказав, що для пари етеру є він прямо пропорціональний до абсолютної температури ( $n = 0,94$ , отже майже 1). В останніх двох працях з того самого обсягу займається Пулюй внутрішнім тисненням сумішки  $CO_2$  і  $H_2$ . На основі своїх дослідів приходять він до отсих двох висновків:

1. Співчинник тертя сумішки  $CO_2$  і  $H_2$  та мабуть всіх газів, що хемічно не ділають на себе, не є більший (менший), як співчинник тертя сеї складової части, що має найбільший (найменший) співчинник тертя.

2) Гази з більшим молекулярним тягарем мають при рівних скількостях більший вплив на вартість співчинника тертя сумішки газів. Н. пр. вистарчає домішати кілька сотих частей  $CO_2$ , щоби значно збільшити співчинник тертя водня; навпаки у сумішці  $CO_2$  і  $H_2$  у рівних скількостях полишається внутрішній співчинник тертя такий самий, як у чистім  $CO_2$ . Крім того випровадив Пулюй теоретичну формулу для співчинника тертя сумішки двох газів

$$\eta = \frac{\eta_1 \sqrt{p_1 + \frac{m_2}{m_1} p_2}}{\left[ p_1 + \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right)^{\frac{2}{3}} p_2 \right]^{\frac{2}{3}}},$$

де  $\eta_1$  і  $\eta_2$  є співчинниками тертя поодиноких газів,  $m_1$  і  $m_2$  їх молекулярні тягарі,  $p_1$  і  $p_2$  їх часткові тиснення. Ся формула дає лише в приближенню вислід, згідний з обсервацією.

Трудними були також досліди над дифузією пар. Їх описав Пулюй у двох працях п. з. „Über Diffusion der Dämpfe durch Tonzellen“.<sup>1)</sup> Се є взагалі перші досліди,

<sup>1)</sup> Wiener Berichte. 75. 1877. Abt. 2. 401 і 639.

які коли-небудь роблено над дифузією пар через пороваті стіни. До тепер було знане отсе явище: Коли два гази, що не реагують на себе хемічно, стоять під тим самим тисненням і є перегороджені від себе пороватою стіною, то наступає виміна їх через стіну, а обми газів, що проникають рівночасно через стіну, відносяться до себе відвортно, як квадратів корені густот обох газів. Поміри дифузії газів робили Bunsen, Graham та другі дослідники. Прилади до помірів, є доволі складні. У Пулюю дифундувала пара з нутра глиняної посудини через стіни посудини на вні, а повітря зо вні до нутра посудини. Пулюю робив досліди дифузії пари води, хльороформу, алькоголю і етеру, при чім обчисляв т. зв. рівноважний дифузійний обем пари  $k$  т. є. відношення обему пари  $D$  до обему повітря  $L$ , виміняних в 1 мінуті, отже  $k = \frac{D}{L}$ . Для водяної пари найшов з одного

ряду спроб середню вартість з багатьох помірів  $k = 1,2778$ , з другого  $k = 1,2591$ , а корінь з відвортної вартости густоти водяної пари є 1,2669, отже доволі згідно з аналогічними вислідами у газів. Крім того сконстатував, що скорість дифузії повітря з огляду на пари води, алькоголю, етеру і хльороформу росте з температурою. Загальний вислід його праць є той, що пари дифундують через стіни глиняної пороватої посудини у відвортнім відношенню до квадратного кореня з густот і що водяна пара дифундує скорше, як повітря.

Повиші досліди були дуже важні тому, що співчинники внутрішнього тертя та дифузії газів служать до обчислення середньої довготи шляхів молекулів, їх скількості та величини, молекулярних тягарів та співчинника заломання світла і відносного степеня вохкості повітря. Сьогодні вартости сих співчинників, як також інших величин, звязаних з кінетичною теорією газів, є вже усталені і на них опираються новіші добутки фізики.

В межичасі, а саме 1875 р. винайшов Пулюю прилад до означування механічного рівноважника тепла. Сей прилад був відзначений срібною медалею на всесвітній виставі в Парижі 1878 р. і є власністю фізикального інституту пражського університету. На просьбу дирекції національного німецького музею „Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München“ дарував проф. Пулюю 1907 р. для сього музею вірну копію свого приладу і її уставлено біля славного приладу Joule-а. Сей прилад виробляють великі німецькі фізикальні фабрики, н. пр. Max Kohl в Chemnitz.

та продають середнім і вищим школам, а більші підручники фізики подають опис його. Сам винаходчик описав свій прилад та спроби з ним у двох працях п. з. „Über einen Schulapparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes“ і „Beitrag zur Bestimmung des mechan. Wärmeäquivalentes“<sup>1)</sup>. Сей прилад складаєть з двох порожніх сталевих стіжків, входячих в себе, що служать за кальориметер. Зовнішній стіжок можна обертати довкруги прямовісної осі при допомозі центрифугальної машини. Внутрішній є наповнений живим сріблом, замкнений накривкою та свобідно рухомий. Він є злучений з раменем підойми, котрого кінець порушаєтья біля поземої скалі, поділеної на степені. З кінця підойми провадить шнур через малий бльок, а на другім кінці його висить терезка на тягарці. Накривка має два отвори, в однім сторчить термометер, в другім прилад до мішання. Тепло, витворене через терте стіжкових поверхней підчас обороту центрифугальної машини, є рівноважне з працею, зужитою при тертю; останню обчисляємо зі скількості оборотів зовнішнього стіжка, тягарця, уміщеного на терезці задля здержання оборотового руху внутрішнього стіжка, довготи рамени підойми і кута, відчитаного на поділці. Відношення між працею а теплом є механічним рівноважником тепла. Сей апарат так догідний, що при допомозі його можна зробити поміри в протягу кільканайцяти хвиль. Інженір Леопольд Розенбавм з Відня, описуючи ювілейну виставу в Празі (1906 р.), де також були виставлені прилади Пулюя, пише про заслугу Пулюя, котрому удалося зладити на місце незручного приладу Joule-а такий апарат, що ним можна легко і докладно за кілька хвиль означити механічний рівноважник тепла, ту так важну величину сучасної фізики.<sup>2)</sup> Уживаючи свого приладу, одержав Пулюй з одного ряду помірів вартість механічного рівноважника тепла  $I = 425,2 \pm 5,4 \text{ kgt}$ , з другого  $I = 426,7 \pm 5,9 \text{ kgt}$ . Сі вартости не відбігають сильно від загально прийнятої тепер  $I = 427,1 \text{ kgt}$ .<sup>3)</sup>

Важне місце займають прилади та праці Пулюя, що відносяться до електричних розряджень в евакуованих скляних рурках. Сі прилади, власної роботи Пулюя з рр. 1880—1882, звернули були на себе увагу широких наукових

<sup>1)</sup> Wiener Berichte. II. Abt. 71. 1875, 677; 72. 1876, 53. Порівн. також Pogg. Ann. Bd. 157, 437 і 649.

<sup>2)</sup> Черпано з автобіографії.

<sup>3)</sup> Riecke. Lehrbuch der Physik. VI. Auflage. I. Bd. S. 315.

кругів. Сюди належать фосфоризуюча лампа, електричні радіометри і рурки з розрідженим газом, через які перепускається високонапружену електричну струю. Кілька з поміж тих приладів відзначено 1881 р. на міжнародній електричній виставі в Парижі і вони знаходяться у парижському музеї Conservatoire National des Arts et Métiers. Наукові праці про ті прояви були друковані п. з. „Strahlende Elektroden-Materie“ у Записках віденської Академії Наук<sup>1)</sup> і в тих працях подибуємо висновки, зближені до модерної електронної теорії. Збірку тих праць видала 1883 р. фірма Carl Gerold's Sohn у Відні п. з. „Strahlende Elektroden-Materie und der sogenannte vierte Aggregatzustand“, а в 1889 р. льондонське товариство Physikal Society англійський переклад її у Лондоні.<sup>2)</sup>

В часах, коли Пулюй робив досліди над електричним розрядженням в евакуованих рурках, займалися тими явищами також Crookes, Hittorf і Goldschmied. Пулюй збиває влучно їх хибні погляди, між иньшими гіпотезу Crookes-а про четвертий стан матерії, і висказує погляд, що з катода відриваються частинки, наелектризовані відємно, порушаються простолінійно з великою швидкістю та таким чином проводять конвекційно електричну струю. Сей погляд майже в цілості задержався досі з тою різницею, що Пулюй вважав ті частинки матеріальними частинками, а сьогодні приймаємо їх за частинки від'ємної електричності або т. зв. електрони.<sup>3)</sup> При тім всім в Пулюй прихильником унітарної теорії електричності, приймаючи, що кожде тіло у нормальнім стані має означену кількість етеру; якщо має його надмір, то є додатно-електричне, а як за мало, то від'ємно-електричне. Інтересною є також фосфоризуюча лампа винаходу Пулюя, якої опис находимо у згаданій праці. Є се подовгаста скляна баньочка, в котрій уміщені платинові електроди, а против катода є пластинка з лосняку (міка, Glimmer), поволічена з одного боку потасовим сірчаком, що фосфоризує зеленаво. Якщо злучимо електроди сеї лампи з індуктором, то проявляється так сильна фосфоресценція, що ціла кімната є освітлена і можна читати навіть у певнім віддаленні від лампи. Ся лампа о стільки заслугує на увагу, що фактично вона є передтечею рурки Рентгена; остання має звичайно замість фосфори-

<sup>1)</sup> Wiener Berichte. 81, 1880; 83, 1880; 85, 1882.

<sup>2)</sup> Physical Memoirs. Vol. I. Part. 2. 1889.

<sup>3)</sup> Впрочім також електрони вважаємо сьогодні складовими частинами матерії (атомів).

зуючої пластинки т. зв. антикатуду з платини. Отже Пулюй був вже 1882 р. на шляху відкриття, зробленого Рентґеном 1895 р.

Заслуги Пулюя у сій ділянці фізики зможемо тим краще оцінити, коли возьмемо під увагу, що модерна фізика опирається сьогодні у великій мірі на дослідах електричного розрядження в евакуованих рурках, а сучасники Пулюя вважали чарівні світляні явища в сих рурках здебільша гарною іграшкою без глибшого значіння, ба навіть висказувалися про них з кпинами, н. пр. так великий фізик, як J. Stefan.<sup>1)</sup>

При помочи своєї лампи та інших вакуумпаратів, що служили йому до дослідів катодових промінів, зготовив він зараз по відкриттю Рентґена більшу скількість фотографічних знімків. З поміж них 17 було виставлених на ювілейній виставі в Празі. Ті образи відзначаються тим, що і найніжніші подробиці предметів дуже виразно віддані, і належить зауважати, що, не зважаючи на швидкий поступ рентґенографії, через довший час другі дослідники і техніки не годні були зробити кращих образів, як Пулюві. Тому не дивно, що після відкриття Рентґена в статтях про се відкриття поміщувано скрізь знімки Пулюя, н. пр. у французьких часописах „Cosmos“ з 8. II. 1896 р. стр. 300 і „La Nature“ з 8. II. 1896. В останній находимо розвідку Klemenčič-a de Engelmayr-a п. з. „Rayons invisibles (rayons X) de M. Wilhelm Conrad Röntgen. Expériences de M. Puluj de Prague“. З англійських часописей подає льондонський „The Photogram“ з квітня 1896, vol. 3, № 28, на 106 стр. опис лампи Пулюя з малюнком сеї лампи і першою фотографічною знімкою 7-місячного плоду.<sup>2)</sup>

Проф. Пулюй оголосив також друком дві праці про проміні Рентґена, а саме „Über Entstehung der Röntgenstrahlen und ihre photographische Wirkung“ (Wien. Ber. Abt. II. **105**, 1896) і „Nachtrag zur Abhandlung „Über die Entstehung der Röntgenstrahlen u. ihre photogr. Wirkung““ (Wien. Ber. Abt. II. **105**, 1896). Згідно з Рентґеном констатує, що проміні Рентґена повстають на тих місцях поверхні довільного тіла, на котрі падають катодові проміні. До своїх дослідів уживав Пулюй своєї фосфоризуючої лампи, даючи їй ріжний вид. Замітною річю є, що він у першій праці висказує згодом про майбутнє примінення промінів Рентґена

<sup>1)</sup> Порівн. Elektrotechnik und Maschinenbau. Wien. 1913. Vereinsnachrichten. S. 1126.

<sup>2)</sup> Порівн. Др. О. Барвінський. Причинок до історії розвитку рентґенології. Укр. Медичний Вістник. Прага. Ч. 3—4, 1924, стр. 187.

у хірургії. Дальше годиться підчеркнути, що він у згаданій праці висказує наскрізь модерний погляд, що проміні Рентгена се філястий рух етеру, а причиною повстання тих филь етеру є удар частинок, входячих в склад катодових промінів, о матеріяльні тіла, на котрі вони падають. Заразом Пулюй зробив спостереження, що евакуовані рурки без електрод, жарівки і радіометри світять під впливом промінів Рентгена у замкненій кімнаті.

Майже рівночасно з дослідами про електричні розрядження в евакуованих рурках студію Пулюй причини руху радіометра<sup>1)</sup>. Добутком тих дослідів є дві праці п. з. „Über das Radiometer“, дальше „Beitrag zur Erklärung des Zöllnerschen Radiometers“, а вкінці „Nachschrift zum Beitrag zur Erklärung des Zöllner'schen Radiometers“, помішені у Записках віденської Акад. Наук.<sup>2)</sup> (Wien-Ber. 76, 1877; 80, 1879; 81, 1880; 82, 1880). Останні дві праці вийшли також разом у збірній праці „Über die strahlende Elektrodenmaterie“. Проблем руху радіометра дуже складний і ще до нині вповні не вияснений. Як раз Пулюй звертає увагу на те, що процеси, які відбуваються у звичайному радіометрі, є доволі складні, і висказує здогад, що одна частина кінетичної енергії промінів світла і тепла, падаючих на крильця радіометра, збільшає швидкість руху молекулів освітлених поверхней і ударяючих в них молекулів газу, а друга виконує працю і спричинює емісію молекулів крилець себто випаровування їх. В кождім разі на думку Пулюя воздушні струї не можуть бути причиною рухів крил радіометра.

З дослідів Пулюя над катодовими проміннями вийшла також його лампа для високонапружених перемінних струй, в котрих катодові проміні розжарюють окис тору. Сюди належить праця „Über die elektrischen Entladungen in den Glühlampen bei hochgespannten Strömen“ (Zs. für Elektrotechnik, Wien, 1883). Замітні є також його удіпшення при виробі жарівок з вугляними каблучками („Versuch über die absolute Festigkeit und Dichte der Kohlenfäden“, Zs. f. Elektrotechnik Wien, 1883).

Образ діяльности Пулюя на полі чистої фізики не був би повний, колиби ми не згадали приладів тай експериментів, видуманих ним, що надаються добре до науки досвідної фізики у середніх та вищих школах. Вони відносяться

1) винайденого Crookes-ом 1873 р. (Гл. Riecke. Lehrb. der Physik 1919. S. 583).

2) Гл. також Carl's Repertorium f. Physik.

до різних ділянок фізики. І так з поля акустики подає він три інтересні шкільні спроби. В першій показує він інтерференцію двох поперечних филь, що біжать по двох рівнобіжних і дуже близько до себе умічених поземих шовкових шнурочках; кінець одного злучений з одним раменем, кінець другого з другим раменем строввих вильцят, які вправляємо в дряжання. Оба тяги филь будуть мати різницю фаз рівну половині довготи филь так, що гора одної филь буде бігти попри долину другої. Якщо гору одної филь і долину другої перев'яжемо ниткою, котрої кінці будемо придержувати, то филь через інтерференцію знесуться. („Ein Interferenzversuch mit zwei schwingenden Saiten“. Wien. Ber. **96**, II. Abt. 1887, 947).

В иньшій знов праці п. з. „Objektive Darstellung der wahren Gestalt einer schwingenden Saite“. (Wien. Ber. **95**, II. Abt. 1887, 355) описує спробу, при допомозі якої можна бачити виразно филь на дряжачій шовковій нитці. Останню вправляє в рух при помочи електромагнетних строввих вильцят та освітлює фосфоризуючою лампою, побудженою індуктором Румкорфа. Якщо скількості дряжань вильцят і переривача струї індуктора є рівні або скількість перших дряжань є многократю скількості других, то на відповідно уставленім екрані буде видно фильясту форму дряжачої шовкової нитки.

Третя праця („Ein Versuch über die Resonanz“. Carl's Repertorium für Physik. Bd. 14, 1880) відноситься до резонанції строввих вильцят. Пулюй демонструє дряжання строввих вильцят, побуджених через резонанцію до видавання звука, при допомозі маятника із скляної кульочки з тоненькими стінами, завішеного на нитці, довгій на 50 см, та проводить аналогію поміж сим акустичним з'явищем а невидими молекулярними процесами у радіометрі.

На пражській ювілейній виставі був виставлений Пулюїв прилад для доказу, що всі тіла падають у порожні однаково скоро. Є се звичайна евакуована скляна рурка, на котрої горішнім кінці прикріплений електромагнет. Коли у звоях його плине електр. струя, то він придержує залізний перстень та легоньке перце з залізною тоненькою шпильочкою. А якщо струю перервати, то оба предмети падають і то рівно скоро. („Fallapparat“. Wied. Ann. f. Phys. u. Chemie. Leipzig, **33**, 1888).

Також важний для наукових дослідів та для технічних потреб є Пулюїв телестермометер, виставлений на виставі

в Празі та описаний у Wien. Ber. **98**, 1889, 1502.<sup>1)</sup> Він надається до означення температури у віддаленому місці. Основується на фізикальнім законі, що електричний опір металевих дротів більшає зі зростом температури, а навпаки опір вугляних ниточок маліє враз зі зростом температури. Він складається зі замкненої скляної рурки, на менш більш 20 см довгої, в котрій знаходиться вугляна ниточка і залізна спіраля, входячі в комбінацію містка Вігстона. Той телетермометер придатний, якщо треба знайти температуру в глибоких шахтах і прокопах землі, в глибині моря, на високих баштах і горах і в таких фабричних заводах, де потрібний догляд над температурою, що не повинна переступати означених меж. Сим телетермометром змірено температуру у прокопі Sauerbrunn коло Біліна у Чехословаччині.<sup>2)</sup> Той прокіп був на 130 м глибокий і зовсім заповнений квасною водою. Температуру мірено після кожного метра глибини і знайдено таким чином, що термічний ступінь землі виносить 32 м т. зн., що в землі на кожних 32 м вглибшки температура підноситься о 1° С.

Від початку вісімдесятих років 19. стол. займають Пулюя чим раз більше електротехнічні питання. Приводом до того було мабуть се, що він, маючи природне замилювання до електротехніки, став 1882 р. управителем електротехнічного бюро у Відні, пізнійше в Штайр, де заснував фабрику електричних жарівок, уліпшених після власного винаходу, а пізнійше як професор техніки мусів ще докладнійше працювати у сій модерній тоді ділянці. Він винайшов кілька електротехнічних приладів та опублікував цілий ряд праць з поля електротехніки. З поміж тих приладів заслугоють на увагу ті, що були виставлені на ювілейній виставі в Празі, а передусім прилад до переміни однапрямної (одностайної) струї у дво- і трифазові перемінні. Тим апаратом можна наглядно і легко показати прикмети та ділання перемінних струй. Переміни періодичних струй відбуваються дуже скоро; звичайно періода їх виносить  $\frac{1}{50}$  секунди. Одначе в згаданім апараті можна продовжити сей час довільно так, що зауважується вигідно кожду переміну струї як дво- так і трифазової. При допомозі кружляючого маг-

<sup>1)</sup> Гл. також Techn. Blätter. Prag 1889, IV; Elektrotechn. Zs. Berlin, 1890, VIII; Elektrotechn. Echo, 1890; Repertorium d. Physik von Dr. Fr. Exner. München, **26**, 733.

<sup>2)</sup> Dr. Puluj. Über Temperaturmessungen in Bohrloche zu Sauerbrunn in Böhmen. Elektrotechn. Zs. Berlin 1880. — Zs. des österr. Ingenieur- u. Architekten vereines. Wien 1890. — Repertorium der Phys. von Dr. Fr. Exner, München, **27**.

нетного поля, витвореного трифазовою струєю сього приладу, можна легко дослідити залежність шкорути кружляння магнетного поля від шкорути період струї. Ся залежність, як звісно, має вагу для будови електромоторів.

Також опублікував Пулюй більшу шкорути праць, що відносяться до перемінних струй, подав догідний спосіб означування співчинника самоіндукції і ріжниць фаз гармонійних перемінних струй та досліджував залежність ріжниць фаз від ріжних чинників. Сюди належать отсі праці: а) Beitrag zur unipolaren Induktion.<sup>1)</sup> б) Bestimmung des Koeffizienten der Selbstinduktion mit Hilfe des Elektrodynamometers und eines Induktors.<sup>2)</sup> в) Über periodisch veränderliche elektromotorische Kräfte, welche in einem Leiter mit Selbstinduktion nur in einer Richtung wirken.<sup>3)</sup> г) Über die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduktion.<sup>4)</sup> д) Eine Methode zur Messung der Phasendifferenz von harmonischen Wechselströmen und deren Anwendung zur Bestimmung der Selbstinduktion.<sup>5)</sup> е) Über einen Phasenindikator und einige mit demselben ausgeführte Messungen.<sup>6)</sup> ж) Abhängigkeit der Phasendifferenz zwischen der primären Klemmenspannung und Stromstärke bei verschiedener Belastung des Sekundärnetzes einer Transformatoranlage.<sup>7)</sup> з) Anwendung des Kreisdiagrammes auf Wechselstromgeneratoren.<sup>8)</sup> Дві з поміж сих праць, а саме е) і з) надрукував Пулюй також в українській мові у виданнях Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові п. з.: „Апарат до міряння ріжниць фаз межі перемінними протоками і кілька за його помічю зроблених помірок“ (Записки Наук. Тов. ім. Шевч. т. III. 1894) і „Кругова діяграма генераторів для перемінних прудів“ (Збірник мат. прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевч. IX. т. 1903).

В праці а) досліджує Пулюй індукцію металевої кулі, завішеної над бігуном сильного електромагнета і вправленої в оборотовий рух

<sup>1)</sup> Zentralblatt für Elektrotechnik, München 1888.

<sup>2)</sup> Elektrotechn. Zeitschrift (Zentralblatt f. Elektrotechnik). Berlin u. München, 1891. S. 346.

<sup>3)</sup> Ibidem. 1891. S. 419, 434.

<sup>4)</sup> I. Mitteilung. Wiener Berichte, Bd. 100. Mai. S. 767, 1891; Elektrotechn. Zeitschrift. 1891. S. 498. — II. Mitteilung. Wien. Ber. Bd. 102, 1893; Elektrotechn. Zeitschrift. 1893, S. 466.

<sup>5)</sup> Wien. Ber. Bd. 102. Abt. II a. April 1893.

<sup>6)</sup> Wien. Ber. Bd. 102, Abt. II a. Juli 1893; Elektrotechn. Zeitschrift. 1893. S. 687.

<sup>7)</sup> Elektrotechn. Zeitschrift. 1895. S. 557.

<sup>8)</sup> Techn. Blätter. Prag. 35. 1903.

довкруги доземої осі. Праця б) містить дуже догідну методу означування самоіндукції при допомозі електродинамометра. В праці в) досліджує Пуллой перебіг електромоторичної сили в арматурі двобігунової однонапрямної машини. Як звісно, в обвитках цівок машини повстають підчас обороту змінні електромоторичні сили. Вони змінюють свій напрям, як лише цівки минуть нейтральну площу, що стоїть прямо до магнетного поля. В часі обороту арматурних цівок повище сеї площі ростуть електромоторичні сили від зера до своєї найбільшої вартости і потім маліють знов до зера, доходячи до нейтральної площі. Понижче нейтральної площі перебігають електромоторичні сили у такий самий спосіб, але у протилежньому напрямови, одначе коммутатор перемиňuje витворені струї на однонапрямні. Пуллой приймає на хвиливу електромоторичну силу вираз  $e = E_0 \sin^2 \frac{2\pi t}{T}$ , який дає лише додатні вартости і в яким  $T$  є періодом подвійного зросту та маління електромоторичної сили від зера до максимальної вартости  $E_0$ , і, виходячи з основного рівняння

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E_0 \sin^2 \frac{2\pi t}{T},$$

доказує, що середня натуга струї є незалежна від позірного опору, а тим самим від самоіндукції ( $L$ ) і скількості колибань струї (Stromschwankungen). Вона залежить лише від максимальної електромоторичної сили і від звичайного опору провідного круга та дається виразити взором:

$$M(i) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R},$$

де  $R$  є опір провідного дрота.

Вкінці порівнує Пуллой закони перепливу електричності у провіднику, обтяженім самоіндукцією, в яким періодично змінна електромоторична сила витворює струєві імпульси одного напрямку, зі законами оборотового руху тяжкого (розгонового) колеса під впливом змінних механічних ударів одного напрямку.

В праці, наведеній під г) доказує, що середня натуга струї не залежить від самоіндукції, якщо електромоторична сила підлягає синусовому закономі і якщо її переминюється в одну мить у нейтральній площі магнетного поля. Обчислення переводить автор, розвиваючи вираз на електромоторичну силу у ряд і сполучаючи його з основним рівнянням  $Ri + L \frac{di}{dt} = E$ . На середню

натугу струї одержує він вираз  $M(i) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R}$ . В другій частині своєї праці доказує в супереч сумнівів Lohmstein-а, що середня натуга струї не залежить від самоіндукції навіть тоді, як електромоторична сила не підлягає синусовому закону, але в н. пр. лінійно змінна так, що хитається що  $\frac{1}{4}$  періоди поміж зером а максимальною вартістю після правила ломаної лінії. В сім випадку виходить середня вартість натуги струї  $M(i) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R}$ .

Причиною деякої незгідности теоретичних виводів з практичними помірами є після Пулюя те, що переміна струї у нейтральній площі магнетного поля магнетоіндукційної машини, ужитої Lohmstein-ом, не відбувається моментанно. Щоби се доказати, зладив Пулюй земельний індуктор у такий спосіб, що висліди помірів згодилися з теорією; в тім індукторі є контактні поверхні щіточок так само за широкі, як ізоляція поміж відрізками колектора. Одначе середня натуга струї залежить від самоіндукції, якщо комутація не відбувається моментанно.

В праці д) подає Пулюй дуже просту методу мірення електродинамометром різниці фаз двох перемінних струй, що повстали через розгалуження одної головної струї, і примінення її до означення співчинника самоіндукції звоїв трансформатора, машинової арматури таї інших приладів, а у праці е), що слідує безпосередно по попередній, описує окремий прилад до мірення різниці фаз перемінних струй та самоіндукції. Сей прилад винайшов Пулюй сам і назвав його фазовим індикатором. Головними складовими частями фазового індикатора є дві сталеві пружини, злучені плоскими зеркалами однакової довготи та залізними стіжковатими якорями. Сі пружини можна вправити в дрожачий рух при допомозі двох малих електромагнетів і перемінних струй. При ужиттю методи Lissajous-а дають пружини криву дрожання, що змінює свій вид і положення залежно від величини амплітуд та різниці фаз перемінних струй.

Праця з) містить звідомлення з помірів, переведених на трансформаторі електричної централі в Марієнбаді при допомозі вище згаданого фазового індикатора. Вкінці в статті з) виказує Пулюй, в який спосіб можна примінити кругову діаграму Neuland-а до генераторів перемінних струй. Neuland подав був сюдіаграму лише для індукційних моторів, Kapp примінив її до трансформаторів, а Neubach до рядових моторів перемінних струй. Пулюй бере під увагу у своїй праці випадки, в яких ге-

нератор працює з опорами без індукції і з індукцією та випро-  
ваджує криву справності (Leistungskurve) генератора перемінної  
струї і трифазового мотора.

Працюючи на електротехнічній ділянці, виробив собі Пулюя  
велике значіння та популярність в електротехнічних фахових та  
наукових кругах. Бо мав він глибоке знання сеї нової науки,  
а свої праці виконував з незвичайною педантерією і передавав  
їх на письмі у ясній та прозорій формі. Тому не дивно, що ве-  
ликі електротехнічні фірми<sup>1)</sup> запрашали його на свого експерта,  
а більші міста запитували його також о раду при будові  
електричних централей або реконструкції давних, н. пр. Прага,  
Марієнбад.<sup>2)</sup>

Замітним є також той факт, що через цілий ряд літ виби-  
рано Пулюя головою електротехнічного товариства в Празі, а з на-  
годи 30-літнього ювілею електротехнічного товариства у Відні  
читаємо в часописи „Elektrotechnik und Maschinenbau“ з 1913 р.  
в статті „Das Jubiläum des Elektrotechnischen Vereines in Wien“  
на 291 стр. отсі рядки: „Von Fachleuten, welche theils in der Ro-  
tunde, theils im Vereine Vorträge hielten, seien folgende bekann-  
te Namen genannt: Mach, Pfandler, v. Lang, v. Waltenhofen, Wil-  
liam Siemens, Werner Siemens, Puluj und viele andere.“

На становищі голови електротехнічного товариства в Празі  
був Пулюя дуже рухливий і виголосив більшу скількість викладів  
на сходах сього товариства на електротехнічні та інші мо-  
дерні теми, н. пр. про самоіндукцію, її наслідки, методи поміру,  
міряння різниці фаз перемінних струй, про теорію електронів.  
Вістки про ці виклади находимо у річниках журналу „Elektro-  
techn. Zeitschrift“. Один з них був надрукований в цілости в річ-  
нику з 1891 р. п. з. „Über die Selbstinduktion und ihre Wirkun-  
gen“. Сеї виклад є прямо взірцевий і сьогодні моглиби прочи-  
тати його студенти електротехніки та фізики з великим пожит-  
ком для себе. Зачинається він дефініцією „ліній сил“ та само-  
індукції. Опісля є обговорена звязь поміж зовнішньою електро-  
моторичною силою а натугою струї у провіднику із самоіндукцією  
відповідно до рівняння  $E = Ri + L \frac{di}{dt}$ , при чім береться під  
увагу два случаи: 1) електромоторична сила є постійна, 2) елек-

<sup>1)</sup> Гл. Elektrotechn. Zeitschrift. 1891, S. 331.

<sup>2)</sup> Гл. Elektrotechn. Zeitschrift. Berlin u. München, 1894, S. 296; ibidem,  
1897, S. 98.

тромах. сила є змінна ( $E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$ ). Вкінці говорить Пулюй про позірний опір, середню і ефективну напругу струї, працю, виконану перемінною струєю ( $\frac{1}{2} E_0 J_0 \cos \varphi$ ) та про ватметр.

Практичну вартість має безпечна стація телефонів, винайдена Пулюєм 1896 р. і патентована в Австрії, Угорщині, Німеччині, Швеції і Італії. Вона дає певну охорону перед високонпруженими струями, що пливають шляховими проводами в суцідстві телефонічних дротів і деколи ізза ослабленої ізоляції або також иньших причин попадають до телефонічних проводів та загрожують тут людському життю. Ся стація містить крім звичайної індукційної цівки з двома обвитками дротів ще одну цівку з третьою обвиткою; остання уміщена в першій та ізольована від неї повітрем. На кожній стації є в першій струєвім крузі: мікрофон, перша обвитка індукційної цівки, батарея і самочинний переривач (самозапинач, *selbsttätiger Ausschalter*); в другім крузі є: друга обвитка індукційної цівки і телефон, а третій круг творять треті обвитки відокремлених цівок обох стацій і шляхові дроти. Всі ті круги звязані один з другим електромагнетним способом і так є зладжені, що навіть тоді, якби дроти телефонів зіткнулися випадком зі шляховими провідниками, в яких є висока електрична напруга, небезпечні струї не могли би прорватися до кругів з мікрофоном і телефоном. Безпечні телефонічні стації Пулюя завели у себе австрійські і чеські електричні центральні, залізничні стації, копальня вугля в Бріксі, а навіть одна англійська фірма. В звязи з описаною телефонічною стацією є дві праці Пулюя п. з. „Eine Telephonstation für elektr. Hochspannungsanlagen“ (Techn. Bl. Prag. **31**, 1899, IV, 171) і „Einige Neuerungen in der Telephonie“ (Techn. Bl. Prag. **33**, I, 1901, 1). Ту саму тему обговорює Пулюй і по українськи у Збірнику мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевч. у Львові (т. VI, Зш. 1. 1900).

Для електротехніків можуть бути інтересними також праці про електричні центральні в Празі („Über elektr. Zentralen in Prag.“ Techn. Bl. **27**, I. u. II. 1897, 91) і про електричну централю фірми Спіро і Синів в Крумаві („Elektrizitätswerke Hohenfurt der Firma Ignaz Spiro u. Söhne in Krummau.“ Techn. Bl. **36**, 1. u. 2. Heft, Prag 1904). Остання праця появилася також в українській мові у Збірнику мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові (III. т. 1905).

Переглянувшу наукову діяльність Пулюя, бачимо, що вона була незвичайно плодотворна. Почавши від 1874 р., майже що року

давав він бодай одну працю так, що всіх наукових праць появилося у німецькій мові около 50, в українській 4, не числячи двох популярно наукових розвідок, а саме „Непропаща сила“ (I. вид. „Просвіти“, II. вид. „Видавн. Спілки“) і „Нові і перемінні звізди“ (I. вид. „Просвіти“, II. вид. „Видавн. Спілки“, III. вид. накладом автора, Відень 1905); ся друга праця була друкована також без підпису у німецькій мові у „Wiener Allgem. Zeitung“.

Крім того опублікував яких 30 статей і брошур в українській та німецькій мові в українських справах, а між иншим в справі українського університету у Львові та утворення самостійної України. Працював він у різних напрямках фізики та електротехніки, а деякі винаходи зднали йому память грядущих поколінь фізиків та техніків. Неодну його думку прийняла модерна фізика, а лише через сліпий, може і пеховний випадок проміні X не називаються проміннями Пулюя, лише Рентгена. Бо він вже був на їх сліді ще 1882 р., але на жаль, зайнятий другою працею, залишив був тоді дальші досліди над катодовими проміннями. Останніх двадцять літ своєї наукової діяльності посвятив він головно електротехніці і причинився до розвитку її; тому справедливо каже про нього автор некрольогу, поміщеного в „Elektrotechnik u. Maschinenbau“, Heft 15. 36 Jg. Wien, 14. April 1918, стр. 184: „Er war einer der Pioniere der Elektrotechnik in Österreich“. На жаль для своєї найближшої вітчизни міг він мало що дати з ділянки фізики та електротехніки тому, що ся царина була у нас в часах його діяльності майже не тикана, але за те необхідно з притиском зазначити, що Пулюй, живучи на далекій чужині, ніколи не забував, що є сином українського народа і боровся за його права і у Відні і в Петербурзі та перед європейською опінією в часах всесвітньої війни. Честь його памяти!

Високоповажаній Рідні Івана Пулюя, а передусім Його Дочці, Вп. Пані Директорівій Наталії Барвінській і Її Швагрови Вп. П. Д-рови Олександрови Барвінському складаю отсим щиру подяку за поміч в отсій праці через визичення відбиток праць і рукопису автобіографії Пулюя, як також клішів.

# Dr. Johann Puluj als wissenschaftlicher Forscher.

(Zur zehnjährigen Erinnerung an seinen Todestag.)

Von *Dr. Roman Cehelskyj.*

(Inhaltsangabe.)

Dr. Johann Puluj wurde am 2. Februar 1845 zu Hrymaliv in Galizien geboren. Das Gymnasium absolvierte er in Tarnopol und dann besuchte er die theologische und die philosophische Fakultät (math. phys. Abteilung) in Wien. Hierauf widmete er sich den physikalischen Forschungen im Laboratorium des Prof. Hofrat Dr. von Lang, wurde im J. 1874 Assistent für Physik und Mechanik an der Marineakademie in Fiume und arbeitete im J. 1875 im physikalischen Institut des Prof. Kundt in Straßburg, wo er zum Doktor „philosophiae naturalis“ promoviert wurde. Im J. 1877 habilitierte er sich zum Privatdozenten an der Universität Wien, woselbst er vom J. 1876 bis zum 1882 als Assistent bei dem Professor Lang fungierte. Gleichzeitig hielt er Vorlesungen über kinetische Gastheorie und mechanische Wärmetheorie.

Im J. 1882 übernahm er die technische Leitung des Wiener Zweigbüreaus der Firma Ganz u. Co. in Budapest. Ein Jahr später wurde er als technischer Konsulent der österreichischen Waffenfabriksgesellschaft nach Steyr berufen. Dasselbst errichtete er eine Glühlampenfabrik und war bei der Veranstaltung der elektrischen Ausstellung in Steyr tätig, wodurch er auf sich die Aufmerksamkeit der maßgebenden Kreise lenkte. Insbesondere wurden neue, von ihm entdeckte Glühlampen allgemein bewundert.

Bald wurde er (1884) an die technische Hochschule nach Prag berufen und übernahm dort die Lehrkanzel für Physik und Elektrotechnik. Als im J. 1902 besondere Lehrkanzeln für beide Gebiete errichtet wurden, behielt er für sich die elektrotechnische Lehrkanzel.

Für seine wissenschaftlichen Verdienste wurde er im J. 1906 mit einem Orden der Eisernen Krone 3. Klasse ausgezeichnet und im J. 1910 wurde ihm der Titel und Charakter eines Hofrates verliehen. Im J. 1889/90 erhielt er die höchste akademische Würde, indem er zum Rektor der technischen Hochschule in Prag gewählt wurde. Am 30. September 1916 trat er in den Ruhestand und starb am 31. Jänner 1918.

Puluj hat zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten<sup>1)</sup> veröffentlicht und Apparate konstruiert. Seine ersten Arbeiten beziehen sich auf die innere Reibung von Gasen und Gasmischen und auf die

<sup>1)</sup> S. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (vom J. 1874 aufwärts) und Elektrotechnische Zeitschrift (die achtziger, neunziger Jahre des XIX. und Anfang des XX. Jahrhunderts).

Diffusion von Dämpfen. Sein vorzüglicher Apparat für die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents wurde im J. 1878 auf der Weltausstellung in Paris prämiert.

Zahlreiche Abhandlungen beziehen sich auf die Entladung in evakuierten Röhren; sie sind unter dem Titel „Strahlende Elektroden-Materie“ veröffentlicht und bilden einen wertvollen Beitrag zur modernen Elektronentheorie. Sie wurden auch in englische Sprache übersetzt und von der Physical Society<sup>1)</sup> in London im J. 1889 veröffentlicht. Die diesbezüglichen von Puluj erfundenen Vakuumapparate wurden auf der elektrischen Ausstellung in Paris im J. 1881 prämiert. Ein Teil derselben befindet sich in der Sammlung des Conservatoire National des Arts et Métiers in Paris.

Aus Puluj's Forschungen über Kathodenstrahlen ging auch seine Lampe für hochgespannten Wechselstrom hervor, in welcher ein Glühkörper aus Thoroxyd durch Kathodenstrahlen zum Leuchten gebracht wurde. Interessant ist auch seine phosphoreszierende Lampe, in welcher er bereits 13 Jahre vor der Röntgenschen Entdeckung eine Antikathode unterbrachte. Diese Antikathode war aus einem mit grünlich phosphoreszierenden Schwefelkalzium einerseits überzogenen Glimmerblättchen gefertigt. Mit seiner phosphoreszierenden Lampe machte Puluj gleich nach der Röntgenschen Entdeckung prächtige Röntgen-Aufnahmen, die in mehreren deutschen, englischen und französischen Zeitschriften reproduziert wurden. In seiner Abhandlung „Über die Entstehung der Röntgenstrahlen und ihre photographische Wirkung<sup>2)</sup>“ spricht er die Vermutung aus, daß die Röntgenstrahlen eine Art von Wellenbewegung sind, und glaubt, daß sie mit Erfolg in der Chirurgie Verwendung finden werden. In der Tat, seine Vermutung wurde von späteren Forschern (Laue) bestätigt und die Röntgenstrahlen wurden zum wichtigsten Werkzeug der Chirurgie.

Bemerkenswert sind ferner seine Verbesserungen in der Herstellung von Kohlenfaden-Glühlampen, sein Telethermometer, eine Einrichtung an Telephonstationen zum Schutz gegen hochgespannte Ströme, sein Phasenindikator zur Bestimmung der Phasendifferenz von Wechselströmen und der Selbstinduktion induktiver Stromkreise, sein Fallapparat und noch andere Apparate.

In den neunziger Jahren des XIX. und am Anfang des XX. Jahrhunderts veröffentlichte Puluj zahlreiche Abhandlungen aus dem Gebiete der Elektrotechnik, meistens in der „Elektrotechnischen Zeitschrift“. Sie behandeln die Selbstinduktion, die Phasendifferenz, periodisch veränderliche elektromotorische Kräfte, Anwendung des Kreisdiagrammes auf Wechselstromgeneratoren, Telephonstationen für elektrische Hochspannungsanlagen und elektrische Zentralen.

Puluj blieb stets in Berührung mit der elektrischen Industrie. Unter seiner Leitung wurde im J. 1896 das städtische Elektrizitätswerk in Marienbad rekonstruiert und im J. 1897 das Elektrizitäts-

<sup>1)</sup> Physical Memoirs. Vol. I. Part 2. 1889.

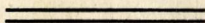
<sup>2)</sup> Wien. Berichte. 105. Abt. II a, S. 228, 1896.

werk in Zwickau gebaut. Auch bei der Gründung von den Elektrizitätswerken in Prag, Meran, Franzensbad und in anderen Städten fungierte er als technischer Berater. In Anerkennung seiner Verdienste auf dem elektrotechnischen Gebiete wurde er im J. 1913 vom elektrotechnischen Verein in Wien anlässlich der Feier des 30-jährigen Bestandes des Vereines zum Ehrenmitglied ernannt.

Puluj war auch literarisch tätig. Zusammen mit dem ukrainischen Schriftsteller Kulisch übersetzte er das alte und das neue Testament in die ukrainische Sprache. Diese Übersetzung wurde von der britischen Bibelgesellschaft im J. 1904 in Wien herausgegeben. Außerdem veröffentlichte er einige populärwissenschaftliche Arbeiten in ukrainischer und deutscher Sprache.

Er hielt auch zahlreiche Vorträge auf dem Gebiete der Elektrotechnik und Physik in dem von ihm gegründeten und jahrelang geleiteten elektrotechnischen Verein in Prag, sowie auch in anderen wissenschaftlichen und Fachvereinen in Prag und in Wien. Einige von diesen Vorträgen erschienen in der Elektrotechnischen Zeitschrift und können noch heute als musterhaft erklärt werden.

Seine Tätigkeit war umfangreich und sehr ersprießlich, insbesondere auf dem Gebiete der Elektrotechnik. Mit Recht nannte man ihn daher einen der Pioniere der Elektrotechnik in Österreich. Ehre seinem Andenken!



Н. Гаморак.

Камянець Под.

## Новий тип транспірографа.

„...At present we are largely occupied in trying to find out the antecedent conditions that determine the processes that go on in the plant... For these problems qualitative observations are of but little value, and emphasis is now being strongly placed on quantitative experimentation... But the apparatus and methods by which effective conditions may be controlled and measured are generally not yet available; they remain mostly to be devised... In this connection it may be pointed out that, for the present and immediate future, contributions in instrumentation and technique should be regarded as much more important than any general conclusions that may be derived from most of our commonly only abortive attempts to obtain reliable knowledge of causal relations by short-cuts that are not planned to succeed in the broader way...“

(B. E. Livingston: The present crisis in plant physiology, 1927.)

Цитовані слова, як не треба краще, характеризують теперішнє становище у фізіології рослин.

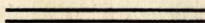
Перехід від якісного до кількісного способу дослідження, а властиво перевага цього останнього, вимагає прецизної та справної апаратури. Тимчасом фізіологія рослин, як порівнюючи недавню науку, ще не встигла її витворити. Сусідні області, що з ними по методиці фізіологія тісно сходиться — фізика й хемія — не тільки не можуть часом дати потрібної методики та апаратури для спостережень процесів життя, значно складніших, як процеси в неживій матерії — а противно, не раз фізіологам приходится робити нові відкриття або їх поглиблювати в області неживого (розробка фізіологами питань осмотичного тиснення, евапорації і т. д.). Тому й не дивно, що ми й до тепер ще не маємо усталеної, стандартизованої апаратури навіть для таких основних життєвих процесів рослини, як ассимиляція, дихання,

werk in Zwickau gebaut. Auch bei der Gründung von den Elektrizitätswerken in Prag, Meran, Franzensbad und in anderen Städten fungierte er als technischer Berater. In Anerkennung seiner Verdienste auf dem elektrotechnischen Gebiete wurde er im J. 1913 vom elektrotechnischen Verein in Wien anlässlich der Feier des 30-jährigen Bestandes des Vereines zum Ehrenmitglied ernannt.

Puluj war auch literarisch tätig. Zusammen mit dem ukrainischen Schriftsteller Kulisch übersetzte er das alte und das neue Testament in die ukrainische Sprache. Diese Übersetzung wurde von der britischen Bibelgesellschaft im J. 1904 in Wien herausgegeben. Außerdem veröffentlichte er einige populärwissenschaftliche Arbeiten in ukrainischer und deutscher Sprache.

Er hielt auch zahlreiche Vorträge auf dem Gebiete der Elektrotechnik und Physik in dem von ihm gegründeten und jahrelang geleiteten elektrotechnischen Verein in Prag, sowie auch in anderen wissenschaftlichen und Fachvereinen in Prag und in Wien. Einige von diesen Vorträgen erschienen in der Elektrotechnischen Zeitschrift und können noch heute als musterhaft erklärt werden.

Seine Tätigkeit war umfangreich und sehr ersprießlich, insbesondere auf dem Gebiete der Elektrotechnik. Mit Recht nannte man ihn daher einen der Pioniere der Elektrotechnik in Österreich. Ehre seinem Andenken!



Н. Гаморак.

Камянець Под.

## Новий тип транспірографа.

„...At present we are largely occupied in trying to find out the antecedent conditions that determine the processes that go on in the plant... For these problems qualitative observations are of but little value, and emphasis is now being strongly placed on quantitative experimentation... But the apparatus and methods by which effective conditions may be controlled and measured are generally not yet available; they remain mostly to be devised... In this connection it may be pointed out that, for the present and immediate future, contributions in instrumentation and technique should be regarded as much more important than any general conclusions that may be derived from most of our commonly only abortive attempts to obtain reliable knowledge of causal relations by short-cuts that are not planned to succeed in the broader way...“

(B. E. Livingston: The present crisis in plant physiology, 1927.)

Цитовані слова, як не треба краще, характеризують теперішнє становище у фізіології рослин.

Перехід від якісного до кількісного способу дослідження, а властиво перевага цього останнього, вимагає прецизної та справної апаратури. Тимчасом фізіологія рослин, як порівнюючи недавню науку, ще не встигла її витворити. Сусідні області, що з ними по методиці фізіологія тісно сходиться — фізика й хемія — не тільки не можуть часом дати потрібної методики та апаратури для спостережень процесів життя, значно складніших, як процеси в неживій матерії — а противно, не раз фізіологам приходится робити нові відкриття або їх поглиблювати в області неживого (розробка фізіологами питань осмотичного тиснення, евапорації і т. д.). Тому й не дивно, що ми й до тепер ще не маємо усталеної, стандартизованої апаратури навіть для таких основних життєвих процесів рослини, як ассимиляція, дихання,

транспірація, абсорпція. Ми повинні в цім напрямку стремітися до типу так прецізного, справного і так стандартизованого апарату, яким являється для анатомії мікроскоп. Але до цього типу фізіологічного апарату ми ще далекі і при теперішньому становищі не приходиться дивуватися словам В. Е. Livingstone-a: „I judge that hardly a single passingly satisfactory experiment has ever been performed with plants...“ (op. cit.).

Значить, на порядку дня у фізіології рослин — відкриття прецізної та справної апаратури. Кількісний спосіб дослідження вимагає масових спроб. Складність життєвих процесів вимагає співучасти в розробці одної проблеми більшої кількості дослідників, вимагає колективної розробки. Ця потреба в масових і колективних дослідах ставить певні вимоги до апаратури: вона повинна бути стандартизована (щоби можна було між собою з певністю порівнювати кількісні дані поодиноких дослідів); даліше, вона повинна бути по можливості автоматична — для економії часу. Автоматична реєстрація має ще й другу важливу додатну сторону: вона усуває суб'єктивні помилки спостерігача.

І не дивно, що на відкриття такої автоматичної апаратури віддають чимало часу. Та з многочисленних спроб тільки невелика кількість апаратів на стільки виправдала себе, що їх заготовляють в певній стандартизованій формі (наприклад самореєструючий авксанометр). А зрештою і до цього часу не має у фізіології рослин такої апаратури і коли приходиться влаштувати фізіологічну лабораторію, то треба мало що не всі апарати робити на окремі замовлення, чи то на підставі літератури, чи то на основі власних проєктів.

Перейдемо тепер до апаратів, що являються нашою темою — транспірографів, тобто самореєструючих апаратів до поміру транспірації, одного з найважливіших процесів у житті рослини. Відомий цілий ряд спроб конструкції таких апаратів. Огляд цих апаратів можна знайти в книзі Burgerstein-a (1), Grafe (4, 5), а також у праці Briggs-a і Schrantz-a (3). І хоч ці спроби сягають ще часів Vesque-a (8), тобто 1878 року — помімо цього ще до тепер ні один з апаратів не закріпився у вжитку.

А що для помірів транспірації потрібно такого стандартизованого самореєструючого апарату — про це мабуть багато говорити не приходиться. Не тільки суто теоретична сторона проблемів водного режиму рослини вимагають цього, але в не меншій мірі практичні питання, звязані з посухостійкістю ро-

слин, з'окрема культурних рослин. В обидвох випадках треба масових та численних спроб, що їх можна виконати тільки при наявності доброї апаратури.

Колиж ми переглянемо літературу про „техніку“ поміру транспірації, то завважується цікаве явище, що апаратом даної конструкції користується тільки сам його винахідник, а в загальне вживання цей апарат не входить. Це вказує на існування причин, що перешкаджають вживанню таких апаратів, що роблять їх результати не раз непевними.

Одна з таких важливих причин, що перешкаджають точній роботі транспірографів — це різні принагідні зовнішні потрясення, що виводять вагу з рівноваги. Особливо мають значіння ці потрясення при лабораторних спробах і навіть при найбільш стабільній установці не вдається їх зовсім усунути.

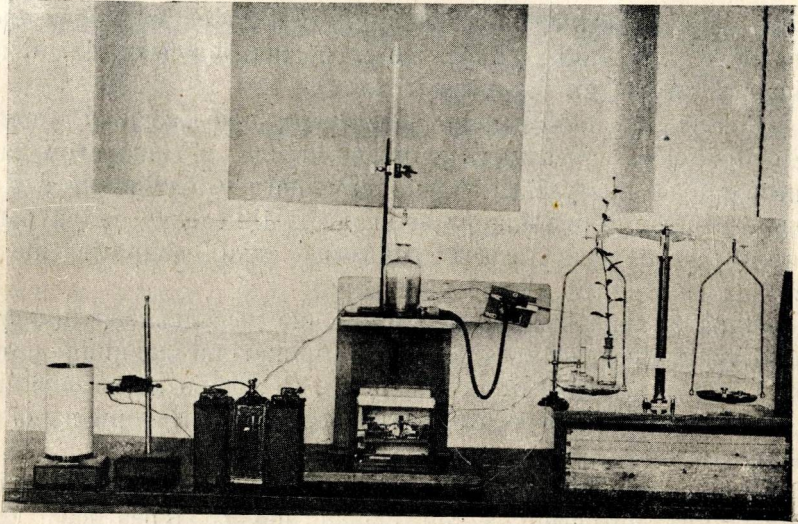
При дотеперішніх спробах старалися усунути вплив цих принагідних потрясень в той спосіб, що до терез ваги були прикріплені диски, погружені в густий плин (гліцерину). Але „успокоювачі“ такого типу зменшують чутливість ваги, роблять її рухи повільними, а що найважливіше, зовсім не застерігають від фальшивої реєстрації в моментах безпосередно перед фактичною реєстрацією, бо тоді навіть „приглушене“ потрясення вповні вистарчає, щоби спричинити реєстрацію.

Вище наведені міркування і спроби в цьому напрямку переконали мене в необхідності нових конструкцій. В дальнішому подаю опис апарату, що ним я користувався успішно при моїх лабораторних спробах над транспірацією рослин.

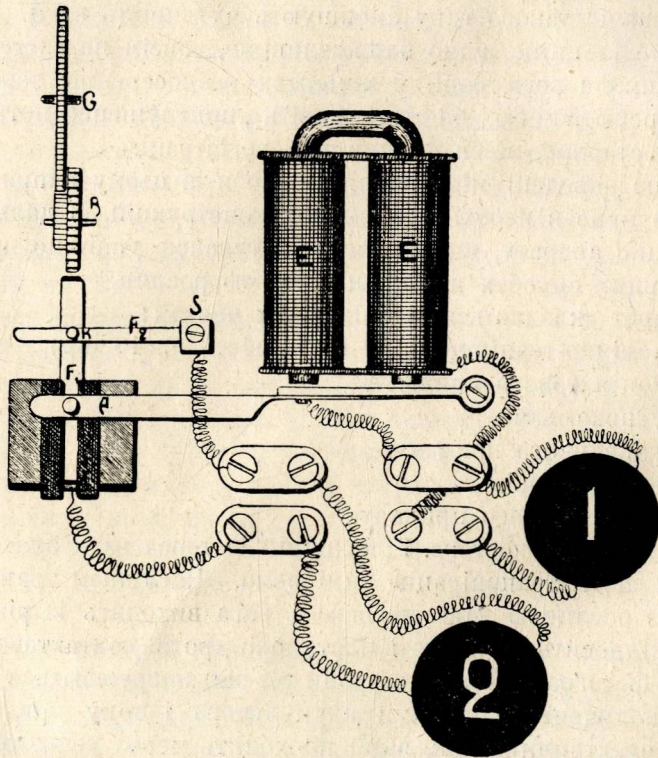
Апарат складається зі слідуєчих частин:

- а) хемічно-технічної ваги (чутливість на 10 mg),
- б) контактового приладу,
- в) успокоювача,
- г) капельного приладу,
- д) акумуляторів,
- е) реєструючого приладу.

Як бачимо з фотогр. 1, на одній із терез ваги знаходиться рослина, що її транспірацію виміряємо. Наслідком транспірації тереза із рослиною стає легшою і вага виходить із рівноваги. Тереза підноситься уверх і платинові дроти контактового приладу (на фотографії з лівої сторони терези) погружуються в ртуть. Дроти сполучені з полюсами акумулятора і тому при контакті повстає електричний ток, який проходить через успокоювач (на фотографії 1 в низу між вагою і акумуляторами).



Малюнок 1.



Малюнок 2. 1 — до ргунного контакту.  
 2 — до капельного приладу та реєструючого приладу.

Будова успокоювача стане нам зрозуміла зі схеми 2. Коли наступає на вазі контакт, електричний ток проходить через електромагнети  $EE$ . Якір  $A$  притягується ядром електромагнетів і рівночасно з якором входить в рух металева пружинка  $F_1$ . На кінці цієї металевої пружини мається гумовий наконечник. Коли електромагнети вводять в рух пружинку  $F_1$ , гумовий наконечник доторкається щільно до колісця годинникового приладу  $R$  і пружинка  $F_1$  наслідком руху колісця підноситься у верх. По деякому часі пружинка  $F_1$  підносячись входить в дотик зі срібним контактом  $K$ , що мається на поперечній пружинці  $F_2$ . Тільки вже наслідком цього другого контакту приходять до діяння апарати, що обозначені в схемі цифрою „2“, а саме капельний прилад і реєструючий прилад.

Капельний прилад вже описаний мною в попередній публікації (6). В основі він залишився той самий, хоч впроваджено деякі зміни. Функціонування цього приладу опирається на принципі сполучених судин. В пляшці (що її виразно видно на фотогр. 1) мається парафіновий олій (paraffinum liquidum). Пляшка має в низу отвір, до якого щільно пристосована гумова рурка. На своїому другому кінці гумова рурка насунена на шклянну рурку, що прикріплена до якоря електромагнетів типу електричного дзвінка. Апарат зрегульовується в той спосіб, що при нормальному становищі парафіновий олій в кінці шкляної рурки стоїть на однаковій висоті з рівнем плин у пляшці і тому олій не витікає. Колиж прийде до контакту (через  $K$  в успокоювачі), тоді електромагнети активуються, притягують якір і з ним шклянну рурку в низ, кінець шкляної рурки стає нижше рівня плин у пляшці і на основі принципу сполучених судин парафіновий олій стає впливати зі шкляної рурки в формі каплини.

Каплина парафінового олію спадає в мензурку, що мається на вазі. Наслідком того ліва тереза (на фотогр. 1) стає важша і спадає в низ, ртутний контакт переривається, а рівночасно з тим переривається діяння електромагнетів  $EE$  в успокоювачі. Пружинка  $F_1$  входить в своє нормальне положення і контакт  $K$  переривається. Наслідком того електромагнети капельного приладу перестають притягувати якір, він підноситься у верх wraz із шклянною руркою і парафіновий олій перестає витікати. Значить, при відповідній чутливості вага повертає після випадення одної каплини в початкове становище.

Кожна каплина реєструється на барабані, що його бачимо на фотогр. 1 з лівої сторони, з самого краю. Барабан робить

оборот раз в 24 години. Регістрація відбувається електромагнетним приладом, як часто при фізіологічних спробах. За кожний раз, коли активуються електромагнети капельного приладу, рівночасно проходить ток через електромагнети реєструючого приладу і перо зазначає на барабані точку. Значить: кожній каплі парафінового олію, що випадає в мензурку на вазі, відповідає одна точка на барабані.

Остається дати пояснення, в чому полягає значіння успокоювача. Коли вага виходить з рівноваги наслідком зміни тягару, то ця зміна рівноваги являється сталою. Колиж на вагу діють принагідні потрясення, то вони викликають короткі коливання, що спричинюють контакт на вазі і ток в електромагнетах *EE* не на довше, як декілька секунд. Успокоювач при допомозі шрубки *S* (гляди мал. 2) зрегульований в той спосіб, що при короткотривалім потрясенні пружинка  $F_1$  не доходить до контакту *K* — бо заким вона дійде, ток переривається в електромагнетах *EE* наслідком коливання в другому напрямку. Колиж зміна тягару являється сталою, тоді пружинка  $F_1$  наслідком функціонування годинникового приладу підноситься до контакту *K*. Через цей контакт входить в діяння капельний апарат, капля олію випадає, а рівночасно на барабані реєструється точка. Шрубкою *S* можна регулювати час контакту на вазі, що проходить без реєстрації.

Методом каплин користується також апарат Blockman-a і Raibe-a (2). Але конструкція цього апарату опирається на зовсім другому принципі (каплини води витікають з пляшки Маріота), успокоювач гліцеринового типу, а як плин вживається вода. Вживання води спричинює можливість випарування; тим самим викликає помилки при спробах. А дальше тягар каплин парафінового олію значно менший<sup>1)</sup> і тим самим спостереження можуть бути значно більше деталізовані.

Для ілюстрації функціонування апарату подаю декілька лабораторних спроб (фотогр. 3).

Спроба 10. 14/V. Галузка *Aesculus Hippocastanum* зрізана під водою і вложена в пляшку з водою. Видно сильнішу транспірацію в полудневу пору (13—15 год.) і чимраз більше зменшення ночью.

<sup>1)</sup> У моїх спробах тягар каплі був при кімнатній температурі пере-січно 23 мг.

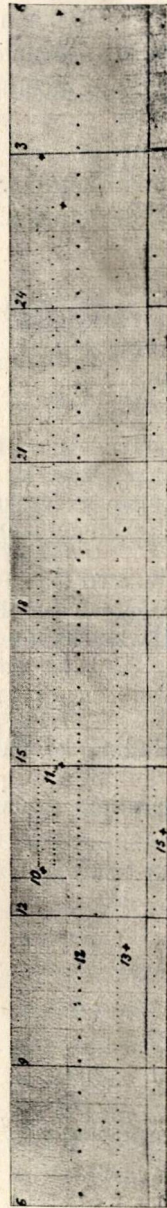
Спроба 11. 15/V. Галузка *Acer Negundo*. Перебіг транспірації як в спробі 10.

Спроба 12. 16/V. Галузка *Berberio vulgaris*, свіжо зрізана. Спробу продовжувано цілу добу. Перебіг транспірації як у попередніх спробах — сильна транспірація 12—15 год., декілька раз слабша ночью.

Спроба 13. 17/V. Та сама галузка *Berberis vulgaris*. Перебіг транспірації аналогічний, як 16/V.

Спроба 15. 19/V. Та сама галузка *Berberis vulgaris*. Перебіг транспірації такий, як у спробах 12 і 13, але інтензивність його значно менша. Спроби 12, 13 і 15 доказують, що при експериментах зі зрізаними галузками інтензивність транспірації в пізніших днях спроби сильно зменшується, хоч перебіг транспірації на протязі доби остає той же. Тому при таких спробах треба докладно вказувати час, що пройшов після зрізання галузки.

Дякуючи електричному успокоювачу описаним апаратом можна працювати і в лабораторії, де буває навіть досить неспокійно. І так зазначені мною спроби відбувалися в той час, коли кругом по сусідніх аудиторіях йшли лекції і кількість випадкових потрясень була велика. Всеж таки вказано, щоби спроби з транспірографом проводилися по можливості в спокійних умовах, бо, коли принагідні коливання відбуваються надто часто, тоді реєстрація на барабані не раз не дає зовсім докладної картини; треба вводити в неї деякі корективи. Правда, до цих корективів звичайно досить легко дійти. І так буває, що в коротці перед нормальною реєстрацією наступає принагідне потрясення. При малій амплітуді коливання повстає контакт, випад каплини і реєстрація. Значить, тут реєстрація, що мала відбуватися пізніше, наступає дещо скоріше. Такі неточності легко завважити і виправити: віддалення точок реєстрації звичайно буває рівномірне і легко впізнати правдиве місце точки реєстрації. Сама кількість точок (тобто абсолютна кількість транспірованої води) зазначена правильно.

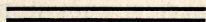


Малюнок 3.

Друга неточність моглаби повстати тоді, коли вже підчас самого випаду каплини і реєстрації ділає сильне потрясення. Це потрясення перериває випад каплини і очевидно, що в скорому часі, коли тільки вага заспокоїться, наступає нова реєстрація. На барабанах, що обертаються раз в 24 год. — ці дві реєстрації сліднують по собі так близько, що вся ненормальність реєстрації виявляється тільки в дещо грубшій точці.

### Література.

1. Burgerstein A. Die Transpiration der Pflanzen. Bd. 1 — 1904; Bd. 2 — 1920; Bd. 3 — 1925.
2. Blackman V. H. and Paine S. G. A recording transpirometer. *Ann. of Bot.* 28, 1914.
3. Briggs and Shantz. An automatic transpiration scale of large capacity for use with freely exposed plants. *Journ. Agricultur. Research.* Washington, 5, 1915.
4. Grafe V. *Ernährungsphysiologisches Praktikum*, 1914.
5. Grafe V. Messung der Gas- und Wasserbewegung im Pflanzenorganismus. *Handbuch der biolog. Arbeitsmethoden*, Abt XI, Teil 2, H. 1, 1920.
6. Гаморак Н. Новий апарат для поміру транспірації рослин. *Записки Сільсько-Господ. Інституту в Кам'янці на Поділлі*, т. 3, 1926.
7. Livingston B. E. The present crisis in plant physiology. *Bulletin of the Torrey Botanical Club*. Vol. 53, 1927.
8. Vesque M. J. L'absorption comparée directment à la transpiration. *Annales des sciences naturelles. Botanique*. Vol. VI, 1878.



Др. Олександр Смакула.

## До фосфоризації алькалевих гальюїдів.

Коли насвітлювати алькалеві гальюїди проміннями Рентгена, то вони зафарбовуються. Так н. пр. *NaCl* приймає жовту краску, *KCl* синю, а *RbCl* фіолетову. При цьому оказують сі кришталі між 300  $\mu$  а 600  $\mu$  абсорпцію з виразним максимум, як показали поміри Z. Gyulai'a<sup>1)</sup> і W. Flechsig'a<sup>2)</sup>. При насвітлюванні сих закрашених кришталів коротким (себ-то синім) світлом абсорпційна крива сплющується, а рівночасно пересувається максимум в напрямі довших хвиль. Те саме явище викликає підвищення температури, як се рівнож видно з праці W. Flechsig'a. Gudden і Pohl<sup>3)</sup> пояснюють се явище неправильностями в кристалічній сітці, які викликає підвищення температури або насвітлення.

Рівнож закрашення (зафарбування) кришталів є тісно звязане з неправильностями кристалічної сітки. Так н. пр. природний криштал камінної соли закрашується при тому самому насвітленні проміннями Рентгена значно слабше, як криштал штучно зроблений. (Методом S. Kyropoulos'a<sup>4)</sup> можна на протязі 3-ох годин зробити штучно криштал величини 125  $\text{cm}^3$ , а то й більші). У синтетичному кришталі є сітка безперечно більше нарушена, як у природному й сим пояснюється його сильніше зафарбування. Се підтверджує і праця Przigram'a<sup>5)</sup>, який виказав, що під впливом тиснення кришталі сильніше зафарбовуються. Домішка тяжких металів (*Ag*, *Cu*, *Mn*, *Cr*) викликає рівнож неправильности в кристалічній сітці й се сприяє також більшому за-

1) Zeitschrift für Physik, том 33, стор. 251, 1925.

2) " " " " 36, " 605, 1926.

3) " " " " 41, " 833, 1927.

4) Zeitschrift für anorg. u. allgem. Chemie, том 154, стор. 308, 1826.

5) Zeitschrift für Physik, том 37, стор. 881, 1926.

Друга неточність моглаби повстати тоді, коли вже підчас самого випаду каплини і реєстрації ділає сильне потрясення. Це потрясення перериває випад каплини і очевидно, що в скорому часі, коли тільки вага заспокоїться, наступає нова реєстрація. На барабанах, що обертаються раз в 24 год. — ці дві реєстрації слідуєть по собі так близько, що вся ненормальність реєстрації виявляється тільки в дещо грубшій точці.

### Література.

1. Burgerstein A. Die Transpiration der Pflanzen. Bd. 1 — 1904; Bd. 2 — 1920; Bd. 3 — 1925.
  2. Blackman V. H. and Paine S. G. A recording transpirometer. *Ann. of Bot.* 28, 1914.
  3. Briggs and Shantz. An automatic transpiration scale of large capacity for use with freely exposed plants. *Journ. Agricultur. Research.* Washington, 5, 1915.
  4. Grafe V. *Ernährungsphysiologisches Praktikum*, 1914.
  5. Grafe V. Messung der Gas- und Wasserbewegung im Pflanzenorganismus. *Handbuch der biolog. Arbeitsmethoden*, Abt XI, Teil 2, H. 1, 1920.
  6. Гаморак Н. Новий апарат для поміру транспірації рослин. *Записки Сільсько-Господ. Інституту в Кам'янці на Поділлі*, т. 3, 1926.
  7. Livingston B. E. The present crisis in plant physiology. *Bulletin of the Torrey Botanical Club*. Vol. 53, 1927.
  8. Vesque M. J. L'absorption comparée directment à la transpiration. *Annales des sciences naturelles. Botanique*. Vol. VI, 1878.
- 
-

Др. Олександр Смакула.

## До фосфоризації алькалевих гальюїдів.

Коли насвітлювати алькалеві гальюїди проміннями Рентгена, то вони зафарбовуються. Так н. пр. *NaCl* приймає жовту краску, *KCl* синю, а *RbCl* фіолетову. При цьому оказують сі кристали між 300  $\mu$  а 600  $\mu$  абсорпцію з виразним максимум, як показали поміри Z. Gyulai'a<sup>1)</sup> і W. Flechsig'a<sup>2)</sup>. При насвітлюванні сих закрашених кристалів коротким (себ-то синім) світлом абсорпційна крива сплющується, а рівночасно пересувається максимум в напрямі довших хвиль. Те саме явище викликає підвищення температури, як се рівнож видно з праці W. Flechsig'a. Gudden і Pohl<sup>3)</sup> пояснюють се явище неправильностями в кристалічній сітці, які викликає підвищення температури або насвітлення.

Рівнож закрашення (зафарбування) кристалів є тісно звязане з неправильностями кристалічної сітки. Так н. пр. природний кристал камінної соли закрашується при тому самому насвітленні проміннями Рентгена значно слабше, як кристал штучно зроблений. (Методом S. Kyropoulos'a<sup>4)</sup> можна на протязі 3-ох годин зробити штучно кристал величини 125 см<sup>3</sup>, а то й більші). У синтетичному кристалі є сітка безперечно більше нарушена, як у природному й сим пояснюється його сильніше зафарбування. Се підтверджує і праця Przigram'a<sup>5)</sup>, який виказав, що під впливом тиснення кристали сильніше зафарбовуються. Домішка тяжких металів (*Ag, Cu, Mn, Cr*) викликає рівнож неправильности в кристалічній сітці й се сприяє також більшому за-

<sup>1)</sup> Zeitschrift für Physik, том 33, стор. 251, 1925.

<sup>2)</sup> " " " " 36, " 605, 1926.

<sup>3)</sup> " " " " 41, " 833, 1927.

<sup>4)</sup> Zeitschrift für anorg. u. allgem. Chemie, том 154, стор. 308, 1826.

<sup>5)</sup> Zeitschrift für Physik, том 37, стор. 881, 1926.

крашенні, але не всі метали однаково діляють: кришталі з домішкою срібла зафарбовуються сильніше, як з домішкою міді.

Аналогічно мається справа з відфарбуванням. Синтетичний кристал тратить свою краску скорше, як природний. Сей процес відфарбування можна прискіпити, коли температуру кристалу підвищимо. Червоне світло не має жадного впливу на відфарбування. Синтетичний, закрашений кристал насвічував я 6 годин сильним червоним світлом вугляної лампи й закрашення майже нічого не змінилося, підчас коли при насвітлюванні синім світлом кристал тратить цілком свою краску вже на протязі кількох хвилин.

Щоби означити вплив синього світла на закрашені (проміннями Рентгена) кришталі алькалевих гальоїдів, поступав я в сей спосіб. Кристал ділив я на дві рівні часті; одну часть ogrівав в точно означених відступах по 100 секунд і після кожного ogrіття міряв абсорпційний сочинник при помочи подвійного монохроматора, фотоелектричної клітини та одностржкового електрометра. Абсорпцію міряв я для тої довжини хвилі світла,

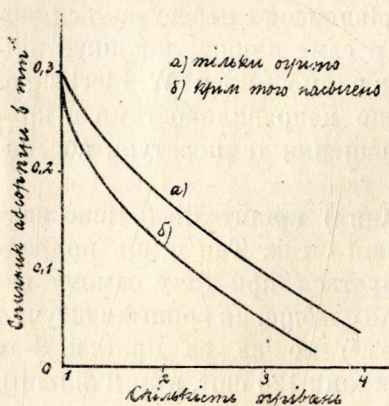


Рис. 1.

яку кристал найсильніше абсорбує. З другою частиною кристалу поступав я так само, лише перед кожним нагріттям насвічував на протязі 10 секунд синім світлом. З рис. 1. бачимо, що абсорпційний сочинник при насвітлюванні синім світлом скорше зменшується, як лише при самому нагріванні. З сього виходить, що закрашені проміннями Рентгена алькалеві гальоїди заховаються під впливом синього

світла подібно як при високій температурі. На кришталі з домішкою тяжких металів впливає синє світло сильніше, як без домішки.

Сей вислід, що синє світло впливає на закрашені гальоїди подібно як висока температура, поставив під знак запитання працю А. Fum'a,<sup>1)</sup> яку він зробив у тутешньому інституті перед двома роками. Fum найшов між иншим, що коли закрашений

<sup>1)</sup> Zur lichtelektrischen Leitung u. Phosphoreszenz von  $NaCl$ -Kristallen. 1925.

кристал навітити синім світлом, а відтак ogrіти до  $100^{\circ}\text{C}$ , то він світить (фосфоризує). Колиж по синім світлі навітити червоним, то при ogrіванні до  $100^{\circ}\text{C}$  нема жадного ефекту. Червоне світло привертає кристал до нормального стану, подібно як се Gudden і Pohl<sup>1)</sup> найшли при фотоелектричних явищах. Згідно з моїм вислідом могло бути можливе, що Frum міряв світло, що походило від відфарбування (Entfärbungsleuchten) кристалу, а не дійсну фосфоризацію. Але, як дальше покажеться, мої дальші поміри говорять в користь праці Frum'a.

Дальшою мовою задачею було встановити звязок між зафарбуванням і сумою фосфорового світла (після Ленарда: Lichtsumme). Коли ogrіти закрашений кристал до  $300^{\circ}\text{C}$ , то краска в короткім часі (кругло 1 хвилина) зникає, а рівночасно висилає кристал фосфорове світло. На основі сього повиненби кристал дати тим більшу суму фосфорового світла, чим сильнійше він закрашений. Щоби се вияснити, ogrівав я кристал по кожному помірі абсорпційного сочинника (як передше) означений час (5 секунд) до  $200^{\circ}\text{C}$  і мірив суму світла при помочи фотоелектричної комірки та одниткового

електрометра (вихилення електрометра в впрост пропорціональне до суми світла). Виследи представлено на рис. 2. Поміри виконувано взад, себ-то зачинаючи від великої абсорпції і великої світляної суми. Зразу меншає сума фосфорового світла досить скоро, а відтак чим раз поволійше зближається до незміримої величини. До помірів уживав я природних і синтетичних кристалів. Всі криві мають той самий характер (рис. 2.), з тою хіба різницею, що деякі криві вказують, немовби кристал стративши краску

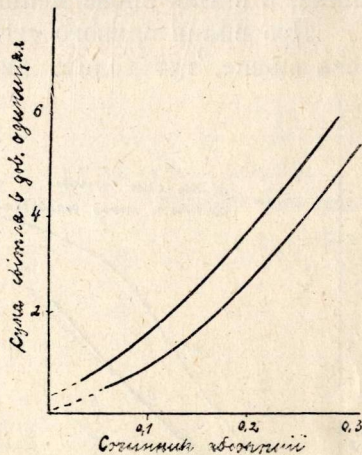


Рис. 2.

рівночасно перестає світити. Однак се не завсігди буває. Коли н. пр. положити закрашений кристал на світло сонця, то краска по короткому часі (5 хвилин) майже зовсім зникає, але при ogrітті до  $300^{\circ}\text{C}$  кристал ще досить сильно світить.

Чим довше навітлювати кристал проміннями Рентгена, тим

1) Zeitschrift für Physik, том 37, стор. 881, 1926.

сильнійше він зафарбовується, але кількість нагромадженої світляної енергії зближається досить скоро до певної границі,

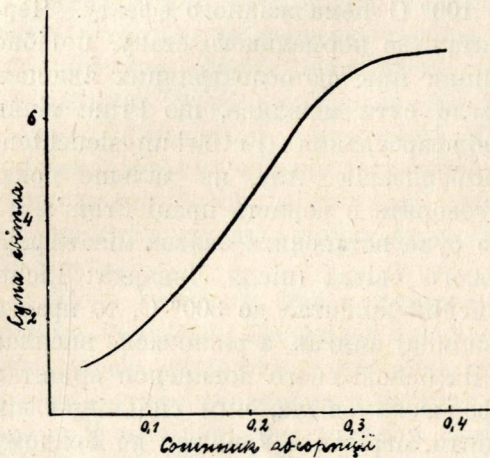


Рис. 3.

як се показує рис. 3. Чи крива завертає вниз, колиб кристал ще сильнійше зафарбувати, сього мені не вдалось досягнути, що зовсім не виключене. У свіжо насвічених кришталах сума фосфорового світла значно більша, як при давних; також кристали з домішкою світять сильнійше, як природні і зі збільшенням домішки тяжких металів росте й сума світла, але лише до певного відсотка до-

мішки, а відтак знова меншає.

Про вплив синього світла на закрашення кристалів була мова вище, тут ходить виказати вплив на суму фосфорового світла.

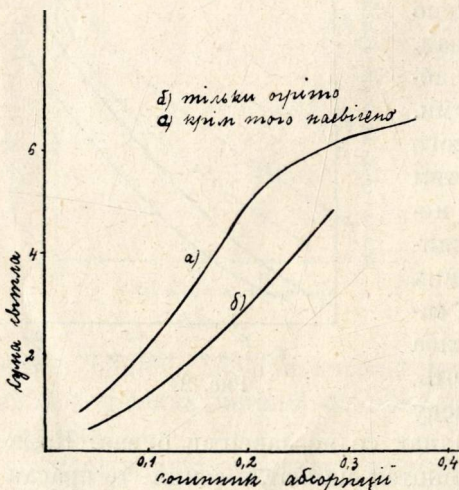


Рис. 4.

До вияснення сього міряв я на одній половині кристалу абсорпцію й при огріванні суму фосфорового світла, а з другою половиною поступав я так само, лише перед кожним поміром світляної енергії (суми світла) насвічував кристал 5 секунд синім світлом. Поміри представляє рис. 4. З нього бачимо, що насвітлювання синім світлом побільшує значно суму фосфорового світла, бо колиб синє світло тільки присвіщувало процес висвітлювання, то обі

криві перетиналибсь. Отже фосфорове світло й закрашення краски є два ріжні явища, які разом виступають, але не конечно за-всїгда, як се показує слїдуючий примір.

Деякі природні кришталі камінної соли, що далися досить сильно зафарбувати (сочинник абсорпції =  $0,3 \text{ m}^{-1}$ ) фосфоризували при нагріванні дуже слабо. Через насвітлювання позафіолетовими проміннями за помочю електродової дуги (*Al*, *Cd*, *Zn*) не вдалось також привести кристал до фосфоризовання; рівнож насвітлювання синім світлом не мало ніякого впливу. При помірі абсорпційного спектра показалось, що такі кришталі перепускають цілком світло аж до  $186 \text{ m}\mu$ .<sup>1)</sup> (При помірах понизше  $186 \text{ m}\mu$  треба вбудувати апаратуру т. є подвійний монохроматор з фотоелектричною коміркою в порожнечу, бо воздух такі короткі хвилі дуже сильно абсорбує). Цим отже доказано, що зафарбування не дає світляної енергії — се-то кристал не є фосфором, — коли йому бракує домішки тяжкого металю.

Алькалеві гальюїди з домішкою тяжких металів, як *Pb*, *Tl*, *Ag*, *Cu*, *Mn* виказують сильну абсорпцію в полісі позафіолетовій, як се видно з праці R. Hilsch'a<sup>2)</sup> і мові<sup>3)</sup> та є добрими фосфорами.

Додатно закрашені кришталі не фосфоризують також, коли їм бракує домішки тяжкого металю.

Що відфарбування не причинається до збільшення суми фосфорового світла, бачимо ще й з отсього експерименту. Одну половину закрашеного кришталу огрів я в означених відступах до  $200^\circ \text{C}$  і міряв кожним разом суму світла. Другу частину огрів я до  $350^\circ \text{C}$ , а відтак по остигненні насвітив 5 хвилин позафіолетовими проміннями й постував з тим

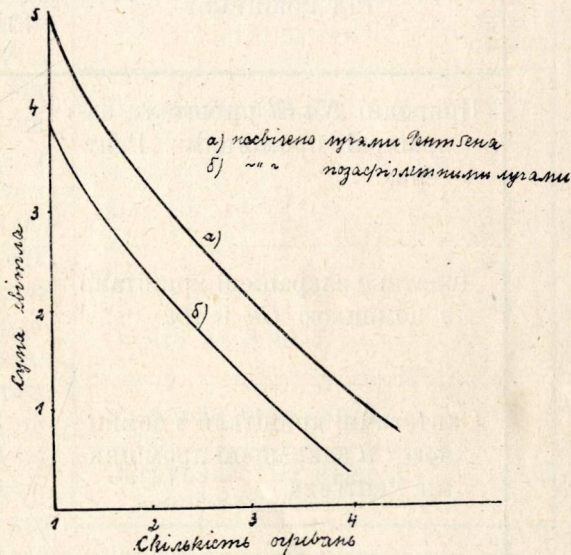


Рис. 5.

1) Pohl und Rupp, Annalen der Physik, том 81, стор. 1161, 1926.

2) Rudolf Hilsch, Zeitschrift für Physik, том 44, 1927.

3) Alexander Smakula, Zeitschrift für Physik, том 45, стор. 1, 1927.

кришталом дальше як з попередним. Хоч останній криштал зовсім не зафарбувався, то мимо того дав він майже таку саму суму світла, як попередний зафарбований, як се видно з рис. 5.

З висше наведених помірив бачимо, що зафарбування є лише побічним явищем при нагромадженні світляної енергії в кришталі лучами Рентгена та що його можна усунути через освітлення синім світлом або через підвиснення температури. Суму світла тих фосфорів та їх зафарбування не дали покищо розмежуватись від себе, але дуже можливо, що се дасться досягнути при помочи червоного світла.

Як вже передтим було згадано, не міг Frum у своїй праці з певністю ствердити, чи сума світла при його помірах мала чисто фосфоровий характер, чи ні. Зовсім ясно виходить се з моїх попередних помірив, як також з низше наведених, які я робив у дещо відмінному напрямі. Цілу суму фосфорового світла міряв я тим разом нараз, один раз тільки при нагрітті до 300° С, а другий раз при попередньому наświetлюванні синім світлом.

Рід кришталів	Сума світла	
	Тільки оґріто	Крім того наświetлено син. св.
Природні <i>Na Cl</i> кришталі за- крашені проміннями Рент- гена.	10	15
	10	15
	5	7
	5	10
Додатньо закрашені кришталі з домішкою <i>Сu</i> і <i>Mn</i> .	13	10
	10	5
	10	3
Синтетичні кришталі з доміш- кою <i>Сu</i> закрашені проміння- ми Рентгена.	12	8
	12	5
	13	2
	9	6,5
	14	8,5
	13	2

Висліди зіставлені в повисшій таблиці. Суму світла треба розу-  
міти тут як і при попередних помірах у довільних одиницях.

Поміри робив я на природних і синтетичних кришталлах закрашених проміннями Рентгена, а також на додатно закрашених парою соду (*Na*). Сума світла природних кришталів більшає по насвітленні синім світлом; такі кришталли мають дійсну фосфоризацію. Дещо инакше представляється на перший погляд справа з синтетичними і додатно закрашеними кришталлами. У них світляна сума меншає, коли їх насвітити синім світлом. Ся різниця походить відси, що при насвітлюванні синім світлом фосфоризують сі кришталли вже при звичайній температурі, під час коли природні доперва при огрітті найменше до 100° С. Тому що при моїх помірах між насвітленням а поміром суми світла проходило звичайно 5 секунд, я не міг міряти цілої суми, а лише частину її сим пояснюється сей протилежний вислід.

Доказ дійсної фосфоризації дався отже перевести впрост лише на природних кришталлах. Щоби се доказати її на синтетичних кришталлах, требаби послугуватись методом фосфороскопічною, при чому апаратура значно ускладнюється й тому я сього не робив. За те змодифікував я дещо попередні поміри: одну частину кришталла нагрів я до 300° С і змірив світляну суму, а другу насвітив 5 секунд

синім світлом і огрів лише до 200° С одну хвилину та змірив світляну суму, відтак охолодив криштал, насвітив, огрів до 200° С і т. д. Поміри зіставлені в табличці побіч. Насвітлювана частина дала 49 одиниць світляної енергії, а така сама тільки огріта лише 5 одиниць. Через насвітлювання синім світлом можна дістати з закрашеного кришталу довільну скількість світляної енергії, але лише теоретично, бо в дійсности світляна

енергія по кождому огрітті меншає наслідком розпадання певної частини осередків (центрів), які абсорбують енергію під час насвітлювання. Сей процес можна зробити практично зворотним (*reversibel*), коли огрівати лише дуже короткий час її тільки до температури, при якій криштал зачинає саме світити.

Насвітлювання	Сума світла
1. насвітлення	10
2. "	9
3. "	9
4. "	8
5. "	5
6. "	4
7. "	3
Огріто до 300° С	1
Загальна сума світла	49
Загальна сума ненасвітленого кусня	5

Frum доказав у своїй праці, що червоне світло приводить насвічений синім світлом криштал до первісного стану. Я розслідив сей вплив дещо дальше. Мої поміри не тільки підтвердили працю Frum'a, але виказали дальше, що червоне світло не відфарбовує кришталів а також може так само як і синє світло привести кришталі до фосфоризації, як се показує зіставлення в табличці побіч. Та се однак ще не цілком певне, бо червоне світло впливає дуже слабо й треба цілими годинами насвічувати, щоби викликати сю малу ріжницю, а такі поміри звичайно не мають великої точности.

Світл. сума	
Тільки огріто	Насв. черв. світл.
52	60
23	27
19	21
15	20

Рівнож і сю працю зробив я у І. Фізичному Інституті в Гетінгені в проф. R. Pohl'a, якому на сьому місці складаю щирю подяку за цінні поради.

Гетінген, 14. грудня 1927.



## La spirale logarithmique et sa développante.

1. La spirale logarithmique découverte par Descartes (1638) c'est la courbe dont le rapport d'un arc quelconque et le rayon vecteur correspondant est toujours constant tel que :

$$\frac{\widehat{AB}}{AB} = \frac{\widehat{AC}}{AC} = \frac{\widehat{AD}}{AD} = \text{const.}$$

c'est à dire :

$$\frac{r}{s} = \text{const.} \quad 1)$$

La différentiation de cette équation et sa transformation en coordonnées polaires celle que :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

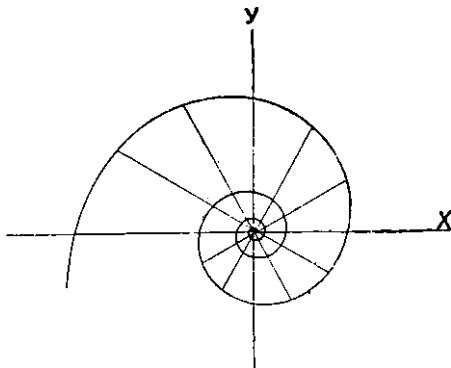
donne à nous

$$d\varphi = \sqrt{c^2 - 1} \frac{dr}{r}.$$

L'intégral de cette équation est :

$$r = Ce^{\alpha \varphi} \quad 2) \quad \left( \alpha = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad C = \text{const.} \right)$$

La spirale a la forme suivante :



Déjà J. Bernouilli (1691) a montré que la développée de la spirale logarithmique est pareille à la courbe même c'est à dire que la développée de cette courbe est aussi une spirale logarithmique. Dans la note suivante je veux donner une nouvelle démonstration du théorème reciproque et cela que la développante d'une spirale logarithmique est aussi une spirale logarithmique pareille.

Je demontrerais ce théorème par les méthodes egales à celles que j'ai employées dans mes notes précédentes<sup>1)</sup>.

2) Nous obtiendrons l'équation d'une développante de la spirale logarithmique de l'équation 2) et des équations:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad \eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \quad 3)$$

Dans ce but écrivons l'équation 2) dans la forme:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = Ce^{\alpha \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}}$$

c. e. à dire:

$$\log(\xi^2 + \eta^2) - \log C = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}. \quad 4)$$

La différentiation de cette équation par  $\xi$  donnera:

$$\frac{\xi + \eta \frac{d\eta}{d\xi}}{\xi^2 + \eta^2} = \alpha \frac{\xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

ou:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{\alpha\eta + \xi}{\eta - \alpha\xi} \quad 5)$$

Cependant il y a:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} \frac{1}{\frac{d\xi}{dx}} \quad \text{et à l'égard de l'équation 3)}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)}{y''^2}, \quad \frac{d\xi}{dx} = -y' \frac{3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)}{y''^2}$$

ou:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{1}{y'}$$

L'équation 5) prend maintenant la forme suivante:

$$y' = \frac{\eta - \alpha\xi}{\alpha\eta + \xi}. \quad 6)$$

<sup>1)</sup> cf. Sammelchrift der math.-naturw.-ärztl. Sektion, Lemberg, Bd. XXI, S. 65 sqt.

<sup>2)</sup> L'importance du ce numérateur comp. l. cit.

Posant pour  $\xi$  et  $\eta$  les valeurs 3) nous obtiendrons au lieu de l'équation 6) l'expression suivante:

$$(x + \alpha y)y' - (y - \alpha x) = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}. \quad (7)$$

C'est l'équation différentielle de la développante que nous cherchons. Mais on peut constater très facilement que l'équation au-dessus peut être satisfaite par la substitution

$$y' = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y} \quad (8)$$

car dans ce cas il y a

$$(1 + y'^2)^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2(\alpha^2 + 1)^2}{(\alpha x - y)^4}, \quad y'' = \frac{(xy' - y)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha x - y)^2}.$$

Mais étant

$$xy' - y = \frac{x^2 + y^2}{\alpha x - y}$$

alors

$$y'' = \frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha x - y)^3},$$

en conséquant la côté droite de l'équation 7) aura pour valeur  $\frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{\alpha x - y}$ . Cependant la côté gauche ayant la même valeur l'équation 7) devient l'identité:

$$\frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{\alpha x - y} \equiv \frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{\alpha x - y}$$

c'est à dire l'équation différentielle 7) a pour solution la valeur:

$$y' = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y}.$$

De la formule dernière suit

$$(\alpha x - y)y' = x + \alpha y$$

ou:

$$x + yy' = \alpha(xy' - y).$$

Écrivant cette équation dans la forme:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \alpha \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

son integral a la valeur:

$$\log(x^2 + y^2) = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \text{const},$$

et quand nous poserons

$$\text{const} = 2 \log m,$$

nous obtiendrons :

$$x^2 + y^2 = m^2 e^{2\alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m e^{\alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}. \quad 10)$$

Mais c'est l'équation de la spirale logarithmique, éventuellement dans le cas de  $m$  variable d'un faisceau des spirales logarithmiques pareilles à la courbe 1) donnée.

Nôtre théorème est donc démontrée.

Octobre, 1927.

## Окремий випадок циклоїдальних кривих. Слимаковата лінія.

У пошукуванні за такими величинами, які можнаби ужити як співрядні точок у просторі і які булиби незалежні від осей співрядних, ми опираючися на підставових працях Софуса Ліє, визнаємо їх у проміню осциляційного кола  $\bar{R}$  і довжині дуги даної кривої лінії  $\bar{s}$ . Вони зовуться дифференційними інваріантами.

Ми виведемо деякі підставові формули природної геометрії, які дають нам можливість знаходити рівняння природні кривих ліній циклоїдальних. Теорія геометрії природної є розбудована Е. Чезаром.<sup>1)</sup>

Насамперед ми можемо уявити собі такий уклад осей співрядних, якого початок лежить на кривій лінії і постійно змінює своє положення. При помочи теорії векторів і розважань граничних ми доходимо до формул, які дають нам зв'язок між співрядними природними а співрядними цього укладу осей співрядних, який завжди є у руху.

### §. 1.

Умовні різничкові рівняння для непорушності точки на площі.

Величини:  $\vec{OP}$ ,  $\vec{OO'}$ ,  $\vec{O'P}$  є подумані у значінню векторів. (Фіг. 1.)

Точки  $O$  і  $O'$  є дві сусідні точки одної і тої самої кривої лінії, осі  $x$ -сів і  $x'$ -сів є стичними цієї кривої; осі  $y$ -онів і  $y'$ -онів є нормальними (прямовісними) цієї кривої лінії.

<sup>1)</sup> E. Césaire — Vorles. über natürliche Geometrie. Leipzig 1901.

Проекційне рівняння векторів на вісь  $\vec{x}'$  звучить:

$$\vec{OP}_x' = \vec{OO'}_x' + \vec{O'P}_x'$$

де:

$$\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$$

$$\vec{OO'} = \Delta x + \Delta y$$

$$\vec{O'P}_x' = (x + dx)$$

Ми одержимо отже:

$$x \cdot \cos d\tau + y \cdot \sin d\tau = \Delta x \cdot \cos d\tau + \Delta y \cdot \sin d\tau + x + dx$$

або:

$$\cos d\tau \cdot (x - \Delta x) + \sin d\tau \cdot (y - \Delta y) = x + dx$$

При помочи розважувань граничних ми одержимо:

$$\lim \cos d\tau = 1$$

$$\lim \sin d\tau = d\tau$$

Отже:  $x - \Delta x + y \cdot d\tau - d\tau \cdot \Delta y = x + dx$

$d\tau \cdot \Delta y$  як величину другого порядку опускаємо.

$$- \Delta x + y \cdot d\tau = dx$$

Ділимо рівняння через  $ds$ .

$$- \frac{\Delta x}{ds} + y \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{dx}{ds}, \text{ але: } ds = R \cdot d\tau$$

$$\text{отже: } \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\lim \frac{\Delta x}{ds} = 1.$$

Ми одержимо отже взір:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{R} - 1 \quad 1)$$

Проекційне рівняння векторів на вісь  $\vec{y}$ -онів звучить:

$$\vec{OP}_y' = \vec{OO'}_y' + \vec{O'P}_y'$$

або:

$$-x \cdot \sin d\tau + y \cdot \cos d\tau = \Delta x \cdot \sin d\tau + \Delta y \cdot \cos d\tau + y + dy$$

На підставі вище сказаного про розважування граничні ми маємо:

$$-x \cdot d\tau + y = \Delta x d\tau + \Delta y + y + dy.$$

$$-x \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds}$$

$$\text{але: } \lim \frac{\Delta y}{ds} = 0, \text{ а } \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$

Ми одержуємо отже:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{x}{R} \quad 2)$$

$s$  = дуга кривої лінії.

$R$  = промінь осциляційного кола.

Рівняння 1) і 2) є умовні різничкові рівняння для непорушності точки  $P$  на площі у випадку сукцесивної зміни укладу осей співрядних.

## §. 2.

Точка  $R$  порушається на площі укладу осей співрядних  $x, y$  і творить нову криву лінію, якої природними співрядними є:  $\bar{s}, \bar{R}$ .

Лінійна крива  $\Gamma$  має рівняння:  $R = f(s)$ , а лінійна крива  $\bar{\Gamma}$  має рівняння:  $\bar{R} = f(\bar{s})$ .

Величини:  $\vec{OP}'$ ,  $\vec{OO}'$ ,  $\vec{O}'P'$  є подумані у значінню векторів,  $\delta y$ ,  $\delta x$  є пересуваннями (Verschiebungen) точки  $P$  на площі:  $x-y$ . (Фіг. 2.)

Рівняння проєкційне на вісь векторів  $\vec{x}'$  звучить:

$$\begin{aligned} \vec{OP}'_{x'} &= \vec{OO}'_{x'} + \vec{O}'P'_{x'} \\ \vec{OP}' &= (x + \delta x) + (y + \delta y) \\ \vec{OO}' &= \Delta x + \Delta y \\ \vec{O}'P'_{x'} &= (x + dx) \end{aligned}$$

Ми одержуємо отже:

$$\overrightarrow{(x + \delta x)_{x'}} + \overrightarrow{(y + \delta y)_{x'}} = \overrightarrow{\Delta x_{x'}} + \overrightarrow{\Delta y_{x'}} + \overrightarrow{(x + dx)}$$

або:

$$(x + \delta x) \cdot \cos d\tau + (y + \delta y) \cdot \sin d\tau = \Delta x \cdot \cos d\tau + \Delta y \cdot \sin d\tau + x + dx$$

При помочи розважувань граничних і з поминенням величин другого порядку ми одержимо:

$$\lim \cos d\tau = 1, \quad \lim \sin d\tau = d\tau$$

$$x + \delta x + (y + \delta y) \cdot d\tau = \Delta x + \Delta y \cdot d\tau + x + dx$$

$\Delta y \cdot d\tau$  опускаємо, отже:

$$\delta x + y \cdot d\tau = \Delta x + dx$$

Ціле рівняння ділимо через  $ds$

$$\frac{\delta x}{ds} + y \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta x}{ds} + \frac{dx}{ds}$$

Але:  $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$ ,  $\lim \frac{\Delta x}{ds} = 1$ .

Ми одержуємо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1. \quad 3)$$

Подібно випроваджуємо також:

$$\overrightarrow{(x + \delta x)'} + \overrightarrow{(y + \delta y)'} = \overrightarrow{\Delta x}' + \overrightarrow{\Delta y}' + \overrightarrow{(y + dy)}$$

або:

$$-(x + \delta x) \cdot \sin d\tau + (y + \delta y) \cdot \cos d\tau = -\Delta x \cdot \sin d\tau + \Delta y \cdot \cos d\tau + y + dy.$$

При помочи розважувань граничних ми одержуємо:

$$-x \cdot d\tau + \delta y = \Delta y + dy; \text{ ділимо ціле рівняння через } ds.$$

$$-x \cdot \frac{1}{R} + \frac{\delta y}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds}; \lim: \frac{\Delta y}{ds} = 0.$$

Отже:

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{R} \quad 4)$$

Рівняння 3) і 4) є умовними різнничковими рівняннями для пересунень точок лінії кривої  $\bar{\Gamma}$  на площі осей співрядних:  $x-y$ .

### §. 3.

Відношення між кривою  $\Gamma$  а  $\bar{\Gamma}$ .

$$(\bar{ds})^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 \quad 5)$$

Вставивши у рівняння 5) рівняння 3) і 4) одержимо:

$$\bar{ds} = ds \sqrt{\underbrace{\left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{R}\right)^2}_x}$$

або:  $\bar{ds} = ds \cdot x$

$$\bar{s} = \int x \cdot ds \quad 6)$$

Відношення між:  $R$  і  $\bar{R}$ .

З фіг. 2) одержимо:  $\vartheta + d\bar{\tau} = d\tau + \vartheta + d\vartheta$

або:  $d\bar{\tau} = d\tau + d\vartheta$ , — ділимо через  $ds$

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{d\vartheta}{ds}; \text{ але що: } ds = \frac{d\bar{s}}{x},$$

то маємо: 
$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{x}{R},$$

отже: 
$$\frac{x}{R} = \frac{1}{R} + \frac{d\mathcal{S}}{ds} \quad 7)$$

З рівнянь 6) і 7) одержуємо через елімінування з них дуги  $s$  загальне природне рівняння (explicite):  $\bar{R} = f(\bar{s})$ .

#### §. 4.

Лінії кочення (Rollkurven) у співрядних природних. (Fig. 3.)

Крива  $\Gamma$  є стала крива лінія (Basiskurve) о природних співрядних  $R, s$ , по якій котиться крива  $\Pi$  о природних співрядних  $R_1, s_1$ ; точка  $P$  остає непорушною на площі кривої  $\Pi$ , це значить: вона не змінє свого положення зглядом цієї кривої лінії. В даній хвилі є точка  $O$  спільна для обох кривих ліній.

Крива лінія  $\bar{\Gamma}$  є власне лінією кочення (Rollkurve) о співрядних  $\bar{R}, \bar{s}$ .

Щоби найти рівняння цієї кривої лінії у природних співрядних, ми послугуємося рівняннями, найденими у попередних уступах.

Насамперед ми маємо умовні різничкові рівняння для непорушности точки  $P$  на площі кривої лінії  $\Pi$ ; з рівнянь 1) і 2) першого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні різничкові рівняння:

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{y}{R_1} - 1 \quad 8)$$

$$\frac{dy}{ds_1} = -\frac{x}{R_1} \quad 9)$$

Однак тому, що крива лінія  $\Pi$  котиться по  $\Gamma$ , точка  $P$  змінє безустанно своє положення супроти цієї лінії. Ми одержимо отже умовні різничкові рівняння для пересушень точок лінії кривої  $\bar{\Gamma}$  на площі сталої лінії  $\Gamma$ ; з рівнянь 3) і 4) другого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні різничкові рівняння:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \left(\frac{y}{-R}\right) + 1$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \left(\frac{x}{-R}\right)$$

або увільнивши рівняння від скобок ми одержимо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{y}{R} + 1 \quad 10)$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \quad 11)$$

Тому, що крива лінія  $\Pi$  котиться по кривій  $\Gamma$ , мусить бути:  $s = s_\lambda$ , або  $ds = ds_\lambda$ .

Отже: 
$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds_\lambda}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{ds_\lambda}.$$

Тепер ми підставляємо рівняння 8) і 9) у рівняння 10) і 11); з цього слідує:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 + \frac{y}{R} + 1$$

або: 
$$\frac{\delta x}{ds} = y \left( \frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} \right) = \frac{y}{Q} \quad 12)$$

$$\frac{\delta y}{ds} = - \frac{x}{R_\lambda} - \frac{x}{R}$$

або: 
$$\frac{\delta y}{ds} = - x \left( \frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} \right) = - \frac{x}{Q} \quad 13)$$

бо: 
$$\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} = \frac{1}{Q} \quad 14)$$

Як бачимо, то крива лінія  $\bar{\Gamma}$  повстає кінетичною дорогою; вона є образом руху точки  $P$  на площі кривої  $\Gamma$ .

З рівнянь 12) і 13) одержуємо:

$$\delta x = ds \cdot \frac{y}{Q} \quad \left. \vphantom{\delta x} \right\} \quad 12'$$

$$\delta y = - ds \cdot \frac{x}{Q} \quad \left. \vphantom{\delta y} \right\} \quad 13'$$

З різнничкової геометрії беремо взір:

$$(\bar{ds})^2 = (\delta y)^2 + (\delta x)^2 = (ds)^2 \left\{ \left( \frac{y}{Q} \right)^2 + \left( \frac{x}{Q} \right)^2 \right\}$$

$$(\bar{ds})^2 = \left( \frac{ds}{Q} \right)^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

або: 
$$\bar{ds} = \frac{ds}{Q} \quad e \quad \text{гляди фіг' 3.}$$

З цього одержуємо інтеграл:

$$\bar{s} = \int \frac{e}{Q} \cdot ds \quad 15)$$

де сочинник:  $\kappa = \frac{e}{Q}$ .

Відношення між  $R$  і  $\bar{R}$ .

$$\theta = \vartheta - \frac{\pi}{2}; \quad \text{отже: } d\theta = d\vartheta.$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{R_\lambda} + \frac{\sin \theta}{e} \quad (16)$$

рівняння знає з природної геометрії. Рівняння 16) є умовне різнничкове рівняння для непорушності точки  $P$  на площі кривої лінії  $\Pi$ .

На підставі рівняння 7) маємо:

$$\frac{\kappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} - \frac{d\vartheta}{ds} \quad (17)$$

Вставивши у рівняння 17) з рівняння 16) вираз за  $\frac{d\vartheta}{ds}$  ми одержимо:

$$\frac{\kappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_\lambda} - \frac{\sin \theta}{e} = \frac{1}{Q} - \frac{\sin \theta}{e} \quad (18)$$

Тому, що  $\kappa = \frac{e}{Q}$ ,  $e = \kappa \cdot Q$ , ми можемо рівняння 18) написати також у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{e} - \frac{Q \cdot \sin \theta}{e^2} \quad (18')$$

Рівняння 15) і 18') є параметричні рівняння ліній кочення у загальному виді.

### §. 5.

Тепер ми займемося лініями кривими, які носять назву епіциклоїдальних; з них візьмемо під увагу цю групу ліній епіциклоїдальних, які повстають тоді, коли криві лінії  $\Gamma$  і  $\Pi$  є колами о різних промінях:  $R_\lambda = r$ ,  $R = R$ . Точку  $P$  приймаємо на обводі кола  $\Pi$ . (Фіг. 4.)

Точка  $M$  є свочасно точкою стичности обох кіл,  $\omega$  = кут кочення.

З рисунку бачимо, що  $\widehat{MP} = \widehat{MP}_0 = \sigma$ , а  $\sigma = 2r\theta = R \cdot \omega$ .

Ми покористуємося формулами попередного уступу; і так маємо:  $d\bar{s} = \kappa \cdot ds = \frac{e}{Q} \cdot ds$ , де вираз за  $Q$  одержимо з рівняння 14), а radius vector  $e$  виражуємо синусом кута  $\theta$ .

І так:

$$Q = \frac{R \cdot r}{R + r} \quad 19)$$

$$e = 2r \cdot \sin \theta \quad 20)$$

$$ds = \kappa \cdot d\sigma \quad 21)$$

Але:  $\sigma = 2r \theta$ ,  $d\sigma = 2r \cdot d\theta$ ,  $\kappa = \frac{e}{Q}$ . Вставивши повиспі вирази у рівняння 21), ми одержимо:

$$d\bar{s} = \frac{4r(R+r)}{R} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad 22)$$

або:  $d\bar{s} = a \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad 22')$

рівняння, у якому  $a = \frac{4r \cdot (R+r)}{R}$  є величиною званою.

Ми беремо тепер під увагу рівняння 18')

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{e} - \frac{Q \cdot \sin \theta}{e^2},$$

яке пишемо у слідуючій формі:

$$\frac{1}{R} = \frac{e - Q \cdot \sin \theta}{e^2} \quad 18'')$$

Підставивши у рівняння 18'') вирази з рівнянь 19) і 20), ми одержимо:

$$\bar{R} = \frac{4r(R+r)}{R+2r} \sin \theta \quad 23)$$

або:  $\bar{R} = b \cdot \sin \theta \quad 23')$

рівняння, у якому:  $b = \frac{4r(R+r)}{R+2r}$  є величиною званою.

Різничкове рівняння 22') дає нам по інтегруванню слідуюче рівняння:

$$\bar{s} = a \cdot \cos \theta + c \quad 24)$$

Рівняння 23') і 24) є параметричними рівняннями лінії епіцикльодальної  $\bar{\Gamma}$ .

Поділивши рівняння 23') через  $b$ , а рівняння 24) через  $a$ , ми одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{s} - c}{a} &= \cos \theta \\ \frac{\bar{R}}{b} &= \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

Степенуючи оба рівняння і додавши їх до себе, ми одержимо слідуєче альгебраїчне рівняння епіциклоїдальної  $\bar{r}$  у природних співрядних:

$$\frac{(\bar{s} - c)^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \quad 26)$$

З рівнянь 25) і 26) ми доходимо до слідуєчих заключень; по перше ми зауважуємо, що для  $\theta = 0$ ,  $\bar{R} = 0$ , ми маємо для дуги  $s$  Minimum:

$$\bar{s} = a + c$$

а для:  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{R} = b$ , ми одержуємо  $\bar{s} = c$  (maximum).

Рахуючи дугу епіциклоїдальної від її верхка (Scheitel), де  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{s} = c = 0$ , ми одержимо слідуєче рівняння цієї кривої лінії:

$$\frac{\bar{s}^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \quad 26')$$

Як бачимо рівняння 26') є схоже з рівнянням еліпси у співрядних Декарта.

Для  $\theta = 0$ ,  $e = 0$ ,  $\bar{R} = 0$  ми маємо остриу (Spitze). Рахуючи дугу епіциклоїдальної від цієї остриї ми маємо:  $\bar{s} = a + c = 0$ , отже:  $c = -a$ ; тоді рівняння епіциклоїдальної одержує такий вид:

$$\frac{(\bar{s} + a)^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \quad 26'')$$

Не вдаючися у дальшу дискусію ліній кривих епіциклоїдальних, яка у своєму дальшому перебігу має свій окремий інтерес і не входить у обсяг цієї праці, — ми задержимося ще лиш на відношенню між слідуєчими величинами: radius-vector-ом =  $e$ , та проміянами осціляційних кіл:  $R$  і  $\bar{R}$ .

Ми маємо:  $e = 2r \cdot \sin \theta$

$$\bar{R} = b \cdot \sin \theta = \frac{4r(R + r)}{R + 2r} \sin \theta$$

або:

$$\bar{R} = \frac{2(R + r)}{R + 2r} e = \mu \cdot e \quad 27)$$

де:

$$\mu = \frac{2(R + r)}{R + 2r} \quad 28)$$

Рівняння 27) ми напишемо у іншій формі:

$$\bar{R} = \frac{2\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{1 + 2\frac{r}{R}} \varrho \quad 27'$$

На підставі повищих рівнянь ми одержимо слідувачі вартости:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для: } R = \infty, \\ R = r, \\ R = 0, \text{ або } r = \infty, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ми маємо: } \mu = 2, \bar{R} = 2\varrho \\ \mu = \frac{4}{3}, \bar{R} = 1.25 \cdot \varrho \\ \mu = 1, \bar{R} = \varrho \end{array} \quad 28)$$

Загально ми бачимо, що:  $\bar{R} > \varrho$ .

Для кута  $\bar{\tau}$  ми маємо рівняння:

$$d\bar{s} = \bar{R} d\bar{\tau} \quad 29)$$

$$\text{або:} \quad d\bar{\tau} = \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} \quad 30)$$

Для ліній епіциклоїдальних ми одержимо:

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \int \frac{a \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta}{b \cdot \sin \Theta} = \frac{a}{b} \int d\Theta \quad 31)$$

рахуючи дугу епіциклоїдальної від її вершка (Scheitel).

$$\text{Отже: } \bar{\tau} = \frac{a}{b} \cdot \Theta + c_1$$

$$\text{або: } \bar{\tau} = \frac{R + 2r}{R} \cdot \Theta + c_1 \quad 32)$$

## §. 6.

Окремі випадки епіциклоїдальних кривих.

Ми візьмемо під увагу три випадки, яким підлягають лінії епіциклоїдальні:

випадок А) для:	$R_1 = r = \infty$	евольвента кола
" В) "	$R = \infty$	циклоїда
" С) "	$R = 0$ .	

Що до випадку С), то ми тут можемо відрізнити дві можливости; їх розгляд буде переведений у слідувачім уступі.

Випадок А). Коло о проміні  $R_1 = r$  переходить у лінію пряму. Перекочуючи цю пряму по сталім колі  $\Gamma$  (фіг. 4) ми одержимо очевидно евольвенту цього кола.

Рівняння 26') ми пишемо в експліцитовій формі; ми дістанемо отже:

$$\bar{R}^2 = -2 \frac{b^2}{a} \cdot \bar{s} - \frac{b^2}{a^2} \bar{s}^2.$$

для:  $\lim r = \infty$ , ми маємо:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b^2}{a} &= \frac{4\left(\frac{R}{r} + 1\right) \cdot R}{\left(\frac{R}{r} + 2\right)^2} = R \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b}{a} &= \frac{\frac{R}{r}}{\frac{R}{r} + 2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad 34)$$

Узглядивши формули 34) ми дістанемо природне рівняння евольвенти кола як слідує:

$$\bar{R}^2 = 2 R \cdot \bar{s} \quad 35)$$

Очевидно, що  $\bar{R} = \rho$  гл. рівняння 28).

Випадок В). Коло стає  $\Gamma$  о проміню  $= R$  переходить у лінію пряму. Коло  $\Pi$  котиться тоді по цій прямій і точка  $P$  на обводі цього кола творить криву лінію, званою в літературі під назвою цикльоїди.

Покористуючися взорами з попереднього уступу ми одержимо для  $R = \infty$ :

$$R = 2\rho \quad \text{з рівняння 28)}$$

$$a = \frac{4r\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{1 + 2\frac{r}{R}} = 4r$$

$$b = 4r\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 4r$$

Отже:  $a = b = 4r$ .

Підставивши вартости за  $a$  і  $b$  у рівняння 23) і 24) ми дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= 4r \cdot \sin \theta \\ \bar{s} &= 4r \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad 36)$$

рахуючи дугу цикльоїди від її вершка (Scheitel).

З рівнянь 36) ми випроваджуємо легко природне альгебраїчне рівняння цикльоїди:

$$\bar{R}^2 + \bar{s}^2 = 16r^2 \quad 37)$$

Як бачимо, рівняння 37) є схоже з рівнянням кола у спів-  
рядних Декарта.

$$\bar{r} = \frac{a}{b} \theta + c_1 = \theta + \frac{\pi}{2} \quad 38)$$

бо для  $\theta = 0$ ,  $c_1 = \frac{\pi}{2}$ .

### §. 7.

Тепер ми беремо під увагу випадок, що  $R = 0$ , це значить, що промінь кола сталого (des ruhenden Kreises)  $\Gamma$  стремить до зера і це коло переходить у точку. (Fig. 4.)

Цей випадок становить власне головний предмет нашої праці.

Перш за всего, оперуючи формулами, взятими із загального трактату про лінії епіциклоїдальні, ми доходимо до вислідку, що у тому випадку лінія епіциклоїдальна не існує, або інакше дефінюючи, вона переходить у точку (fig. 5).

Бо дійсно, у тому випадку коло стає  $\Gamma$  (fig. 4) переходить для  $R = 0$  у точку  $M$ . Приймивши отже початок дуги епіциклоїдальної у точці  $M$  на обводі рухомого кола  $\Pi$  ми з fig. 5 бачимо, що при обороті цього кола довкруги точки  $M$  принята точка залишується все на одному і тому самому місці, це значить, що образом нашої кривої лінії є власне ця точка  $M$ .

Осередок рухомого кола  $\Pi$  робить дорогу по обводі кола, якого осередком є точка  $M$ , а промінем промінь рухомого кола  $\Pi = r$ .

На підставі рівнянь 28) мусить бути для  $R = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $\bar{R} = \varrho$ . У тому випадку  $\bar{R} = 0$ ,  $\varrho = 0$ .

На основі формули:  $R \cdot \omega = 2r\theta$  ми мусимо прийти до вислідку, що коли промінь сталого кола  $\Gamma = R$  є рівний зеру, то також і кут  $\theta$  мусить зовсім зникнути; з цього слідує, що і  $\sin \theta = 0$ , а також  $\bar{R} = b \cdot \sin \theta = 0$  (23'),  $a : s = a \cos \theta = \infty$  (24); також:  $\varrho = 2r \cdot \sin \theta$  (20) мусить бути рівний зеру.

Для:  $R = 0$   $a = \infty$ , бо:

$$\lim_{R \rightarrow 0} a = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{4r(R+r)}{R} = \infty;$$

$$\bar{r} = \int \frac{ds}{R} = \frac{a}{b} \theta + c_1 \quad \text{гл. рівняння 31), 32)}$$

а що:  $ds = a \cdot \sin \theta \cdot d\theta$  22'), то для  $R = 0$ ,  $a = \infty$ ,  
 $\sin \theta = 0$ ,  $\bar{R} = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $b = 0$ ,

отже:  $\bar{r} = \infty, 0$  неозначена форма.

На основі повисше сказаного ми приходимо до слідуячого твердження:

Коли промінь  $R$  сталого кола  $\Gamma$  стремить до зера, то — принявши за початок дуги кривої лінії точку  $M$ , яку уважаємо образом здегенерованого кола  $\Gamma$ , — то тоді образом цієї кривої лінії є власне ця точка  $M$ .

Однак у тому випадку, коли ми за початок кривої лінії оберемо іншу точку на обводі кола  $\Pi$  відмінну від точки  $M$ , то тоді образом псевдоепіциклоїдальної лінії буде коло о проміни:  $\bar{R} = \varrho$ . (Fig. 6.)

Бо дійсно, коли обертаємо коло  $\Pi$  довкруги точки  $M$ , то тоді точка  $P_0$ , обрана нами за початок дуги нашої кривої лінії  $\bar{\Gamma}$ , є завжди однаково віддалена від точки  $M$ .

На основі рівнянь 28) ми дістанемо для  $R = 0$  такі вартости:

$$\mu = \frac{2(R+r)}{R+2r} = 1; \quad \bar{R} = \varrho.$$

З цього слідує, що коли у випадку  $R = 0$  ми зачнемо рахувати лінію епіциклоїдальну від кожної іншої точки на обводі кола  $\Pi$ , яка не накривається з точкою  $M$  цього самого кола, то лінія псевдо-епіциклоїдальна  $\bar{\Gamma}$ , яку одержимо, є колом о проміни рівнім  $\varrho$ , а тим самим рівнім  $\bar{R}$ , як проміневи цього самого осціляційного кола.

## §. 8.

Зовсім інакше однак представляється справа тоді, коли приймемо, що коло  $\Pi$  о проміни  $= r$  обертається само у собі, це значить, коли приймемо, що кожда точка цього кола виконує рух довкола його осередка. У випадку, коли цей осередок займає на площі  $x - y$  все однакове положення, а точка  $M$  лежить на тім колі, ми очевидно одержимо рівняння власне цього самого кола.

До цього висліду ми можемо рахунком дійти теж в цей спосіб:

Ми уявляємо собі загально, що коло  $\Pi$  не лише котиться на підставовім колі  $\Gamma$ , але zarazом обертається „само у собі“, це значить, що кожда точка цього кола виконує два рухи: один рух, це рух оборотовий довкруги осередка цього кола, а другий рух, це рух кочення (rollende Bewegung). (Fig. 7.)

Ми означуємо  $s_\lambda$  дугу кола  $\Pi$ , яка є вислідом руху кочення (roll. Bew.), а  $\sigma$  дугу цього самого кола, яку отримуємо в наслідок руху оборотного „самого у собі“. Підставове коло означуємо буквою  $\Gamma$ , рухоме коло буквою  $\Pi$ , а нову вислідну лінію руху оборотного і руху кочення буквою  $\bar{\Gamma}$ . (Fig. 7.)

На підставі повисше сказаного ми отримаємо отже:

$$\left. \begin{aligned} s &= s_\lambda \\ s' &= s_\lambda + \sigma \end{aligned} \right\} \quad 39)$$

Точка  $P(x, y)$  є нерозлучно звязана з колом  $\Pi$ , отже мусить бути:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds'} &= \frac{y}{R_\lambda} - 1 \\ \frac{dy}{ds'} &= -\frac{x}{R_\lambda} \end{aligned} \right\} \quad 40)$$

Рівняння 40) є тотожні з рівняннями 1) і 2) першого уступу.

$$\text{Але:} \quad ds' = ds_\lambda + d\sigma = ds + d\sigma \quad 41)$$

$$\text{З цього слідує:} \quad \left. \begin{aligned} dx &= \left( \frac{y}{R_\lambda} - 1 \right) (ds + d\sigma) \\ dy &= -\frac{x}{R_\lambda} \cdot (ds + d\sigma) \end{aligned} \right\} \quad 42)$$

Але супроти кола  $\Gamma$  точка  $P$  змінює постійно своє положення; в тому випадку ми покористуємося умовними різнничковими рівняннями 3), 4) другого уступу для пересунень точок кривої лінії  $\bar{\Gamma}$  на площі кола  $\Gamma$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} + \left( \frac{y}{R} + 1 \right) \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \end{aligned} \right\} \text{гл. рівн. 10), 11)} \quad 43)$$

$$\text{Або:} \quad \left. \begin{aligned} \delta x &= dx + \left( \frac{y}{R} + 1 \right) ds \\ \delta y &= dy - \frac{x}{R} ds \end{aligned} \right\} \quad 44)$$

Покористуючися рівняннями 42) ми одержимо:

$$\delta x = y \left( \frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} \right) \cdot ds + \left( \frac{y}{R_\lambda} - 1 \right) \cdot d\sigma$$

$$\text{або:} \quad \delta x = \frac{y}{Q} \cdot ds + \left( \frac{y}{R_\lambda} - 1 \right) d\sigma \quad 45)$$

Аналогічно маємо:

$$\delta y = -\frac{x}{Q} ds - \frac{x}{R_1} d\sigma \quad (46)$$

де:  $Q = \frac{R \cdot r}{R + r}$ ; для:  $R = 0$ , також:  $Q = 0$ .

У відсутності руху кочення, це є для  $R = 0$ , ми маємо до діла тоді лише з рухом оборотом; отже:  $s_\lambda = s = 0$ ; в тому випадку рівняння 45) і 46) одержують слідуєчий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \left( \frac{y}{R_1} - 1 \right) d\sigma \\ \delta y &= -\frac{x}{R_1} d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

В тому випадку отже осередок кола  $\Pi$  займає на площі  $x-y$  все однакове положення. Як сказано, вислідною руху оборотового мусить бути коло. Принявши точку  $P$  на обводі кола  $\Pi$ , ми дістанемо як вислідну руху оборотового цієї точки це саме коло  $\Pi$ .

На підставі рівняння 5) третього уступу ми маємо:

$$(d\bar{s})^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 = (d\sigma)^2 \left[ \left( \frac{y}{R_1} - 1 \right)^2 + \frac{x^2}{R_1^2} \right] \quad (48)$$

Ми одержимо отже:

$$\bar{s} = \int \frac{d\sigma}{R_1} \sqrt{\varrho^2 - 2R_1 \cdot y + R_1^2} \quad (49)$$

бо:  $\varrho^2 = x^2 + y^2$ .

Принявши точку  $P$  на обводі кола  $\Pi$  ми маємо:

$$R_1 = r, \quad \varrho = 2r \sin \theta, \quad y = \varrho \sin \theta = 2r \sin^2 \theta \quad (\text{гл. фіг. 8}).$$

Вставивши повисші вартости у рівняння 49), ми одержимо:

$$\bar{s} = \int \frac{d\sigma}{r} \sqrt{4r^2 \sin^2 \theta - 2r \cdot 2r \cdot \sin^2 \theta + r^2} = \int d\sigma \quad (50)$$

для:  $\sigma = 2r \theta, \quad d\sigma = 2r d\theta$

$$\text{тоді: } \bar{s} = 2r \int d\theta = 2r \theta + C \quad (51)$$

Рівняння 51) власне і є рівнянням кола  $\Pi$  у співрядних природних. (Фіг. 8.)

У параметричнім представленню маємо два рівняння кола:

$$\begin{aligned} y &= 2r \sin^2 \theta \\ x &= r \cdot \sin 2\theta \\ x^2 + y^2 &= \varrho^2 = 4r^2 \cdot \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

## §. 9.

В устуні семім ми показали, що у випадку  $R = O$ , коло  $\Pi$  обертається довкруги точки  $M$  (фіг. 5 і 6) і точка  $P_0$  на обводі цього кола творить нове коло  $\bar{\Gamma}$  о проміню  $= \varrho$ ; у випадку, коли  $P_0$  накривався з точкою  $M$ , коло  $\bar{\Gamma}$  переходить у тую саму точку  $M$ .

Тепер ми приймемо, що не лише коло  $\Pi$  обертається довкруги точки  $M$ , але і точка  $P_0$  обертається довкруги осередка цього кола  $\Pi$  (фіг. 9). Іншими словами, коло  $\Pi$  обертається „само у собі“, це є: точка  $P_0$  обертається довкруги осередка цього кола з такою самою скоростю, що пряма  $MO'$  довкруги точки  $M$ . Це значить, що кут обороту  $\omega$  є для кожного положення цього кола рівний кутови осередочному кола  $\Gamma'$  о проміни  $= r$ , по обводі якого порушався осередок оборотового кола. Цей осередочний кут числимо від додатного напрямку осей  $y$ -онів підставового укладу осей співрядних  $x-y$ .

Навязуючи до попередних розважувань в уступах першим і другим цієї праці, ми беремо насамперед під увагу два уклади осей співрядних; один із них, означений римською цифрою (I), це кождочасний уклад осей співрядних, якого початок лежить у точці  $O'$ . Початок другого укладу осей співрядних лежить у точці  $M$ , а вісь  $y$ -онів є для обох системів спільною. Супроти кола  $\Gamma'$  точка  $P$  постійно змінює своє положення на площі. Покористуючися отже укладом (I), ми дістанемо слідуючі умовні ріжничкові рівняння (з рівнянь 3 і 4 другого уступу):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} - \frac{y_1}{R} + 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x_1}{R} \end{aligned} \right\} \quad 52)$$

$\delta x, \delta y$  — є пересуненнями точки  $P$  на площі  $x' - y'$ .

Точка  $P$  лежить на обводі кола  $\Pi$ , отже ми одержимо для непорушности цієї точки на площі названого кола слідуючі умовні ріжничкові рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 \\ \frac{dy}{ds} &= - \frac{x_2}{R} \end{aligned} \right\} \quad 53)$$

Рівняння 53) одержуємо з рівнянь 1) і 2) першого уступу.  $x_2, y_2$  — належать до укладу осей співрядних, означеного римською цифрою (II).

А що:  $R = r$ , то з фіг. 9 одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= r \left( 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{3} \right) \\ y_2 &= 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{3} \\ x_1 &= r \cdot \cos \left( 90 - \frac{2\varphi}{3} \right) = r \cdot \sin \frac{2\varphi}{3} \\ x_2 &= 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} = r \cdot \sin \frac{2\varphi}{3} \end{aligned} \right\} 54)$$

Отже:  $x_1 = x_2 = r \cdot \sin \frac{2\varphi}{3}$ ;

Вставивши рівняння 53) у рівняння 52), одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 - \frac{y_1}{R} + 1 = \frac{1}{r} (y_2 - y_1) \\ \frac{\delta y}{ds} &= - \frac{2x}{r} \end{aligned} \right\} 55)$$

Вставивши рівняння 54) у рівняння 55), дістанемо:

$$y_2 - y_1 = 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{3} - r + 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{3}$$

Отже:  $\left. \begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= 4 \sin^2 \frac{\varphi}{3} - 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= - 2 \sin \frac{2\varphi}{3} = - 4 \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \end{aligned} \right\} 56)$

Для елемента дуги нової кривої лінії, яку в описаний вище спосіб одержано, маємо слідуючий вираз із різничкової геометрії (гл. рівн. 5 з третього уступу):

$$d\bar{s} = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad 57)$$

З рівнянь 56) маємо:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \left( 4 \sin^2 \frac{\varphi}{3} - 1 \right) \cdot ds \\ \delta y &= - 4 \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot ds \end{aligned} \right\} 56')$$

з фіг. 9 відчитуємо:  $s = r \cdot \omega = r \frac{2\varphi}{3}$  58)

З цього слідує:  $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 16 \cdot \sin^4 \left( \frac{\varphi}{3} \right) - 8 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) + 1 +$   
 $+ 16 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) \left[ 1 - \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) \right]$

$$\text{або: } (\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 8 \cdot \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) + 1 \quad 59)$$

59) вставляємо у 57):

$$d\bar{s} = \sqrt{8 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) + 1} \cdot \frac{2r}{3} d\varphi$$

$$\text{Отже: } \bar{s} = \frac{2r}{3} \int \sqrt{8 \cdot \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) + 1} \cdot d\varphi \quad 60)$$

Рівняння 60) є параметричне рівняння для дуги  $\bar{s}$  нової кривої лінії, яку в цей спосіб одержуємо і яку з огляду на її форму і подібність до Паскалевої лінії назвемо лінією слимакватою.

### §. 10.

Конструкція і дискусія слимакватої лінії у співрядних Декарта (фіг. 10).

З фіг. 9 дістаємо слідуючі відношення:

$$\varphi = \frac{3}{2}\omega, \text{ або: } \frac{\varphi}{3} = \frac{\omega}{2}$$

Полярне рівняння (Polargleichung) слимакватої лінії звучить:

$$\rho = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \quad 61)$$

В параметричній представленню маємо:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ \text{також: } x^2 + y^2 &= \rho^2 = 4r^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad 62)$$

$$\text{або: } \left. \begin{aligned} x &= 2r \sin \frac{\varphi}{3} \cos \varphi \\ y &= 2r \sin \frac{\varphi}{3} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad 62')$$

Конструкція слимакватої лінії.

До конструкції слимакватої лінії ми послугуємося полярними рівняннями:  $\rho = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{3}$ , або:  $\rho = 2r \cdot \sin \frac{\omega}{2}$ ; ми кладемо  $r = 1$  і шукаємо для різних вартостей за „ $\omega$ “ відповідних „radius-vector“-ів =  $\rho$ . В цей спосіб ми можемо уложити на примір таку таблицку для  $r = 1$ ,  $\rho = 2 \cdot \sin \frac{\omega}{2}$ ,  $\varphi = \omega + \frac{\omega}{2}$ ;

для:	$\omega_1 = 30^\circ,$	$\varphi_1 = 45^\circ,$	$\rho_1 = 0.50764,$
	$\omega_2 = 60^\circ,$	$\varphi_2 = 90^\circ,$	$\rho_2 = 1,$
	$\omega_3 = 90^\circ,$	$\varphi_3 = 135^\circ,$	$\rho_3 = 1.41422,$
	$\omega_4 = 120^\circ,$	$\varphi_4 = 180^\circ,$	$\rho_4 = 1.73206,$
	$\omega_5 = 150^\circ,$	$\varphi_5 = 225^\circ,$	$\rho_5 = 1.93186,$
	$\omega_6 = 180^\circ,$	$\varphi_6 = 270^\circ,$	$\rho_6 = 2,$

від  $\omega_6 = 180^\circ$  до  $\omega = 360^\circ$  іде слимаковата лінія симетрально.  
(У фіг. 10 ми узяли  $r = 2.5$  см.)

Дискусія слимаковатої лінії:

Ми беремо під увагу рівняння 62).

$$\left. \begin{aligned} dx &= -\rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi + \cos \varphi \cdot d\rho \cdot d\varphi \\ dy &= \rho \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot d\rho \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} \quad 63)$$

$$\text{Отже: } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot d\rho}{\cos \varphi \cdot d\rho - \rho \cdot \sin \varphi} \quad 64)$$

$$\text{Але: } \rho = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{3}, \quad d\rho = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot d\varphi = \frac{\rho}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3} \quad d\varphi$$

$$\text{З цього слідує: } y' = \frac{\rho \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \frac{1}{3} \rho \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3}}{\cos \varphi \cdot \frac{1}{3} \rho \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3} - \rho \sin \varphi}$$

$$\text{або: } y' = \frac{3 \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{3} + \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{3}}{\cos \varphi \cos \frac{\varphi}{3} - 3 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{3}} \quad 65)$$

а) Махіма і Мініма.

$$\text{Для } y' = 0 \text{ маємо: } y' = \frac{3 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{3}}{\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{3} - 3 \cdot \operatorname{tg} \varphi} \quad 65')$$

$$\text{Отже мусить бути: } 3 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{3} = 0$$

$$\text{або: } 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} + \operatorname{tg} \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} - \operatorname{tg}^3 \left( \frac{\varphi}{3} \right)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right)}$$

З цього слідує: 
$$3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = \frac{\operatorname{tg}^3 \left( \frac{\varphi}{3} \right) - 3 \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{3} \right)}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right)}$$

$$3 - 9 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) - 3$$

Отже: 
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0.7746 = \operatorname{tg} \left( \pi - \frac{\varphi}{3} \right)$$

$$\varphi_1 = 113^\circ 17' 04.5''$$

$$\varphi_2 = 66^\circ 42' 55.5''$$

Слимаковата лінія має отже два максимум-а, де  $y' = 0$ ,  $\operatorname{tg} \bar{\tau} = 0$ ; ці дві точки мають супроти осі  $y$ -онів симетральне положення.

Але:  $y' = 0$  також тоді, коли у формулі 65) чисельник є рівний нулю.

Отже: 
$$3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{3} + \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{3} = 0$$

оба члени цього рівняння мусять бути рівні нулю; це стався тоді, коли  $\varphi = 270^\circ$ , бо дійсно,  $\cos 270^\circ = 0$ ,

$$\cos \frac{270}{3} = 0,$$

$$\sin \frac{270}{3} = 1,$$

$$\sin 270^\circ = -1.$$

Для  $\varphi = 270^\circ$ , ордината  $y$  досягає своє minimum; ми маємо:

$$y = 2r \sin \frac{\varphi}{3} \sin \varphi$$

для:  $\varphi = 270^\circ$ ,  $y = y_{\min} = -2r$

$\varphi = 90^\circ$ ,  $y = r = \rho$  гл. формули: 61, 62'.

$y' = 0$  також для:  $\varphi = 0$  і для  $\varphi = 540^\circ$ , це значить, що у точці  $M$  вісь  $x$ -сів є стичною кривої лінії (дві стичні накриваються).

Ми ще завважуємо, що для:  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \bar{\tau} = y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

а для:  $\varphi = 450^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \bar{\tau} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ , отже:  $\bar{\tau} = 30^\circ$ , згл.:  $\bar{\tau} = 150^\circ$ .

Точка  $P_2$  є подвійною точкою (Doppelpunkt) і крива лінія має в тій точці дві стичні.

Слимаковата лінія має 4 особливі точки, для яких:  $y' = \operatorname{tg} \bar{\tau} = \infty$ , це є такі точки, у яких стичні ідуть рівнобіжно до осі  $y$ -онів.

З рівняння 65') одержуємо:

$$\cotg \frac{\varphi}{3} - 3 \operatorname{tg} \varphi = 0$$

$$\text{або: } \operatorname{tg}^4 \left( \frac{\varphi}{3} \right) - 4 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varphi}{3} \right) + \frac{1}{3} = 0 \quad (66)$$

Рівняння 66) є рівнянням 4-ої степені.

$$\text{З цього слідує: } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}} \quad (67)$$

β) Промінь осциляційного кола слимаковатої лінії.

$$\text{I. Особливий випадок: } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Покористуємося формулами 61) і 62)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\varrho = 2r \sin \frac{\varphi}{3} \quad (61)$$

$$dx = -\varrho \sin \varphi \cdot d\varphi + \cos \varphi \cdot d\varrho$$

$$dy = \varrho \cos \varphi \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot d\varrho$$

$$d\varrho = \frac{2r}{3} \cos \frac{\varphi}{3} d\varphi$$

$$\text{для: } \varphi = \frac{\pi}{2}, d\varphi = \frac{r\sqrt{3}}{3} d\varphi, \varrho = r, d^2\varrho = -\frac{r}{9} d\varphi^2$$

$$dx = -r \cdot d\varphi, dy = \frac{r\sqrt{3}}{3} d\varphi$$

$$d^2x = -\varrho \cos \varphi d\varphi^2 - 2 \sin \varphi d\varphi d\varrho + \cos \varphi d^2\varrho$$

$$d^2y = -\varrho \sin \varphi d\varphi^2 + 2 \cos \varphi d\varphi d\varrho + \sin \varphi d^2\varrho$$

$$\text{для: } \varphi = \frac{\pi}{2}, d^2x = -2 d\varphi d\varrho$$

$$d^2y = -\varrho \cdot d\varphi^2 + d^2\varrho$$

$$\text{або: } d^2x = -\frac{2r\sqrt{3}}{3} d\varphi^2$$

$$d^2y = -r d\varphi^2 - \frac{r}{9} d\varphi^2$$

$$y'' = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{(dx)^3} = \frac{\frac{10}{9} \cdot r^2 \cdot d\varphi^3 + \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot d\varphi^3}{r^3 d\varphi^3}$$

$$y'' = -\frac{16}{9r}; y' = \operatorname{tg} \bar{\tau} = \frac{dy}{dx} = -\frac{r\sqrt{3}}{3r} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (68)$$

$$\text{для } \varphi = \frac{\pi}{2}:$$

$$\bar{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{9}\right)^3} \cdot 9r}{16} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \quad (69)$$

або:  $\bar{R} = r \cos 30^\circ \quad (69')$

З рівняння 68) слідує, що для:  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{\tau} = 150^\circ$ .

**Твердження:** Стична у точці  $P_2$  для  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  перетинає криву лінію на осі  $x$ -сів в точці  $N$  (фіг. 10). Друга стична перетинає цю саму криву лінію по другому боці осі  $y$ -онів теж на осі  $x$ -сів; вісь  $y$ -онів є для обох точок пересічки осію симетрії.

**Доказ:** У трикутнику рівнобічнім  $MO'P_2$  висота  $\bar{P}_2L$  є рівна проміневи осциляційного кола  $\bar{R}$  для точки  $P_2$  слимакотної лінії (фіг. 10).

Для  $\varphi = 360^\circ$ ,  $x = \rho = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{3} = 2r \cdot \sin 60^\circ = r\sqrt{3}$

отже:  $\tan \bar{\tau} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

З рівняння 68) маємо: для  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\tan \bar{\tau} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ або: } \tan \bar{\tau} = -\tan (180 - \bar{\tau})$$

Також:  $\sphericalangle MP_2L = \sphericalangle P_2NM$

А що:  $\sphericalangle MP_2L = 30^\circ$ , то також

$$\sphericalangle P_2NM = 30^\circ$$

отже:  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \tau'; \tau' = 30^\circ$

а:  $\bar{\tau} = 150^\circ$ .

**Нота:** Формулу 69) ми можемо одержати також в слідуючий спосіб:

$$y'' = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{(dx)^3} = \frac{\rho \cdot d\varphi (\rho d\varphi^2 - d^2\rho) + d\rho \cdot 2d\rho \cdot d\varphi}{-\rho^3 d\varphi^3}$$

отже:  $y'' = \frac{\rho^2 \cdot d\varphi^3 - \rho \cdot d\varphi \cdot d^2\rho + 2d\rho^2 \cdot d\varphi}{-\rho^3 d\varphi^3}$

$$\bar{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{d\rho}{\rho \cdot d\varphi}\right)^2\right]^{3/2} \cdot \rho^3 \cdot d\varphi^3}{\rho^2 d\varphi^3 - \rho \cdot d\varphi \cdot d^2\rho + 2 d\rho^2 \cdot d\varphi}$$

$$\bar{R} = \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{\rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}} = \frac{(12 \cdot \rho^2)^{3/2}}{27 \left( \rho^2 + \frac{2}{3}\rho^2 + \frac{\rho^2}{9} \right)}$$

або: 
$$\bar{R} = \frac{3 \cdot \rho \cdot \sqrt{12}}{12} = \rho \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho = 2r \sin \frac{\varphi}{3}, \text{ для: } \varphi = \frac{\pi}{2}, \rho = r$$

Отже:  $\bar{R} = r \frac{\sqrt{3}}{2} = r \cos 30^\circ$ , цей самий вислід, що у формулах 69, 69'.

II. Загальний випадок:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\left( \frac{dy'}{d\varphi} \right)}{\left( \frac{dx}{d\varphi} \right)} \quad (70)$$

$$y' = \frac{3 \cdot \cos \varphi \sin \frac{1}{3} \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi}{\cos \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi - 3 \cdot \sin \varphi \sin \frac{1}{3} \varphi} = \frac{B}{A} \quad \text{гл. форм. 65)}$$

$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2} \left\{ A \left( \cos \varphi \frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} \varphi - 3 \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \frac{1}{3} \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \right) - B \left( -\cos \varphi \cdot \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3} \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \frac{1}{3} \varphi \cdot \sin \varphi - 3 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi - 3 \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \cos \varphi \right) \right\}$$

Або: 
$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2} \left\{ A \left( 2 \cos \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi - \frac{10}{3} \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \sin \varphi \right) + \right. \\ \left. + B \left( 2 \sin \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi + \frac{10}{3} \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \cos \varphi \right) \right\}$$

Отже: 
$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{A \cdot C + B \cdot D}{A^2} = \frac{A \cdot \frac{dB}{d\varphi} + B \cdot \frac{dA}{d\varphi}}{A^2} \quad (71)$$

$A, B, C, D$  є функціями  $\varphi$ .

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi - 3 \sin \varphi \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \\ B &= 3 \cos \varphi \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi \\ C &= 2 \cos \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi - \frac{10}{3} \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{dB}{d\varphi} \\ D &= 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi + \frac{10}{3} \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \cos \varphi = -\frac{dA}{d\varphi} \\ x &= 2r \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} 72)$$

$$dx = \frac{2r}{3} (\cos \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi - 3 \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \sin \varphi) = \frac{2r}{3} A \cdot d\varphi$$

$$\text{отже: } y'' = \frac{3(A \cdot C + B \cdot D)}{2r \cdot A^3}; \quad y' = \frac{B}{A}; \quad 73)$$

$$\bar{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{2r(A^2 + B^2)^{3/2}}{3(AC + BD)} \quad 74)$$

Окремі випадки: для:  $\varphi = 90^\circ$ ,  $A = -\frac{3}{2}$ ,

$$B = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C = -\frac{10}{6}, \quad D = +\sqrt{3};$$

$$\bar{R} = \frac{2r \sqrt{\left(\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\right)^3}}{3\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}\right)} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = r \cdot \cos 30^\circ$$

Для:  $\varphi = 0^\circ$ ,  $A = +1$ ,  $B = 0$ ,  $C = +2$ ,  $D = 0$ ,  $\bar{R} = \frac{r}{3}$ ;

Для:  $\varphi = \pi$ ,  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $C = -1$ ,  $D = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\bar{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12}.$$

Для:  $\varphi = 2\pi$ ,  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = +\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $C = -1$ ,  $D = +\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\bar{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12};$$

Для:  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  ( $270^\circ$ ),  $A = +3$ ,  $B = 0$ ,  $C = +\frac{10}{3}$ ,  $D = 0$ ,

$$\bar{R} = \frac{9}{5} \cdot r.$$

γ) Дуга слимаковатої лінії.

$$d\bar{s} = dx \sqrt{1 + y'^2} \quad (75)$$

але:  $y' = \frac{B}{A}, dx = \frac{2r A}{3} \cdot d\varphi$

Отже:  $s = \int \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} \cdot \frac{2r A}{3} \cdot d\varphi = \frac{2r}{3} \int \sqrt{A^2 + B^2} d\varphi$   
 $C = 0.$

Але:

$$A^2 = \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \frac{1}{3} \varphi + 9 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \frac{1}{3} \varphi - 6 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{3}$$

$$B^2 = 9 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \frac{1}{3} \varphi + 6 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{1}{3} \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi$$

Отже:  $A^2 + B^2 = 9 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + \cos^2 \frac{1}{3} \varphi = 8 \cdot \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1.$

З цього слідує:

$$\bar{s} = \frac{2r}{3} \int \sqrt{8 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1} \cdot d\varphi \quad (76)$$

Як бачимо, рівняння 76) є тотожне з рівнянням 60) попереднього уступу.

δ) Параметричне представлення слимаковатої лінії для природних співрядних.

Рівняння 74) звучить:  $\bar{R} = \frac{2r (A^2 + B^2)^{3/2}}{3(AC + BD)}$

Підставивши у цьому рівнянні за  $A, B, C, D$  їх вирази з рівнянь 72), ми одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \frac{r (8 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1)^{3/2}}{(4 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1)} \\ \text{також: } s &= \frac{2r}{3} \int \sqrt{8 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1} \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Рівняння 77) є параметричними рівняннями слимаковатої лінії для природних співрядних.

Інтеграл  $\int \sqrt{8 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1} \cdot d\varphi$  є інтегралом еліптичним.

ε) Еволюта слимаковатої лінії.

Параметричні рівняння для еволюти слимаковатої лінії у співрядних Декарта звучать:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2r \left( \sin \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \varphi - B \cdot K \right) \\ \eta &= 2r \left( \sin \frac{\varphi}{3} \sin \varphi + AK \right) \end{aligned} \right\} \quad 78)$$

де:  $A, B, K$  в функціями  $\varphi$ .

$$K = \frac{8 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1}{6 (4 \sin^2 \frac{1}{3} \varphi + 1)} \quad 79)$$

або:

$$K = \frac{(3 \cdot \bar{R})^{2/3}}{6 \cdot r^{2/3} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{3} + 1}} \quad 79')$$

Напр. для:  $\varphi = 0, x = y = 0$

ми маємо:  $A = +1, B = 0, K = +\frac{1}{6}$

$$\xi = 0, \eta = \frac{r}{3} = \bar{R} \quad \text{гл. стр. 72.}$$

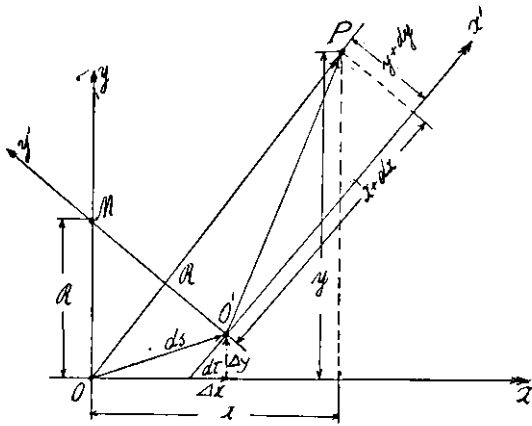
для:  $\varphi = 90^\circ, x = 0, y = r$

ми маємо:  $A = -\frac{3}{2}, B = +\frac{\sqrt{3}}{2}, K = +\frac{1}{4}$

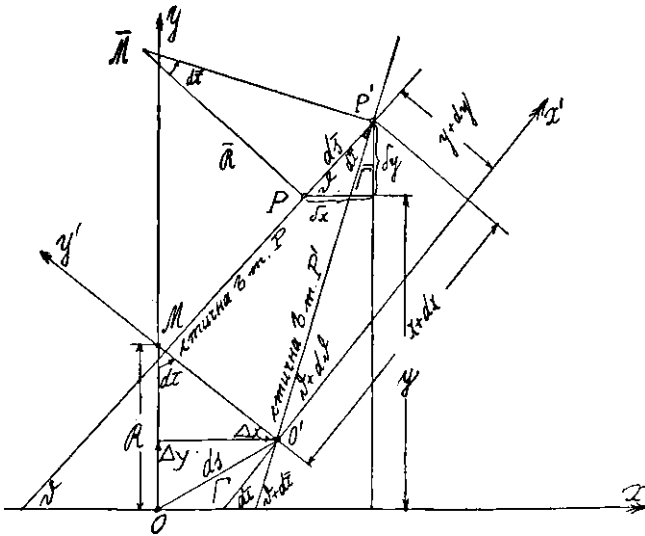
$$\xi = -\frac{r\sqrt{3}}{4}, \eta = r - \frac{3r}{4} \quad \text{це і співрядні}$$

точки  $L$  у фіг. 10.

Як бачимо, будова рівнянь 78) у дечому подібна до рівнянь 62') для слимаковатої лінії.

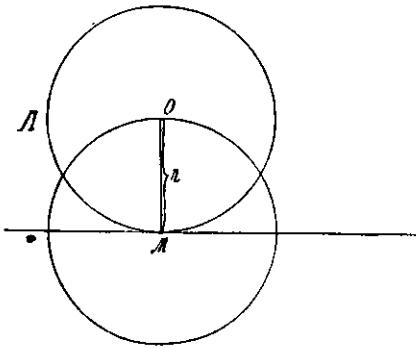


Фиг. 1.

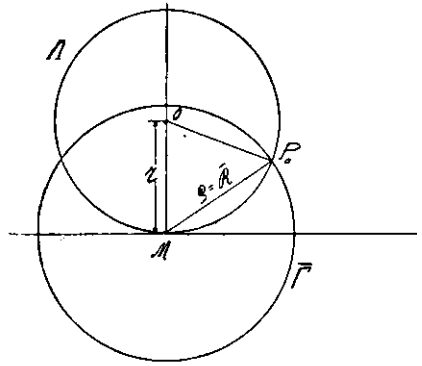


Фиг. 2.

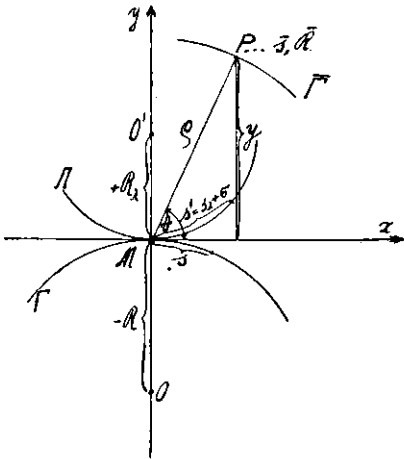




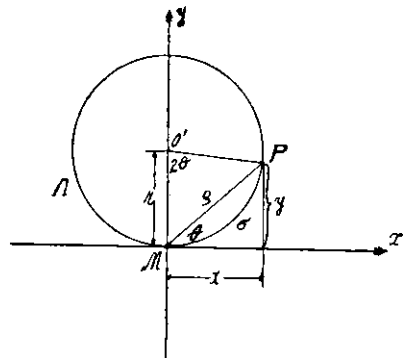
Фиг. 5.



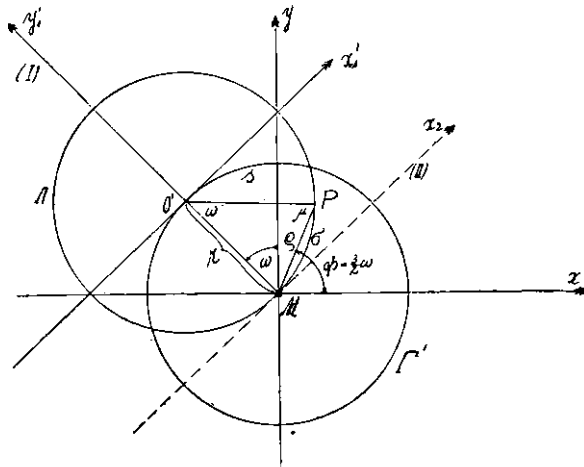
Фиг. 6.



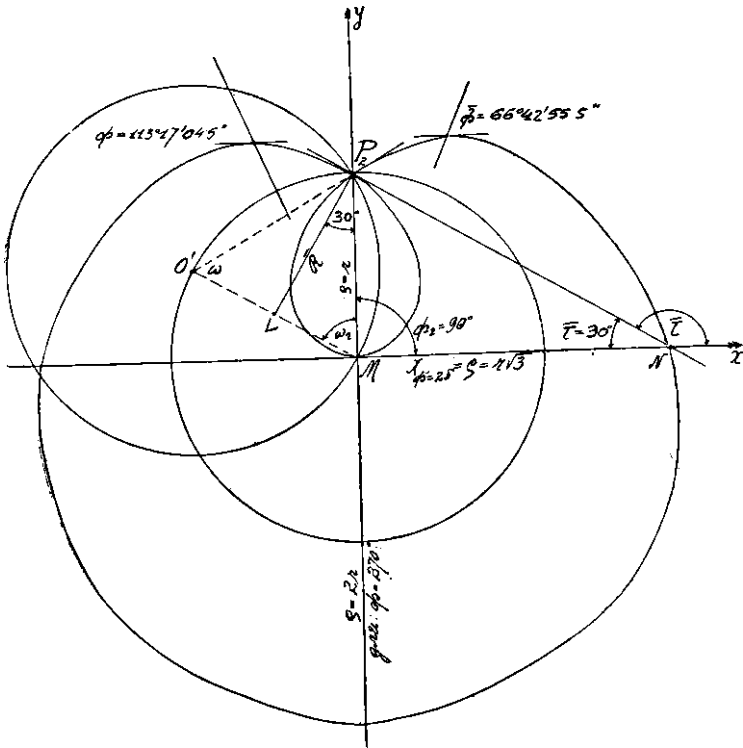
Фиг. 7.



Фиг. 8.



Φir. 9.



Φir. 10.

## Формули довготи періастра та ексцентричності орбіти затемнюваних змінних зір типу $\beta$ Lyrae.

Щоб визначити довготу періастра  $\alpha$  та ексцентричність  $e$  орбіти затемнюваних змінних зір типу  $\beta$  Lyrae, до цього часу<sup>1)</sup> користувалося приближеним рівнянням

$$w = W + 2e \sin(W - \alpha),$$

де  $w$  — справжня довгота зорі в орбіті,  $W$  — її пересічна довгота. Зазначене вище рівняння є точне до малих величин першого порядку відносно  $e$  включно. В цій досліді ми виведемо точні формули<sup>2)</sup> довготи періастра та ексцентричності. Для цього умовимося відчислювати справжні довготи в орбіті від точки перетину орбіти проєкцією променя зору на площу орбіти в хвилю головного мінімум яскравості зорі. Нехай  $t_1, t_2, t_3, t_4$  будуть відповідно хвилі головного мінімум, першого максимум, побічного мінімум та другого максимум зорі, нехай ексцентричні її аномалії будуть відповідно  $E_1, E_2, E_3, E_4$ , тоді беручи на увагу, що

$$w_1 = 0, w_2 = \frac{\pi}{2}, w_3 = \pi, w_4 = \frac{3\pi}{2},$$

за відомою формулою теоретичної астрономії можемо написати

$$-tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_1}{2}; \quad ctg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_3}{2}; \quad (1)$$

$$tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_2}{2}; \quad -ctg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E_4}{2}$$

<sup>1)</sup> André Ch. Traité d'astronomie stellaire. II-e partie, pp. 199, 290.

<sup>2)</sup> Ці формули були подані мною без виводу в часописі „Astronomische Nachrichten, Band 230, pp. 157—158“.

З попередніх формул дістанемо:

$$tg \frac{E_1}{2} tg \frac{E_3}{2} = tg \frac{E_2}{2} tg \frac{E_4}{2} = \frac{e-1}{e+1}$$

$$1 \pm tg \frac{E_1}{2} tg \frac{E_3}{2} = 1 \pm tg \frac{E_2}{2} tg \frac{E_4}{2} = \frac{e+1 \pm (e-1)}{e+1}$$

$$\frac{\cos \frac{E_3 - E_1}{2}}{\cos \frac{E_3}{2} \cos \frac{E_1}{2}} = \frac{\cos \frac{E_4 - E_2}{2}}{\cos \frac{E_4}{2} \cos \frac{E_2}{2}} = \frac{2e}{e+1}$$

$$\frac{\cos \frac{E_3 + E_1}{2}}{\cos \frac{E_3}{2} \cos \frac{E_1}{2}} = \frac{\cos \frac{E_4 + E_2}{2}}{\cos \frac{E_4}{2} \cos \frac{E_2}{2}} = \frac{2}{e+1}$$

$$\text{або } \cos \frac{E_3 - E_1}{2} = e \cos \frac{E_3 + E_1}{2}; \cos \frac{E_4 - E_2}{2} = e \cos \frac{E_4 + E_2}{2} \quad (2)$$

Назначімо знаком  $n$  пересічний добовий рух зорі, тоді за Кеплеровим рівнянням дістанемо

$$n(t_3 - t_1) = E_3 - E_1 - 2e \sin \frac{E_3 - E_1}{2} \cos \frac{E_3 - E_1}{2}$$

$$n(t_4 - t_2) = E_4 - E_2 - 2e \sin \frac{E_4 - E_2}{2} \cos \frac{E_4 - E_2}{2},$$

або за формулами (2) маємо

$$\begin{aligned} n(t_3 - t_1) &= E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1) \\ n(t_4 - t_2) &= E_4 - E_2 - \sin(E_4 - E_2), \end{aligned} \quad (3)$$

Коли нам є відомі з спостережень зорі  $n$ ,  $t_3 - t_1$ ,  $t_4 - t_2$ , то поступовими наближеннями дістанемо з рівнянь (3)  $E_3 - E_1$  та  $E_4 - E_2$ . Для цього можна користуватися з таблиць Радо<sup>1)</sup> та Остранда<sup>2)</sup>.

Коли нам будуть відомі  $E_3 - E_1$  та  $E_4 - E_2$ , ми за допомогою рівнянь (1) дістанемо

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2} ctg \frac{E_3 - E_1}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} ctg \frac{E_4 - E_2}{2}, \quad (4)$$

відкіля дістанемо формулу для визначення  $\alpha$

$$tga = -ctg \frac{E_3 - E_1}{2} tg \frac{E_4 - E_2}{2} \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Radau R. Solution graphique du problème de Kepler. (Bulletin Astronomique. Vol. I, p. 381).

<sup>2)</sup> Åstrand. Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problems. Leipzig. 1890.

З формул (4) дістанемо

$$e = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}} \quad (6)$$

Прикладім ці формули до обчислення  $\alpha$  та  $e$  для зорі  $\beta$  Lyrae на підставі поданих нижче спостережень, тоді дістанемо

Дата	$t_3 - t_1$ d	$t_4 - t_2$ d	$\alpha$ o	$e$
1842—1870 <sup>1)</sup>	6.40	6.42	122.3	0.008
1870—1895 <sup>1)</sup>	6.48	6.41	210.9	0.006
1892—1912 <sup>2)</sup>	6.47	6.33	187.3	0.016

Київ,  
Астрономічна Обсерваторія.  
12 березня 1928 року.

## Summary.

**Formulae of the longitude of periastron and of eccentricity of the orbits of the eclipsing variable  $\beta$  Lyrae-Stars.**

By Prof. S. D. Tschorny.

In this paper I demonstrate the formulae for the calculation of the longitude of periastron  $\alpha$  and of the eccentricity  $e$  of  $\beta$  Lyrae-Stars:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{ctg} \frac{E_3 - E_1}{2} \operatorname{tg} \frac{E_4 - E_2}{2},$$

$$e = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_3 - E_1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{E_4 - E_2}{2}}}$$

which I have given in the *Astronomische Nachrichten* (Band 230) without demonstration.

Astronomical Observatory, Kiew.  
1928 March 12.

<sup>1)</sup> Pannekoek A. Untersuchungen über den Lichtwechsel von  $\beta$  Lyrae. (*Astronomische Nachrichten*. Band 144).

<sup>2)</sup> Curtiss R. H. A determination of the visual light curve of  $\beta$  Lyrae. (*Publications of the Astronomical Observatory of the University of Michigan*. Vol. I, p. 100).

Константин Танчаківський.

## Поляризація ртутьних електрод в розчинах ртутьних солей.

(Досліди зі ртутьною капковою катодою.)

Метода викреслення кривих розкладового напруження при електролізі з капковою ртутьною катодою, винайдена професором празького університету I. Neugovsky'm, є тепер прийнятим засобом для досліджування катодних процесів при електролізі. Значна література, що з'явилась в останній час, вказує, що ця метода дає можливість тонкої аналізи багатьох важних електрохімічних проблем; далі, завдяки цій методі знайдено цілком нові визначні явища дуже загального порядку. Одно таке явище є описане в цій праці і торкається характеристичних максимумів току на кривих розкладового напруження.

Падання току при збільшенню поляризуючої електромоторичної сили часто спостерігали дослідники анодних процесів при електролізі; але це явище треба приписати майже виключно змінам поверхневих властивостей металю аноди (т. зв. „пасивні метали“).

Криві, що одержуємо при електролізі з капковою ртутьною катодою, дають нам перебіг тільки катодних процесів і поява максимумів току на цих кривих є принципово цілком новим явищем. Вперше його описав M. Shikata<sup>1)</sup> при редукції нітробензолу. Він спостеріг, що ток редукції нітробензолу при збільшенню поляризуючого напруження зростає до максимум а потім раптом падає на сталу величину (т. зв. ток насичення), що вже не залежить від поляризуючої електромоторичної сили (*EMC*). Подібне явище спостеріг E. B. Sanigar<sup>2)</sup> при виділенню срібла на ртутьній капковій катоді з розчинів ціанідів срібла. Одночасно П. Герасименко,<sup>3)</sup> досліджуючи максіма при електроредукції уранілевих солей, найшов, що придання індиферентних електродів має великий вплив на висоту максимумів на поляри-

заціфних кривих. Придані соли значно зменшують висоту максимального току або й зовсім „пригноблюють“ максимальний ток аж до звичайного току насичення.

Докладну студію про максіма току і пригноблення їх електrolітами та поверхнево активними річевинами перевели у випадку електроредукції ніклевих солей I. Heyrovský та N. Emeľianova.<sup>4)</sup> Досліди в фізико-хімічному Інституті Карлового університету в Празі вказали, що поява максимів току супроводить при електrolізі майже кожде виділення металів чи редукцію на ртутьній катоді.

Було цікаво пізнати, чи подібне явище можна буде спостерігати і при електrolітичному розряді йонів ртуті на ртутьній катоді. Це послужило темою цієї моєї роботи.

### Експериментальна часть.

Досліди проваджено при помочи методи капкової ртутьної катоди.<sup>5)</sup> Катоду в цьому упорядженні творять каплі ртуті, що капають з тонкої капіляри. На дні електrolітичної посудини знаходиться велика поверхня ртуті, що служить за аноду. Анода під час електrolізи свого потенціалу не міняє цебо не поляризується. Тому криві ток, поляризуєче напруження вказують виключно на зміни, що відбуваються на катоді.

Для автоматичного реєстрування кривих розкладового напруження сконструували I. Heyrovský і M. Shikata<sup>6)</sup> апарат „полярограф“, в котрому ці криві закреслюються фотографічно. Цього апарату ужив я для дослідів. Як прилад, що вказував натугу току, уживано зеркальний гальванометер система d'Arsonval'a з чутливістю  $6 \times 10^{-10}$  Амр. на 1 мм скалі, що є на віддалі 1 метру від зеркальця. Чутливість гальванометру регульовано відповідними комбінаціями спусту (Schunt) і передопору.

Розчини електrolізувались в воздушній атмосфері. В нашому випадку не можна було до розчинів ртутьних солей заводити водня, бо він почасти редукує ртутьні йони на металічну ртуть.

При електrolізі розчинів, що містять в собі розпущений кисень, треба памятати, що і кисень редукується на початку електrolізи. Але кількість кисня є дуже мала (менше ніж  $10^{-3}$  гр. екв. в літрі), тому ток який припадає на редукцію кисня при електrolізі концентрованих розчинів ртутьних солей є дуже малий.

Через те, що з початку (при невеликих поляризуєчих ЕМС) ртутьна катода в розчині ртутьної соли не поляризується, ток

зростає при зрості зовнішньої  $EMC$  відразу, слідуючи законови Ohm'а. Але нарешті ток досягає максимального значіння і потім падає; характеристичний перебіг такої кривої представлено на рисунках 1, 2 і 3. Ординати на цих кривих дають натугу току ( $i$ ), абсциси — поляризуюче напруження  $P$ . Закреслення цих кривих провадилося автоматично „полярографом“. Так рисунок 3 представляє один такий „полярограм“, з кривими одержаними з різних розчинів. Через те, що катоду творять каплі, які регулярно зростають і відпадають, то ток хитається навколо середніх вартостей, цілком означених для даної поляризуючої  $EMC$ . Рисунки 1 і 2 є копіями з таких полярограмів. Я не подаю тут оригінальних полярограмів по перше з огляду на економію місця (кожна крива була знята на окремому папері); по друге через те, що ці криві були знімані не при однакових чутливостях гальванометру — це значить ординати не були однакової поділки. Криві на рисунках 1 і 2 злегка схематизовані, але подані в однакових мірах для кожного рисунку, що робить порівнювання наочним. Розсяг хитань току представлено двоїстою лінією. Яким розчинам відповідають окремі криві — ясно з підписів під рисунками.

Як бачимо з діаграмів, додавання азотної кислоти до розчину ртутьної соли зменшує максимальний ток на поляризаційній кривій, а також почасти змінює форму кривої. Подібне пригноблення максимального току викликає не тільки азотна кислота, а й інші електроліти напр.  $Ca(NO_3)_2$  чи  $KNO_3$ .

В таблицях 1 і 2 подано головні дані з цих дослідів, а саме концентрації розчинів, — величини максимального току і току насичення і поляризуючі напруження при максимальному тоці та при спаді току до насичення.

Таблиця 1.

Концентрація $Hg\ NO_3$	$HNO_3\ n$		$HNO_3\ 0.1\ n$		$HNO_3\ 0.01\ n$		
	$P\ (volt)$	$i\ (amp.)$	$P\ (volt)$	$i\ (amp.)$	$P\ (volt)$	$i\ (amp.)$	
0.1	0.323	$8.68 \times 10^{-3}$	1.077	$1.23 \times 10^{-2}$	—	—	Максимум наси- чення
	1.1	$3.46 \times 10^{-4}$	1.1	$4.78 \times 10^{-4}$	—	—	
0.01	0.188	$2.19 \times 10^{-4}$	0.371	$5.99 \times 10^{-4}$	0.784	$1.29 \times 10^{-3}$	Максимум наси- чення
	1.1	$5.3 \times 10^{-5}$	1.1	$4.4 \times 10^{-5}$	1.1	$5.8 \times 10^{-5}$	

При досить великих поляризуючих напруженнях (між 1.4 і 2 вольтами) ми спостерігаємо на кривих другий зріст току котрий спричинений редукцією нітратового йону і виділенням водня.

Криві розкладового напруження одержані з розчинів ртутьної соли в присутності малої кількості азотної кислоти вказують на лінійний зріст соку на початку поляризації. Цей лінійний зріст току зі зростом поляризуючого напруження буде ясний з наступних міркувань.

При проходженні простого току через електродит є важний закон Ома в наступній формі:  $iR = E - P$  ( $i$  — ток;  $R$  — опір круга;  $E$  — поляризуюча (зовнішня)  $EMC$ ;  $P$  — електромоторична сила поляризації (проти йдуча  $EMC$ )). Через те, що в нашому випадку обидві електроди є однакові і занурені до того самого розчину, то  $EMC - P$  мусить бути рівна zero, як що тільки навколо електрод не настане концентраційна поляризація. Тому з полярограмів можна вирахувати опір  $R$ , як що взяти не дуже великі вартости току  $i$ .

Так, для розчину  $0.1 \text{ } n \text{ } HNO_3$  в  $0.1 \text{ } n \text{ } HNO_3$  з величин  $E = 0.2$  вольта та  $i = 38 \times 10^{-4}$  амперу вираховано опір у крузі  $R = 79$  омів. На кривій розкладового напруження для цього розчину ток досягає максимальної вартости  $i_{\text{max}} = 38 \times 10^{-4}$  амп., отже спад потенціалу в розчині є рівний  $iR = 79$  омів  $\times 38 \times 10^{-4}$  амп. =  $0.974$  вольт. Цей максимальний ток досягнуто при поляризуючому напруженню  $P = 1.077$  вольта. Звідси ми бачимо, що катода споляризувалась тільки приблизно на  $1.077 - 0.974 = 0.103$  вольта. Ток в цьому випадку досягнувши свого максимального значіння падає на значно меншу величину при дальшому дуже незначному збільшенню поляризуючого напруження. Як що вирахуємо спад потенціалу  $iR$  після спаду току, то знайдемо  $iR = 0.48 \times 10^{-5} \times 79 = 0.038$  вольта. Це вказує на те, що настала нагла поляризація катода, а саме, потенціал катода змінився скоком на величину =  $1.077 - 0.038$  в =  $1.039$  вольта. Ця раптова зміна потенціалу катода є незвичайно фрапантне явище. Ток зменшується при цьому аж приб. у 20 разів. Цей спад току не можна ні в якому разі пояснити тим, що між катодою і розчином витворюється опір, напр. в наслідок творення нероспускального осаду. Якщоби такий опір існував, що цеб впливало на дальші процеси, а саме на розкладове напруження необхідне для редукції азотної кислоти з розчинів.

Але з наших полярограмів можемо заключити, що редукція нітратового йону з розчинів азотної кислоти і ртутьної соли настає (після максимального току) при тих самих катодних потенціалах, як і з розчину чистої азотної кислоти. Так для розчину  $0.1 \text{ } n \text{ } HgNO_3$  в  $0.1 \text{ } n \text{ } HNO_3$  другий зріст току спричинений редукцією нітратового йону починається при  $E = 1.8$  вольта; як що з цієї величини віднімемо потенціал аноди, рівний приблизно  $0.4$  вольта (від кальомелевої електроди), та спад потенціалу  $iR =$  прибрл.  $0.05$  вольта, то одержимо для катодного потенціалу величину:

$$- 1.8 - (0.4 + 0.05) = - 1.35 \text{ вольта.}$$

На полярограмі одержаному при електролізі чистої азотної кислоти найдено, що зріст току редукції і тут починається при тому ж катодному потенціалі:  $- 1.35$  вольта.

Раптові скоки катодного потенціалу доведено також з мірів електрокапілярних. Відомо, що поверхнєве напруження поляризованої ртуті є функцією потенціалу електроди.

Для визначення поверхневого напруження ртуті на катоді ужито методи Кісґеґа<sup>7)</sup>, що полягає у важенню капель ртуті поляризованої на різні потенціали. В кожному разі ловлено по 30 капель до скляного збірника, сушено і важено. Ця метода дає дуже точні висліди. Окрім важення капель спостерігалась також і доба капання, що стоїть у вузькім звязку з поверхневим напруженням. Висліди мірів подано в таблицях 2 — 6 і для наочности на діаграмі ч. 4. В кожному разі, коли ток на кривій розкладового напруження раптом падає, поверхнєве напруження ртуті скоком збільшується. Перед цим раптовим зростом поверхнєве напруження міняється зі зростом поляризуючої *EMC* дуже незначно. Це вказує, що потенціал катода не міняється, тоб то, що катода не поляризується.

Цікаво, що в присутности значної кількості азотної кислоти в розчині ртутьної соли поверхнєве напруження змінюється тягло зі зростом поляризуючої *EMC*, а на кривих розкладового напруження ми не спостерігаємо спаду току (максимальний ток пригноблено). В цьому випадку електрокапілярні криві мають звичайну форму параболі. Отже в цьому випадку (в присутности значної кількості иншого електроліту) катода легко поляризується: збільшенню поляризуючої *EMC* відповідає зріст негатиного потенціалу катода (як що прийняти в увагу не дуже великий в цьому випадку спад потенціалу  $iR$  в розчині). В тих випадках, де поверхнєве напруження скоком підноситься на

значно більшу величину, — дальший хід електрокапілярної кривої цілком відповідає ходови звичайної електрокапілярної параболі це вказує на те, що катода стала пригожою до поляризації.

### Дискусія.

Поява максимів на кривих розкладового напруження вже в перших працях, що торкалися цього явища (Shikata, Sanigar, Герасименко) розглядалось як ефект адсорпційних сил. Але в перших дослідах не приймалось на увагу стану поляризації електрод. В цих працях мовчки припускалось, що катода поляризується майже досконало з самого початку і на цілому протязі кривої розкладового напруження. Далі припускалось, що ті речовини, які дають максимум на кривих розкладового напруження, адсорбуються в значній мірі на поверхні катода. Shikata і Sanigar припускали, що адсорпція ця є спричинена електричним притяганням між поверхнею електроди і молекулами розпущеного тіла. Так Shikata пояснював адсорпцію нітробензолу на ртуті тим, що молекули нітробензолу мають дипольну структуру; ці діполі своїми позитивними кінцями електростатично притягаються до негативної поверхні металю, що викликає збільшення концентрації на цій поверхні. Падання току редуції Shikata приписував тому, що при збільшенню потенціалу катода взаїмне відпихання між негативними кінцями адсорбованих молекул і негативними нарядами електроди досягає такої величини, що адсорбована верства молекул навколо електроди руйнується і тим зменшується концентрація. Це мусить викликати спад току, як що адсорбована речовина редукується. Отже, головна роля при зменшенню концентрації приписувалась електростатичній дії і не приймалось на увагу те, що катода при „максимальних“ токах мало поляризується. На останній факт вказав П. Герасименко в своїй габілітаційній праці;<sup>8)</sup> з нашої роботи (див. експер. часть); також безсумнівно слідує, що катода при проходженню густих токів (перед спадом) поляризується дуже мало. Інші досліди (ще почасти не опубліковані) вказали на те, що максимум на кривих при електrolітичному виділенню дають і такі йони, котрим не має рації приписувати дипольну структуру, напр.  $Tl^+$ ,  $Zn^{++}$ ,  $Mn^{++}$  і інші.

Приймаючи на увагу ці факти I. Neuyrovský в своїй праці про максима на поляризаційних кривих розчинів солей ніклю подав нове висвітлення, котре добре пояснює цей цікавий ефект. Головну ролю у витворенню явища максимального току та спаду

току І. Нейровскі́ приписує кінетиці реакцій на поверхні електроди, а саме скорості виділення) адсорпції та дифузії. Йони розпущеної соли (в нашому випадку катіони ртуті) адсорбуються на поверхні ртутьної катода. (Адсорпція йонів ртуті на поверхні ртуті з безперечний факт, як слідує з багатьох дослідів, див. Freundlich *Kapillarchemie*, 1922). При електролізі йони на поверхні катода виладоуються, а на їх місце адсорбуються і придифундують з глибини розчину нові йони. Треба припустити, що шкорість адсорпції є в порівнянні зі шкорістю дифузії дуже велика. З початку електролізі (при малих *EMC*) шкорість електролітичного виділення не є дуже велика, так що в кожній хвили адсорпція і дифузія поновлюють концентрацію йонів навколо електроди. Але в решті решт при збільшенню поляризуючої *EMC* можна досягнути такого стану, коли шкорість виділення рівна шкорості адсорпції — цей стан відповідає максимуму на поляризаційній кривій. Далше збільшення поляризуючого напруження веде до того, що шкорість виділення стане більшою, як шкорість адсорпції: в наслідок цього йони в околиці катода дуже шкоро виладоуються, а адсорпція вже не вистарчить поновити концентрацію йонів навколо катода. Між поверхнею катода і розчином витворюється „порожня“ верства, в котрій не має даних йонів (в нашому випадку йонів ртуті). Адсорпційні сили ділають на невелике віддалення і притягання молекул до поверхні передається через молекули даного роду (у нас йони  $Hg^+$ ). Отже, як що між розчином і поверхнею катода витвориться верства розчину, в котрій не має даних йонів, то дія адсорпційних сил не може передатися через цю верству. (П. Герасименко називає цю верству „ізоляцією“ для сил адсорпції. Це не значить, що розчин в цій верстві став електричним ізолятором; в цій верстві ще зостаються йони иншого роду, напр., у нас водневі йони, потенціал виділення, котрих ще не досягнено при тих поляризуючих *EMC*, де настає спад току).

Отже спад току Гейровський пояснює тим, що адсорпція йонів припиняється. Ток, як ми бачили в експериментальній частині, не падає аж до зєра, але спиняється на тоці насичення. Цей ток насичення викликають ті йони ртуті, що мандрують через „порожню“ верству в наслідок звичайного теплового руху цеб то дифузії.

Як ми бачили, придання иншого електроліту до даного розчину викликає зниження максимального току. Це можна пояснити тим, що йони иншого електроліту напр. водневі йони,  $K^+$ ,

$\text{Ca}^{++}$  також адсорбуються на поверхні катоди; в наслідок цього зменшується кількість йонів ртуті, які можуть адсорбуватися. Інші йони займають частину поверхні і тим перешкаджають частини адсорпції ртутьних йонів. Цей ефект інших йонів називаємо „витисканням“ адсорпції. Цей ефект „витискання“ спостерігається в багатьох явищах адсорпції, і знаходить своє узагальнення в теорії Райхінштайна т. зв. „Verdrängungstheorie“.<sup>9)</sup> На основі цієї теорії сума концентрацій всіх адсорбованих речовин на поверхні мусить бути стала; отже, як що помимо даної речовини адсорбується і інша речовина, то це мусить викликати зменшення кількості адсорбованих молекул першої речовини.

Цим би було в загальних рисах висвітлено спостережені нами явища при електролізі розчинів ртутьних солей на ртутьних катодах. Дальшого докладного дослідю вимагає ефект зниження максимального току різними електролітами. Як що порівняємо пригноблююче ділання ріжних солей, то ми пізнаємо, що азотна кислота пригноблює максимум значно більше, ніж нітрат кальція взятий в тій самій концентрації. Це можна висвітлити тим, що водневі йони з азотної кислоти адсорбуються більше, ніж йони кальція. Дальші квантитативні дослідю в цьому напрямку автор сподівається подати по опрацьованню пізніше.

Дослідю зі сталою ртутьною катодою переведено Д-ром П. Герасименком, які є предметом слідуючої праці в цьому збірнику.

---

Автор висловлює свою щирю подяку пану професорови Карлового Університету в Празі Д-ру І. Neugovsk'ому за поміч і раду підчас праці, а також за дозвіл надрукувати цю працю в українській мові. Докторови П. Герасименкови автор вдячний за обговорення і перегляд праці.

В Празі, в серпні 1927 р.

---

## Література.

1. M. Shikata, Trans. Faraday Soc., 1925.
2. E. B. Sanigar, Recueil des Travaux Chim. 44 p., 1925.
3. P. Herasymenko, Chemické Listy XIX, ч. 5, 1925.
4. I. Heyrovský a Emelianova Rozpravy Česke Akademie Věd. II. tr. 1927; також в Trans. Faraday Society, XXIV. May (1928).
5. I. Heyrovský, Phil. Mag. 45, 30 (1923); Trans. Faraday Soc. 19, 692 (1924); Rec. Trav. Chim. 44, 488 (1925); Compt. Rend. 179, 1044, 1267, 1924; Bull Soc. Chim. Franc. XLI—XLII, 1224 (1927).
6. I. Heyrovský i M. Shikata. Rec. Trav. Chim. 44, 496 (1925).
7. Kučera, Ann. d. Physik, 1903.
8. П. Герасименко, Електроредукція уранілових солей на ртутній катоді, Записки Українського Педагогічного Інституту 1928; в англ. мові: Trans. of Faraday Soc., XXIV, P. 5, 267, (1928).
9. D. Reichinstein, Eigenschaften des Adsorptionsvolumens, Zürich 1916; „Verdrängungstheorie“, Zeitschr. f. Elektrochemie, 1927.

## Електрокапілярні поміри.

Таблиця 2. (Крива 1. на діягр. 4.)

Розчин:  $n$   $HgNO_3$  +  $n$   $HNO_3$ .

Поляризуюча електромотор. сила (мілівольти)	30 капель ртуті	
	Час капання (секунди)	Тягар капель (міліграми)
0	168,4	87,35
200	169,7	89,9
400	167,0	88,7
600	166,6	88,8
800	166,0	89,4
1000	165,8	90,0
1200	164,0	90,0
1400	162,4	90,4
1600	162,4	90,2
1800	159,1	90,9
1860	157,0	90,4
1880	157,8	90,4
1890	157,2	90,4
1900	213,7	112,6

Таблиця 3. (Крива 2. на діагр. 4.)  
 Розчин:  $0,1 \text{ } n \text{ } HgNO_3 + n \text{ } HNO_3$ ,  $t^\circ = 15^\circ \text{ } C$ .

<i>EMC</i> (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліграми)
0	184,5	93,9
100	192,9	98,7
200	195,9	100,8
400	195,6	102,0
500	197,3	103,2
600	196,7	104,1
1110	197,8	105,8
1120	199,5	105,4
1125	198,4	105,3
1130	297,6	148,1
1200	291,3	147,5
1300	286,8	145,7
1400	278,9	142,7

Таблиця 4. (Крива 3. на діагр. 4.)  
 Розчин:  $0,1 \text{ } n \text{ } HgNO_3 + 0,1 \text{ } n \text{ } HNO_3$ .

<i>EMC</i> (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліграми)
0	84,9	116,9
100	89,4	123,0
200	91,0	126,0
400	93,8	129,2
600	94,3	130,9
800	95,8	133,5
1000	95,9	133,5
1100	96,7	134,6
1200	96,7	135,1
1300	131,2	178,1
1400	129,0	175,5
1500	126,3	171,9
1600	123,3	167,7
1700	119,7	162,4
1800	115,2	157,0

Таблиця 5. (Крива 5 на діягр. 4)

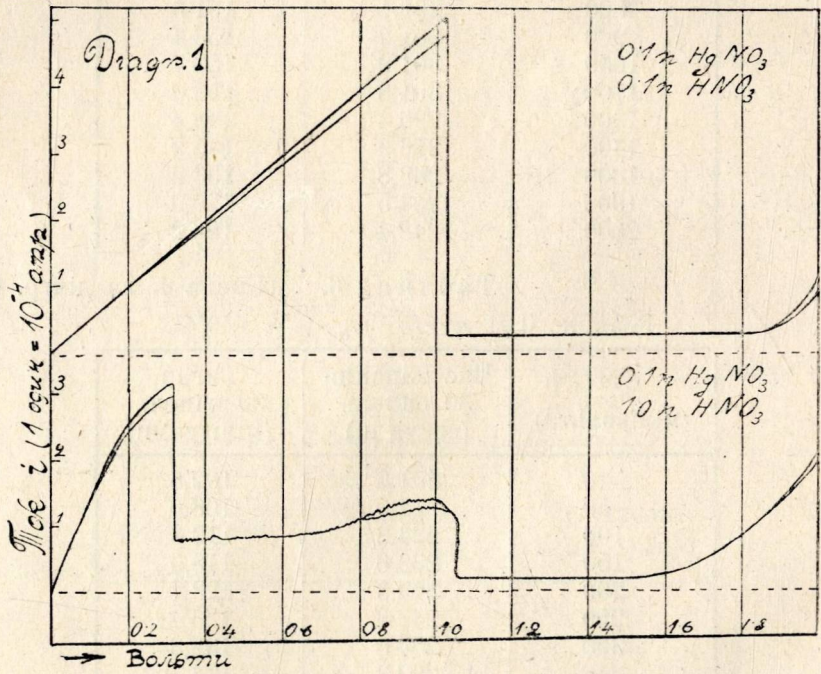
Розчин  $0,001 n HgNO_3 + n HNO_3$ ,  $t^{\circ} = 19,4^{\circ}$ .

<i>EMC</i> (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліграми)
0	209,1	106,6
200	271,3	127,3
400	290,0	138,6
600	300,0	147,8
800	298,1	151,6
900	301,2	153,4
1000	301,9	153,7
1100	301,3	153,0
1300	296,4	148,4
1400	286,9	145,9
1800	263,8	133,2
1900	254,5	130,0
2000	248,4	126,2

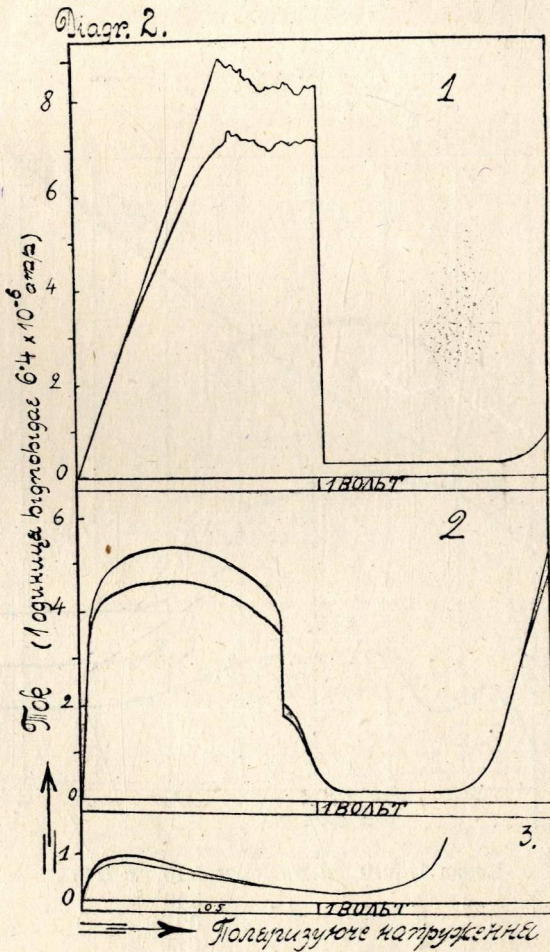
Таблиця 6. (Крива 4. на діягр. 4.)

Розчин:  $0,01 n HgNO_3 + n HNO_3$ .

<i>EMC</i> (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліграми)
0	201,3	102,6
50	212,0	108,0
100	224,8	113,8
150	232,6	118,0
200	243,6	123,7
250	248,6	126,4
300	254,0	130,3
350	260,3	133,7
400	268,8	136,6
500	275,3	140,8
600	286,1	145,2
700	290,5	148,4
800	295,0	151,0
900	299,0	152,6
1000	301,2	153,2
1100	300,5	152,6
1200	298,2	150,8
1400	297,5	145,2
1600	275,0	138,5
1800	259	131,9
2000	249	115,2



Криві розкладового напруження.  
Подвійними кривими зазначено межі, в котрих хитається ток.

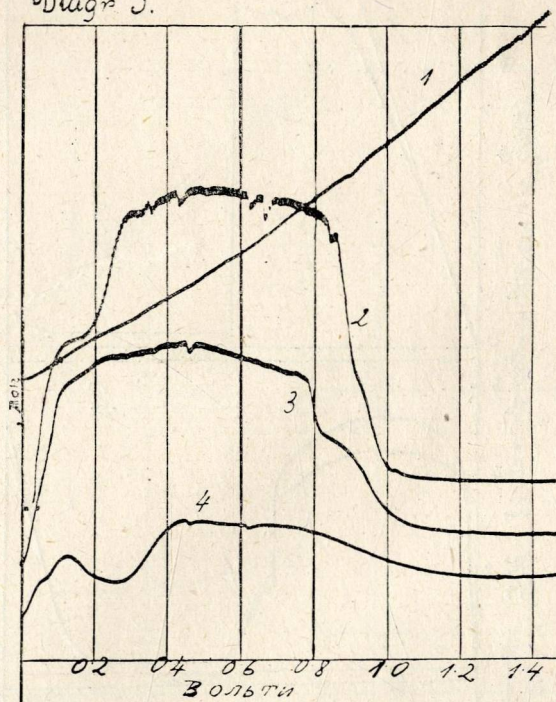


Криві розкладового напруження розчинів:

1.  $0.01 \text{ n HgNO}_3 + 0.01 \text{ n HNO}_3$
2. " " " "  $0.1 \text{ " "}$
3. " " " "  $1.0 \text{ " "}$

Подвійними кривими зазначено межі, в котрих хитається ток при капанню.

Diagr 3.



Крива 1.  $5 \cdot 10^{-3} n \text{ HgNO}_3 + 5 \cdot 10^{-3} n \text{ HNO}_3$ .

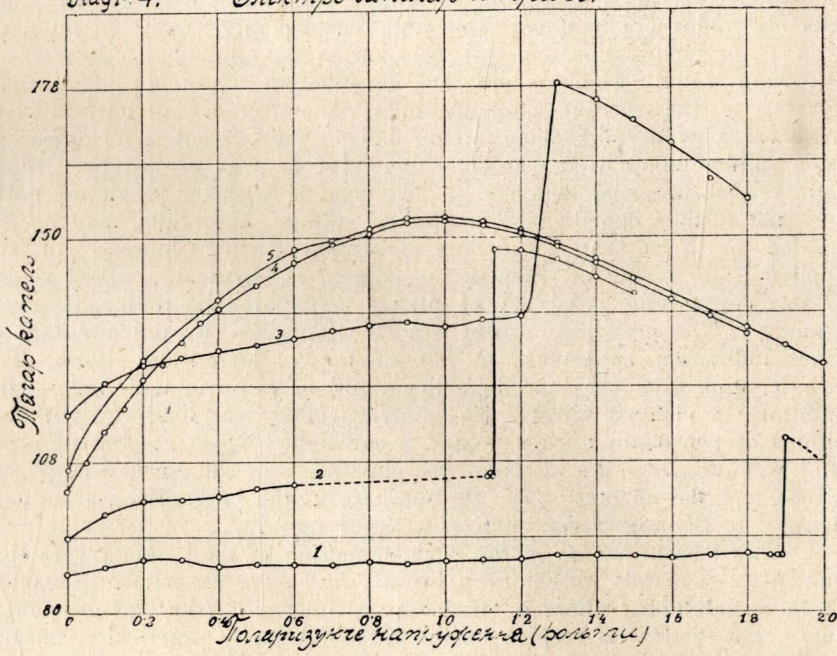
" 2. " " "  $5 \cdot 10^{-2} n$  "

" 3. " " "  $0.125 n$  "

" 4. " " "  $0.50 n$  "

(Для кожної кривої zero току рахувати від початку кривої).

Диагр 4. Електрокардиографі криві.



## Summary.

### Electrolysis of the solutions of mercurous salts with the mercury dropping kathode.

By K. Tančakivskyj.

The current-voltage curves during electrolysis of mercurous nitrate solutions between mercury electrodes were investigated by present author by means of the Heyrovský's dropping mercury kathode. The current at the beginning of electrolysis increases linearly with the increase of the applied e. m. f. according to simple Ohm's law ( $iK = E$ ), since both electrodes are nonpolarisable and, consequently, there is no back e. m. f. (or polarisation  $P$ ). But, as soon as the applied voltage exceeds a certain value (which is different for different solutions of mercurous nitrate) — the current suddenly falls. The decrease of current is in some cases twentyfold. The sudden fall of the current is accompanied by a sudden jump in the kathode potential as was proved by electrocapillary measurements (see below). The current after the maximum value does not further depend on the applied voltage, and, thus, may be described as a saturation current. Only at further increase of the applied e. m. f. the increase of the current is observable which is due to the electrolytic reduction of nitrate (compare the adduced polarograms). The maximal current can be suppressed by the additions of other indifferent substances to the solution of mercurous nitrate. The largest suppressive effect produce the additions of nitric acid, then — the additions of calcium nitrate. The smallest effect was observed with additions of potassium nitrate. When a sufficiently large amount of nitric acid was added to the solution, the maximum on the curve entirely vanishes and the current after the increase at the beginning passes continually to the saturation value (see fig. 1 und 2).

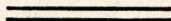
The measurements of the surface tension of the kathode were conducted by Kučera's weight drop method and gave the following results: In those solutions, where a maximum is present on the current-voltage curve, the interfacial tension on the kathode remains practically constant until a voltage is attained where the current suddenly drops: at this point surface tension increases discontinually to a greater value (see diagram 4. and tables). In the solutions which do not exhibit the current maximum the electrocapillary curves have an ordinary parabolic shape. From the behaviour of the electrocapillary curves it is concluded that in the case where the maxima on current voltage curves are suppressed, the kathode is almost perfectly polarisable. But, in those solutions, which exhibit a maximum, the kathode potential remains unchanged from the beginning until the discontinual fall of current. Here, the kathode potential suddenly shifts to the more negative values, thus producing a discontinual increase of the surface tension (which is known to be a function of kathode potential). In some cases the sudden shifts of the kathode potential amount to 1.7 volt (from + 0.4 v. to — 1.3 v.),

this enormous polarisation being comparable with the changes of anode potential observable in passivity phenomena.

The observed phenomena are explained by a theory proposed by I. Heyrovský (Trans. Faraday Society. Paper read 25. I. 1928), which can briefly stated as follows: The deposition of mercury ions on the kathode produces a decrease of the concentration in the surface layer near the electrode. But the adsorption very quickly restores the initial concentration in the interface. At the voltage, corresponding to maximum of current, the velocity of adsorption just equals the velocity of deposition. When, however, the applied voltage is increased further, — the velocity of disappearance of ions from the surface layer (through electrodeposition) becomes greater than the velocity of adsorption: at this moment a surface layer immediately forms which is practically exhausted as to mercurous ions. This layer separates electrode from the bulk solution and thus prevents the adsorption: consequently, the current must greatly diminish. The saturation current after the decrease is due only to electrodeposition of ions diffusing through the exhausted layer. Since thermal diffusion is comparatively slower than the adsorption velocity — the saturation current is much smaller than the current produced by adsorption (maximae current). According to the Ohm's law applicable to the electrolysis in the form:  $iR = E - P$  (where  $i$  — current,  $R$  — resistance,  $E$  — applied e. m. f.,  $P$  — polarisation) after the sudden decrease of the current  $i$  at a certain applied e. m. f.  $E$  a discontinual increase in polarisation  $P$  must ensue. The suppression of maxima by the additions of other electrolytes is explained (compare, Herasymenko's paper in *Chemické Listy* 19, № 5, 1925) by the adsorption of the added substance which consequently diminishes the amount of adsorbed mercury ions in the surface layer.

The present investigation was carried out in the Physico-Chemical Institute of Charles' University (Prague). The author wishes to express his best thanks to Professor I. Heyrovský, who suggested this work, for his valuable help and advice. For the discussion and supervision of this paper the author is indebted to Dr. Herasymenko.

Prague, 1927.



Др. П. Герасименко.

## Поляризація сталих ртутьних електрод в розчинах ртутьних солей.

(Досліди спільні зі студ. Старогорським.)

В попередній праці К. Танчаківський<sup>1)</sup> описує цікаві досліді максімів току на кривих ток-вольтаж, що він спостерігав при електролізі розчинів ртутьних солей при помочи капкової катоди Нейговск'ого. Шукаючи причин цього незвичайного явища, я перевів досліді з поляризацією ртутьних електрод в інших умовах, а саме з непорушними електродами. При електролізі з капковою ртутьною катодою не можна безпосередньо міряти потенціал катоди. Капкова катода має дуже малу поверхню і при компенсації її потенціалу (Poggendorf-івська метода) дуже легко поляризується. (Безпосередньо можна булоби потенціал такої малої електроди лише безтоковою методою при помочи абсолютного Томсонівського гальванометру, але такі поміри тяжкі і вимагають накладної апаратури). Щоби уникнути поляризації електрод при компенсаційній методі автор цієї праці ужив катоди з більшою і непорушною поверхнею.

При цих дослідіах найдено нові факти, важні для теорії максімів тока на кривих розкладового напруження. На основі нижче поданих дослідів можна правильніше висвітлити недавні експерименти Mc Aulay'я та Bowden'a<sup>2)</sup>. (Про це мова далі).

### Експериментальна часть.

Електроліза розчину нітрату ртуті ( $HgNO_3$ ) провадилась в склянці (див. рис. 1.) обсягу 300 см<sup>3</sup>. На дні посуду було налито ртуть, що служила анодою (А); поверхня аноди була прибр. 70 см<sup>2</sup>. Ртутьна катода (К) з поверхнею 1 см<sup>2</sup> находилась в невеликій склянній ложці. Для міряння потенціалів катоди ужито Haber-Luggin-івської капіляри (Г), яка була наповнена тим самим розчином, що й в електролітичній посуді. Капілярний кінець

<sup>1)</sup> Vid. попередний артикул.

<sup>2)</sup> Mc Aulay and Bowden, Proc. Roy. Soc. London, 110, May, 1926.

цієї рурки поміщено дуже близько до поверхні катода, так що цей кінець практично зустрічав свій зеркальний образ на поверхні ртуті. Другий кінець рурки, затканий фільтрувальним папером, сполучено через розчин азотної кислоти з нормальною каломелевою електродою ( $H$ ). При дослідах виявилось необхідним перемішувати розчин над катодою. Скляна мішалка (вітрячок) приводилась у рух електромотором; вітрячок робив 1400 оборотів за мінуту. Крила мішалки находились 3—4 міліметри над поверхнею катода.

Висліди pomірів подано на діаграмах. Наводимо тут тільки одну характеристичну таблицю, щоби не забирати багато місця.

Діаграм (рис. 2) представляє криві ток-прикладений вольтаж. Ці криві, подібні до кривих Танчаківського, були одержані при сильному перемішуванні розчину. Криві з розчинів з малою концентрацією азотної кислоти (кр. 1 і 2) не виказують максіма аж до 2 вольтів і ток на них є порівнюючи менший ніж на дальших кривих. Останнє спричинене малою електропроводністю цих розчинів, бо в наслідок великого опору  $R$ , спад потенціалу в розчині ( $iR$ ) є великий. Тому також катода не може досягти потенціалу, при котрому настає спад току. (Спад току можна одержати прикладенням більшого вольтажу ніж два волти; на рисунку це не вказано).

Розчини з більшою концентрацією азотної кислоти (від 0.095  $n$ , крива 3) дають максимум і спад току. Дальші придавання азотної кислоти „пригноблюють“ максимум току.

Як що почати електролізу від зера до більшого вольтажу, а потім поступати навпаки, то криві і при сильному перемішуванні розчину вказують гістерезу току: ток при зворотному поступі зростає до максіма при меншому зовнішньому вольтажі. (Далі будемо коротко означати поступ електролізу від зера до більшого вольтажу як простий поступ, а спостерігання електролізу від більшого вольтажу до меншого, — як зворотний поступ). Особливо велика гістереза спостерігається на кривих тоді, коли розчин не перемішується (див. рис. 3). В цьому випадку ток зовсім не зростає при зворотньому поступі, а тягло йде по низшій кривій.

Як що зменшити вольтаж від  $C$  до  $B'$  (див. рис. 3), то ток при електролізі без перемішування, як зазначено, зостається на низчій кривій. Але вистарчить торкнутися поверхні ртуті на катоді скляним прутом, як ток раптом зростає до максіма. В області потенціалів між  $B$  і  $C$  такого зросту порушенням поверхні ртуті не можна. Цей дослід вияснює причину різниці між кри-

вими, одержаними зворотнім поступом при перемішуванні і без перемішування розчину. При сильному перемішуванні є більше шанс порушити поверхневу верству на катоді і тому тут ток зростає до максіма хоч з деякою гістерезою при зворотньому поступі.

З помірив катодних потенціалів при електролізі одержано наступні вислідки. Для того, щоби викликати спад току, катода має досягнути певного потенціалу, характеристичного для даного складу розчину. Ртутьна катода не поляризується тільки зпочатку електролізи, потім потенціал її міняється тягло аж до максіма току, де разом зі спадом току потенціал катода скоком міняється на значно негатиwнiшу величину. (Див. діаграм ч. 4 і таблицю 1).

Таблиця 1.

Розчин 0.01 *n*  $HgNO_3$  + 0,095 *n*  $HNO_3$ .

Applied e. m. f. Зовнішній вольтаж	Current $\times 10^3$ amp. Тік	Kathode potential Катодний потенціал	Applied e. m. f. Зовнішній вольтаж	Current $\times 10^3$ amp. Тік	Kathode potential Катодний потенціал
Розчин перемішувано:			Розчин перемішувано:		
0 v.	0	+ 427 mv	0 v.	0	+ 427 mv
0.20	12	+ 344	0.20	10.5	+ 328
0.40	20.1	+ 213	0.40	18	+ 202
0.60	29.4	+ 92	0.60	27	+ 96
0.80	33	- 49	0.80	34.5	- 41
1.00	39	- 186	1.00	43.5	- 165
1.20	48	- 310	1.02	45	- 180
1.24	51	- 331	1.10	49.5	- 224
1.28	45	- 390	1.20	53.4	- 271
1.30	42	- 418	1.22	54	- 284
1.32	9	- 783	1.25	55.5	- 307
1.34	9	- 803	1.26	9	- 740
1.40	9	- 860	1.30	9	- 778
1.60	10.5	- 1050	1.40	9	- 860
Without stirring:			Without stirring:		
Без перемішування:			Без перемішування:		
0	0	+ 427	0	0	+ 428
0.20	3	+ 255	0.20	0.6	+ 240
0.40	12	+ 125	0.40	1.5	+ 40
0.60	21	+ 9	0.60	1.5	- 169
0.80	27	- 134	0.80	1.5	- 371
1.00	34.5	- 213	1.00	1.5	- 568
1.20	39	- 277	1.10	1.5	- 666
1.30	45	- 357	1.20	1.5	- 762
1.36	51	- 447	—	—	—
1.38	52	- 467	—	—	—
1.40	53.5	- 490	1.40	1.5	- 967
1.42	1.5	- 980	—	—	—
1.60	1.5	- 1170	1.60	1.5	- 1170

Раптовий скок потенціалу на капковій катоді довів К. Танчаківський з pomірів електрокапілярних. При зворотньому поступі без перемішування розчину (при відсутности максіма току) катода поляризується тягло: зменшення зовнішнього вольтажу рівне поступові катодного потенціалу в позитивний бік. Раптова зміна потенціалу при спаді току легко вияснюється на основі закону Ohm'a для електролізу:  $iR = E - P$  ( $E$  зовнішній вольтаж,  $P$  поляризація). З цього рівняння бачимо, що раптове зменшення току  $i$  мусить викликати раптове збільшення поляризації  $P$ ; в нашому випадку поляризується тільки катода (бо анода має дуже велику поверхню в порівнянні з катодою і тому свого потенціалу підчас електролізу не міняє).

Потенціал катода тягло міняється перед спадом току. Можна це вияснити або концентраційною поляризацією ртутьних йонів або тим, що ртуть почасти поляризується воднем: водневі атоми виділюються на поверхні ртуті в дуже незначній кількості і катода стає фактично водневою електродою з воднем дуже малої активності. Це друге пояснення поляризації катода більш правдоподібне. Бо як щоби катода відповідала тільки на ртутьні йони, її потенціал залежавби на поверхневій концентрації ртутьних йонів. В наведеному прикладі (див. табл. 1.) катода перед спадом току поляризується аж на  $-0.4$  волта: це відповідалоби концентрації:  $10^{-15}$  нормальній; ясно, що, якби це було справді так, то така мала концентрація не моглаби постачати йонів для значного току ( $4 \cdot 10^{-2}$  амр.), який спостерігаємо при цьому катодному потенціалі. Отже, при цьому нег'ативному потенціалі катода не реагує на ртутьні йони, а вказує рівновагу між атомами водня в електроді і водневими йонами в розчині. Концентрація йонів ртуті в поверхневій верстві є при тому дуже значна (майже така сама, як перед електролізою).

### Обговорення.

Появу максімів току при катодичній поляризації вперше описав М. Shikata при редукції нітробензену на капковій катоді (Trans. Faraday Soc. **21**, 42, 52, 1925). Потім подібні максіма були спостережені Е. Sanigar'ом (Rec. Trav. Chim. **44**, 1925) і мною (Chem. Listy **19**, № 5, 1925). Дальші досліди Гейровського і його співробітників<sup>1)</sup> вказали, що максіма току можна спостерігати майже при кожній електродукції на капковій катоді: один при-

<sup>1)</sup> Heyrovský a Emelianova. Rozpravy České Akademie Věd **36**, č. 7, 1927.

клад був досліджений К. Танчаківським і є описаний в біжучім томі Збірника. Цікаво, що Mc Aulay і Bowden (Proc. Roy. Soc. London, 110, May 1926) досліджували зі сталюю електродою той самий випадок, що був студіований в цій праці мною, але теоретичні міркування цих авторів не можна прийняти за правдиве вияснення спостережених фактів. Mc Aulay і Bowden досліджували тільки один розчин ( $N.HgNO_3 + N.HNO_3$ ); зріст току перед максимумом вони приписують одночасовому виділенню ртутьних і водних йонів і вважають, що великий зріст спричинений тим, що перенапруження водня з початку є дуже мале. Спад току вони поясняли тим, що на поверхні ртуті раптом твориться верства (дуже неясного характеру), яка спричинює перенапруження і тому ток виділення водня падає і виділення його може наставати тільки при вищих катодних потенціалах. Вони спостерігали також тривалість цієї верстви (подібно, як в описаних мною дослідах).

Пояснення цих авторів є хибні: із численних дослідів з капковою катодою слідує, що максимум току на кривих не стоїть у жадному звязку з перенапруженням водня. Далі, перед спадом току водень з розчинів ртутьних солей і азотної кислоти зовсім не виділюється: в наших дослідах ми не спостерігали цього виділення, а Mc Aulay і Bowden не звертали увагу на те, що виділюється в них на катоді, а спостерігали лишень ток на ампермегрі.

Вияснення максимумів току було докладно подано в працях І. Нейровск'ого і моїй (читано перед Faraday Society 25. I. 1925) і досліди, описані тут, як найліпше потверджують запропоноване нами пояснення.

Коло поверхні катоди в наслідок адсорпції концентрація ртутьних йонів є більша ніж в глибині розчину. При електродізі ток спотрібовує ці йони, але адсорпція з початку є так скоро, що страта йонів з поверхневої верстви моментально покривається новими йонами, що адсорбується з глибини розчину. При збільшенні вольтажу скорість виділення зростає, але не має підстав твердити, що скорість адсорпції міняється з потенціалом електроди. Коли катода, нарешті, набере такий потенція, що скорість виділення йонів рівна скорості адсорпції, то ток досягає максимальної величини. Треба звернути увагу на те, що скорість адсорпції є така велика, що механічне перемішування практично є зайве: максимальні токи однакові при перемішуванні і в спокійному розчині. Дальше збільшення потенціалу катоди при-

водить до того, що скорість виділення перевищить скорість адсорпції: йони з поверхневої верстви швидко зникають і поверхня катода стає відділеною від глибини розчину верствою, з котрої ртутьні йони вичерпані. Ця верства перешкаджає адсорпції, бо очевидно притягання йонів даного роду до поверхні передається через ці йони. Через верству речину з якої вичерпані ртутьні йони, адсорпційні сили не в стані діяти. Цю верству я назвав „адсорпційною ізоляцією“. Витворення цієї ізоляції значно зменшує скорість постачання йонів до поверхні електроди і тому ток раптом падає. Адсорпційна ізоляція щільно прилягає до поверхні катода і, як що тільки витворилась, вимагає значного механічного зусилля, щоби її продерти. Тому при зворотньому поступі без перемішування ток зовсім не зростає, а при перемішуванні спостерігається гістереза. Тут треба пригадати той фізичний факт, відомий з досвіду руху течий, що верстви течі, які знаходяться коло поверхні ціпкого тіла, порушуються з меншою скорістю ніж остання маса течі. Ця мала порушність верств прилягаючих до катода надає адсорпційній ізоляції значну стійкість. Ток після максіма падає не на zero, а на певну малу величину. Цей останній ток є спричинений звичайною дифузією йонів ртуті через ізоляційну верству<sup>1)</sup>. Цей ток насичення або дифузійний ток залежить на перемішуванні розчину, бо при руху розчину грубість прилягаючої до катода ізоляційної верстви зменшується. При значно негативних потенціалах катода (після спаду току) механічне порушення адсорпційної ізоляції не веде до зросту току, бо при таких потенціалах скорість виділення так значна, що „діра“ в версті (як що вона появиться) моментально „залатується“.

При досліді максімів спостережених при редукції уранілових солей я найшов, що придавання інших річевин зменшує висоту максіма або її зовсім „пригноблює“ його залишаючи на кривій звичайний ток насичення. Пригноблення току адсорпції означає зменшення адсорпції придаваною річевиною, котра сама адсорбується і витискає з поверхні йони, що редукуються на катоді. Зменшення адсорпції певної річевини придаванням іншої є річ загально відома у явищах поверхневої (колоїдальної) хемії.

Треба вказати, що поява максімів при електроділізі і адсорп-

<sup>1)</sup> Треба пам'ятати, що „адсорпційна ізоляція“ не значить „електрична ізоляція“: в поверхневій верстві, з котрої вичерпані ртутьні йони, зістаються інші йони напр. водневі, так що електроводність цієї верстви значно не міняється.

ційна природа цього явища має велике значіння для досліду адсорпції — цього важного, але, поки що, таємничого процесу.

Можна спідватися, що дальша розробка подібних електричних студій адсорпції дасть змогу освітлити цю проблему.

Вислідком цих дослідів зі сталими електродами<sup>1)</sup> є встановлення факту існування адсорпційної ізоляції. Бажано, прослідити і виміряти грубість таких ізоляційних верств, щоби тим визначити віддаль, на яку ділають адсорпційні сили а можливо і їх природу. На жаль, при сучасному стані дослідів матеріял не можна привести до математичної формуляції.

Досліди ці переведено в Лабораторії Українського Педагогічного Інституту в Празі. Автор висловлює свою щиро подяку Ректорові Інституту, Професорові Др. В. Сімовичеві, і Сенатові Інституту за матеріяльне уможливлення дослідів.

Професорові Карлового Університету Др-ові I. Neugovsk'ому автор щиро дякує за цінне обговорення праці.

Український Педагогічний Інститут  
ім. М. Драгоманова в Празі.

---

---

<sup>1)</sup> Dr. Ellingham (College of Science, London) приватно повідомив мене, що ним найдено максіма на сталих електродах з платини при редукції азотної кислоти.

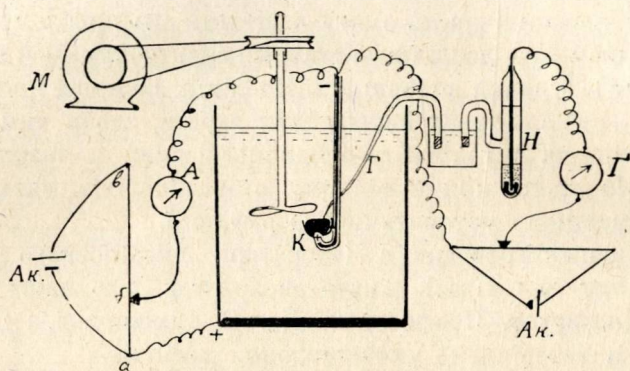


Рис. 1. Схема помірив.

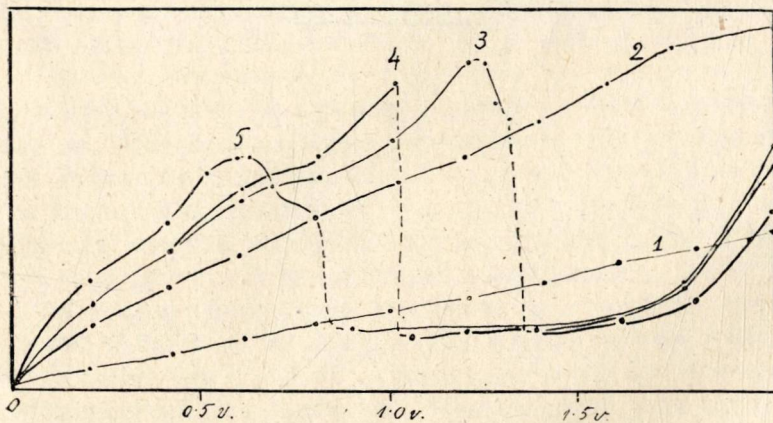


Рис. 2. Криві: ток — зовнішній вольтаж.

Розчини: 1.  $0.01 \text{ n HgNO}_3 + 0.015 \text{ n HNO}_3$   
 2. " " " "  $0.055 \text{ " "}$   
 3. " " " "  $0.095 \text{ " "}$   
 4. " " " "  $0.095 \text{ " "}$   
 5. " " " "  $0.134 \text{ " "}$

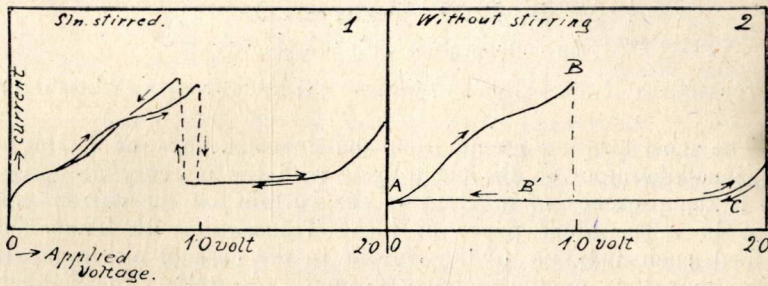


Рис. 3. Розчин:  $0.01 \text{ n HgNO}_3 + 0.134 \text{ n HNO}_3$   
Криві: ток — вольтаж.  
1. Розчин перемішувано. 2. Без перемішування.

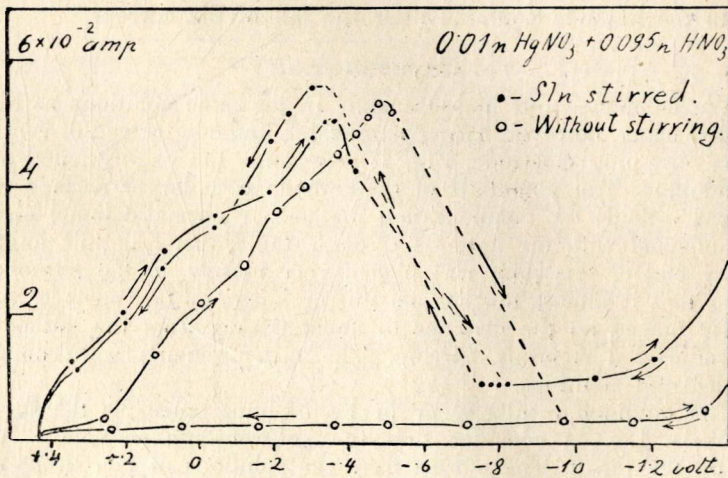


Рис. 4. Криві: ток — потенціал катоди.  
● — Розчин перемішувано.  
○ — Без перемішування.

## SUMMARY.

## Electric Polarisation of Mercury Kathodes in Solutions of Mercurous Salts.

By Dr. P. Herasymenko.

(In collaboration with Starohorśkyj.)

(Transactions of the Ukrainian Ševčenko Scientific Society in Lemberg).

The most striking result from the investigations of J. Heyrovský and his collaborators on the electrolysis with the mercury dropping kathode is the presence of maxima of the current on the current-voltage curves. In a precedent paper of these Transactions K. Tančakivskyj described such maxima of the current in the case of electrodeposition of mercurous ions on the mercury dropping electrode. The sudden decrease of the current after the maximum must be necessarily accompanied with a sudden change of kathode potential as it is evident from the Ohm's Law applicable to the electrolysis in the form:  $iR = E - P$ . (Here,  $i$  — is current intensity,  $R$  — resistance of the circuit,  $E$  — applied e. m. f. and  $P$  — e. m. f. of polarisation;  $P$  is obviously equal to the sum of the kathode and anode potentials. In the arrangement with the mercury dropping kathode, as also in our experiments given below, the anode has been made unpolarisable.) The electrocapillary measurements by K. Tančakivskyj verified indeed the occurrence of sudden shifts in the kathode potential after the fall of the current.

## Experimental.

We conducted our measurements in the same solutions as K. Tančakivskyj using, however, larger immovable kathode instead of very small mercury dropping electrode. Fig. 1. represents the experimental arrangement adopted. The potentials of the kathode with larger surface can be measured directly by compensation method. A normal calomel electrode was connected with the kathode through the Haber-Luggin's joint; the capillary end of this joint was placed very closely to the kathode surface, so that it almost touched its mirror image on that surface. A glass propeller placed at the distance of about 0.3 cm from the kathode surface produced a vigorous stirring. The measurements were done also with unstirred solutions.

The obtained results seem to be of importance for the theory of electrolysis. Let us consider first the „current-applied voltage“ curves given on the fig. 2. The curves from the solutions of mercurous nitrate with a small content of nitric acid have a linear shape. The slope of current on the curve 1. is small and this is undoubtedly due to the small electric conductance of the solution. With increasing concentration of nitric acid the slope of the current becomes more steep and on the curve 3. we observe the characteristic maximum of the current. Further additions of nitric acid produce a decrease of the maximal current. The last effect of the additions on the maximal current I observed first on

the reduction curves of uranyl salt solutions (Chem. Listy, N. 5. 1925). The current after the maximum is independent of applied voltage, thus having the properties of a saturation current. The increase of the current at the end of the curves is due to reduction of nitric acid.

A very peculiar feature from our experiments is given by the fact that the height of the maximum current is independent on the stirring of the solution, whereas the saturation current greatly increases on stirring. The current — voltage curves show a hysteresis when the cathode is polarised backwards (i. e. from greater voltages to lower ones). If the solution is stirred the current on backward polarisation increases to maximum at somewhat lower voltage than at which it decreased during onward polarisation. Especially large hysteresis is observable when the solution is electrolysed without stirring. In this case the current after it has been fallen from the maximum does not rise at all on backward polarisation, but continually moves along the saturation current curve (Compare fig. 3.). However, if we disturb the cathode interface merely by touching it by a glass rod at the voltage  $B'$  (see fig. 3.) the current immediately rises to maximum. At voltages greater than that corresponding to point  $B$  on the curve 2. fig. 3. (potential of the maximum) the mechanical disturbance of the surface does not lead to the increase of current.

A similar shape have the cathode potential-current curves. One example of these curves is given in the table 1. and on the fig. 4.

At the beginning of the electrolysis the cathode is unpolarisable but soon afterwards its potential commences to change continually toward negative values. This behaviour of the cathode potential cannot be due to the concentration polarisation of mercurous ions: from the fig. 1. we see that to the same cathode potential can correspond different current intensities according to the direction in which electrode is polarised (onwards or backwards). The polarisation of the cathode is to be ascribed to the charging of the electrode with atomic hydrogen: the cathode becomes a hydrogen electrode with very small activity of hydrogen atoms. Owing to the minute concentration of hydrogen atoms, which is necessary to establish the observed potentials, the current due to the deposition of hydrogen is infinitesimally small in comparison with the current of the deposition of mercurous ions. According to the previous history of electrolysis the concentration of mercurous ions near the surface of the cathode can slightly differ so that the current of their deposition might be not the same at the same cathode potential. With the fall of current the cathode potential changes discontinually, but after this change took place the cathode polarises continually with further increase of the applied e. m. f. Peculiarly enough, the current in this part of the curve has always the same value at the same cathode potential independently of the course of the polarisation.

It must be noted that the potential at which the current falls depends on the concentration of nitric acid in the solution electrolysed: with the increase of the concentration of nitric acid the potential of the maxima current displaces to the negative side.

### Discussion.

The occurrence of the maxima of the current on the polarisation curves was explained by J. Heyrovský in the following way (Paper read before the Faraday Society, 25 th Jan. 1928; see also, P. Herasymenko, *ibidem.*): We assume that mercury ions are strongly adsorbed at the surface of the kathode. The electrodeposition diminishes the concentration of mercurous ions in the interfacial layer but this decrease is instantly compensated by the quick adsorption. We assume, that the velocity of adsorption is independent of the kathode potential and that the adsorption forces are negligible at some definite small distance from the cathode surface. With increasing polarisation the rate of exhaustion of mercurous ions by electrodeposition increases so that we reach finally such value of kathode potential at which the adsorption just restores the decrease of mercurous ions: at this potential the current must be maximal. At any greater polarising e. m. f. the velocity of electrodeposition becomes greater than the rate of adsorption; in consequence of this an exhaustion of reducible matter immediately starts in the interfacial layer. Now a thin layer of the solution exhausted as to the mercurous ions surrounds the kathode, the thickness of which prevents the action of the adsorption forces between the cathode surface and mercurous ions in the bulk solution, so that the current rapidly falls. The small saturation current is due to the electrodeposition of only those ions which slowly diffuse through the exhausted layer. This layer has a remarkable stability and once formed can be destroyed only mechanically by direct disturbance or by stirring. When formed in an unstirred solution this layer remains intact on several backward and onward polarisations. This stability explains the hysteresis of the observed curves.

The independence of the adsorption (maximal) current of the rate of stirring of the solution deserves a special attention. It shows that the adsorption velocity is very high; unless the velocity of deposition corresponding to a given kathode potential is not too great, the adsorption instantly restores any loss of reducible matter in the interfacial layer so that the stirring is practically useless. But, as soon as the film-isolation on the kathode is formed, the stirring has a great influence on the saturation (diffusion) current since it evidently diminishes the thickness of the film.

Mc Aulay and Bowden studied recently (*Proc. Roy. Soc. May, 1926*) the electrolysis of the solutions of mercurous nitrate and nitric acid, and found also the sudden changes of current and kathode potential similar to that described in this communication. But, they attributed this phenomena to the sudden changes in overvoltage. Since before the fall of current only mercury is deposited on the kathode and as J. Heyrovský found the maxima can be observed on current-voltage curves during each electrodeposition or reduction, the hypothesis of Mc Aulay and Bowden is unjustifiable. The sudden decrease of the mercury electrodeposition has nothing to do with the hydrogen over-voltage.

At the end it must be pointed out that the electrodeposition of

mercury from mercurous nitrate solutions seems to proceed in several stages. It can be concluded from the fact that curves of electrodeposition have several inflections (before the fall of the current). The increase of the current at the beginning is due to the discharge of simple mercurous ions; further bends possibly correspond to the discharge of mercury from complex ion. We are not able at present to describe more precisely the nature of these processes.

The author wishes to express his best thanks to Professor J. Heyrovský for the valuable criticism of this work.

Ukrainian Dragomanov Institute  
in Prague.

---

---

## Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів.

Візьмімо нескінчений ступанковий дріб

$$(1) \quad \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

де  $a_i$  та  $b_i$  є якісь комплексні числа, і впровадьмо зазначення:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 b_2,$$

$$(2) \quad A_i = b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2}$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = b_1, \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2,$$

$$(3) \quad B_i = b_i B_{i-1} + a_i B_{i-2}$$

Тоді, як відомо, буде:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots} + \frac{a_n}{b_n}}.$$

Цей дріб називаємо  $n$ -им ступанковим наближенням дроба (1), а  $A_n$  та  $B_n$  — відповідно чисельником та знаменником  $n$ -го ступанкового наближення.

Нагадаймо одну Pringsheim'ову<sup>1)</sup> теорему:

Коли числа  $a_i$  та  $b_i$  справджують нерівності:

$$(4) \quad |a_i| \leq |b_i| - 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

то ступанковий дріб

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} +$$

збігається і його абсолютна вартість є не більша

від 1, тоб то існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$  і

---

<sup>1)</sup> Див. Sitzgsber. Münch. Akademie, 1898, також O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, ст. 254.

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} \right| \leq 1.$$

З (2) та (3) легко дістаємо:

$$A_i B_{i-1} - B_i A_{i-1} = (-1)^{i-1} a_1 a_2 \dots a_i;$$

отже

$$(6) \quad \frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = (-1)^{i-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_i}{B_{i-1} B_i},$$

звідки

$$(7) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

З другого боку, як показують залежності (3),

$$\begin{aligned} |B_i| &\geq |b_i| \quad |B_{i-1}| - |a_i| \quad |B_{i-2}| \\ |B_i| &\geq (|b_i| - 1) \quad |B_{i-1}| - |a_i| \quad |B_{i-2}|, \end{aligned}$$

що з огляду на (4) дає:

$$|B_i| - |B_{i-1}| \geq (|b_i| - 1) (|B_{i-1}| - |B_{i-2}|),$$

отже

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq (|b_1| - 1) (|b_2| - 1) \dots (|b_n| - 1) \geq |a_1 a_2 \dots a_n|$$

або

$$(8) \quad \left| \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B_{i-1} B_i} \right| \leq \frac{1}{|B_{i-1}|} - \frac{1}{|B_i|}$$

Ряд із додатних чисел (8), очевидно, збігається, бо сума з його перших  $n$  членів не перевищує 1; отже збігається й ряд

$$\frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \dots$$

тобто, як видно з (7), існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ .

Можна ще зауважити, що

$$\left| \frac{A_{n+p}}{B_{n+p}} - \frac{A_n}{B_n} \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left| \frac{a_1 a_2 \dots a_i}{B_{i-1} B_i} \right| \leq \frac{1}{|B_n|} - \frac{1}{|B_{n+p}|}$$

та

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_m}{B_m} \right| \leq \frac{1}{|B_m|}.$$

Далі подаємо та використовуємо деякі прості та важливі висновки з цієї теореми.

## §. 1.

Маємо наступні твердження:

1) Коли множини чисел  $|p_i|$  та  $|q_i|$  є обмежені, то ступанковий дріб

$$(9) \quad \frac{p_1}{z + q_1} - \frac{p_1}{z + q_2} - \frac{p_3}{z + q_3} -$$

одностаїно збігається поза колом  $|z| = R$  досить великого радіуса. Справді, щоб здійснити для цього дроба нерівності (4), досить узяти

$$|z| \geq |p_n| + |q_n| + 1$$

2) Коли числа  $q_i$  всі мають однаковий аргумент  $\theta$  і множина чисел  $|p_i| - |q_i|$  є обмежена, то ступанковий дріб

$$(10) \quad \frac{p_1}{r_1 z + q_1} - \frac{p_2}{r_2 z + q_2} - \frac{p_3}{r_3 z + q_3} -$$

збігається для всіх тих вартостей змінного  $z$ , що справджують умови

$$r_i z e^{-i\theta} \geq |p_i| - |q_i| + 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Справді, бо в такому разі

$$|p_i| \leq |r_i z + q_i| - 1$$

Нехай маємо тепер ряд функцій

$$(11) \quad f_0(z) = f(z), f_1(z), f_2(z), f_3(z),$$

зв'язаних залежностями:

$$f_i(z) = \frac{s_0^i}{z - \frac{s_1^i}{s_0^i} - s_0^i f_{i+1}(z)}$$

Тоді

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1} - \frac{s_0^1 s_0^2}{z - \frac{s_1^2}{s_0^2} - \dots - \frac{s_0^{k-2} s_0^{k-1}}{z - \frac{s_1^{k-1}}{s_0^{k-1}} - s_0^{k-1} f_k(z)},$$

де очевидно повинно бути

$$s_0 \neq 0, \quad s_0^1 \neq 0, \quad s_0^{k-1} \neq 0.$$

Взявши  $k = \infty$ , можна поставити питання за збіжність ступанкового дроба

$$(12) \quad \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \frac{s_0^1 s_0^2}{z - \frac{s_1^2}{s_0^2}} - \dots$$

і за правдивість рівності:

$$(13) \quad f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \dots$$

в разі, коли дріб (12) збігається.

Для збіжності дроба (12) поза колом  $|z| = R$  досить великого радіуса, як бачимо з попереднього, досить, щоб числа  $s_0^i, s_1^i$ , справджували нерівності:

$$(14) \quad |s_0^{i-1} s_0^i| < k, \quad \left| \frac{s_1^{i-1}}{s_0^{i-1}} \right| < k \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

де  $k$  є якесь стале число; ці нерівності правдиві впр., коли дріб (12) є періодичний. Але не можемо твердити, що з умов (14) випливає рівність (13). Припустімо, що крім нерівностей (14) маємо ще для  $|z| > R_1$

$$(15) \quad f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \dots$$

отже, що функція  $f(z)$  розвивається в степеневий ряд в обсягу точки  $z = \infty$ . Тоді рівність (13) є правдива в усякім обсягу, що належить одночасно до  $|z| > R$  та до  $|z| > R_1$ .

Справді, як відомо, розвинення  $n$ -го ступанкового наближення  $\frac{A_n}{B_n}$  дроба (12) у степеневий ряд:

$$(16) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots + \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} + \dots$$

має перші  $2n$  членів ті самі, що ряд (15); крім того, з огляду на обмеженість множини функцій  $\frac{A_n}{B_n}$  в обсягу  $|z| > R$ , ряди (16) всі в тім обсягу збігаються, і до тогож для  $|z| > \rho > R$

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} \right| \leq \left| \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} + \dots \right| \leq$$

$$\leq M \left( \left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+1} + \left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+2} + \dots \right),$$

де

$$M \geq \left| \frac{A_n}{B_n} \right| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Так бачимо, що

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_n}{B_n} - f(z) \right| &\leq \left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} \right| + \left| \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \right| \leq \\ &\leq M \left( \left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+1} + \left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+2} + \dots \right) + \left| \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \right| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0 \end{aligned}$$

Отже

$$(17) \quad f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$$

для

$$|z| > R \text{ та } R_1,$$

що й малося довести.

Слід ще відзначити, що на підставі відомої теореми Stieltjes'a — Vitali<sup>1)</sup>, рівність (13) або (що те саме) рівність (17) правдива одностайно в усякім замкненім обсягу площі комплексного змінного  $z$ , де множина функцій  $\frac{A_n}{B_n}$  є обмежена.

Звідси, між иншим, висновок, що обсяг збіжності ряду (15) є не менший за обсяг  $|z| > R$ .

## § 2.

Нехай сучинники ряду (15) є дійсні і справджують вимоги:

$$(18) \quad s_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \dots^2)$$

Із нерівностей (18), на підставі відомої Якобі'ввої формули в теорії визначників впливають ще наступні

$$(19) \quad s_{2k} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+1} \\ s_{2k+1} & s_{2k+2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+2} \\ s_{2k+2} & s_{2k+4} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Далі з залежності

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - s_0 f_1(z)}$$

<sup>1)</sup> Див. нпр. Vitali. Annali di Matematica, (3), m. 10, 1904, Carathéodory and Landau, Sitzgsber. Berl. Akad., 1911, Jacobsthal, Jahresbericht der Deutsch. Math.-Ver., m. 36.

<sup>2)</sup> Цей випадок розібрав Grommer (Crelle's Journal, m. 144.), виходячи з вищих засад.

де за  $f_1(z)$  беремо ряд того самого, що  $f(z)$ :

$$(20) \quad f_1(z) = \frac{s_0'}{z} + \frac{s_1'}{z^2} + \frac{s_2'}{z^3} +$$

через порівняння сучинників вираховуємо:

$$(21) \quad s_i' = \frac{(-1)^{i+1}}{(s_0)^{i+3}} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Далі, знов із допомогою Яacob'ової формули, пишемо:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix}^2 - (s_0)^{i+1} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

або, беручи під увагу (21):

$$(22) \quad - \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{i-2}' & s_{i-1}' \\ s_{i-1}' & s_i' \end{vmatrix} \cdot (s_0)^{i+3}$$

Так само:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s_3 & s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_2 \end{vmatrix}^2 = (-s_0)^{i+1} s_{i-2}' \begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

або, беручи під увагу (22):

$$(23) \quad \begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{i-4}' & s_{i-3}' & s_{i-2}' \\ s_{i-3}' & s_{i-2}' & s_{i-1}' \\ s_{i-2}' & s_{i-1}' & s_i' \end{vmatrix} (s_0)^{i+3}$$

І т. д. Поклавши тепер в (21)  $i = 0$ , в (22)  $i = 2$ , в (23)  $i = 4$ , дістанемо:

$$(24) \quad s'_0 = \frac{1}{(s_0)^3} \left| \frac{s_0 s_1}{s_1 s_2} \right| > 0, \quad \left| \frac{s'_0 s'_1}{s'_1 s'_2} \right| > 0, \quad \left| \frac{s'_0 s'_1 s'_2}{s'_2 s'_3 s'_4} \right| > 0,$$

Отже нерівності (18) [а так само і (19)] не порушуються, коли в них числа  $s_k$  замінити відповідно числами  $s'_k$ .

Тепер з (24) та з (19) маємо:

$$(25) \quad |s_0^{i-1} s_0^i| \leq \frac{s_2^{i-1}}{s_0^{i-1}} < \frac{s_4^{i-1}}{s_2^{i-1}} < \frac{s_6^{i-1}}{s_4^{i-1}} <$$

$$(26) \quad \left| \frac{s_{2k+1}^i}{s_{2k}^i} \right| < \left| \frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k+1}^i} \right|$$

отже

$$(27) \quad \left| \frac{s_1^i}{s_0^i} \right| < \sqrt{\frac{s_2^i}{s_0^i}} < \sqrt{\frac{s_4^i}{s_2^i}} < \sqrt{\frac{s_6^i}{s_4^i}} <$$

$$(28) \quad \left| \frac{s_3^i}{s_2^i} \right| < \sqrt{\frac{s_4^i}{s_2^i}} < \sqrt{\frac{s_6^i}{s_4^i}} < \sqrt{\frac{s_8^i}{s_6^i}} < \dots$$

Останні нерівності доводять існування оцих границь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k}^i}} = \alpha \leq R \text{ та } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k}^i} > 0,$$

і тоді (25), (27) та (28) дають:

$$(29) \quad |s_0 s_0^i| \leq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0}{s_1} \right| \leq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}}{\alpha} \right| \leq s_{2k}$$

Тепер доведемо, що для всякого  $i$  правдиві нерівності:

$$(30) \quad |s_0^{i-1} s_0^i| \leq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0^i}{s_1^i} \right| \leq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}^i}{s_{2k}^i} \right| \leq \alpha \leq R$$

Справді, колиб найдальша від  $z=0$  особлива точка  $\beta$  функції  $f_1(z)$  лежала поза колом

$$|z| = \alpha,$$

то вона могла б бути лише (простим або кратним) полюсом функції  $f_1(z)$ , тоб то нулем функції  $f(z)$ ; при тім цей полюс не міг бути дійсним, бо для такого дійсного числа  $\beta$

$$\beta f(\beta) = \left(s_0 + \frac{s_1}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta_2} \left(s_2 + \frac{s_3}{\beta}\right) + \\ + > \left(s_0 - \left|\frac{s_1}{\alpha}\right|\right) + \frac{1}{\beta_2} \left(s_2 - \left|\frac{s_3}{\alpha}\right|\right) + \geq 0$$

Отже нехай цей полюс є

$$\beta = |\beta| e^{i\theta} \quad (\theta \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

а його residu

$$B = \{B\} e^{i\varphi};$$

коли більше полюсів з модулем  $|\beta|$ , крім  $|\beta| e^{i\theta}$ , функція  $f_1(z)$  не має, то дістаємо неможливу нерівність:

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s'_{2n+2}}{\rho^2 s'_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n\theta + 2\theta + \varphi)}{\cos(2n\theta + \varphi)} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos 2\theta - \sin 2\theta \operatorname{tg}(2n\theta + \varphi)],$$

бо ця границя або не існує або (у випадку  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ) є  $-1$ .

Той самий висновок і з припущення кількох пар полюсів з модулем  $|\beta|$ : воно неможливе з огляду на додатність відношення  $\frac{s'_{2n+2}}{s_{2n}}$ .

Так доведемо, що за умов (18) всі ряди  $f_i(z)$  збігаються в обсягу  $|z| > R$ ; одночасно доведемо нерівності (30) і рівність:

$$(31) \quad f(z) = z - \frac{s_0}{s_1} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}}$$

для досить великих вартостей  $|z|$ , за тих самих умов.

### § 3.

До типу функцій  $f(z)$  попереднього параграфу належать інтеграли Stieltjes'a — Маркова:

$$(32) \quad f(z) = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z-x},$$

де функція  $\psi(x)$  є обмежена і не меншає на інтервалі  $(a, b)$  (інтеграл узято в розумінні Stieltjes'овім). Тут очевидно  $f(z)$  є аналітична функція від  $z$  скрізь на площі комплексного змінного  $z$ , окрім точок інтервалу  $(a, b)$ . Поза колом

$$|z| = R$$

досить великого радіуса маємо:

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

як що  $a$  та  $b$  є числа скінченні; тут

$$s_i = \int_a^b x^i d\psi(x) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Звідси, з огляду на нерівність:

$$d\psi(x) \geq 0,$$

як простий висновок нерівности:

$$s_0 > 0, \quad \left| \frac{s_0 s_1}{s_1 s_2} \right| > 0, \quad \left| \frac{s_0 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3 s_4} \right| > 0, \dots$$

Отже функція (32) розвивається в ступанковий дріб, що збігається до цієї функції скрізь поза колом  $|z| = R$  досить великого радіуса.

Не так легко стоїть справа досліду збіжності ступанкових дробів, що в них розвиваються інтеграли (32) з нескінченими

межами. Нпр. відомо, що  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{z-x} dx$  розвивається в ступанковий дріб<sup>1)</sup>

$$(33) \quad \frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z-3} - \frac{\frac{m}{m+1}}{z-2m-1} - \dots$$

Збіжність цього дроба для вартостей змінного

$$z < 0$$

випливає з п. 2) § 1, до слід лише покласти:

$$r_i = \frac{1}{i+1}, \quad \theta = \pi;$$

тоді бо буде

$$|p_i| - |q_i| + 1 = \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i+1} + 1 = 0$$

<sup>1)</sup> Пор. А. Марков, Исчисление конечных разностей, стор. 121.

Але питання, чи правдива рівність

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{z-x} = \frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{z-3}{2}}$$

цим не розв'язується. Теорія Маркова та Stieltjes'a дає на нього позитивну відповідь.

Завважмо на останку оце відоме просте твердження: нулі та полюси  $n$ -го ступанкового наближення  $\frac{A_n}{B_n}$  дроба (31) всі різні, дійсні і чергуються, отже résidus всіх полюсів додатні. Ця властивість не залежить від збіжності нашого дроба і правдива для всякого дроба типу

$$\frac{p_1}{z+q_1} - \frac{p_2}{z+q_2} - \frac{p_3}{z+q_3} -$$

де числа  $q_i$  є дійсні, а числа  $p_i$  — додатні.

Отож

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{R_1}{z-x_1} + \frac{R_2}{z-x_2} + \dots + \frac{z-x_n}{R_n},$$

де числа  $x_i$  дійсні, а числа  $R_i$  додатні і при тім

$$(34) \quad R_1 + R_2 + \dots + R_n = s_0$$

і тому

$$(35) \quad f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{z-x_i}$$

З огляду на (34) бачимо, що всі  $\frac{A_n}{B_n}$  обмежені в усякім обсягу

поза дійсною віссю площі комплексного змінного  $z$ . Отже, на підставі теореми Vitali (див. § 1) рівність (35) (або рівноважна рівність (31)) є правдива на всій площі, крім, може, частини дійсної осі.

Що до рівності (35), то вона особливо виявляє, оскільки загальний приклад умов (18) дає функція (32).

#### § 4.

Нехай тепер сучинники ряду

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z_2} + \frac{s_2}{z_3} + \dots,$$

лишаючися дійсними, справджують вимоги

(36)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_i \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_{i+2} & \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

почавши з якогось значка  $i > 0$ . Узагальнюючи обчислення параграфу 2 легко приходимо до формули:

$$\begin{vmatrix} s_0^1 & s_1^1 & \dots & s_{i+p-1}^1 \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_{i+p}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p}^1 & s_{i+p+1}^1 & \dots & s_{2i+2p-2}^1 \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p-1} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

Так само:

$$\begin{vmatrix} s_0^2 & s_1^2 & \dots & s_{i+p-2}^2 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_{i+p-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p-2}^2 & s_{i+p-1}^2 & \dots & s_{2i+2p-4}^2 \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p+1} \begin{vmatrix} s_0^1 & s_1^1 & \dots & s_{i+p-1}^1 \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_{2i+2p-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p}^1 & s_{i+p+1}^1 & \dots & s_{2i+2p-2}^1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} = (s_0^{i-1})^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0^{i-1} & \dots & s_p^{i-1} & s_{p+1}^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p+1}^{i-1} & \dots & s_{2p-1}^{i-1} & s_{2p+2}^{i-1} \end{vmatrix}$$

Перемноживши ці рівності, дістанемо:

$$(37) \quad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p-1} (s_0^1)^{-2i-2p+1} (s_0^{i-1})^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

Зосібна тут можна взяти  $i-1$  замість  $i$  та 0 замість  $p$ :

$$(38) \quad s_0^{i-1} = (s_0)^{-2i+1} (s_0^1)^{-2i+3} \dots (s_0^{i-2})^{-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}$$

Дві останні формули показують, що вирази

$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_1^i & s_2^i & \dots & s_{p+1}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+p+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

мають однаковий знак. Отож із умов (36) випливає, коли покласти  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ :

$$(37) \quad s_0^i > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i \\ s_1^i & s_2^i \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & s_2^i \\ s_1^i & s_2^i & s_3^i \\ s_2^i & s_3^i & s_4^i \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Звідси, в зв'язку з тим, що доведено в параграфі 3, висновок: ступанковий дріб

$$f_i(z) = \frac{s_0^i}{z - \frac{s_1^i}{s_0^i} - \frac{s_0^i s_0^{i+1}}{z - \frac{s_1^{i+1}}{s_0^{i+1}} - \dots}}$$

збігається до функції  $f_i(z)$  поза колом  $|z| = R$  досить великого радіуса; якийби не був значок  $i$ , за умов (36) функція  $f(z)$  розкладається в збіжний ступанковий дріб так, що

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1} - \dots}}$$

поза колом  $|z| = R$  досить великого радіуса.

Очевидно умови (37) рівнозначні з нерівностями:

$$(38) \quad s_0^i > 0, \quad s_0^{i+1} > 0, \quad s_0^{i+2} > 0, \dots$$

Але з (37) або з (38) не конче випливають нерівності (36), а умови трохи загальні:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_i \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \quad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_{i+2} & \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+3} & \dots & s_{2i+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \dots,$$

що є цілком рівноважні з умовами (37).

## Résumé.

### Sur la convergence des certaines fractions continues

par M. Krawtchouk.

En se basant sur un critère connu de Pringsheim on peut affirmer que la fraction continue

$$\frac{p_1}{z + q_1} - \frac{p_2}{z + q_2} - \frac{p_3}{z + q_3} - \dots,$$

converge pour  $|z| > R$ , si les nombres  $p_i$  et  $q_i$  vérifient la condition suivante:

$$|p_i| + |q_i| \leq R + 1$$

En développant la fonction

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \dots$$

en fraction continue:

$$(1) \quad \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \frac{s_0^1 s_0^2}{z - \frac{s_1^2}{s_0^2}} - \dots$$

on peut établir que

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \dots$$

pour  $|z|$  assez grand pourvu que les nombres

$$|s_0^{i-1} s_0^i| + \left| \frac{s_1^i}{s_0^i} \right| \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{soient bornés.}$$

L'auteur démontre que cette dernière condition est remplie dans le cas

$$s_0 > 0, \quad s_0^1 > 0, \quad s_0^2 > 0, \dots$$

ainsi que dans le cas plus général:

$$s_0^k > 0, \quad s_0^{k+1} > 0, \quad s_0^{k+2} > 0, \dots$$

Ces dernières conditions se réduisant aux suivantes:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & \dots & s_{2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0, \quad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{2k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k+2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+2} & s_{k+3} & \dots & s_{2k+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

on parvient de la sorte à la généralisation des inégalités connues

$$s_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

suffisantes pour la convergence de la fraction continue (1).

## Замітка про контурні інтеграли.

Як відомо, загальний довід званої рівності

$$(1) \quad \int_C P(x, y) dy = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x} ds$$

зводиться на випадок, коли  $C$  є обвід прямокутника з вершками  $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2)$  \*. Ми доведемо тут правдивість рівності (1) для всякого замкненого контура  $C$  в данім обсягу  $S$ , як що для всякого такого контура права й ліва сторона цієї рівності існують (не вимагаючи впр. суцільности функцій  $P$  та  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ).

Зазначивши через  $C_n$  обвід згаданого прямокутника та через  $s_n$  його поле, можемо дібрати числа  $b$  та  $B$  на інтервалі  $(y_1, y_2)$  так, що буде:

$$(2) \quad [P(x_2, b) - P(x_1, b)](y_2 - y_1) \leq \int_{C_n} P dy = \\ = \int_{y_1}^{y_2} [P(x_2, y) - P(x_1, y)] dy \leq [P(x_2, B) - P(x_1, B)](y_2 - y_1),$$

тоб то:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \cdot s_n \leq \int_{C_n} P dy \leq \frac{\partial P}{\partial x}(A, B) \cdot s_n \quad (x_1 < a, A < x_2)$$

А що поле  $s$  можна з довільним наближенням заступити сумою піль типу  $s_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), то

$$\lim \sum_{n=1}^N \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \cdot s_n = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x} ds = \lim \sum_{n=1}^N \frac{\partial P}{\partial x}(A, B) \cdot s_n$$

---

\*). Пор. артикул „Про Green'ове та Stokes'ове перетворення“ в т. XXV цього „Збірника“ (рік 1926); в цій замітці взагалнено деякі з його вислідів. При цій нагоді завважмо, що помічну теорему на стор. 86 у тім артикулі слід опустити (що не порушать дальших вислідів).

і так само

$$\int_C P dy = \lim \sum_{n=1}^N \int_{C_n} P dy ;$$

це, з огляду на (3), і доводить наше твердження.

Подібнимиж міркуваннями дійдемо рівностей:

$$(4) \quad \int_C (P dy - Q dx) = \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) ds ,$$

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds ,$$

якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  можна обсяг  $\Sigma$  поділити на такі квадратні обсяги типу  $s_n$ , що в кожному із них бодай одна точка  $(a, b)$  справджує нерівності:

$$(5) \quad \left| P(xy) - P(ab) - (x-a) \frac{\partial P}{\partial x}(ab) - (y-b) \frac{\partial P}{\partial y}(ab) \right| \leq \varepsilon \sqrt{s_n}$$

$$\left| Q(xy) - Q(ab) - (x-a) \frac{\partial Q}{\partial x}(ab) - (y-b) \frac{\partial Q}{\partial y}(ab) \right| \leq \varepsilon \sqrt{s_n} ,$$

коли точка  $(x, y)$  перебігає контур  $C_n$ .

Справді, останні нерівності дозволяють написати:

$$\left| \int_{C_n} \left[ P(xy) - P(ab) - (x-a) \frac{\partial P}{\partial x}(ab) - (y-b) \frac{\partial P}{\partial y}(ab) \right] dy \right| =$$

$$= \left| \int_{C_n} P dy - \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \cdot s_n \right| \leq \varepsilon \sqrt{s_n} (y_2 - y_1) = \varepsilon \cdot s_n$$

$$\left| \int_{C_n} Q dx + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \cdot s_n \right| \leq \varepsilon \cdot s_n$$

З цих двох формул дістаємо:

$$\left| \sum_{n=1}^N \int_{C_n} (P dy - Q dx) - \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \right] \cdot s_n \right| \leq 2\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^N s_n ,$$

що, по переході до границі і зведеться на першу формулу (4). Як приклад, візьмімо функцію

$$f(z) = P(xy) + iQ(xy)$$

комплексного змінного  $z = x + iy$ , що має скрізь у обсягу  $\Sigma$  похідну (не конче суцільну); рівність

$$(6) \quad \lim \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$

показув, що умови (5) можна справдити, а тому, з огляду на (4) та (6), маємо:

$$\int_c (P dy - Q dx) = 0, \quad \int_c (P dx + Q dy) = 0, \quad \text{тоб то} \quad \int_c f(z) dz = 0.$$

Наведені міркування взагальнюються на функції кількох змінних та на кратні інтеграли.

**Д-р Ю. Русов**

Доцент Української Господарської  
Академії в Подєбрадах.

---

## Бокова мускулатура риб деяких етольогічних типів.

### I. Рух і форма тіла.

#### § 1. Плавці — органи руху.

Життя тварини так тісно звязане зі способом руху, що трудно провести межу між укладом життя і рухом. Чи уклад життя примушує тварину так чи инакше рухатися, чи спосіб руху викликає ті чи інші пристосовання в організмі, не будемо зараз рішати. Розглянемо, як впливає уклад життя, отже і тісно звязаний з ним спосіб руху риби на форму тіла взагалі і на мускулатуру, від якої й залежить рух, — зокрема. Спосіб руху водяних тварин взагалі, а риб зокрема вимагає від спостерігача дуже великої уваги і звичайно досвідів над живими об'єктами. Ми звикли бачити, що хребетні тварини рухаються головним чином завдяки своїм кінчинам. Так само як земні тварини, мають вищі представники риб характеристичні для хребовців чотири кінчини, виявлені грудними (Pectorales) і черевними (Ventrals) паристими плавцями. Але крім цих паристих плавців мають риби й непаристі, яких бракує у земних форм і які виявлені хвостовим (Caudalis), анальними (Anales) і спинними плавцями (Dorsales); нижчі форми риб (Acrania і Cyclostomata) мають один нездиференційований, непаристий плавець, що тягнеться по спині і загинається, утворюючи хвостовий плавець кругом заднього кінця тіла та переходить у анальний плавець.

Спостереження над розвитком риб вказують, що такий плавець у вигляді одної складки, що тягнеться медіально довкруги тіла є філогенетичною ознакою. Причинами, що викликали розпад цієї первісної одностайної фалди, вважає Dean<sup>1)</sup> утворення при швидших ундуляторних рухах гудзів неоднакової

---

<sup>1)</sup> За Шмальгаузенем „Непарные плавники“, Київ, Зап. Общ. Ест. 1913.

механічної праці. Разом з прогресивним розвитком швидкості при плавбі і в зв'язку з цим необхідності швидких ундуляторних рухів риби і цілого плавця мусіли утворитися гудзи слабкої механічної праці, де плавець редукувався. У відступах між ціми гудзами максимальна праця викликала сильний розвиток окремих лопатів, які й дали непаристі плавці. Н. Braus<sup>1)</sup> зв'язує розпад суцільної фалди на окремі плавці з придбанням рибою міцного скелету і слабим зв'язком плавця з тулубом (*Selachiae*, *Chondroganoidei*), коли тимчасом у риб з гнучким скелетом (*Cyclostomata*, *Malacopteri*) плавці липаються суцільною складкою. Безперечно гнучкість або твердість скелету має дуже велике значіння не лише в утворенні, але й у формі плавців, про що ми ще будемо згадувати. Fürbringer<sup>2)</sup> думає, що розпад на окремі плавці викликається прогресивним розвитком хвостового плавця, який переймає на себе головну льокомоторну функцію і поволи заміняє ундуляторний рух цілого тіла. Це пересування пропульзорного апарату назад викликає потребу в сильних лопатях, які кермувалиби рухом, але одночасно і не утворювалиб великого опору; це й викликало (знову же очевидно в зв'язку з отвердінням вісєвого скелету, що зменшило змогу в ундуляторних рухах цілого тіла) розпад суцільної складки на окремі сильні плавці спинні і анальний.

Як би то не було, непаристий суцільний первісний плавець у типової форми риб розпався на окремі спинні, хвостовий і анальний (анальні) плавець.

Утворення паристих плавців виявляє багато неясного. Досить правдоподібною гіпотезою є те, що вони походять теж з одної суцільної ектодермальної складки. Непариста складка завернувши на черевну сторону тіла, розкололася на дві бокові, які тягнулися по боках тіла спочатку суцільно, а потім розбилися на окремі участки, з яких лишилися у сучасних риб 2 пари. O. Abel<sup>3)</sup> доказує, що найстарші фузіформні риби не мали паристих плавців, а пізніше дістали їх у більшій кількості. Так у *Birkenia*, *Lasanius* медіально по черевній стороні тіла тягнеться ряд непаристих плавців. У них не знаходимо жадного сліду паристих плавців і очевидно „при швидкій плавбі мусіло бути обертання тіла круг поздожньої осі“<sup>4)</sup>. У *Climatius* (Девон)

<sup>1)</sup> Теж. <sup>2)</sup> Теж.

<sup>3)</sup> O. Abel: *Grundzüge der Palaeobiologie*. Stuttgart 1912.

<sup>4)</sup> Приводжу ці слова, бо далі при розгляді ролі паристих плавців буде згадано про їх функцію як горизонтальних кермуючих апаратів.

бачимо ряд плавців, які йдуть по боках тіла, що й відповідає гіпотетичному типови з двома складками.

Можливо, що ті самі фактори, які викликали розпад суцільної медіальної складки, причинилися й до розпаду латеральних складок, з яких у типової форми знаходимо тепер два черевні і два грудні плавці.

У риб знаходимо звичайно кінчини:

1. Непаристі: Спинний плавець (Dorsalis D), що буває або один, два або й кілька (напр. Polypterus). У Salmonidae знаходимо ще т. зв. туковий спинний плавець. Хвостовий (Caudalis) плавець різної форми і будови. Анальний (Analis) один, в різних випадках.

2. Паристі плавці виявлені двома черевними (Ventrales), що відповідають заднім кінчинам земних тварин і двома грудними (Pectorales), що відповідають переднім кінчинам.

Форма і розташування плавців дуже змінливі та відповідають укладам життя тварини.

Паристі плавці у риб рідко виконують важливу льокомоторну роль (Gasterosteus, Lophius) риби депресіформного типу і часто стають зредуковані у сильно спеціалізованих форм. Так черевні плавці часто зовсім зникають (напр. у сильно стислих з боків форм, де їх значіння як горизонтальних стерен зменшується; у сильно видовжених форм теж). Черевні плавці можуть лежати в заднім кінці тіла (абдомінально), в грудній частині (торакально), на горлі риби (югулярно) і на підборідді (ментально). Пересування черевних плавців вперед відбувається у тих риб, яких висота стає більшою ніж у фузіформного типу або у форм, яких голова є найвищою частиною тіла. Грудні і горлове становище черевних плавців у фузіформних, з боків стислих риб, пояснюється поворотом цих риб з високотілих до фузіформних<sup>1)</sup> (напр. Thynnus, Seriola, Naucrates).

Грудні плавці менше підлягають редукції і зміні становища, хоч в деяких випадках вони переходять далеко назад (напр. Malthopsis spinosa). Їх роль і призначення (крім головної функції направлення течії при плаванні — горизонтального і вертикального стерна) бувають досить різноманітні. Велика кількість молодих риб користується грудними плавцями для підтримки тіла, „стоючи“ на них на дні, з дорослих форм ми це саме знаходимо у (Polypterus, Neoceratodus, Zoarces) риб, що

<sup>1)</sup> Abel. *ibid.*

лазять по землі чи по деревах. Вони теж головним чином вживають для цього оригінального для риб способу пересування грудних плавців. Деякі сомові (*Periophthalmus*) летучі риби вживають сильно поширених плавців як крил; у деяких форм (напр. *Trigla*) передні проміни грудних плавців утворюють перстніваті додатки і теж служать для пересування по дну.

Спинний плавець (або плавці) служать головним чином для стабілізації риби і лише в деяких випадках виконують головну льокомоторну функцію (напр. *Hippocampus*). Його форма і становище досить різноманітне; іноді спинний плавець переформовується у колючки чи присмочки.

Анальогічний спинному анальний плавець, що часто лежить проти першого на черевній стороні, виконує подібну головну роль органу стабілізації і стерна напрямку, іноді переймаючи на себе головну льокомоторну роль (*Xenomystus*). Головним пропульзорним органом у більшості риб є хвіст та його плавець і тому на ньому спинимося докладніше.

Ми бачили, що найбільш примітивною формою хвостового плавця являється складка, що медіально оточує задній кінець тіла. Це знаходимо вже у *Amphioxus*'а й у *Cyclostomata*. У пазорів знову бачимо, що ця складка завдяки загинанню кінця хорди в гору стає дволопатною, при чім верхня лопать значно менша від нижньої, а до того зміцнюється крім внутрішнього (проксимального) скелету роговими еластичними проміннями. У костистих риб плавець зовні стає симетричним, але його внутрішня будова лишається несиметричною.

Agassiz визначає два типи будови хвоста:

1. симетричний з двох однакових лопатів — гомоцеркний, і 2. несиметричний, з двох неоднакових лопатів — гетероцеркний. Завдяки працям багатьох дослідників установлено, що сліди гетероцеркії лишилися у більшості костистих риб.

Соу установив ще тип діфіцеркний себ то симетрично розташований обабіч хребта. Соу зазначив симетрію хв. пл. так звану ізоцеркную форму у *Protopterus*, *Polypterus* і деяких костистих (*Apoda*, *Gymnarchidae*, *Anacanthini*). Ryder<sup>1)</sup> указує на такий фільогенетичний ряд в розвитку хв. плавця відповідно до онтогенези:

1. Архіцеркна форма без плавцевих складок (у дорослих форм немає),

<sup>1)</sup> Ryder як і попередні за Шмальгаузенем.

2. Льофоцеркна — з суцільною плавцевою складкою без внутрішнього скелету, з роговими проміннями або без них,
3. Діфіцеркна — симетрична,
4. Гетероцеркна — несиметрично лопатна,
5. Гомоцеркна — симетрична зовні,
6. Гефіроцеркна — друготно симетрична зовні і в середині (напр. *Fierasfer*).

Whitehous<sup>1)</sup> дає такі определения форми хвоста:

1. Протоцеркія — примітивно симетрична форма зовні і по внутрішній будові (у дорослих риб немає, бо Cyclostomata автор вважає за дегенеровані форми, завдяки паразитичному життю). „Автори часто вважають назви *protocercal* і *diphycercal* як синоніми, але *diphycercal* значить симетричний зовнішно і внутрішньо, але друготно. Примітивна *diphycercy* = *protocercy*; а друготна *diphycercy* = *gerphycercy* і цей термін ліпше випустити“.

2. Гетероцеркія — се така форма, при якій кінець хорди направлений вгору і завдяки цьому зовнішня і внутрішня будова несиметричні, а вентральна лопать плавця більша ніж дорзальна. Часто хорда лише незначно повернена вгору (напр. у *Chlamidoselachus*; *Amia* має зовнішню симетрію хвоста; *Polyodon* наближається до симетрії, але внутрішня асиметрія лишається у всіх цих форм).

3. Гомоцеркія — се така форма, коли хвіст симетричний [більшість костистих риб зовні, але в ній більшість промінів сидить на гіпуральних (підхордових, вентральних) елементах] і в яким є уростіль (див. далі). Виключенням є *Fierasfer* і *Orthogoriscus*.

4. Гефіроцеркія — друготно симетричний хвіст цілком як зовні так і в середині утворений з дорзального і анального плавця (of the dorsal and median fins) обабіч сильно скороченого кінця вості тіла (*Fierasfer*, *Orthogoriscus*). Кількість лучів дорзальних і вентральних є однакова. Dollo<sup>2)</sup> поширює цю назву і на другі риби. Досліди над розвитком хвоста багатьох вчених приводять до думки, що всі спеціалізовані форми походять від протоцеркного хвоста. Зачинання кінця віцевого скелету вгору повело до утворення гетероцеркії, спеціалізація гетероцеркії повела до гомоцеркії. Утворення діфіцеркії не є цілком зясоване.

<sup>1)</sup> Rich. Whitehous — The caudal Fin of Fishes — Proceeding of The Royal Soc. of London LXXXII 1910

<sup>2)</sup> Dollo — Sur la phylogenie des dipneustes — Bul. de la Soc. Belge de Geologie Vol. 9—1895.

Whitehouse<sup>1)</sup>, Ryder, Agassiz, Dollo і Abel доводять, що перехід від гетероцеркїї можна пояснити приєднанням до хв. пл. ще одного вентрального плавця. Шмальгаузен<sup>2)</sup> заперечує цю думку „эта мысль основана главным образом на основании общего сходства, а скелет вентральной лопасти гетероцеркного плавника не похож на скелет другого анального“. Лише в утворенні гефіроцеркної форми можна прийняти, що властиво хвостовий плавець зник і замінився функціонально. Не ясною лишається і справа з хвостом у *Dipnoi*.

Я зараз не буду спинятися на цих питаннях, бо це не входить у мов завдання.

### § 2. Рух риб.

У різних форм риб плавці відіграють не однаково важливу ролю. Тепер же ми роздивимося, як пояснюють різні автори рух „звичайної“, типової (фузіформної) риби.

Вже Borelli<sup>3)</sup> (1685) каже: грудні плавці відносно маси тіла за малі і слабкі і можуть надавати тілу лише слабкі імпульси. Риба пливе вперед, бючи хвостом вправо і вліво; хвіст працює як весло на кермі човна“ (рис. 1). Він же аналізує цей спосіб руху і знаходить такі моменти:

1. Все тіло витягнене і хвіст зі своїм плавцем знаходиться в медіальній площі тіла; це його середній стан.

2. Скороченням тіла хвіст одводиться в бік, а випростуванням приводиться знов до середнього стану. Перший удар в бік є шкідливий для руху вперед, другий дає корисний рух вперед.

3. Щоби уникнути опору води по змозі при шкідливим ударі, плавець складається і рухається в бік опуклою стороною; навпаки рухаючися до середнього стану, щоби збільшити корисний опір, плавець розкривається і рухається вігнутою стороною вперед.

4. При кориснім ударі хвоста вліво, риба посувається вперед і вправо; при кориснім ударі вправо, риба посувається вперед і вліво.

5. При шкідливим ударі хвостового плавця, кінець його (або край) лишається позаду.

<sup>1)</sup> Whitehouse l. c. (...a detailed study of The...).

<sup>2)</sup> Шмальгаузен l. c. 1913.

<sup>3)</sup> J. A. Borelli — De motu animalium pars prima — Lugduni Batavorum 1685.

У цих спостереженнях мало приймається на увагу загальну гнучкість як тіла риби так і пружність елементів плавця — його промінів, що як ми побачимо далі, має дуже велике значіння. Лише в останнім пункті ми бачимо вказівку на одставаннє дистальних кінців плавця.

Ці самі думки і уяви про спосіб руху риб знаходимо й у пізніших авторів аж до кінця XIX століття. Та у J. Bell Pettigrew<sup>1)</sup> знаходимо тіж самі положення. Він як і Borelli приймає, що бувають моменти, коли ціле тіло риби витягнене і випростоване. Він теж завважає шкідливий удар, себ то той, коли хвіст іде в бік від свого середнього стану і вказує на те, що при цім ударі хвіст йде вперед опуклою стороною, щоб зменшити тертя. Далі Pettigrew звертає увагу на те, що тіло риби при плаванні звивається принаймні у дві криві, а саме криву голови і хвоста; у довгих риб цих кривих може бути ще більше. На його думку тіло риби то випростовується то звивається в один і в другий бік; таким чином він гадає, що утворюється ряд середніх точок чи гудзів (Schwingungsknoten). Наведені міркування примушують Pettigrew'a розійтися в думках з Borelli і він зазначує, що коли хвіст виконує удар вліво, то голова не рухається вправо, (як думав Borelli) але вліво і вперед, а тіло рухається по кривій, яка в цім випадку вигнута теж вліво. При ударі вправо ефект буде протилежний. Таким чином крива хвоста і голови доповнюють одна другу, служачи опорними точками одної для другої (рис. 2). Отже риба бє хвостом вправо і в ліво як веслом при веслуванні на кермі човна.

Нарешті у Strasser'a<sup>2)</sup> знаходимо дуже докладний опис руху риб, який дивує своєю гострою спостережливістю. Strasser приймає тіло риби подібним до гнучкої дощечки. Коли така дощечка згинається, то частини в середині рухаються у протилежний бік, від тих, що по краям. Удари хвоста пояснює він слідуєчими схемами (рис. 3).

Кожний поперечний відтинок тіла, який рухається в бік, зустрічає опір з боку води, при чім середні частинки зустрічають менший опір, а задні більший і тому останні виконують найсильнішу працю. Сила опору, на яку небудь частину в задній хвостовій частині буде напр. *W*, яка є прямою до осі

<sup>1)</sup> Bell Pettigrew: „Die Ortsbewegung der Thiere“. Intern. Bibl. X. Leipzig 1875.

<sup>2)</sup> Dr. H. Strasser: Zur Lehre von der Ortsbewegung der Fische durch Biegung und der unpaaren Flossen etc. Stuttgart 1882.

даного відтинка. Опір до середини буде —  $W$ . Сума цих сил буде  $R$ , яка прикладається до певної точки (на тілі)  $O$ . Ця сила обертає тіло в моменті  $RF$  (де  $F$  є віддалення її напрямку від центра ваги); трансляторне пересування таке ж велике, як колиб маса тіла була зосереджена у центрі ваги і сила була приложена до нього, ділаючи в рівнобіжному напрямкові.  $R$  є перекутнею паралельограму, якого боками є сили  $W'$  і  $W$ .  $F$  можна вирішити з рівняння  $RF = W'f - Wf$ . Чим більша маса тіла відносно хвоста і чим більше однесено вигиб тіла назад, тим більше  $R$  наближається до  $W'$ .

Коли отже риба бе хвостом вправо або звиває все тіло так, що воно приймає форму кривої з направленою вправо вгнутою стороною, то пересування тіла буде йти назад і вліво. Це спостерігаємо, коли риба помалу пливе назад.

Але ціле тіло риби є гнучке і коли утворюється принаймні дві криві, то вислідна загальних сил опору  $R$  є перекутнею паралельограму зі сторонами  $W'$  і  $W$ . Вона направлена вперед і заміняє впливові всіх окремих опорів на загальну масу, коли  $RF = W'f - Wf$ . Цей випадок буде тоді, коли риба зігнена в одну дугу й випростується. Тут кінець хвоста іде спереду проти води. Рух буде направлений вперед.

Автори сходяться в думці, що хвіст проходить середню лінію у випростованім стані так, що знаходиться в певнім моменті в одній прямій з цілим тілом.

Але Strasser спостерігає, що хвіст проходить цей момент в косому напрямкові і приходить до висновків, що:

1. весь рух хвоста з одного екстремного положення до другого виявляє один корисний пропульзорний удар,

2. площі повернені проти води мають напрямок назад; коли кінець хвоста займає середнє положення, то він не є зорієнтований у вертикальній площі напрямку плавби, але направлений назад тою своєю стороною, що іде в бік,

3. Треба одріжнати зміну положень частинок хвоста, коли він іде проти води і між поворотом його звивання. Звивання виконується для кожної частини плескатого кінця хвоста в його крайньому боковому положенню. Це відбувається не для всіх частин одночасно, але задні частини, так би мовити, отстають і досягають пізнійше крайнього стану. Це саме відноситься й до цілого тіла.

В протилежність попереднім авторам Strasser доводить, що тіло риби ніколи не буває цілком випростоване підчас льокомо-

торної праці. Звивання тіла і хвоста під час руху вперед йде хвилями здовж тіла спереду назад. Тому рибу не можна рівняти з заднім веслом човна, бо все тіло звивається в більшій або меншій степені в залежності від форми риби.

Цікавим висновком Strasser'a є те, що він вважає рух риби як поступове діланне окремих відтинків (які відповідають міотомам). Ці частинки тіла виявляють одиничні мотори, які між собою менше більше однакові. Вони працюють не ізольовано, але ритмічно: кожний попередній членник виконує працю, яка улекшує роботу сусіда і кожний відтинок приймає в спільній праці таку участь, яка відповідає його розмірам.

З інших авторів згадаю ще Cuvier-a<sup>1)</sup>, який упевнює, що головним органом руху є хвіст, натомість грудні плавці служать органами статички як крила, а черевні як весла і стерна. З ним сходяться і Milne Edwards<sup>2)</sup> і Pettigrew. З новітніх авторів Houssay<sup>3)</sup> і Dean<sup>4)</sup> теж згоджуються, що непаристі плавці є пропульзорними органами і стернами в опірнім околі, а паристі є органами рівноваги. Таким чином навіть без кінематографічної аналізи всі автори між собою згоджуються у дуже важливій ролі задньої частини тіла, а головно хвоста в льокомоції риб (звичайної чи веретенуватої форми тіла). Звичайно є дуже багато ухилів від цього основного типу, але їх розглянемо, ознайомившись з різними формами пристосовання у риб.

У Marey<sup>5)</sup>, який використовує хронофотографію для вивчення руху риб, знаходимо докладний аналіз хвилевої пропульзії у різних форм. Хронофотографічні знімки показують, як йде хвиля у видовжених риб (Conger, Anguilla) від голови до хвоста і риба посувається вперед. Угор може пускати хвилю від хвоста до голови і тоді рухається назад. У плоских риб (Raja) хвиля йде поземо вздовж тіла, при чому її амплітуди збільшують великі поширені плавці. У пажорів в разі тихої плавби тіло хвилює то звивається, а в разі швидкої плавби головну ролу пропульзії приймає хвіст.

1) Cuvier — Histoire Naturelle des poissons 1828 Paris.

2) Milne Edwards „Lecons d'anatomie comparé“ 1874.

3) Houssay, Forme puissance et stabilité des poissons. Paris 1912.

4) Dean, Fishes living and fossil. New York 1895.

5) Marey — Le mouvement Paris 1884. Marey — La Chronophotographie Rev. Gener. des Sc. pures et Appliqués Paris 1891. Marey — La locomotion animale Extrait du traité de Physique biologique t. I.

Завдяки ввічливості пана О. Крата зроблено мені кінематографічну стяжку з руху линів у акварії. Щоби зілюструвати вище сказане, наводжу репродукцію частини фільму, на яким видно, як лини плавають головним чином, звиваючи задню частину тіла.

Як ілюстрацію ролі різних плавців у риб (типової форми) наведу висліди досвідів А. Dugés-a<sup>1</sup>) з обрізаннем плавців у *Goe-dea atripinnis* (Poecilidae).

I. Зрізанне спинного плавця не викликає жадної зміни ні в русі ні в статисти.

II. Зрізанне паристих грудних D і черевних V плавців після першої хвилини, коли „L'animal parait d'abord un peu étonné et hesitant“ теж не відбивається на русі і через годину риба плаває як завше.

III. Зрізанне хвостового плавця С сильно відбивається на плавбі: риба плаває значно гірше, використовуючи непаристі плавці як спинний D (анальний А).

IV. Зрізанне всіх плавців крім хвостового С не заважає рибі добре плавати як звичайно. Дрожання хвостового плавця передавалося всьому тілу.

Таким чином рух відбувається завдяки звиванням чи коливанням (flexions) всієї задньої частини тіла (як це видно у осібника III). Непаристі плавці (D і А) своїми ундуляціями прецізують загальні рухи.

Наприкінці Dugés згадує, що одрізані плавці регенерували, при чому у осібника III спинний плавець збільшився.

Щоби уникнути ненормальних явищ звязаних з ампутацією і неминучому при цьому болю, втратою крові і взагалі хворобливих порушень в цілім організмі, перевів я ряд досвідів з рибами типової форми, анестезуючи плавці двох-процентним розчином кокаїни.

Висліди були ті самі. Як матеріял брав я *Tinca*, *Seriola*, *Labrus*, *Voors* і др. Риба цих форм втрачала найвиразніше здібність нормально рухатися при анестезії хвостового плавця. Коли я зробив спробу з *Hippocampus* і анестезував йому спинний плавець, то він теж втратив змогу рухатися, бо у нього головний локомоторний орган є спинний плавець. Досвіди над рибами інших форм тіла переводив я, щоби перевірити значінне

<sup>1</sup>) Dr Alf. Dugés „Role des nageoires chez les poissons“ Bulletin de la Soc. Zool. de France Paris 1905.

головного локомоторного органу, який у різних етологічних типів є ріжний.

Дуже докладно спиняється на русі риб і ролі плавців Houssay<sup>1)</sup> і на його праці уважаю за потрібне спинитися.

### § 3. Рух і форма.

Узявши за принцип, що кожний організм є плястичним тілом, яке (чим менше воно спеціалізоване) підлягає моделюванню з боку того окола, в якому воно живе, Houssay проводить ряд дуже цікавих дослідів.

„Плисти у воді, — говорить автор — це значить перемішувати воду поза себе“. Напр. ми знаємо велику кількість тварин, що рухаються, викидаючи з свого тіла воду. Так головоножці рухаються поворотним ударом, випускаючи з силою воду з лійки, медузи теж, скорочуючи ритмічно свій дзвін, рухаються завдяки викиданню води, креветки сильно штовхають воду, звиваючи тіло і т. под.

Риби набираючи воду у рот, випускають її назад через зябри, від чого повстає пропульзорний удар, не слабший від удару грудних плавців (не в окремих випадках, де грудні плавці виконують головну локомоторну функцію).

Houssay дає такі механічні правила що до руху риб.

1. Видовжене гнучке тіло привязане за один кінець і уміщене у плин, який тече, починає хвилюватися і хвиля йде вздовж нього. Це є перехід руху течії (в назві автора *mouvement tourbillonnaire*) у рух вібраторний.

2. Видовжене гнучке тіло, що рухається в напрямку своєї великої осі у нерухомій плинні, детермінує своєю трансляцією струйчатість (*phenomenes tourbillonnaires*), наслідком чого завдяки своїй гнучкості здобуває трансверзальну ундуляцію.

3. Видовжене гнучке тіло, яке в нерухомій плинні має ундуляторний трансверзальний рух, тим самим здобуває змогу поступування (трансляції) в напрямку головної осі тіла і протилежним тому, в якому йде хвиля.

Риба робить активно те, що робила б стаяка і підходить під третю точку. Серед форм видовжених риб, які рухаються ундуляцією свого тіла, находимо цей приклад (*Regalecus*). Чим коротшу форму має риба, тим більше локалізується ундуляція в задній частині тіла і орган руху, програючи в продовженості виграє в силі.

<sup>1)</sup> Houssay — *Forme, puissance et stabilité des poissons*. Paris 1912.

Так розглядаючи рух пажорів, бачимо, що при повільних рухах звивається ундулярно все тіло (завдяки гнучкості хрящового скелету), при швидких рухах відбуваються енергійні удари хвоста, а тіло залишається майже випростованим.

В разі, коли ундуляція цілого тіла зменшується (напр. завдяки негнучкості скелету), хвіст дістає в своїй поздовжній осі ротаторний рух, або нахиляється під більшим або меншим кутом. Форма хвоста має дуже велике значіння. Він мусить бути високий, тонкий і широкий. Завдяки гнучкості промінів весь удар хвоста виявляє з себе один корисний удар.

Крім цілком активного руху, риби посуваються і в силу інерції після удару хвостом. Цей рух автор називає лінійною плавбою (*nage filée*) дуже докладно експериментальним шляхом студіює, які при цьому утворюються струї і як вони „моделюють“ форму тіла риби (рис. 4).

Хід струї води є вировий (*tourbillonnaire*) і найпростіше виявляється у пажорів. Плавці, як паристі так і непаристі дають напрямки цим струям і вирама, утримуючи рибу в певнім стабільнім стані.

Далі Houssay провадить ряд досвідів, щоби з'ясувати як вода, властиво опір води моделює форму тіла у риби. Спосіб плавби викликає певні течії, які знову викликають відповідні реакції з боку організму.

Спосіб життя і руху у воді дуже відмінний від життя на землі, бо тоді, як земні тварини мають головним чином протиділати силі тяготи (вазі) при незначнім опорі повітря при русі, водяні тварини навпаки, будучи приблизно тоїж ваги що й вода (отже не відчуваючи ваги свого тіла), мусять протиділати при русі опорюванню води, що є у 800 разів більший ніж повітря. Отже форма тіла риби мусить бути такою, щоби могла як найлегше протиділати цьому опорюванню. Ряд досвідів з моделями різної форми приводить Houssay до висновку, що найменший опір буде мати тіло заокруглене спереду і конічно звужене до заду, Houssay доказав це експериментально, тягнувши з різною швидкістю у воді моделі з дерева різних форм.

Досвіди з моделями риб різної форми (*Cyprinus*, *Pagellus*) показали, що форма тіла тої чи іншої риби виявляє повну досконалість лише в межах звичайної швидкості, з якою дана риба плаває. Коли збільшувати швидкість, то опір теж буде збільшуватися, а коли пореступитися межу звичайної швидкості даної риби, модель риби починає гірше функціонувати.

Після ряду досвідів автор приходить до слідуєчих висновків:

А. Лише форми *en veine inversée a bord souple* і форми округлих риб чи стислі здібні дістати прямолінійний рух у всіх випадках.

Б. Дісиметрія ходу виправляється напруженням в різній степені паристих плавців.

В. При повних швидкостях на видовжених моделях риб *la permanence du mouvement n'est atteinte que par le dispositif des nageoires falciformes.*

Розглядаючи рух первісної риби, напр. пажора і простеживши за течіями води круг тіла, Houssay виводить ряд механічних законів. Плавба у селяхій завдяки їхній формі тіла і хвоста з окрема, виявляє з себе пірнання після удару хвостом, яке поправляється підчас лінійної плавби, указує напрямок течії води на тілі пажора, що виправляє свій рух напруженням грудних плавців, Неоднаковолопатний хвіст витягається течією *a* у однаковолопатний; течія *b* округляє голову і ставить рот термінально; інші струї стискають тіло з боків. Таким чином модельована вода може надати ознаки, які відрізняють Squalidae від Teleostomi.

Коли гнучкість скелету первісних хрящевих риб зникає і тіло стає менше еластичним, починаються різні зміни. Анальний плавець видовжується вперед і черевні переходять теж вперед, а коли вони притім посунуться далі від центра ваги, то починають піднімати голову вгору; тоді задня частина опускається і течія води буде витягати спинний плавець.

Не розглядаючи зараз, чи у всіх випадках форма тіла риб утворюється по механічним принципам наведеним Houssay, я значу за згаданим автором ще один факт, який свідчить про модельовану ролю струї води викликаної рухом риби. Так швидкі плавуні мають голову просто збудовану відповідно до головної течії, яку зустрічає риба; донні риби, що пересуваються не швидко, часто раптовними скоками, мають дуже різноманітно скульптовану голову завдяки другорядним течіям і струям води з зябрів. Вусики у багатьох форм і їх становище одмічають місце вирів, які їх витягали.

Якби то не було, але струї води при плаві риб мають не аби яке значіння на реакцію з боку організму і безперечно причиняються в значній мірі до утворення певної форми тіла риби.

У праці Polimanti<sup>1)</sup> находимо спробу пояснення і графічного представлення зв'язку межи формою тіла риби і рухом. Він вважає, що тиснення води (опір), швидкість плавби і форма тіла риби се три фактори міцно між собою зв'язані. Опускаючи рибу поступово у градуваний циліндр і одмічаючи її вагу, обсяги витисненої води відповідно певному зануренню, автор будує дві криві: одну, яка виявляє перерізи риби і другу — яка показує відповідний еквівалент солідної форми чи обсягу. Не спиняючись на способі викреслення кривих<sup>2)</sup>, наведу висновки, до яких приходить автор. Фігури, які представляють обрис (ареу) різних риб, наближаються або до трикутника, або до трапеца, при чому у донних форм вершина трикутника виявляє опір води в перерізі основи голови і грудних плавців. Тому можна сказати, що чим більше виразно бентонною є риба, тим гостріший є трикутник (*Lophius*, *Torpedo*), а опір води особливо сильний в згаданому перерізі. Чим більше форма риби наближається до нектонного типу, тим більше крива наближається до трапеца. Чим більше риба наближається до бентонного типу, тим більше поверхня міцного опору переноситься на перед. У тих риб, що рухаються латеральним звиванням, опір значно менший ніж у тих, що рухаються головно завдяки плавцям. Ті форми, що рухаються завдяки ундуляції широких грудних плавців (напр. *Raja*), мають переходову форму. Чим ліпше плаває риба, тим більше рівномірним є опір води в різних перерізах тіла. У риб, що рухаються зміватом, досягається максимум рухового ефекту, бо опір води є мінімальний.

З цієї праці ми бачимо, що форма риб стоїть у тісній залежності від їх руху і що швидкість руху (як і у Houssay) стоїть у тісній залежності від того способу, яким риба бореться з опором води.

Принявши на увагу ці фактори, які впливають на форми тіла риби, „моделюють“ її, розглянемо ті типи пристосування або етологічні типи, які виявляють із себе вислід впливу місцеперебування, зв'язаного з ним способу руху і моделюючої діяльності струї води, викликаних тим чи іншим переміщенням тіла.

<sup>1)</sup> Polimanti — *Influenza della forma sulla locomotione dei pesci* Ztschr. f. algem. Physiologie Bd 12, 1911.

<sup>2)</sup> Ці ж досвіди я повторяв із тими самими вислідами.

## II. Форми тіла.

Форму тіла риби визначає Amans<sup>1)</sup> трьома лініями, а ними є:

1. Профіль пересічення поверхні з площею симетрії.
2. Горизонт або крива контакту поверхні риби з циліндром, якого твірні є рівнобіжні до площі симетрії і прямові до осі.
3. Фронт або крива контакту поверхні тіла з циліндром, якого твірні є рівнобіжні до осі тіла.

Положення тіла риби під час плавби буває здебільшого горизонтальне, але є багато форм, що ухиляються від цього способу руху і займають при плавбі інше становище. У одних є це тимчасове положення тіла себто рух в певнім напрямку (прямо, вгору, вниз тощо), у других є це нормальний стан при плаванні.

Abel<sup>2)</sup> одрізняє такі положення риби:

### I. Вісь тіла горизонтальна:

А. Спина зверху (*Gastronectonisches Schwimmen*), приклад: більшість наших риб (*Salmo*).

Б. Черевом вверх (*Notonectonisches Schwimmen*) приклад: *Synodontes*, а крім риб приклад й інших тварин як *Gastropoda*, *Branchipus*, комах і др.

В. Площа симетрії тіла лежить горизонтально (риба плаває на боку); зразок *Pleuronectidae*.

### II. Вісь тіла йде навскіс до поверхні води:

*Klinonectonisches Schwimmen*.

А. Голова вгору (амфібії, крокодилі).

Б. Голова вниз. Зразком служать *Antennarius*, *Melanocetus*.

### III. Вісь тіла вертикальна до поверхні води:

*Nupsonectonisches Schwimmen*.

А. Голова вгору. Зразок *Hippocampus*.

Б. Голова вниз. Зразок *Amphisyle*, *Acantharchus*, з інших тварин амфібії, пуголовки.

Тепер вважаю за потрібне розглянути, яку властиво ролю грає в пропульсії та чи інша форма хвоста. Ми вже згадували, що рух риби і становище її у воді не у всіх форм однакове (може бути рівнобіжне до горизонту, навскісне і прямовисне).

<sup>1)</sup> Amans — *Comparaison des organes de la locomotion aquatique Ann. des Se. Nat de Zoologie 7 serie 1888 Paris.*

<sup>2)</sup> O. Abel *Grundzüge d. Palaeobiologie.*

За Abel'ем<sup>1)</sup> подаю таку табличку:

Стан риби у воді	Форма хвоста	Напрямок	Зразок
1. Ізобатичний стан	Хв. пл. симетричний	Горизонтальний	Salmo
2. Епібатичний стан	Верхня лопать більша і довша	Косо вниз	Acipenser
3. Гіпобатичний стан	Нижня лопать більша	Косо вгору	Exocoetus

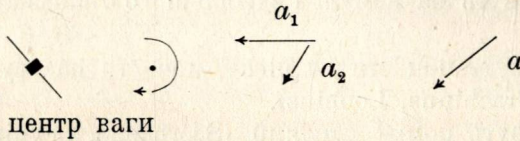
Ahlborn<sup>2)</sup> розглядаючи значіння гетероцеркної риби для руху у воді, висловлюється так: „der heterocerke Fisch einer abwärts gekrümmten Bahn folgen soll“. Цьому протиділяють у осетруватих і пажорів, тяжчих від води під оглядом питомої ваги, також і грудні плавці, що направляють підчас *nage filée* (Houssay) рух вниз (*plongée*), після удару гетероцеркного епібатичного хвоста. Противно бачимо у іхтіозаврів (і *Exocoetus*'а), де нижня лопать більша і сильніша. Обидві форми легші від води (питома вага 1); у іхтіозавра завдяки легеням, у *Exocoetus*'а завдяки плавному пухірю. Спільна праця грудних плавців і гіпобатичного хвостового допомагають пірнати. Der Rückschlag des *Exocoetus* ruft gleichfalls eine Abwärtsbewegung der hinteren Körperhälfte, eine Schrägstellung des Thieres hervor, welche bei gleichzeitiger Fortbewegung eine Aufwärtssteuerung bewirkt, die nur durch geeignete Gegensteuerung vermieden werden kann, до чого служать центральні плавці. Розглядаючи нектонні і бентонні риби, той же автор зазначає, що гетероцеркія захищає хвіст від верхньої (повітря) чи нижньої (дна) границі води. Так для осетра в гетероцеркія епібатично потрібна, щоби не черкати нижньою лопаттю дна (теж у Abel-a Jackel-a), а для *Exocoetus*-а, щоби не робити верхньою лопаттю плавця зайвих рухів. У повітрі в дуже зручна гіпобатична гетероцеркія; до того-ж при взлеті над водою такий плавець дає величезну швидкість, бо коли тіло вже в повітрі (себ то в околі з кілька сот раз меншим опором), тоді хвіст не лишається джерелом руху (Шмальгаузен).

Таким чином праця гетероцеркних плавців проходить в та-

<sup>1)</sup> Abel I. c.

<sup>2)</sup> Dr Fl. Ahlborn, Über die Bedeutung der Heterocerkie Ztschr. f. Wiss. Zool. Leipzig 1896.

кий спосіб: При умові однакових лопатів (для простоти) загнутото вгору хвоста, утвориться наслідком його ундуляторних рухів сила, що йде під кутом до тіла (схема),



яка розкладається на дві: більшу  $a_1$ , що рухає тіло вперед і меншу  $a_2$ , що обертає тіло круг центра ваги, опускаючи хвіст і піднімаючи (тяжку у пажорів і осетрів) голову одночасно з грудними плавцями<sup>1)</sup>. Вісь тіла є гнучка і робить боковий рух, але не вся одночасно, а кожна її частина вигибається вбік поспідовно, завдяки скороченням міотомів бокового мускула; це утворює хвилю, яка ідучи спереду назад згинає її основи шкіряної лопаті, що передають хвилю здовж промінів до дистальної частини. Утворюється складна поздовжньої хвилі з хвилею, яка йде навскізь назад (Шмальгаузен).

Праця симетричних паристих плавців не є така складна і полягає на звиванні щільного хвоста. Шкіряна лопать не бере тут активної участі. Завдяки опорі води рухам хвоста проміні спочатку згинаються у основі і поспідовно випростовуючися завдяки своїй пружності, викликають хвилю, що йде від основи плавця до його дистального краю. Тому що обидві лопаті в гомоцеркнім плавці є однакові, то рух буде направлений прямо вперед. Це ми бачимо у костистих риб з плавним піхурем, яких питома вага є більше менше рівна питомій вазі води. До цього слід додати, що в плавцях костистих риб використовується пружність, а в хвостах хрящевих безпосередньо мускульна енергія (Шмальгаузен).

Положення тіла риби стоять в тісній залежності від місцеперебування і укладу життя.

По місцеперебуванню одріжняємо бентонні або донні риби і нектонні форми або риби вільної води. Ці останні можна поділити на властиво нектонні, що рухаються активно і добре плавають і планктонні, що маючи слабо розвинені органи власного активного руху, плавають чи фльотують по волі хвиль і течій.

<sup>1)</sup> Слід згадати тут за Houssay, що у риб „Le centre de gravité est au-dessus du centre de poussée. C'est une cause fondamentale dans l'évolution du poisson et la base même de sa physiologie locomotrice.

Бентонні форми виявляють надзвичайну різноманітність, залежну від характеру дна, і Polimanti<sup>1)</sup> одріжняє:

1. риби, що живуть на тонкім піску, дуже наближаються до тих, що живуть на замулі і здебільшого є плескати (*Rhombus Solea*),

2. що живуть почасти на піску, почасти на грузі (*Torpedo*, *Uranoscopus*, *Trachinus*, *Lophius*),

3. що живуть поміж скелями (*Scorpaena*, *Scyllium*, *Gobius*, *Motella*, *Mustellus*, *Conger*, *Muraena*),

4. живуть на піску, на камінях (*Blennius*, *Mullus*, *Trigla*, *Squatina*, *Raja* почасти) і

5. живуть на рослинах, на піску (*Hippocampus*, *Syngnatus*). Останню групу однесемо до планктонних риб, бо як *Hippocampus* так і *Syngnatus* не зв'язані власне з дном, а головню з рослинами.

Нектонні риби також підлягають різним умовам, хоч вони і не є такі різноманітні у вільній воді як коло дна. Можна одрізнити риби тихої води, яким не доводиться боротися з хвилями і течією. Одні живуть осіло в тім самім районі, другі виявляють пелагічні форми (типові добрі плавці, що прекрасно плавають). Форма тіла нектонних риб, як пелагічних так і планктонних може бути дуже різна і ми часто знаходимо в різних групах однакові типи пристосовання.

Що до подібности як форм тіла так і окремих органів, то за Plate-ом<sup>2)</sup> слід згадати такі подібности:

Анальогія — фізіологічна подібність органів різного філетичного походження. (Крила птиць, комах, лиликів).

Конвергенція — морфологічна подібність на ґрунті подібного пристосовання далеких в систематиці форм. (Дзюб птиці, черепахи, однопроходних).

Гомольогія — морфологічна подібність наслідком одного походження, хоч функція може бути різна. (Ніжка ящірки, крило птиці).

Гомойогія — незалежно придбана морфологічна і фізіологічна подібність у тварин, які незалежно розвивалися від того самого пня. (Фасеточні очі 4 рази утворювалися незалежно в типі членоножців: у раків, у *Limulus*, у *Scutigera* і у комах).

Дуже часто бачимо зміну функцій органу, як поширення

<sup>1)</sup> Polimanti l. c.

<sup>2)</sup> Plate — Allgemeine Zoologie — I. Jena 1922.

цих функцій (наприклад черевний плавець у Gobiidae стає присоскою, перший промінь спинного плавця у Lophius стає „вудкою“ для приваблення добичі).

Schlesinger<sup>1)</sup> одрізняє такі шляхи пристосовання і утворення етольогічних типів:

1. Паралельне пристосовання (дає у висліді форми гомойологічні Plate), коли близькі форми незалежно розвиваються і йдуть шляхом однакового пристосовання (наприклад Equidae і Proterotheridae).

2. Конвергентне пристосовання: Анальогічний незалежний розвиток різних або не близьких форм наслідком однакового пристосовання, завдяки чому повстає подібність типу. (іхтіозаври, дельфіни).

3. Дівергентне пристосовання: Ріжний розвиток однакових або близьких форм наслідком різних пристосовань. (іхтіозаври і мезозаври).

Принявши на увагу ці шляхи пристосовання до життя в різних умовах, розглянемо вкоротці головні етольогічні типи серед риб. В цім випадку приймаємо на увагу лише саму форму тіла, не звертаючи уваги на систематичне положення.

Спроби угруповання риб в такі типи робили різні автори і ми розглянемо деякі спочатку лише для познайомлення з ними, а потім на окремих прикладах познайомимося з мускулатурою і скелетом більше або менше виразно спеціалізованих форм.

Особливо важним в цім відношенні буде конвергентний шлях пристосовання, при якому представники далеких в систематиці груп об'єднуються завдяки подібній формі у один етольогічний тип.

У старих підручниках і іконографіях ми майже завше помічаємо тенденцію до розташовання риб по їх зовнішній формі: видовжені, плоскі і т. д. Так напр. у М. Е. Bloch-a<sup>2)</sup> в його описах і картинках риб можна пізнати етольогічні типи, до яких зараз перейдемо.

У Amans'a<sup>3)</sup> знаходимо опис скелету і мускулів риб, які він ділить на такі типи:

<sup>1)</sup> Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus nectonischer Fische — Verhdl. Zool. Bot. Ges. Wien 1909. Osleorn.

<sup>2)</sup> M. E. Bloch — Naturgeschichte der ausländischen Fische — Berlin 1786.

<sup>3)</sup> Dr P. C. Amans — Comparaison des organes de la locomotion aquatique — Annales des Sc. Nat. Zoologie I. VI Paris 1888.

1. Тип Scyllium
2. „ Raja
3. „ Trigla
4. „ Leuciscus
5. „ Exocoetus
6. „ Hippocampus
7. „ Pleuronectes

Ми ще повернемося до цього ж автора при розгляді мускулатури різних форм пристосовання, тепер же згадаємо інші угруповання риб по їх формі тіла і способі плавби.

За Abel-ем<sup>1)</sup> подаю таке угруповання, якого будемо додержуватися:

### 1. Нектонні форми.

1. Фузіформний або веретенуватий тип виявляє, так би мовити, типову для риб форму. Тіло веретенувате, локомоторний орган знаходиться ззаду так, що головна роля в руху припадає на хвіст. Паристі кінчини функціонують як стерна (керми) і прилади для стабілізації тіла. Передні плавці є завше у нині живих риб (у верхнесілурських їх не було); задні плавці можуть бути або змиршавілі або їх бракує; спинний плавець здебільшого є. Як зразок наведу пструга.

2. Сагітіформний або стрілкуватий тип об'єднує в собі риби, що мають видовжене тіло більше менше однакової висоти, стисле з боків; голова загострена, непаристі плавці мають міцні проміні і розташовані в задній частині тіла, як пера на стрілі; анальний і дорзальний сидять один проти другого і утворюють разом з хвостовим могутній локомоторний прилад. Зразком може служити щука. Риби цього типу мають здібність до швидких раптових рухів.

Schlesinger доказує, що сагітіформний етольогічний тип досягається трьома способами завдяки спеціалізації фузіформних риб конвергентно<sup>2)</sup>:

a) Конвергенція досягається з фузіформного типу завдяки видовженню спинного і анального плавця при стрілкуватій формі тіла:

<sup>1)</sup> Abel — Grundzüge der Palaeobiologie — Stuttgart 1912. Abel — Die Anpassungsformen der Wirbeltiere an das Wasserleben — Schrift d. Ver. z. Verbr. naturw. Kent. in Wien 48, 1905.

<sup>2)</sup> Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus nectonischer Fische — Verhandl. d. k. k. Zool. Bot. Gesel. Wien 1909.

A. Chondrostei	Belonorhynchus
B. Holostei	{ Aspidorhynchus
	{ Lepidosteus
C. Catosteomi	Aulostoma
a) Isospondili	{ Chirocentrus
	{ Photonectes
b) Haplomi	{ Esox
	{ Rhinellus
c) Catosteomi	Aulostoma
	{ Scombresox
d) Percosoces	{ Tylosaurus
	{ Belone
	{ Sphyraena

б) Утворення довгого спинного і також анального плавця при фузіформній будові:

Teleostei

a) Isospondyli	Xenodermichthys
b) Ostariophysi	Callichrous
c) Percosoces	Ammodytes
d) Anacanthini	{ Molva
	{ Rhinonemus
	{ Merlucius
e) Acanthopterygii	{ Percophis
	{ Hypsicometes
	{ Cryodraco
f) Jugulares	{ Bathyrdraco
	{ Chaenichthys
	{ Gerlachaea
	{ Campsocephalus

в) Сабітіформний тип досягається з високо спеціалізованих фузіформних риб в групі Scombriformes і Haplomi.

a) Haplomi	Alepisaurus
	{ Gempylus
	{ Thyrsites
b) Scombriformes	{ Lemnisoma
	{ Histiopharus
	{ Coryphaena

г) Конвергентне пристосування до сабітіформного типу має *Suema atrum* з родини Nemichthyidae, які є властиво теніформні (див. далі).

Головний локомоторний орган перенесений на задній кінець тіла виявляє з себе хвіст, який рухається оборотними ударами і дає поступ вперед. Чим більше заходить потреба завдяки укладови життя в раптових рухах (напр. при нападах), тим більше змінюється прилад руху ззаду і тим більше збільшується поверхня опору ззаду і риба стає подібною до стріли. Згадаємо тут і про ролю паристих плавців, розглянувши слід схеми (за Günther-Schlesinger-ом (рис. 5).

При веретенуватім типі, коли риба після удару хвоста пливе вперед, невелике висунення напр. правого грудного плавця викликає невеликий поворот направо, бо сила опору води на передню частину веретена буде більша ніж на задню (сила  $b$ ). Коли ж спинний (D) і анальний плавець (A) одсунені назад і утворюють разом з хвостовим плавцем (Ca) одну фізіологічну цілість, при такім же повороті грудного плавця (напр. вправо) утвориться випростованне, бо в останнім випадкові, себ то у риб стрілкового типу (сагітіформних) сила опору  $b > a$ , бо площа  $D + A + Ca$  велика.

3. Велиформний тип відзначається видовженим тілом і сильним розвитком 2-го спинного плавця. Анальний і 2-ий спинний часто росташовані один проти другого, як в сагітіформнім типі. Тіло часто поступово звужується від голови до хвоста. Риби цього типу плавають близько поверхні води і великий передній спинний плавець служить їм за вітрило. Як зразки можна назвати *Histiophorus gladius* і *Plagyodus ferox*.

#### 4. Теніформний тип.

Тіло видовжене як бинда. При плавбі ні хвостовий плавець ні паристі не грають ролі. Сильно стиснене збоків тіло рухається завдяки ундуляції. Спинний і анальний плавець тягнеться як стяжка вздовж цілого тіла.

Schlesinger<sup>1)</sup> подає таку табличку конвергентного пристосовання ріжних риб до цього типу і розглядає докладніше скелет і мускулятуру (див. далі) найвиразнішого представника цього типу (*Regalecus banksii*).

Теніформні риби цілком відповідають досвідови Houssay (див. вище) зі стяжкою уміщеною у течію води, бо роблять активно ті рухи, що робилаб стяжка пасивно.

<sup>1)</sup> Schlesinger — Die Locomotion der täniformen Fische — Zool. Jahrb. 1911. Jena.

Subordo	Familia	Genus
Apodes	Anguillidae Nemichthyidae	Venefica Jardon Nemichthys Rich. Avocettina Jrerd Serrivomer Gil
Anacanthini	Macruridae	Ateleopus Schley
Acanthoptergii		
Gr. Perciformes	Cepolidae	Cepola Linnee
Gr. Scombriformes	Trichiuridae	Lepidopus Gouan Euoxymatopon Gil. Benthodesmus Good Trichiurus Linnee
Gr. Taeniusomi	Trachypteridae	Regalecus Brum Stylephorus Schon
	Lophotidae	Lophotes Giorn

## 2. Бентонні або донні риби.

1. Депресіформний тип дуже характеристичний для донних риб. Тіло дорзовентрально сплющене. Очі на верхній (спинній) стороні. Грудні плавці (коли є) поширені і нерідко одмежовані від тіла у формі щита. Задня частина тіла дуже витоншена. Хвостовий плавець малий або перетворюється у довгий бич. Тіло часто голе або з панцирем. Рух відбувається у панцирних форм завдяки хвостовому плавцю, у непанцирних (напр. скати) завдяки грудним плавцям. Хвиля йде горизонтально спереду назад і завдяки цій ундуляції широких грудних плавців риба пливе вперед.

Як зразки цього типу згадаю *Chirolophius*, *Lophius*, *Auchenipterus*, *Nariotta*, *Rhina*, *Torpedo*, *Raja*, *Myllobatis*.

2. Макруріформний тип. Тіло сильно<sup>1)</sup> видовжене, найбільша висота є одразу за черепом, а до заду поступово витончене і кінчається вістрем. Хвостовий плавець рудиментарний. Голова велика, очі здебільшого великі; дорзальний і анальний плавець тягнеться у вигляді стяжки здовж тіла.

<sup>1)</sup> Способом руху не є плавання, а скакання завдяки сильно одсуненим назад грудним плавцям.

Наводжу за Abel-ем таблицку конвергентного пристосування до цього етологічного типу:

Підкляса	Ряд і підряд	Родина	Рід
Arthodira	Ichthyotomi Holocephali	Coccosteidae	Coccosteus
Elasmobranchi		Pleuracanthid.	Pleuracanthus
		Chimeridae	Chimera
		Holosauridae	Holosauropsis
Teleostomi	Heteromi	Lipogenidae	Lipogenys
		Nothacanthid.	Nothacanthus
	Anacanthini	Fierasferidae	Fierasfer
		Macruridae	Macrurus
		Pleuronectidae	Cynoglossus
	Acanthopterygii	Zoarcidae	Typhlonus
		Liparidae	Paroliparis
		Scopelidae	Tachynectes
		Clupeidae	Coilia

3. Компресіформний несиметричний тип. Тіло дуже сильно стиснене з боків. Спинний і анальний плавець виявляють довгі стяжки, що тягнуться вздовж цілого тіла. Обидва ока на одній стороні тіла (правій чи лівій, фізіологічно верхній). В молодім віці риби цього типу є симетрично компресіформні і лише в дорослім віці стають асиметричними. Цей тип знаходимо лише серед Pleuronectidae. Рух відбувається завдяки горизонтальному коливанню тіла. Хвиля йде вздовж тіла, при чому особливо йде ундуляція спинного і анального плавця. Як зразки назвемо Psettodes, Psetta, Solea, Pleuronectes, Rhombus Arnoglossus.

4. Ангуїліформний або угреватий тип. Тіло видовжене як у змії. Паристі плавці дуже зредуковані або їх нема. Ці риби плазують як змії або плавають, звиваючи тіло змієвато. Як зразки назвемо Anguilla, Conger, Muraena, Gymnothorax.

5. Астеролепіформний тип. Передня частина тіла вкрита кістяними платівками як панцирем, ізза чого рухливість риби зведена до мінімум. Черевна поверхня плоска, тіло в передній частині пірамідально підняте так, що переріз в цім місці виявляє трикутник. Рух відбувається завдяки хвостови. Як зразок назвемо Ostracion cornutus.

### 3. Планктонні риби.

1. Акулеїформний тип. Тіло видовжене иноді як голка. Здібність до самостійного руху дуже незначна. Локомоція від-

бувається або шляхом звивання тіла змієвато або завдяки ундуляції спинного або анального плавця.

З риб цього типу згадаємо *Syngnattus*, *Hippocampus*, *Amphisyle*.

2. Компресіформний симетричний тип. Тіло високе, сильно стиснене з боків. Спинний і анальний плавці стоять один проти другого і здебільшого дуже високі. Черевних плавців у високоспеціалізованих форм нема. Хвостовий плавець здебільшого великий і глибоко вирізаний, але й він може не бути. Здібність до власного руху дуже незначна. Риби цього типу здебільшого є мешканцями коралевих рифів.

Як зразки згадаємо *Psettus sebae*, *Orthogoriscus mola*.

3. Глобіформний або кулястий тип. Тіло кулясте і може надутися як пухир, коли риба ковтає повітря (*Tetrodon*). Черевних плавців нема. Активний рух мінімальний. Живуть або межі коралевими рифами або на глибинах.

Як зразки назвемо *Diodon*, *Tetrodon*, *Antennarius*.

#### 4. Літаючі риби.

Окремим типом пристосовання риб є літаючі риби, у яких дуже сильно розвинені грудні плавці, що служать як крила. Одріжняємо два типи:

А. Тип *Exocoetus* з великим ізобатичним хв. плавцем, спинним і анальним сильно одсуненим назад, черевні плавці великі; грудні плавці видовжені і загострені на кінцях; їх проміні розчленовані і сильно розгалужені. Тіло фузіформне.

Б. Тип *Dactylopterus*, хвостовий плавець менший ізобатичний, спинний і анальний довгі; черевні плавці маленькі; грудні плавці в відкритому стані утворюють широкі заокруглені крила; їх проміні нерозгалужені і нерозчленовані. Тіло дорзовентрально плесковате.

Предки першого типу (А), який наближається до *Scombrosoidea* були пелягичними формами, предки другого типу (Б) були бентонними (*Scorpaenidae*, *Cottidae*, *Pegasidae*).

За Абель-ем наводжу таблицю цього етологічного типу:

Родина	Рід
<i>Dactylopteridae</i>	<i>Dactylopterus</i>
<i>Scombrosoidea</i>	<i>Exocoetus</i>
<i>Pholidopharidae</i>	<i>Thoracopterus</i> (Триак)
<i>Semionotidae</i>	<i>Gigantopterus</i> (Триак)
<i>Pantodontidae</i>	<i>Dollopterus</i>
	<i>Pantodon</i>

### III. Мускулатура.

Вже у Amphioxus'a бачимо бокову мускулатуру у вигляді метамерно розташованих міотомів. Межи ритмом в розташованні міотомів і опором мусить бути певний зв'язок і відносна кількість міотомів (розташованих більше менше гомометамерно на тілі риб) зменшується разом зі зменшенням гнучкості тіла<sup>1)</sup>. Це явище розберу докладніше далі, а тепер за різними авторами подам загальний огляд мускулатури риби.

Вже Lacedede<sup>2)</sup> одріжняє такі м'язи:

1. По боках тіла від голови до хвоста йде мускул, що складається з поперечних подібних м'язів.

2. Зверху йдуть два довгі спинні м'язи, які виповнюють на спині місце, незаняте боковими м'язами, вклинюючися межи них і перериваючись в місцях, де знаходяться спинні плавці.

3. Знизу тіла йдуть два повздожні м'язи, що теж перериваються анальним плавцем.

4. На голові є більша кількість м'язів, з яких 4 найбільші: два під очима і два у внутрішній частині підборіддя. Помітні також м'язи щелеп і м'язи лучів.

5. Кожний грудний плавець має два м'язи піднімачі, що сидять на зовнішній поверхні кістки плечового пояса і два м'язи опускачі під нею.

6. Проміні спинного і анального плавця мають по 4 м'язи, з яких два піднімачі, а два опускачі.

7. Черевні плавці мають по три м'язи: випростувач, що вкриває поверхню кістки червоного пояса і два других, що опускають плавець і починаються на внутрішній поверхні тоїж кістки.

8. На хвостовім плавці одріжняє автор м'язи, з яких один прямий і два косих, четвертий зветься ніжним.

Cuvier<sup>3)</sup> теж перечисляє ці самі м'язи і одріжняє такі:

1. Один боковий (з кожного боку), який йде від голови зверху і до м'язів плечового пояса внизу спереду, а ззаду до основи хвостового плавця. Цей м'яз дуже складний і виявляє три жмутки (sacro spinalis висших тварин); але що у риб немає ший, ці жмутки тягнуться від голови до хвоста без розділів.

<sup>1)</sup> Houssay — *Forme puissance et stabilité des poissons.*

<sup>2)</sup> Lacedede — *Naturgeschichte der Fische — nach dem Französischen mit einigen Bemerkungen begleitet von Ph. Loos Berlin 1799.*

<sup>3)</sup> Cuvier et Valenciennes — *Histoire Naturelle des poissons — Paris 1828.*

Межи собою обидва бокові мязи (правий і лівий) розділені костистими відростками хребта і її апофізами, глибшими мязами міжкостистих кісточок і ребрами, що охоплюють черевну дутину. Знизу бокові мязи розходяться, даючи місце черевному поясови і черевним плавцям; спереду розділяється, охоплюючи грудні плавці з їх поясом і мязами. Спереду бокові мязи інсерують до черепа, до кісток плеча і навіть у деяких риб до тої частини раменної кости (humerus), яка йде над пекторальною. Частина жмуків спивається коло першого ребра і від цього ребра иноді одходить пасмо до цмокової кости черепа (mastoides) і яку можна порівняти зі скаленусом вищих тварин. Її нижня частина інсерує до нижньої частини раменної кости (humerus), а особливо до її сімфізи. Вона продовжується до підязичної кости (hioides). Ця нижня частина великого бокового мяза вкриває плечовий пояс. Обидва бокові мязи поділені поперек на відтинки лучнотканними плівками. Ці відтинки (див. далі міотоми) ідуть навскіс і утворюють зізак, при чому верхні і нижні їх частини прямують навскіс ззаду наперед, а середні частини навскіс зпереду назад, утворюючи кут, направлений вперед. Весь боковий мяз, як було згадано, ділиться на три частини: верхня легко одділяється від середньої; вона прив'язується своєю нижньою частиною до апофізів лучнотканними пасмочками направленими навскіс назад; верхня внутрішня частина дає теж тужні (лучнотканні) до апофізів, але навскіс вперед. Із зовнішньої поверхні також одходять часто тужні, особливо там, де є плавці, до шипів; ці тужні направляються навскіс вперед. Середня частина своєю внутрішньою верхнею дає жмутки направлені навскіс назад до боків апофізів; середня її частина йде від ребра до ребра як міжреберні мязи (intercostales). Нижнє пасмо тісніше зв'язане з середнім ніж верхнє. Збоку йде легка межа, яка відповідає боковим виросткам додаткових ребер, але повного поділу між мязами немає принаймні у риб зі стисненим тілом.

Ззаду боковий мяз переходить у тужні, які інсерують до основи промінів хвостового плавця, вкриваючи маленькі мязи якраз того плавця. Верхні і нижні жмутки інсерують до крайніх промінів хв. плавця і допомагають їх одсуванню при розкритті плавця.

Головною ролею бокових мускулів є звивання тіла і тому звичайно при русі вони є головними локомоторними мязами.

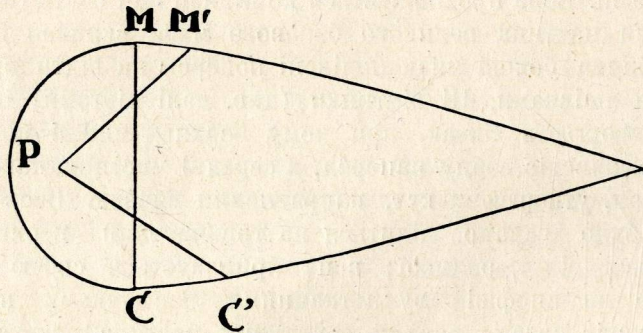
2. Межи боковими автор зазначає „ніжні“ (grêles), спинний і черевний, перервані плавцями, що підходять до їх передніх

основ і якими вони порушують. Крім того вони згинають тіло дорзовентрально, коли гнучкість тіла на це дозволяє.

Бокову мускулатуру ділить т. зв. бокова лінія на дві частини: спинну або дорзальну і черевну або вентральну. Як дорзальна так і вентральна частина діляться лініями, утвореними кутами загибів міотомів на верхню і нижню частину. Таким чином в бокових м'язах можна одрізнити 4 головні частини, які різними авторами різно називаються.

Тіло типової риби виявляє найбільш зручну форму в змислі найменшого опору води; це овоїд ширший зпереду і зтоншений назад.

Головним перерізом



або „maitre couple“ Houssay<sup>1)</sup> вважає переріз по площі в М С. З огляду на те, що форма риби не є точним овоїдом, а сплюснена спереду (в голові) дорзовентрально, а по боках латерально, то проєкція головного перерізу спроектується на медіальній площі не по лінії М С, а по лінії М' Р С', так само як проєкція перерізу на трансверсальній площі не буде кругом, а контуром риби en face. Ряд досліджень приводить Houssay до висновку, що між головним перерізом і формою міотомів є певна залежність.

Кожний міотом на зовні виявляє з себе лому лінію або зізак.

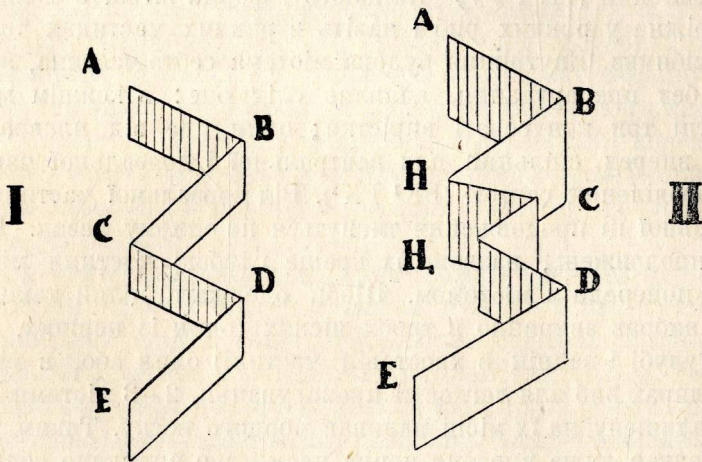
Chevre<sup>2)</sup> подає таку схему міотома:

В точці В є вершина спинної задньої піраміди (dorsal posterior pyramid); в Н передньої піраміди (anterior dorsal pyramid).

<sup>1)</sup> Houssay — „Forme puissance etc.“

<sup>2)</sup> E. W. Shann — „On the... etc...“

Перший рисунок (I) показує нам відомий вигляд міотома, а другий (II) справжню конструкцію міотома, яка є складнішою.



У Maurer<sup>1)</sup> знаходимо докладний опис вентральної бокової мускулятури. Дорзальна частина відділяється від вентральної боковою лінією. Обидві частини виявляють з себе ряд міотомів. В хвостовій частині як дорзальна так і вентральна мускулятура виявляє в кожному сегменті два порожніх конуси мускульних волокон, що лежать пасмами один понад другим. Вершини цих конусів дорзально і вентрально направлені назад. Міосепти з поверхні (коли зняти шкіру трохи підваривши об'єкт) виявляють ряд зігзаків. В кожному міотомі Dietz<sup>2)</sup> одрізняє 4 частини: дорзальну, вентральну, плевродорзальну і плевровентральну (рис. 6).

Кожний міотом (і міоком) виявляє тричі зігнуту лінію: спочатку маленький кут вперед (P), потім гострий кут назад і знов вперед до бокової лінії.

Нижня частина під боковою лінією не виявляє продовження верхньої частини, а не збігається з нею, будучи трохи висуненою вперед. Це особливо помітне в сегментах тулуба. Нижня частина повертає назад, потім дугою вперед і знов дає частину назад на череві і зустрічається з протилежним міотомом. Отже

<sup>1)</sup> Dr. Fr. Maurer — Die ventrale Rumpfmuskulatur der Fische Selachier, Ganoiden, Teleostier, Crossopterygier u. Dipnoer. Jenaische Ztsch. f. Natwiss. 1913.

<sup>2)</sup> Dietz — „Über die Form der Myotome der Teleostier“ — Anat. Anz. 1913 Bd 24 Jena.

вже зовні видно 4 відтинки: властиво спинний і властиво черевний (D і V); по боках бокової лінії плевродорзальний і плевровентральний (PD і PV). Кількість і форма зігзагів може бути дуже різна у різних риб і навіть в різних частинах того самого особника. Внутрішня будова міотома себто частина, якої не видно без препарування, виявляє слідуєче: в кожному міотомі є замітні три конусоваті вирістки; один йде від плевральних частин вперед, спільний для вентральної і дорзальної частини, лише розділений септою (PK<sup>1</sup> PK<sup>2</sup>). Від дорзальної частини і від вентральної ці продовження тягнуться по-одному назад. Кожне з цих продовжень, назвемо їх краще глибокі частини міотома, вкрите попереднім міотомом. Щоби одержати цілий такий міотом, я вибрав звичайно в трьох місцях (один із перших, середній в тулубі і задній в хвостовій частині) один або, в менших екземплярах риб для легкоти препарування, 2—3 міотоми і в дугину залишену на їх місці наливав чорного воску. Таким чином я одержував дуже виразне чорне пасмо, що виявляло зовнішню частину міотома і крім того модель цілого міотома.

Загальну довжину міотома можна зміряти, ставлячи ніжки циркля поступово (напр. починаючи зверху) в кожний кут. Крім цього міряється по прямій лінії відступ між двома крайніми точками (верхнім і нижнім). Відношення цих двох величин називає Dietz<sup>1)</sup> коефіцієнтом складкування (Faltungskoeffizient). З огляду на те, що останній верхній і останній нижній кінець тяжко одпрепаровуються і часто непомітно зливаються з сусідніми, Dietz випускає їх обмірювання і міряє міотом від першого дорзального кута оберненого вперед і до першого вентрального оберненого теж вперед. Цьогож способу додержувався і я (між P<sub>1</sub> і P<sub>2</sub>).

У риби фузіформного типу<sup>2)</sup> коефіцієнт складкування збільшується від голови до хвоста головним чином завдяки косому стану дорзальних і вентральних відтинків.

Автор знаходить, що взагалі риби „von der normalen Fischgestalt“ мають тіло більше стисле в хвостовій ніж в тулубній частині. У молодих і лярвальних форм немає такої великої різниці у складкуванні в передній і задній частині, як у дорослих форм. Тому можна припустити, що праформа риби була більше менше одноманітно висока і нагадувала *Amphioxus*'а та була

1) Dietz — Über die Form der Myotome.

2) Dietz бере як приклади *Gadus morrhua*, *Pleuronectes platessa*, *Trigla hirundo*.

мало пристосована до нектонічного життя. У низьких депресіформних риб помічаємо секундарне складкування чи то простопадне до осі тіла чи рівнобіжне. Коефіцієнт складкування у цих форм дуже високий<sup>1)</sup>. Це доказує, що ці риби походять від нектонних. Цікаво, що у пажорів коефіцієнт складкування теж дуже великий (не зважаючи на фізіформний тип і нектонне життя). Можливо, що у них помічаємо секундарний перехід від бентонного життя (і в зв'язку з цим депресіформного пристосовання) до нектонного (і в зв'язку з цим повороту до фізіформного типу<sup>2)</sup>).

Langelaan<sup>3)</sup> дає докладний опис міотома у міноги і у селяхій і я обмежуюся наведенням рисунку зі згаданого автора (рис. 7).

Докладний опис бокової мускулатури (вентральної частини) подає Maurer<sup>4)</sup>, даючи порівнює анатомічний огляд. Тоді, як у *Amphioxus*'а і *Petromyzon*-а бокова мускулатура досить проста, у *Mixine* вона вже складніша і виявляє певну спеціалізацію. У селяхій (пажорів) бачимо дальший поступ і диференціацію на м'язи кінчин, а у костистих риб знаходимо ще більшу спеціалізацію.

Maurer одрізняє 4 такі головні ізгиби у вентральній (очевидно і у дорзальній можна признати ті самі означення) частині міосепта (рис. 8): *a* від бокової лінії перший в другий ізгиб і *c* і *d* маленькі, що йдуть майже по середині черева входячи (у *Chlamydoselachus*) в будову глибокого м'яза, що починається від вентральної середньої лінії і тягнеться до плечового поясу. Відтинок *b* можна в свою чергу поділити на *αβγ*, при чому *γ* досягає *linea alba*. Мускульний відтинок, який відповідає ізгибови міосепта *b*, автор називає *M. obliquus superior*; відтинок *βα* *M. obliquus medius*, *bβ* *M. obliquus inferior* по черевній стороні в разі закручування міосептів, коли вони зійдуться на *linea alba*, утворюється ще *M. rectus profundus* (*M. rect. prof. mit keinem der ebenso bezeichneten Muskeln der höheren Wirbeltiere vergleichen kann*).

При розгляді окремих зразків ми ще повернемося до докладнішого розгляду бокових м'язів, тепер зазначу головну

<sup>1)</sup> У *Trigla* I, 6 і 2,0 (Dietz).

<sup>2)</sup> Langelaan — On the form of trune Miotome Konink. Akad v. Wetenschappen Amsterdam 1904.

<sup>3)</sup> Dietz числить, що це є один із доказів Abel'а про те, що предки пажорів були донними формами.

<sup>4)</sup> Maurer — Die ventrale Rumpfmusculatur der Fische. Jenaische Ztschr. Naturwissensch. Jena 1913.

ріжницю в мускулатурі риб різних систематичних груп за Mauger'ом.

У пажорів хід мускульних жмуктів у всіх відтинках (a, b, c, d) дуже простий і повторюється у всіх представників більше менше однаково. Двохшаровість зявляється тому, що *M. obliquus inferior* накладається на *M. obl. medius*, жмукти перехрещуються. *M. rectus* може бути у живородячих (*Chlamydoselachus*), граючи ролю при вагітності (*Tragmuskel*).

Хрящеві ганоїди (напр. *Acipenser*) наближаються до селяхій, а костисті ганоїди і дводишні до костистих риб.

На протязі цього переходу відбувається утворення двухшарової вентральної мускулатури з одношарової. У костистих Mauger одріжняє два типи:

1. Коли *M. obl. superior* (гомольог. селяхія і ганоїдам) дістає сильний розвиток і займає більшу частину бокової стіни тіла, а *M. obl. inferior* (вкритий *M. obl. superior*) дуже слабо розвинений. (До цього типу належать *Cyprinoidea*, *Salmonidae*, *Anguilla*).

2. Коли *M. obl. inferior* сильно поширений і як у селяхій і хрящових ганоїдів вкриває *M. obl. superior*. (Сюди належать *Lota*, *Silurus*, *Cottus*, *Malapterus*).

*Esox lucius* займає середнє положення між цими типами.

Локомоторна функція бокових мязів є найважнійша. Відтинок *a*, що лежить зараз же під боковою лінією, має разом з дорзальною частиною безпосередній вплив на хребти, що оточують хорду. Відтинок *ba* несе ту ж ролю в загальних рисах. Навпаки *bβ* і *bγ* одночасно з ролю черевногo пояса мають великий вплив на плечевий пояс і на рухи голови в боки. Ця частина особливо розвинена у тих форм, де вони витісняють відтинок *ba*. Працюючи одночасно зправа і зліва, цей мускул може рухати голову вниз при різних способах плавби. Коли ребра сильно розвинені (як у костистих риб нижні ребра), то рух тулуба може бути лише боковий. Коли ж ребра короткі і хрящеві, то може бути і дорзовентральний рух. Форма і кількість міотомів дуже залежить від форми і способу життя, особливо руху тої чи иншої форми.

У Houssay<sup>1)</sup> знаходимо ряд табличок, де він порівнює відношення довжини тіла до ширини міотома у риб різних систематичних груп, розташовуючи кожен в порядку швидкості

<sup>1)</sup> Houssay (*Forme puissance etc...*).

плавби. Висновком цих його обрахунків є те, що відносна кількість міотомів зменшується одночасно зі збільшенням негнучкості тіла. Так у селяхій L/e: у *Scilliumcanicula* 34, а у *Lamna carnulica* 109; у *Malacopterygia*: *Gobio flaviatilis* 52, а *Esox lucius* 90; у *Acanthopterygia*: *Mugil capito* 32, а *Zeus faber* 60.

Хід волокон і інсерація мускулів міотома відповідає напрямкам сили при рухах. Sella<sup>1)</sup> указує, що є дві системи лучнотканей: одна охоплює половину конуса міомера оберненого до термінального крила (дорзального чи вентрального) і групується у жмуток, який направляється до спинного чи черевного кутка, де сполучається зі жмутком, що тягнеться здовж дістальної пливки.

Друга складається з волокон, які індивідуалізуються в анальогічний спосіб на тій половині конуса, що обернена до бокового септума, там охоплює або сполучується в один жмуток при латеральнім оберненім куті, де ця фасція з'єднується з тою, що є гомольогічною симетрично розташованого конуса (рис. 9).

З наведеного сисунку видно напрямки, в яких працюють окремі частини міотома.

Виявляючи, як було згадано, окремий мотор, кожний міотом має й свою нервацію. Van Bisselick<sup>2)</sup> зазначає, що (рис. 10) один спінальний нерв інервує один міотом і міжміотому лучноткань, через яку цей нерв проходить. Корінь розгалуження спінального нерва, має положення під міотомом; гілки нерва пробивають міотом, але весь час іде в інтерміотомальнім септум-і до шкіри. Звичайно він знаходиться між перимізіумом і міжміотомовим септум-ом. Спінальний нерв виявляє примарний розподіл на три частини: задню, латеральну і передню частину в зв'язку з диференціацією міотома на дорзальну, латеральну і вентральну частину. Всі більші галузі є змішані нерви, що мають елементи як переднього так і заднього корінця.

Щоби закінчити цей огляд бокової мускулятури і її елементів окремих міотомів, наведу таблицю складену з моїми доповненнями за Shann-ом<sup>3)</sup>, у якій зазначаю, як у авторів називаються ті чи інші частини міотома. (Табл. I).

1) Sella — *Struttura ed atachi tendinei dei miesetti e del setto laterale dei teleostei* R. Comitato Talassografico italiano. Venezia 1925.

2) I. W. Van Bisselick — *Note on the innervation of the trunk myotome* — Koninklijke Akademie van Wetenschappen Amsterdam 1905, 25/V.

3) E. W. Shann — *On the lateral Muscles in teleostei* — *Proceedings of the... Zoologie Society of London* 1914, st. 319.

## Схема назв відтінків боко-

Черевний	Б о к о в и й м у с к у л					Спинний	Laceredes
Черевний	Б о к о в и й м у с к у л					Спинний	Сувієт
Інфракарінальна секція	Вентральна секція	Вентрально-середня секція			Дорзально-середня секція	Дорзальна секція	Оуєн
Карінальні м'язи	Мезіо-вентральна порція (= Pectorall.) (= Latissimus dorsi)	Лятеро-вентральна порція = Obliquus externus	Лятеро-вентральна порція	Цервоний м'яз	Лятеро-дорзальна порція	Мезіо-дорзальна порція	Гампфрей
	Rectus	Obliquus internus					Зона тієї ж м'язи
	Неповний конус звернений назад	Повний конус звернений вперед			Повний конус звернений вперед	Неповний конус звернений назад	Гегенбайєр
5 порція	4 порція	3 порція			2 порція	1 порція	Марш
	Вентральний ріг (Ventr. cornu) Вентральна частина	Лятеральна частина			Лятеральна частина Дорзальна частина	Дорзальний ріг (Dors. cornu) Дорзальна частина	Ланге-лаан
	Вентральна частина	Лятеральна частина			Лятеральна частина	Дорзальна частина	У. Тріхт

**Вого мускула у різних авторів.**

	Вентральна частина Заклад прямого м'яза (Anlage v. rectus)		Заклад косого м'яза (Anlage v. obliquus)				Дорзальна частина			Wieders- heim	
Нижні м'язи	Тонка че- ревна му- скулятура	Черевна мускуля- тура	Косо мускулятура спини				Спинні м'язи	Тонкі м'язи спини		Зов- нішні м'язи	Knapel
	Тонка че- рвна му- скулятура	Косо му- скулятура черева								Внутр- нішні м'язи	Mauger
	Прямий (Rectus)		Косий зовнішній (Obliquus externus)		Черво- ні во- локна	Черво- ні во- локна		Дорзальна порція		Зов- нішні м'язи	Mauger
	Прямий (Rectus)		Косий внутрішній (Obliquus internus)							Внутр- нішні м'язи	
	Вентральна порція		Плевровентральна порція				Плевродорзальна порція	Дорзальна порція			Dieltz
	Вентральна частина Задні зовнішні або поверхневі піраміди		Передні вну- трішні або гли- бокі піраміди		Червоні волокна	Червоні волокна	Дорзальна частна Передні вну- трішні або гли- бокі піраміди		Задні зовнішні або поверхневі піраміди (Superfi- cielles piramides)		Chevel
	Вентральна піраміда		Вентральна піраміда				Дорзальна пе- редня піраміда	Дорзальна задня піраміда			Shann
	Паралатеральні вентральні конуси						Паралатеральні дорзальні конуси				Sella

В приведеній таблиці подаю перегляд назв і описів різних авторів, які всі сходяться в тім, що правий і лівий боковий мускул риби виявляє з себе серію гомологічних поперечних м'язів міоморів (міотомів), що мають форму зізкаку і розділені між собою лучнотканю.

Отже автори здебільшого ділять боковий м'яз на дві частини, відмежовані одна від другої т. зв. боковою лінією (яка не сходиться з боковою зовнішньою лінією), верхня частина знову в свою чергу розпадається на дві частини як і нижня.

По спині медіально йде тоненький м'яз (*supracarinalis*) або спинний, що вклинюється між боковими. Медіально по черевній лінії йде теж тонкий м'яз. Перш ніж перейти до розгляду бокової мускулатури у різних етологічних типів, оглянемо також мускулатуру плавців.

Мускулатура плавців теж виявляє різні ступені розвитку. У кругоротих знаходимо початки мускулатури непаристих плавців. У Мухіна немає ще власної мускулатури плавцевої складки. Thacher<sup>1)</sup> зазначає, що: I have been unable to detect any muscular fibres in the composition of fin.

У Мухіна теж немає власної мускулатури хвоста (Шмальгаузен<sup>2)</sup>), але має вже цілком незалежну від бокових м'язів мускулатуру плавця. Ці мускули не відповідають сегментації бокових м'язів, виразно відмежовані од них і йдуть в іншому напрямкові. Вони виявляють з себе маленькі жмутки, які вклинюються межі боковими м'язами обох сторін.

Самі плавці знаходяться на ряді хрящових промінів, які щільно сидять по медіальній лінії в кількості 3—4—5 на сегмент. Ці проміні незв'язані з верхніми дугами, їх верхні кінці подвоюються, доходять до верхнього краю спинного плавця. В хвостовій частині проміні зеднуються з одною суцільною платівкою верхніх дуг. Нижні дуги теж зросли в цій частині з основами нижніх промінів. Весь хрящовий скелет виявляється тут як один хвостовий хрящ. Взагалі будова плавця у кругоротих виявляє дуже багато примітивних ознак: брак зв'язку з метамерією тулуба, нестала форма, брак поперечного розчленовання промінів, простирання хрящового скелету до самого краю первісно симетричного плавця, (протоцеркна) форма хвостового плавця і неповний розділ плавцевої складки на відділи (Шмальгаузен).

<sup>1)</sup> I. Thacher — Median and Paired Fins — Transaction of Connecticut Academie of Art and Science 1874—78.

<sup>2)</sup> Schmalhausen „Zur Morphologie der unpaaren Flossen“. Ztschr. Wiss. Zool. Leipzig 1912.

Вже з опису Cyclostomata видно, що мускулатура плавця незалежна від латеральної. Праці багатьох вчених над морфологічним значінням непаристих плавців доводять, що як скелет виявляє незалежну закладку від осевого скелету так і мускулатура непаристих плавців незалежна від латеральної мускулатури. У Dürni Gegenbauer доводить, що насиди лучів птеригіоформ є розвиненими остистими відростками<sup>1)</sup>.

Праці Шмальгаузена показують, що мускулатура (і скелет) всього гіпoxордального відділу хвостового плавця виявляє з себе одну цілість і що вона розвинулася іншим шляхом ніж мускулатура інших непаристих плавців. В цім сходяться з ним і Whitehouse: The present hypaxial supports are only a modification of this primary form — себто, коли хвостовий плавець підносився in a manner similar to that of other median fins.

У селяхій скелет обох спинних плавців, анального і гіпoxордальної частини хвостового плавця закладається ембріонально незалежно від осевого скелету і лише додатково наближаються до нього. Наслідком цього гіпoxордальна частина виявляє ряд утворів змішаної природи (елементи гемальних дуг, самостійні проміні). Передні проміні лишаяються самостійними часто й у дорослих форм, бо приростання йшло ззаду і привело до повного поглинення первісного скелета осевими утворами, що були викликані необхідністю міцної опори підчас руху.

У осетрових риб лишаяються ще рудіменти у вигляді дистальних хрящів, що виявляють останки первісного скелету.

У костистих риб первісний незалежний скелет зникає і заміняється цілком утворами з остистих відростків (Шмальгаузен).

У селяхій кожному (вже розгляненому) проміню спинного і анального плавця відповідає по одному мязови. Ця мускулатура почасти двошарова<sup>2)</sup> дистально прикріплюється до рогових промінів. В хвостовім плавці дорзальна частина немає своєї власної мускулатури, а вентральна частина має мязи, що прикріплюються до гіпoxордальних хрящів.

В мускулатурі плавців Harrison<sup>3)</sup> одріжняє три пари мязів, що прикріплюються до кожного проміння: поверхневі мязи, *M. inclinator* йде від шкіри; протилежний йому по функції *M. errector* йде від двох птеригіофорів до кожного проміння спе-

<sup>1)</sup> За Шмальгаузенем. „Непарные плавники“....

<sup>2)</sup> У Chimaera.

<sup>3)</sup> Harrison „The development of the fins of teleosts“ Hopkins Univ. Circular III.

реду; *M. depressor* йде від одного птерігіофора до проміня, що знаходиться на попереднім (спереду) сегменті. В хвості одрізняють два поверхневі, два глибокі і один середній, що йде до деяких дорзальних промінів.

У осетрових є теж поділ на поверхневі і глибокі мязи, які по своєму положенню відповідають птерігіофорам.

У костистих знаходимо гомольогічні утвори (Шмальгаузен).

Вже з положення мязів хвоста у селяхій можна зрозуміти їх роль. Двосторонні скорочення їх викликає опускання піднятої в гору частини хребта; односторонне скорочення викликає крім того і загинання хвоста в бік. При скороченню найбільш поверхневих жмутків рогові проміні стягаються, бо мязи інсеруються на шкірі там де лежать проксимальні кінці промінів. Звичайно ці рухи не є льокомоторні бо цю функцію виконують бокові мязи, а хвостова мускулятура регулює (у селяхій) напрямок рухів у вертикальній площі.

У ганоїдів починається дальша диференціяція, яка виявляється в поділі на два шари з різним напрямком волокон. Поверхневий шар вкриває вентральний край бокового мускула тіла; волокна прикріпляються на деякій віддалі від нижнього кінця хрящевих виростків; глибокий шар тягнеться аж до заднього кінця хвостового плавця і його волокна перехрещуються з волокнами поверхневого шару.

У костистих риб дістальні і проксимальні закладки такі як й у *Holostei*. З них розвиваються *M. flexor ventralis* і невеликий мяз, що не має звязку зі шкіряним скелетом; крім того розвивається сильний *M. interradians* (який лише намічається у *Amia*), що дає цілу систему *musculi plicatores*. На рахунок міотомів розвиваються: *M. flexor ventralis* і *M. flexor dorsalis* гіпохордально розвивається поверхневий мяз *M. flexor interior*.

Обидва *M. flexores* прикриваються боковим мускулом тіла, який продовжується у тужні, що ними прикріпляється до шкіряних промінів.

Отже мускулятура хвостового плавця розвивалася в двох етапах і різним способом та у примітивних форм має іншу будову ніж у других плавців, лишаючись цілком своєрідною.

Розглянемо за Hinderson'ом<sup>1)</sup>, як заховується мускулятура хвостового плавця у форм з хвостами різного типу:

У риб з явно виявленою гетероцеркією хвостова мускуля-

<sup>1)</sup> Hinderson — Über die Schwanz-Flossenmuskulatur der Teleostei — Anat. Anz. m. XXXVI 1910 Jena.

тура виявляє асиметрію: вентральна частина має більший розвиток і диференціацію ніж дорзальна. Це особливо помітне на внутрішніх м'язах, бо поверхневі шари часто секундарно дорзовентральні симетричні. У форм зі слабо виявленою гетероцеркією напр. *Gadus morhua*<sup>1)</sup>, *Anguilla vulgaris* немає й виразної асиметрії в мускулатурі.

#### IV. Бокові м'язи риб різних етологічних типів.

Не спиняючися на рибах фузіформних *sensu strictu*, розглянемо спочатку, як поводить ся мускулатура у риб стиснених збоків, по мірі їх більшої й більшої спеціалізації, а потім спинимося на екстремній формі. Тут же слід зазначити, що стислі збоків риби можуть виявляти або нектонні форми, наближаючися до теніформного типу, коли тіло є сильно видовжене, або планктонні форми або форми компресіформного типу. Різниця в способі руху у цих типів буде дуже значна. Тоді як теніформні риби рухаються ундуляцією цілого тіла і добре плавають, компресіформні чим більше спеціалізовані тим більше втрачають здібність до ундуляції тіла, ба навіть хвостової частини і рухаються слабо за допомогою плавців. В компресіформнім асиметричнім типі (камбали) ми знову бачимо рух за допомогою ундуляції тіла. В разі коли риба рухається ундулятивним способом (звиваючи хвилевато тіло), непаристі плавці (дорзальний і вентральний) видовжуються і в формі стяжки тягнуться здовж спини і черева або лише здовж черева чи спини. Їх роль — збільшувати корисну поверхню при хвилюватім коливанні тіла; самі вони мають теж здібність утворювати хвилі, ізза чого кожний промінь має відповідне риштування. Тому сильні видовження дорзального і анального плавця указують на те, що донна риба рухається ундуляцією тіла в більшій чи меншій мірі у всякім разі тої частини тіла, що має ці м'які, здебільшого одноманітні плавці.

У риб компресіформного типу ми теж здибуємо ундулюючі плавці, але тіло у них в більшій або меншій мірі не є гнучке. Звичайно ундуляція плавців одних не може дати такої сильної пропульсії як ундуляція цілого тіла (згадаємо морського коника) і тому риби з негнучким тілом є поганими плавцями.

Розглянемо кілька зразків бокової мускулатури, починаючи від фузіформних риб до найбільш екстремних форм компресі-

<sup>1)</sup> Dallo називає хвіст *Gadus'a* гефіроцеркним — друготно симетричним (див. вище).

формного, сагітіформного, теніформного і ангуіліформного пристосовання.

Методи, яких я вживав при праці, полягали на препаруванні мускулятури і по змозі на досвідах з живими об'єктами.

Свіжу рибу уміщав я на 2—5 секунд в окріп, після чого шкіра легко знімалася. Далі я обчислював коефіцієнти складкування міотомів і відношення довжини всього тіла по способу Dietz'a<sup>1)</sup> (довжина суми всіх відтинків міотома поділена на довжину прямої між дистальними кінцями міотомів є коефіцієнтом складкування). Потім обчислював я відношення довжини цілого тіла (L) до середньої грубости одного міотома.

Щоби не виводити середно арифметичної з суми ширин міотомів на їх кількість, я ділив довжину тіла заняту міотомами (від їх початку при тімені до кінця при хвостовім плавці) на їх кількість  $\frac{L \times \text{Miot}}{1}$ .

Це робив я за Houssay-ом<sup>2)</sup>, який твердить, що ця релятивна кількість міотомів зменшується разом із збільшенням негнучкості (rigidité) тіла.

Вже з тої незначної кількості риб, що я їх опрацював (понад 60), можна зробити деякі висновки, які й наведу в кінці.

Форму тіла риби можна зрозуміти, знаючи довжину (L) висоту (H) й ширину (B); тому я розташовую опис риб по відношенню L/H і H/B. Відношення L:H рівне 3,5 до 6-и дає нам більше менше видовжені риби (фузіформні) з переходом до високих і коротких, де це відношення менше 3,5 і до довгих, де це відношення більше 6-и. Риба стисла з боків дає відношення H:B і завдяки йому довгі видовжені риби можемо поділити на теніформні, у яких H:B є коло 2-х і більше і на ангуіліформні, у яких це відношення є коло 1.

У коротких риб відношення висоти до ширини тіла H:B вказує нам, чи риба є компресіформна чи депресіформна. Коли H > B (напр., у Zeus-a H:B коло 5-и), то форма стисла з боків. Коли H < B, то форма сплющена дорзовентрально.

Видовжені форми по зовнішньому виді можна також однести до сагітіформних риб.

Фузіформні: Mugil chelo (2 осіб. 150—52 мм.) L:H=5,3; H:B=1,8. Тіло фузіформне. Хвостовий плавець добре розви-

<sup>1)</sup> Dietz — Über die form.... — 1913.

<sup>2)</sup> Houssay — Forme.... — Paris.

нений, сильно вирізаний. Перший спинний і другий спинний ( $D_1$  і  $D_2$ ) невеликі, майже одної висоти, причім останній ( $D_2$ ) сидить проти анального (А). Плавун добрий і швидкий <sup>1)</sup>.

Міотоми складковані сильно і їх коефіцієнт поступово збільшується до заду. Коеф. 1,8 — 2,1 — 2,6.

Релятивна кількість міотомів невелика, бо вони досить широкі (напр., середній має 4,3 — 4,6 мм.)  $\frac{LxMiot}{l} = 37$ . Мускулатура починається проти заднього краю ока.

*Vox voors* (4 осібники)  $L:H = 4,8$ ;  $H:V = 1,6$ .

Ця риба цілком фузіформного типу являється добрим плавуном. Добре розвинений хвостовий (С), сильно вирізаний плавець; довгий спинний (D), що починається перед половиною тіла і тягнеться назад до хвостового стебла і вдвоє коротший анальний (А). Початок міотомів помічаємо над оком.

Міотоми виявляють сильне зікзакування коефіцієнта, який поступово збільшується до заду. Коеф. 1,5 — 2,1 — 2,8.

Релятивна кількість міотомів невелика, бо ширина їх досить велика  $\frac{LxMiot}{l} = 33$ .

*Mullus surmuletus* (2 осібники 125—145 мм.)  $L:H = 4,6$ ;  $H:V = 2$ .

Тіло видовжене. Спинні плавці високі трикутні. Підхвостовий відповідає другому спинному розміром і розташованнєм.

Хвостовий плавець сильний, вирізаний. Коефіцієнт складкування рівномірно повишається до заду. Коеф. 1,5 — 1,7 — 2,5.

Релятивна кількість міотомів невелика  $\frac{LxMiot}{l} = 37$ .

Плаває добре, хоч держиться радше дна.

*Smaris vulgaris*, рис. 11. (3 осібники 80—160 мм.)  $L:H = 4,5 - 5,5$ . (у молоді в довщі в порівнанні з більшими осібниками)  $H:V = 1,5 - 1,7$ .

Тіло фузіформне. Хвіст великий, сильно вирізаний. Спинний плавець довгий, починається над заднім краєм зяберної покришки і тягнеться до хвостового стебла. Анальний більш ніж вдвоє коротший за нього. Плавун добрий. Міотоми сильно зікзаквані, особливо в задній частині. Коеф. 1,6 — 1,7 — 2,7.

Релятивна кількість міотомів невелика  $\frac{LxMiot}{l} = 40$ .

<sup>1)</sup> *Mugil capito* Hossay односить до *formes rapides et peu resistances* і дає для релятивної кількості міотомів 32.

Міотомі широкі в передній частині тіла. Мускулатура починається над оком.

*Umbrina cirrhosa* (2 осібники 160 — 163 мм.) L : H = 4, H : B = 1,7.

Тіло стисле фузіформне. Дорзальний плавець довгий і тягнеться довше ніж до половини тіла, анальний малий. Лінія спини круто піднімається вгору одразу за головою.

Складкування міотомів різне в різних частинах тіла. Спереду і в середній частині тулуба коефіцієнт невисокий, в хвостовій частині стає одразу вищий. Коеф. = 1,7 — 1,7 — 3,3.

Релятивна кількість міотомів невисока.  $\frac{LxMiot}{1} = 36$ .

Плаває добре, звиваючи головне хвостове стебло.

*Pagellus erythrinus* (3 осібники 52—75 мм.) L : H = 3,3, H : B = 2,5.

Рибка фузіформна з довгими спинним і анальним плавцем. Хвіст добре вирізаний. Плаває досить добре<sup>1)</sup>.

Бокова лінія в передній частині трохи зігнута. Міотомі складкуються досить сильно і коефіцієнт їх піднімається в хвостовій частині. Коеф. 1,3 — 1,4 — 2,3.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{1} = 40$ .

Примітка: осібники малі і тому в кількості міотомів я міг помилитися на 1 — 2.

*Corvina nigra* (1 осібник 145 мм.) L : H = 3,6, H : B = 4.

Тіло більше менше фузіформне, але сильно стисле з боків. Лінія спини відразу круто піднімається за головою так, що тіло має півмісячну форму.

Міотомі найменше складковані спереду і в середній частині, де висота тіла найбільша. Коеф. = 1,3 — 1,2 — 2,3.

Хвостове стебло, найбільш гнучка частина тіла, поволи переходить в тулуб. Плаває добре.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{1} = 43$ .

*Srenilabrus ravo* (3 осібники 90 — 185 мм.) L : H = 3,5, H : B = 2,3.

Видовжене тіло (подібне до коропового). Спинний плавець довгий — починається скоро за головою і тягнеться до хвостового стебла. Анальний коротший. Обидва найдовші в задній

<sup>1)</sup> Houssay зараховує *Pagellus*-а до форм мало швидких, але резистентних по компресії і дає для релятивної кількості міотомів 45.

частині. Хвостовий плавець тупо заокруглений. Складкування міотомів невисоке. Коеф. = 1,3 — 1,6 — 2,2.

Рухається крім звивання цілого тіла (задньої частини особливо) завдяки ундуляції задніх частин. Мускулатура D і A добре розвинена і пристосована до ундуляції промінів.

Релятивна кількість міотомів розмірно невелика  $\frac{LxMiot}{l} = 50$ .

*Aragon rex mullorum*, рис. 12. (2 осібники 100—105 мм.) L:H = 3,5, H:B = 2,3.

Тіло скорочене — фузіформне з виразним хвостовим стеблом. Другий спинний (D), трикутний і стоїть проти такогож анального. Складкування міотомів не дуже високе; особливо випростовані середні. Коеф. = 1,3 — 1,4 — 2,1.

Мускулатура сильних D і A добре розвинена і входить легким півмісяцем в бокову мускулатуру. Бокова лінія зігнута (скороченне тіла). Складкування міотомів у хвостовім стеблі високе, бо це є при негнучкості передньої частини тіла найбільш рухома частина.

Релятивна кількість міотомів широких і виразних досить значна.  $\frac{LxMiot}{l} = 47,7$ . Початок мускулатури над оком.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{l} = 40$ .

*Oblatta melanura* (3 осібники 140—150 мм.) L:H = 3,1, H:B = 3,5.

Тіло стисле збоків, але гнучке. Хвостове стебло виразне, дорзальний плавець довгий, починається над зяберною покришкою. Анальний більш як вдвоє (майже втроє) коротший за нього. Хвостовий плавець сильний, вирізаний. Міотоми сильно складковані, широкі в середніх відтинках і тонкі в дистальних.

Коеф. = 1,5 — 1,6 — 2,0.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{l} = 35$ .

Мускулатура починається над переднім краєм ока.

*Haliases chromis*, рис. 13. (1 осібник 82 мм.) L:H = 3,1, H:B = 2,6.

Тіло коротке подібне до карася. Спинний плавець довгий і високий в задній частині. Анальний вдвоє менший і теж високий в задній частині. Хвостове стебло вирізане. Хвостовий плавець дуже великий і сильно вирізаний.

Складкування міотомів невисоке. Риба плаває жваво, але не швидко. Коеф. = 1,5 — 1,5 — 1,9.

<sup>1)</sup> Houssay dae 45.

Релятивна кількість міотомів значна (завдяки великому хвостови)  $\frac{LxMiot}{1} = 52$ .

Компресіформні: *Sargus annularis*, рис. 14. (5 осібників 108 — 130 мм. L: H = 2,5, H: B = 3,4).

Тіло стисле, овальне, більш компресіформне ніж фізиформне, так що тут вже маємо перехід до першого типу. Спинний плавець займає майже всю спину, анальний більш ніж вдвоє менший. Хвіст великий сильно вирізаний; хвостове стебло виразне. Міотоми складковані слабо і лише в хвостовім стеблі сильніше. Коеф. = 1,4 — 1,3 — 1,5.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{1} = 32$ .

Міотоми досить широкі. Мускулатура D і A сильно розвинена, хоч типових риштованих для ундуляції немає. Плаває досить добре головно завдяки рухам хвоста.

*Zeus faber*<sup>1)</sup> (8 осібників 75—540 мм.) L: H = 2,40, H: B = 3,4.

Тіло сильно стисле з боків, високе. Голова дуже велика. Перший спинний (D), високий і стоїть напроти довгим черевним. Другий спинний (D) стоїть проти м'якої частині анального і має всі риштовання для ундуляції. Хвіст цілком крайній, добре розвинений на виразнім стеблі. Мускулатура D і A дуже добре розвинена. Міотоми сильно складковані лише в хвостовій частині. Коеф. = (1,4 — 1,6) — (1,1 — 1,2) — (1,6 — 1,7). Бокова лінія виразно загнута вгору. Релятивна кількість міотомів велика.  $\frac{LxMiot}{1} = 60$ , бо тут маємо явище скорочення тіла.

Плаває *Zeus* двома способами і то або за допомогою хвоста для швидких рухів або за допомогою ундуляції D і A. Взагалі не є добрим плавуном<sup>2)</sup>.

Як зразок компресіформної риби розглянемо докладніше:

*Sargos aereg*, рис. 15. (4 осібники 75 — 95 мм.) L: H = 2,2, H: B = 4.

По спостереженнях над живими осібниками видно, що *Sargos*, плаває дуже помалу поміж водорослинами, ловлячи (наче то дзьобаючи) різні дрібні тварини на підводних листях чи скелях. Звичайне положення тіла нахилене вперед. В цім ста-

<sup>1)</sup> Ю. Русов — Мускулатура *Zeus faber* як зразок мало спеціалізованої компресіформної риби — Збірник Укр. Госп. Академії — 1926.

<sup>2)</sup> Poussay односить *Zeus faber* до форм не швидких, але резистентних по компресії і дає релятивну кількість міотомів 60.

новищу рибка плаває головним чином, ундулюючи другим м'яким дорзальним і анальним плавцем; обидва грудні плавці теж весь час знаходяться у віяловатім русі. При таких положенні високий перший спинний і також черевні плавці або випростовані або трохи схилені назад. Вони не приймають участі в русі риби. Коли риба чогось злякається, то рухається в інший спосіб. Хвіст, що при тихій плавбі в нахиленому стані цілого тіла служить лише для поворотів, переймає в разі потреби раптового руху головну локомоторну функцію. Швидко пливе злякана риба за допомогою хвостового плавця. Грудні плавці в цім випадку притуляються тільки до боків тіла. Твердий дорзальний схиляється назад як і другий дорзальний. Черевні теж схиляються назад. Отже як і у Zeus'a так і у Carpos'a бачимо два відмінні способи руху. Один для тихої плавби шляхом ундуляції м'яких непаристих, спинного і анального з участю грудних; другий для швидкої плавби за допомогою хвостового плавця і почасти звивання всієї задньої частини тіла. В останнім випадку Carpos пливе горизонтально.

При анестезуванні стебла хвостового плавця риба плаває цілком нормально спокійно, ундулюючи трохи енергійніше м'якими непаристими плавцями. Повороти робить за допомогою грудних. При анестезуванні грудних нормальний нахилений стан вперед стає більше виразним.

Порівнюючи мускулатуру Carpos'a і Zeus'a, помічаємо велику подібність. Подібними є також ристування для розсікання води і утворення трамового сліду для ундулюючих плавців.

Перший (або краще мовити передня частина спинного) у Carpos'a спинний плавець складається з 8—9 могутніх міцних промінів. Перший промінь дуже маленький і прилягає до більшого другого. Третій є найвищий. Будова кожного проміня нагадує надзвичайно то, що ми бачимо у Zeus'a.

Такаж тригранчаста форма, також бокові виростки внизу. Цей плавець утворює трамовий слід, приймаючи на себе весь опір води. Струї направляються обабіч його згаданими виростками. Далі охороняють м'який другий спинний, що складається з 22—23-х розгалужених членистих промінів, ряд кісточок як і у Zeus'a. Таким чином тут ундуляція другого спинного відбувається в розрізненім околі.

Знизу бачимо те саме. Груді і горло Carpos'a виявляють стерно. Міцні черевні плавці, що складаються з 6-ти твердих лучів, дають напрямок течіям обабіч тіла. Перші три проміні

анального плавця є тверді, але маленькі. Зовні обабіч м'якої ундулюючої частини анального плавця теж іде по ряду кісточок. З огляду на те, що риба плаває клінопектонічно себто спиною вперед, описаний апарат знизу не такий виразний, бо вентральна сторона риби не приймає на себе такого опору води як дорзальна, і особливо анальний є в трамовім сліді, утворенім цілим тілом.

Знявши шкіру, помічаємо картину дуже подібну до того, що виявляє мускулятуру Zeus'a.

Медіально на спині йде міцний м'яз, що піднімає проміні першого спинного плавця. Він інсерує до потилиці з одного боку, а другим кінцем підходить до попередньої частини другого променя. Перший промінь маленький і сидить над цим м'язом притуплений до другого променя. З боків цей піднімач (erector radii) почасти вкритий першими міотомами бокових м'язів. Від поперечних одростків промінів першого спинного плавця одходять маленькі і слабо розвинені м'язи, які в дуже незначній мірі одводять проміні в бік (adductores). Вони налягають на бокову мускулятуру. Задній м'який спинний плавець має таку саму „клявіатуру“ мускулів, як це ми бачили у Zeus'a. Ці поверхневі одводячі м'язи відповідають кількості м'яких промінів (23). Своїми дистальними кінцями вони підходять до промінів під згаданими вище кісточками, що охоронюють плавець з боку. Проксімальні кінці цих м'язів лежать на боковій мускулятурі.

Нижній плавець — анальний має ряд таких самих м'язів, що одводять промінь вбік.

Три передні міцні проміні мають дуже маленькі одводячі м'язи (як і м'які проміні) і медіальний невеликий м'яз, що піднімає проміні плавця.

Бокова мускулятура складається з 25-ти міотомів сильно випростованих в середній частині тіла. Коефіцієнти їх зікзакування (складкування) є такі: в перших міотомів, що загинаються коло голови, згинають зяберну покрішку, коеф. = 1,1; в середній частині тіла приблизно межі міцним промінем спинного, а першим промінем анального коеф. = 1,2; в задній частині тіла (від середини м'якого спинного до середини м'якого анального) коеф. = 1,3. Відношенне цілої довжини тіла до пересічної ширини міотому рівне 46<sup>1)</sup>.

Дуже виразні є останні міотомі, верхній і нижній, які йдуть під проксимальними кінцями ряду мускулів плавців і переходячі в тужень, підходять до хвостового плавця.

<sup>1)</sup> Houssay 46,7.

Знявши бокову мускулатуру, бачимо таку саму картину як у Zeus'a в мініатурі<sup>1)</sup>.

Так само птерігіофор кожного проміня спинного плавця має гостру бокову платівку, яка розділяє пару жмуктів м'язів проміня.

Передній мускул цієї пари підходить до заднього кінця попереднього проміня і опускає його (plicator), а задній підходить до слідуєчого проміня і піднімає його (erector interior). Ця будова повторюється як в мускулах твердих промінів так і у м'яких.

Від спинного стрижня одходить вверх (до верхніх непаристих плавців) і вниз до анального нерва; трохи вище над кінцем остистих одростків кожний нерв ділиться на дві галузки в формі V. Ці галузки інервують мускули окремих промінів.

*Centriscus scolopax*, рис. 16. (3 осібники 60 — 115 мм.)  
L : H = 4,7, H : B = 3,2.

Ця невелика рибка багато в чому нагадує *Sargos areg*, хоч зовні її сильно одріжняється від нього. Дуже видовжений ніс і складає  $\frac{1}{3}$  цілої довжини. Перший спинний виявляє довгий шип, другий спинний пристосований до ундуляції. Хвостове стебло тонке, хвостовий плавець заокруглений. Анальний відповідає другому спинному по будові і формі, але більший. Черевні плавці маленькі, грудні великі. Від заднього краю operculum до 1-го спинного по боках тягнеться платівка, що як панцир вкриває передню частину тіла, роблячи її цілком не гнучкою.

Складкування міотомів невисоке.

Коеф. = 1,2 — 1,4 — 1,8.

Релятивна кількість міотомів висока (завдяки довгому носови, що збільшує довжину тіла).  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 67$ .

Плаває клінотектонічно головою вниз. Рух відбувається головним чином завдяки швидкій ундуляції D і A. Грудні плавці теж приймають значну роль в русі. Цю рибу можна, незважаючи на L : H = 4,7, однести до пляктонних, компресіформних риб.

*Balistes balistes*, рис. 17. (1 осібник 90 мм.) L : H = 2,1, H : B = 3,8.

Тіло овальне, компресіформне. Перший спинний плавець з 4-х міцних промінів утворює трамовий слід для ундуляції другого

<sup>1)</sup> Houssay — *Forme puissance stabilité et des poissons* — Paris 1912.

спинного. На череві цю-ж роль грає непаристий вирісток, бо (як часто буває у компресіформних типів) черевних плавців нема. Хвостовий плавець округлий, на дуже виразнім тонкім хвостовім стеблі. D, хвостовий і А виявляють пропульзорний прилад. D і А типові плавці пристосовані до ундуляції і завдяки їх хвилеватому рухови риба головним чином плаває, держучися трохи похило. Тіло не дуже гнучке.

Міотоми середньої частини тіла випростовані. Коеф. = 1,1 — 1,4 — 1,6.

*Orthogoriscus mola*, рис. 18. (1 особн. 540 мм.) L:H = 1,5.

Типово компресіформна риба з дуже незначною здібністю до самостійного руху. Дорзальний і анальний плавці дуже великі, стоять один проти другого. (H:HD = 1,4; H:HA = 1,6). Хвостовий плавець тягнеться здовж заднього кінця тіла у вигляді шкіристого пасма зміцненого 12 хрящевими проміннями і може слабо ундулювати.

Бокової мускулятури, цього головного приладу пропульзії риб, у Місяць-риби немає зовсім і вона є замінена могутньою мускулятурою дорзального і анального плавця.

Отже релятивна кількість міотомів = 0. Плаває дуже зле, здебільше лежучи на боці на поверхні води дуже пасивно, віддаючися хвилям і течії. Від ворогів захищений дуже міцним хрящовим панцирем, завдяки якому тіло його має мінімальну гнучкість. Рух тіла відбувається завдяки незначній ундуляції хвостової складки шкіри і завдяки рухам D і А.

Спинюся докладніше на мускулятурі дорзального і анального плавця. Під грубою шкірою (хрящевим панцирем) лежать два великі мязи розділені боковою лінією, по якій тягнеться лучнотканна пластинка.

У Rosen'a<sup>1)</sup> знаходимо опис мускулятури Місяць-риби, але рисунок я даю свій, бо у згаданого автора не докладно вказано на перехід мязів в тужні.

Спинний плавець трохи більший ніж анальний і мускулятура його теж більш розвинена та складається з могутнього жмутка мускульних пасем, що тягнуться від голови (початок над оком), завертаючись дугою і розпадаючись на окремі жмутки відповідно до кількості промінів спинного плавця.

Від задньої частини цього мязя відокремлюються жмутки до промінів хвостового плавця. Нижній мускул себ-то мяз че-

<sup>1)</sup> N. Rosen — Studies on the Plectognaths the body muscles — Arkiv för zoologi Bd. 8 Upsala Stockholm 1913/14.

ревного плавця ширший і тягнеться понад черевною дутиною до заднього краю голови. Від нього також відокремлюються жмутки м'язів до хвостових промінів.

Кожний промінь властиво має свій комплекс мускульних жмутків, які заховують свою окремішність (особливо в нижнім мускулі) майже до місця інсерції себ-то до бокового лучнотканого пасма (рис. 19).

Можна одрізнити виразно в нижнім мускулі, а менше виразно в верхнім, дві частини: одну, що рухає передніми проміннями плавця і другу, що рухає задніми проміннями спинного або анального, а також хвостового плавця.

Особливо це замітне на мускулах анального плавця. Група мускулів 9-и перших (спереду) промінів відділяється складкою від групи мускулів 7—10 слідуєчих промінів; остання група утворює начеб то віяло разом з м'язом хвоста. В дорзальній частині помічаємо те саме, то є: 14 виразних жмутків перших промінів та групу більше скупчених м'язів і тужнів решти промінів D. Разом 13 промінів хвоста мають кожний свій жмуток, яких є 6 над хребтом і 7 під ним.

Кожний мускул проміня розпадається на кілька жмутків, що інесрують до міцного тужня на деякім віддаленні від хрящової платівки, утвореної зі зростанням птерігіофорів. Крізь цей суцільний птерігіофор проходять тужні з міцної лучноткані до плавців. Згаданий вище розпад мускулятури на дві групи є зрозумілий з руху самого плавця. Передня частина є міцна і тверда, а задня мягча і шкіриста.

Ундуляція (перпендікулярна) хоч і дуже незначна механічно відповідає теж незначній ундуляції хвоста. Головні рухи обох плавців це коливання збоку на бік, а їх роля це установка тіла в певнім положенні. Але це коливання викликає і рух вперед, завдяки корисному коливанню мягкої складки задньої частини плавця. Розташованне мускулів і тужнів як і спостереження над рухом Місяць-риби показує, що проміні не здібні до самостійного руху.

Весь плавець більше менше суцільний. Але натягання тих чи інших тужнів (чи цілої серії) викликає деяке згинання плавця. Тому ми й помічаємо, що група м'язів переходить до тужня в кількох місцях; найбільші жмутки переходять в тужень з боків (лятерально) менші і ніжнійші переходять до тужня спереду і ззаду. Бокові нахиляють промінь (отже і весь плавець) в бік. Передні і задні до деякої міри (дуже незначно) нахиляють про-

мін (і плавець) вперед чи назад. З огляду на те, що на передню частину променя найбільше ділає опір води (особливо на дорзальний, бо знизу голова і черево утворюють деякий трамбовий слід), найсильніші мязи підходять до передніх промінів. Одночасно діланне цих мязів лівої і правої сторони викликає нахиленне плавця вперед.

Якби то не було, і А і D не в пристосовані до доброго руху. Хвостовий плавець грає теж ролю приладу для стабілізації риби, але його здібність до хвильоватого руху простопадного до головної осі тіла риби є одночасно й здібністю для посування тіла вперед.

В той час як проміні А і D щільно зростаються, як і птерігіофори, їх проміні хвоста цілком окремі, як і їх птерігіофори.

Кожний промінь виявляє дуже видовжений хрящевий кокус, що сидить на конічнім хрящевім птерігіофорі.

Зправа і зліва до променя підходять тужні від мускулів. Жмутки мязів, як було згадано, є розділені по кількості промінів. Таким чином кожний промінь може самостійно коливатися в боки і утворювати хвилю, яка проходить по плавцю зверху вниз або відверотно. Але великої досконалости і прудкості в ундуляції ми тут не помічаємо як в плавцях пристосованих до ундуляції (напр., у Zeus-а або Carpos'a, анальний плавець у Notopteridae і инш.).

Отже взагалі у *Orthogoriscus mola* немає риптовання для швидкого руху, тіло не гнучке і роля мязів D і А припадає у ліпшій випадку (крім стабілізації тіла) веслуватого руху плавцям. Її сильний розвиток цілком відповідає великим розмірам цих плавців.

На описі цієї екстремної форми з посеред компресіформних риб закінчу огляд мускулятури цього типу.

Ми бачили, що здібність до руху в цім типі разом зі спеціалізацією падає. Разом з цим зменшується і гнучкість тіла. Бокова мускулятура стає менше складкована в середній частині, бо звиванне тіла зникає.

Мускулятура непаристих плавців спинного і анального розвивається і набуває значіння. Ціж плавці стають почасти органами не лише стабілізації й льокомоції. Значінне хвоста в пропульзії залишається правда навіть в екстремних формах, але теж втрачає свою головну ролю.

Коли ми спробуємо виявити графічно (Табл. II, від 1—5) закон-

ність випростовання зізкаку міотома разом зі скороченням тіла і переходу до компресіформного типу, то побачимо певну залежність.

Одкладемо на горизонтальній координаті відношення довжини тіла до висоти, а на вертикальній коефіцієнти складкування міотомів.

З кривої цілком виразно видно, що коефіцієнт складкування міотомів зменшується тим більше чим вище тіло.

При цьому слід приймати на увагу, не лише відношення  $L : H$ , але й відношення цілої довжини тіла до цілої висоти риби ( $H$ ) себто висоти тіла ( $H$ ) + висоти спинного плавця ( $HD$ ) і черевних плавців, якщо вони стоять напроти спинного.

Релятивна кількість міотомів не залежить від висоти тіла, бо при скороченню тіла їх кількість не зменшується.

Тепер розглянемо як поводить бокова мускулатура у риб теж стислих з боків, але несиметричних, яких рух є головним чином ундуляторний.

### Несиметричний компресіформний тип.

Цей оригінальний тип пристосування зустрічаємо лише у камбалових (Pleuronectidae).

Судячи по розвитку, ці риби виявляють собою секундарне пристосування до життя на дні. Молоді форми є цілком симетричні і лише дорослі дістають характеристичну несиметричну форму (ліву або праву).

В цім випадку бачимо приблизно те саме, що й у депресіформних риб. Роля хвоста тут зникає і пропульзія відбувається завдяки ундуляції. Але у скатів (напр., *Raja*) ролю пропульзорних органів, скажемо крил, переймають грудні плавці. Тут же ми бачимо, що ундулюють сильно розвинені спинний і анальний плавці, які тягнуться довкруги цілого тіла.

Отже в руху є велика принципіальна різниця межі компресіформними симетричними і несиметричними рибами. Коли у перших (*Zeus*, *Capros* *Balistes*) тіло не є гнучке, а пропульзорну ролю грає або хвіст зі своїм стеблом або ундуляція плавців ( $D$  і  $A$ ), у других рух відбувається завдяки ундуляції цілого тіла і плавців ( $D$  і  $A$ ).

Досвіди над живими особниками переконали мене, що камбали рухаються головним чином ундуляцією тіла, плавці теж ундулюють, але не самостійно, тільки разом, так-би мовити, в такт із тілом. У камбалових  $D$  і  $A$  не є самостійними пропульзор-

ними приладами як напр. у Zeus'a D і A, а при унерухомленні, позбавленні гнучкості тіла, риба одними тими не користується. Очевидно не можна порівнювати компресіформних симетричних і несиметричних риб, бо перші виявляють пристосовання до планктонного життя, а другі до донного, перші рухаються стоячи у воді прямовісно, а другі боком, перші мають тіло не дуже гнучке, другі навпаки, і коли перші рухаються завдяки хвостовому плавцеві і ундуляції D і A, то другі завдяки вертикальній ундуляції тіла і довгих D і A. Але в мускулатурі бачимо низький коефіцієнт складкування міотомів (напр., *Solea ocellata* = 1,7; 1,6; 2) в обох випадках, тільки у несиметричних форм складкування міотомів значно одноманітніше ніж у симетричних і підвищується лише в хвостовім стеблі, бо хвіст дає досить сильний пропульзорний удар.

*Solea lascaris*, рис. 20. (2 осіб. 340—350 мм.) L : H = 3,4.

Тіло видовжене яйцевате плоске.

Коефіцієнти складкування міотомів низьке.

Коеф. = 1,9 — 1,4 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів висока.  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 65$ .

Риба плаває ундулюючи цілим тілом, а особливо задньою частиною.

*Arnoglossus Grohmanii*, рис. 21. (3 осіб. 97—103 мм.)

L : H = 3,0.

Спинний і анальний плавці мають найдовші проміни в 2-ій третині спереду. Хвостовий плавець заокруглений, трохи загострений до кінця.

Коеф. = 1,4 — 1,6 — 2,0.

Релятивна кількість міотомів 47.

Плаває, звиваючи тіло особливо в останній третині.

*Solea ocellata*, рис. 22. (2 осіб. 133—140 мм.) L : H = 2,6,

H : B = 4,7.

Тіло видовжене еліптичне, D і A тягнуться здовж тіла. Їх мускулатура у вигляді клявіатури займає значну частину по боках тіла, (спинну і черевну). Тому бокова мускулатура розташовується на вужчій просторі ніж висота тіла (H). Складкування міотомів одноманітне.

Коеф. = 1,7 — 1,6 — 2,0.

Релятивна кількість міотомів досить велика.  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 57$ .

Плаває, ундулюючи цілим тілом, при чому задня частина з хвостом дає швидкі і короткі хвилі.

*Platessa vulgaris*, рис. 23. (4 особини 260 — 270 мм.),  
L: H = 2,4.

Тіло широке ромбічне. Дорзальний і анальний плавці великі, їх найдовші проміні в середні. Мускулатура їх сильно розвинена і складає  $\frac{1}{5}$  висоти тіла.

Складкування міотомів рівномірно збільшується спереду до заду тіла.

Коеф. = 1,5 — 1,3 — 2,5.

Перші міотоми мають сильніший коефіцієнт складкування, бо обгинають голову. Хвіст розвинений добре і дає сильний пропульзорний удар, рухаючися зверху вниз.

Релятивна кількість міотомів досить велика.  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 65$ .

*Rhomboidychthys podas*, рис. 24. (3 особн. 140 — 150 мм.),  
L: H = 2.

Тіло коротке, еліптичне. Анальний і дорзальний плавці мають найдовші проміні в третій четвертині спереду тіла. Рух відбувається головно задною третиною тіла.

Коеф. = 1,5 — 1,5 — 2,3.

Релятивна кількість міотомів 57.

*Rhombus rhombus*, рис. 25. (2 особн. 208 — 245 мм.), L: H = 1,8,  
H: B = 8.

Тіло майже округле. Бокова лінія сильно загнута в передній частині тіла. Спинний і анальний тягнуться здовж всієї спини згл. черева. Хвостовий плавець округлий. Міотоми складкованні досить рівномірно в передній і задній частині тіла, в хвостовій сильніше.

Коеф. = 1,5 — 1,5 — 2,3.

Плаває зле і то головним чином завдяки ундуляції D і A, а також завдяки швидким рухам хвоста.

Релятивна кількість міотомів досить висока.  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 56$ .

Тут знов бачимо залежність між вигибом бокової лінії і релятивною кількістю міотомів.

**Теніформний тип.** Коли будемо розглядати бокову мускулатуру видовжених риб (ангуїліформних і теніформних), то побачимо, що кількість міотомів разом з видовженням тіла сильно зростає. Складкування міотомів знову залежить не від видовження тіла, а від його стиснення з боків.

Коли тіло видовжене циліндрично, то складкування є високе, до тогож міотом вигнутий по площі перерізу тіла.

Коли тіло стисле з боків, то міотими випростовуються і я вважаю це характеристичним для риб теніформного типу, які рухаються ундуляцією цілого тіла.

Це є рух нектонних тварин і завдяки цьому деякі форми дуже добре плавають, але в спокійній воді.

Докладний опис цього руху знаходимо у Schlesinger'a<sup>1)</sup>. У риб теніформного типу дутина тіла здебільшого невелика (напр., у *Xenomystus nigri* займає лише  $\frac{1}{9}$  довжини всього тіла), а решта є мускулистим хвостовим стеблом.

Непаристі плавці в разі руху ундуляцією звичайно дуже довгі і рівнаються довжині тіла.

У *Regalecus* розвинений спинний, у *Cepola* і спинний і анальний, у *Ateleopus* лише анальний.

Роля цих плавців є або збільшення поверхні при ундуляції цілого тіла або самостійна ундуляція, при чому по них ідуть швидкі хвилі. У теніформних риб тіло звивається лише латерально і самий скелет не пристосований до дорзо-вентральних рухів<sup>2)</sup>.

У риб округлих в перерізі (напр., *Conger*), що живуть на дні і властиво не плавають, а порпаються, плазують у намулі чи серед каміння, можливе й дорзо-вентральне згинання. Остисті відростки (сильно розвинені у теніформних риб і взагалі у тих, що рухаються ундуляторно), зменшуються. Мускулатура виявляє більше складкування і коефіцієнти стають вищі.

Є також видовжені форми, які можна однести до сагітформного<sup>3)</sup> (напр., *Belone*), що є теж нектонними плавцями і то дуже добрими, що можуть боротися з хвилями і течією. У них мускулатура виявляє свої особливості, а саме: високий коефіцієнт складкування особливо в задній частині тіла. Тому видовжені форми розглянемо по їх етологічних типах.

Теніформні є стислі з боків і у них знаходимо в мускулатурі дещо спільного з тим, що бачимо у довших компресіформних несиметричних риб, бо властиво і в тім і в другім випадку маємо той самий спосіб руху ундуляцією (чи в горизонтальній чи у вертикальній площі).

<sup>1)</sup> D. G. Schlesinger: Über undulatorische Bewegung bei Fischen — Verh. Zool. Bot. Ges. Wien 1911, Bd. 61.

<sup>2)</sup> G. Schlesinger — Die Locomotion der täniformen Fische — Zool. Jahrb. Jena 1911.

<sup>3)</sup> Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus — Verh. Zool. Bot. Ges. Wien 1909.

Розглянемо кілька зразків менш спеціалізованих до більш спеціалізованих.

*Jullus vulgaris*, рис. 26. (2 осіб. 135—140 мм.),  $L:H=6$ ;  $H:B=2$ .

Тіло видовжене, гнучке. Спинний плавець довгий (од потилиці майже до хвоста), анальний майже вдвоє коротший.

Плаває, звиваючи ундулярно тіло. Міотоми досить сильно, але рівномірно складковані.

Коеф. 2,0 — 1,8 — 2,6.

Релятивна кількість міотомів розмірно невелика.  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 33$ .

*Trachinus draco*, рис. 27. (1 осібник 170 мм.),  $L:H=6,1$ ,  $H:B=1,5$ .

Видовжене тіло. Перший спинний плавець має 5 міцних промінів і стоїть зразу за головою. Другий починається за ним, і тягнеться майже до сильного і виразного хвоста.

Анальний також довжини як і спинний.

Міотоми складковані рівномірно.

Коеф. = 1,4 — 1,8 — 2,7.

Релятивна кількість міотомів 55.

Плаває як ундуляцією тіла так і особливо ундуляцією спинного і анального плавця, які пускають хвилі швидче і менші ніж тіло.

*Atherina hepsetus*, (1 осібник 82 мм.),  $L:H=7$ ,  $H:B=1,6$ .

Видовжене тіло. Маленький  $D^1$ , якому знизу відповідають черевні і  $D_2$ , якому знизу відповідає А.

Коефіцієнт складкування рівномірно підвищується до заду.

Коеф. = 1,6 — 1,8 — 2,6.

Релятивна кількість міотомів досить велика 69,8.

*Blennius ocellaris*, рис. 28. (1 осіб. 143 мм.),  $L:H=4,1$ ,  $H:B=1,7$ .

Тіло стисле, з боків видовжене. Дуже сильно розвинений спинний плавець (перші його проміні довші ніж висота тіла). Анальний розвинений значно менше. Хвостовий плавець заокруглений.

Мускули промінів спинного плавця розвинені дуже сильно і вкривають бокову мускулятуру до бокової лінії.

Те саме і на черевній стороні, де бокові м'язи (в задній частині) вкриті мускулами промінів анального плавця.

Складкування міотомів незначне.

Коеф. = 1,4 — 1,5 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{L \times \text{Miot}}{1} = 36$ .

Плаває, звиваючи ундуляторно тіло, як теніформна риба.

Спинний плавець особливо в задній частині і анальний теж ундулюють.

*Ophidium barbatum*, рис. 29. (1 особн. 185 мм.), L:H=9, H:V=2.

Видовжене гнучке тіло. Спинний плавець тягнеться здовж цілого майже тіла і огинає задній кінець тіла; анальний тягнеться від анального отвору в передній третині тіла і переходить в хвіст.

Міотоми складковані дуже рівномірно.

Коеф. = 1,6 — 2,0 — 2,1.

Релятивна кількість міотомів 63.

Плаває, ундулюючи цілою задньою частиною тіла.

*Serola rubescens*, рис. 30. (2 особн. 110—111 мм.), L:H=12, H:V=2.

Типово теніформне тіло, видовжене і поступово витончене до хвоста.

Спинний плавець тягнеться здовж цілої спини і підходить до хвостового плавця округлої форми.

Анальний плавець починається одразу за анальним отвором, тягнеться здовж хвостового стебла (дуже довгого) і теж підходить до хвостового плавця.

Складкування міотомів незначне.

Коеф. = 1,3 — 1,5 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів велика.  $\frac{LxMiot}{1} = 72$ .

Плаває, ундулюючи цілим тілом і непаристими плавцями.

**Ангуїліформний тип.** З ангуїліформних риб розглянув я лише *Songer*, тому про цей змієватий тип майже округлий на перерізі не можу вивести певних даних. Слід зазначити лише, що у цих риб коефіцієнт складкування вищий ніж у теніформних.

*Songer vulgaris*, (2 особники 305—310 мм.), L:H=19, H:V=1,3.

Тіло видовжене, змієвате. Спинний плавець тягнеться здовж цілої спини, починаючися негайно за головою.

Анальний трохи коротший, бо починається за анальним отвором приблизно в першій третині тіла.

Спинний і анальний переходять в хвостовий плавець.

Коефіцієнт складкування рівномірно високий.

Коеф. = 2,3 — 2,9 — 3,1.

Релятивна кількість міотомів дуже велика 160<sup>1)</sup>.  
Плаває, звиваючи тіло змієвато.

**Сагітіформний тип.** Сагітіформні риби можуть бути різної довжини і з них я опрацював лише 4 відміни, при чому у всіх знайшов те саме<sup>2)</sup>. Дуже високий коефіцієнт складкування в задній частині тіла.

*Ammodites tobianus*, рис. 31. (2 осіб. 115 — 113 мм.),  
L : H = 11.

Тіло дуже видовжене. Спинний плавець тягнеться майже здовж цілої спини, але не переходить у хвостовий; останній загострений.

Анальний більше ніж вдвоє коротший. Дуже рівномірне складкування міотомів.

Коеф. = 1,7 — 1,7 — 2,3.

Релятивна кількість міотомів велика<sup>3)</sup>.  $\frac{LxMiot}{1} = 80.$

Плаває швидко, звиваючи тіло в кілька ізгибів.

*Belone acus*, рис. 32. (2 осіб. 250 — 260 мм.), L : H = 2,1,  
H : B = 1,3.

Тіло видовжене сагітіформне. Дорзальний і анальний плавці протистоячі далеко на задній частині тіла.

Як у видовжених форм взагалі складкування міотомів одноманітне, але як у сагітіформної риби раптом збільшується в районі хвостового стебла. Коеф. = 2,0 — 2,0 — 4,0.

Релятивна кількість міотомів, як у риби видовженої, велика.

$$\frac{LxMiot}{1} = 84.$$

Плаває дуже добре, при чому може робити раптовні швидкі рухи.

*Esox lucius*, (2 осібники 210 — 250 мм.), L : M = 1,7,  
H : B = 1,4.

Тіло видовжене, типово сагітіформне. Спинні і анальний протистоять один другому, обидва одсунені далеко назад.

Це дає змогу щуці робити дуже швидкі, блискавкові рухи.

Коефіцієнт складкування міотомів невисокий і одноманітний, лише в хвостовій частині звищується. Коеф. = 1,4 — 1,4 — 3,1.

<sup>1)</sup> У Houssay 168.

<sup>2)</sup> Mauger подаючи малюнок щуки (*Esox*), не звертає уваги на сильне складкування у хвостовій частині.

<sup>3)</sup> У Houssay 85,5.

Релятивна кількість міотомів велика.  $\frac{LxMiot}{1} = 127.$

*Lichia amia*, рис. 33. (2 особини 130—132 мм.), L : H = 4, H : B = 4.

Тіло стисле збоків, голова трохи сплющена дорзовентрально. Перший спинний плавець низький, другий високий і добре розвинений; останньому протистоїть анальний.

Хвостовий плавець великий і вирізаний. Зараз-же за головою знаходиться на спині гостре стерно. В загальних рисах форма тіла наближається до сагітального типу. Судячи по двічі загнутій боковій лінії, ця форма походить з більше видовжених форм. Складкування міотомів високе.

Коеф. = 2,0 — 2,6 — 4,0.

Релятивна кількість міотомів  $\frac{LxMiot}{1} = 40.$

Риба добре плаває і здібна до дуже швидких рухів.

*Trachurus trachurus*, (3 особин. 130—135 мм.), L : H = 5,1, H : B = 2.

Тіло фузіформне. Бокова лінія виявляє загнуту лінію, що свідчить про те, що тіло скорочується і у предків було порівнюючи довше. Хвіст добре розвинений, вирізаний; хвостове стебло витончене, D і A довгі, розташовані один проти другого і досягають майже до половини тіла. Плавець добрий<sup>1)</sup>.

Міотоми сильно зікзаковані, особливо ті, що є в хвостовім стеблі.

Коеф. = 1,7 — 2,1 — 3,2.

Релятивна кількість міотомів невелика<sup>2)</sup>.  $\frac{LxMiot}{1} = 35.$

Передні міотоми є широкі, а в задній частині значно вужчі. М'язи починаються за оком.

**Депресіформний тип.** Депресіформний тип у костистих риб не виявлений так яскраво, як у селяхій, у яких знаходимо цілком плескати форми (*Raja*, *Torpedo*). Серед костистих заміняють їх властиво компресіформні несиметричні. Рух перших і других є ундуляторний, але у плескатих селяхій ундулюють дуже великі грудні плавці, а у камбал спинний і черевний.

Серед костистих плескатих форм бачимо звичайно риби з широкою головою (*Uranoscopus*, *Lophius*).

<sup>1)</sup> Houssay зачисляє *Trachurus trachurus* до швидких і мало резистентних форм.

<sup>2)</sup> У Houssay теж 35.

У них не спостерігаємо дорзовентральної ундуляції.

Рух відбувається або скоком або завдяки швидкому коливанні задньої частини тіла.

*Scorpaena scrofa*, (2 осібники 88 — 120 мм.), L : H = 3, і H : B = 1,8, H : BC = 1,5<sup>1)</sup>.

Тіло валькувате. Голова дуже груба. Спинний перший великий. Другий теж. Хвостовий заокруглений. Анальний проти D, але розвинений слабше.

Коефіцієнт складкування міотомів у передній частині невисокий, в задній більший.

Коеф. = 1,2 — 1,2 — 2,1.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{1} = 39$ .

Плаває зле або завдяки хвостовому плавцю або „перелітає“ завдяки великим грудним плавцям.

Закриваючи зяберні покритки, „скаче“ також швидко і раптово вперед.

*Trigla cuculus*, (2 осібники 150 — 156 мм.), L : H = 5,5, H : B = 1,3.

Видовжене, брускувате тіло з кремезною головою.

Перший спинний плавець короткий, високий; другий довший, але низший. Другому спинному відповідає анальний, хоч останній трохи коротший.

Коефіц. = 1,4 — 2,0 — 3,5.

Рухається, „ходячи“ по дну видовженими першими за проміннями черевних плавців, які сидять під грудьми. Плаває, звиваючи швидко хвостову частину тіла.

„Перелітає“ у воді завдяки ундуляції великих грудних плавців.

Релятивна кількість міотомів досить висока.  $\frac{LxMiot}{1} = 52$ .

*Gobius niger*, (3 осібн. 82 — 90 мм.), L : H = 7,1, H : B = 1,1.

Тіло брускувате, широке в передній частині і стисле в задній. H : BC = 0,8; H : B = 1,1; H : BK = 3, де BC ширина голови, а BK ширина хвостового стебла.

Перший спинний малий, другий більший і довший; хвостовий плавець округлий, підхвостовий трохи менший за D.

Міотомі складковані більше менше рівномірно.

Коеф. = 2,0 — 1,6 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів невелика.  $\frac{LxMiot}{1} = 32$ .

<sup>1)</sup> BC ширина голови.

Плаває швидко звиваючи задню частину тіла. Як донна форма не є добрим плавунцем.

*Uranoscopus scaber*, рис. 34.  $L:H = 6$ ,  $H:V = 0,8$ ,  $H:BC = 0,6$ .

Тіло плескате особливо в передній частині, до заду конічно звужується. Перший спинний маленький, другий довший. Хвостовий заокруглений. Анальний плавець довгий.

Міотоми сильно складковані, при чому слід зважати не лише зікзак, але й вигиб по окружності тіла, тому коефіцієнт буде вищий. Коеф. = 2 — 2,3 — 2,8.

Релятивна кількість міотомів невисока.  $\frac{LxMiot}{l} = 47$ .

Плаває зле або швидко звиваючи задню частину тіла або за допомогою великих грудних плавців.

*Lophius piscatorius*, рис. 35. (3 особинки 175—1030 мм.),  $L:H = 8,8$ ,  $H:V = 0,52$ ,  $H:BC = 0,3$ .

Тіло типово депресіформне нагадує пуголовку. Дуже сильно розвинені грудні плавці, що перенесені назад служать риби для скоків, як ноги у жаби. Їх мускули покривають собою з боків бокову мускулатуру тулуба.

Хвостове стебло з усіченим хв. плавцем дуже гнучке і міотоми сильно складковані: коефіц. = 2,3 — 3,1 — 3,3. Релятивна кількість міотомів велика (завдяки великій голові, що має довжину рівну майже половині довжини тіла)  $\frac{LxMiot}{l} = 52$ .

**Макруріформний тип.** *Fierasfer acus*, (1 особинка 105 мм.),  $L:H = 11,6$ ,  $H:V = 2,2$ .

Тіло типово макруріформне і виявляє дуже витягнений конус трохи плесковатий із боків. Найбільша висота зразу за головою. Спинний і анальний плавці тягнуться здовж цілого тіла, переходячи у загострений хвіст. Живе у голотурії і має тіло пристосоване до цієї симбіози. Плаває завдяки ундуляції цілого тіла.

Релятивна кількість міотомів велика.  $\frac{LxMiot}{l} = 135$ .

Коефіцієнти складкування досить грубих міотомів поступово збільшуються до заду. Коеф. = 1,8 — 1,7 — 2,3.

### Висновки.

Розглянувши складкування міотомів та релятивну їх кількість у різних риб, можна висліди представити графічно (Табл. III).

Хоч не годен вивести певних законів по тому матеріялу, який був у мене під руками й який залежав головним чином від вислідів уловів, то мимо цього певні правила виявляються досить очевидно.

Збудуємо криву, в якій на горизонтальній осі одкладемо відношення довжини до висоти, а на вертикальній — коефіцієнти складкування міотомів: перші за головою дадуть нижню криву чертковану коефіцієнти середини тіла середню криву а коефіцієнти складкування міотомів у хвостовім стеблі дадуть верхню криву (точковану).

Будуючи цю криву, ми не звертаємо уваги на форму тіла риби взагалі, ні на тип, до якого вона належить, а лише на те, чи риба довга чи коротка. Відношення  $L:H$  можуть бути у плескатих риб більші (напр. *Lophius*) ніж у риб видовженої форми (напр. *Esox*) і риби ріжних етологічних типів можуть стати рядом, а подібні можуть бути далеко.

Розташували риби про цьому відношенню, бачимо, що криві не виявляють якоїсь закономірности, хоч з розгляду їх ми можемо винести деякі дані.

Крива коефіцієнтів складкування міотомів передньої частини тіла (за головою) показує, що взагалі перші міотоми мають низчі коефіцієнти складкування як міотоми середньої частини тіла. Лише у риб стислих з боків (компресіформних, симетричних і несиметричних) і тих, що мають велику голову (напр. *Platessa*, *Zeus*, *Sargus*, *Corvina*, *Solea* і з другого боку *Gobius*, *Scorpaena*), перші коефіцієнти вищі ніж середні, бо міотом огинає задню лінію голови.

Ріжниця у висоті коефіцієнтів перших за головою й середини тулуба здебільшого незначна, лише у таких як *Trugla* і *Lophius*, тоб то виразно сплюснених з кремезною головою коефіцієнт складкування раптом повищується.

Як загальне правило ми бачимо, що коефіцієнти складкування найбільш гнучкої і найважнійшої для рухів, хвостової частини є високі і завше більші ніж коефіцієнти міотомів тулуба. Особливо високі є коефіцієнти складкування міотомів хвостового стебла, там де риба рухається як пуголовка швидким звиванням хвостової частини тіла, посуваючи вперед тяжку голову (напр. *Trugla* і *Lophius*). Цеж можна сказати і про риби сагітіформного типу, де знов-же задня частина тіла разом з  $A$   $D$  плавцями дають раптовий удар, результатом якого є скок вперед. (*Esox*, *Lychia*, *Trachurus*, *Bellone*).

Таким чином ця крива дає нам вказівку на те, що складкування міотомів є тим більше, чим більшу працю мусить виконувати міотом.

І дійсно. У риб стислих з боків мало рухомих (компресіформних) коефіцієнти складкування міотомів невисокі й більше менше одноманітні. У риб теніформних (теж стислих з боків, але довгих і добрих плавунів) бачимо те саме себто порівнююче невисокі і одноманітні коефіцієнти складкування (Serola). В першій випадку (у компресіформних симетричних) випростовані, бо не виконують сильних рухів при негнучкості тіла. В другій (у теніформних і компресіформних несиметричних), у риб, що рухаються чи горизонтальною чи вертукальною ундуляцією тіла, міотомі теж випростовані й одноманітні, бо при ундулятивнім русі на кожну окрему групу міотомів припадає при ундуляції незначна праця.

Типи сагітіформний і депресіформний дуже різняються між собою, але й той й другий у типових представників мають високі коефіцієнти хвоста, у перших як головного пропульзорного органу, у других як єдиного гнучкого відтинку тіла.

Розташувавши риби по їх грубості, тоб то по відношенню висоти до грубості  $H:V$ , можемо збудувати знов три криві коефіцієнти складкування міотомів. В загальних рисах всі три криві підвищуються разом зі збільшенням грубості тіла, але правильність сильно порушується рибами таких типів як сагітіформні, а також фізиформні, які я взяв лише як зразки. Неясне також відношення у Corvina і Seriola.

З обох кривих видно, що складкування міотомів не знаходиться в прямій залежності від довжини ( $L:H$ ) або грубості риби ( $H:V$ ).

На мою думку кожний міотом, будучи одиноким мотором, має форму, залежну від праці, яку він несе в тім чи в іншій відтинковій тіла.

Розташувавши риби по етольогічним типам і в порядку все більшої спеціалізації, можемо вивести найбільш характеристичні дані для особливо виразних форм.

Так у компресіформнім симетричним етольогічним типі (найбільш спеціалізованими були в моєму розпорядженню Ortagoriscus, Capros, Balistes, Zeus, Sargus, Centriscus, а лише стислі з боків не спеціалізовані (Heliases, Oblatta, Paggellus, Corvina) ми бачимо низькі коефіцієнти складкування, при

чому немає великої різниці в коефіцієнтах складкування передних, середніх і задніх. Чим менше риба спеціалізована, тим більша буде різниця в складкуванні міотомів перших і середніх в порівнянні з міотомами хвостового стебла.

В компресіформнім асиметричному типі помічаємо трохи інші залежності. (з Pleuronectidae у мене оброблено Rhomboidychtys, Arnoglossus, Solea laskar., Rhombus, Platessa). Тут теж коефіцієнти низькі, особливо середніх міотомів. Міотоми хвостової частини тим вищі, чим більше риба пливає лише за допомогою хвоста, не звиваючи або мало звиваючи ундуляторно ціле тіло. Досвіди переведені над живими Solea, Rhombus і Platessa показали мені, що спосіб руху цих риб є різний. Короткі ромбічні форми як Platessa, Rhombus, виявляють найсильнішу пропульзію, швидко кидаючися вперед завдяки швидким рухам хвоста. Більше видовжена Solea, бажаючи сильно плисти, звиває звивання тіла в поземній площині. При ундуляційнім способі руху нема різкої різниці в складкуванні міотомів, бо всі виконують більше менше однакову працю, при чім в цьому випадку (Solea) передні й задні більшу ніж середні. Отже у несиметричних риб форма міотомів залежить від способу руху.

У теніформного типу (з розглянутих мною форм Serola, Ophidium, Blennius) та у мало спеціалізованих Atherina, Iullus, Trachinus і почасти Crenilabrus помічаємо в загальних рисах однакнє зікстагування міотомів без значної різниці в передніх, середніх і задніх міотомах, причім чим більша риба і більше спеціалізована, тим рівномірніше складкування. В цьому типі помічаємо, що ундуляторний спосіб руху або захоплює ціле тіло і риба тоді рухається, звиваючись як стяжка, або обмежується лише задньою й середньою частиною тіла, відповідно чому витягнені більше або менше непаристі плавці. Плавці анальний й спинний приймають в цьому типі значну роль в русі і ми знаходимо в їх промінях тіж пристосування, що описано вище у Zeus'a в D<sub>2</sub>. Складкування міотомів відповідає протяженню цих плавців, а саме воно є рівномірне там, де є ундулюючі плавці, тоб то там, де відбувається ундуляція тіла.

Щоби перевірити спосіб руху і силу залежну від цього способу, я перевів ряд досвідів (в Роскові) над Rhombus, Solea і Platessa. Щоб змірити силу, з якою пливе та чи інша риба, я пришивав до хвостового стебла петлю з нитки й давав загоюватися незначному ушкодженню. До петлі прив'язував нитку та перекидав її через легкий бльок, уміщений на висоті двох метрів. До вільного кінця нитки

прив'язував легкий паперовий циліндр. Це приладдя не перешкаджало рухам риби. Примусивши рибу плисти, я досипав потрохи піску у паперовий циліндр, доки риба не спинилася у воді, хоч і продовжувала робити звичайні для її плавби рухи. Вагу цієї кількості піску я записував. Другі досвіди давали мені вагу, яку риба піднімає раптовим рухом, так-би мовити з місця. Для цього я насипав у циліндр піску, а потім лякав рибу. Вона або піднімала зразу циліндр з піском і пропливши басейн, потім пасивно тяглася назад завдяки силі ваги піску або не могла зовсім рушити з місця. Поступово додаючи або однімаючи пісок, з великої кількості досвідів я виводив середню вагу, яку риба може одразу підняти, але не може утримати, пливучи своїм нормальним способом. *Solea* звиваючися ундулярно, могла тягти більшу нагрузку, а *Platessa* і *Rhombus* могли зразу підняти більшу вагу, але не могли з нею плисти.

У риб сагітіформного типу (з яких у мене під руками були виразні *Esox* і *Belone* та менше спеціалізовані *Trachurus* і *Lichia*) помічавмо дуже різку різницю в складкуванні міотомів тулуба і хвоста. У спеціалізованих форм коефіцієнти перших і середніх міотомів майже однакові і то невисокі, а міотом задньої частини тіла дуже високі. Це знов-же зрозуміло із способу руху сагітіформних риб, у яких пропульзорний орган є ззаду і мускулам доводиться виконувати велику працю, звиваючи хвіст разом з анальним і дорзальним плавцем, які дають сильний опір<sup>1)</sup>.

Бокова мускулатура депресіформних риб (*Lophius*, *Trygla*, *Uranoscopus*, *Gobius*) нагадує те, що ми бачили у сагітіформних, але тут слід прийняти на увагу, що коефіцієнт складкування збільшується не лише завдяки складкуванню міотомів в площі рівнобіжній до медіальної площі риби, але міотоми загинаються завдяки округлому перерізови здебільшого в перерізі тіла і в площі рівнобіжній до поперечного перерізу. Чим більше спеціалізована форма (*Lophius*, *Trygla*), тим виразніша різниця в складкуванні тулуба і хвоста чи взагалі задньої частини тіла. У риб в формі бабки (*Gobius*, *Scorpaena*, *Uranoscopus*) це не так помітне і в них складкування міотомів значно рівномірніше. Це зрозуміло зі способу руху цих риб. Коли пливе бабка (*Gobius*), то вона звиває майже ціле тіло, отже виконує рух,

<sup>1)</sup> Не ясним є для мене відношення мускулатури у *Seriola Dumerili*, яка не маючи ознак сагітіформної риби, по складкуванню міотомів цілком подібна до сагітіформних риб.

що наближає його до теніформної риби (порівняти *Gobius niger* і *Blennius*). Те саме знаходимо й у *Uranoscopus*'а, хоч тіло його в ньому більше валькувате, відповідно чому й складкування міотомів вище<sup>1)</sup>.

З інших типів пристосовання були у мене лише *Conger* з ангуліформних і *Fierasfer* з макруріформних, тому я не можу вивести для них певних даних, лише зазначу, що у них, як у форм видовжених, складкування міотомів рівномірне і у першого високе, а у другого — низьке.

### Література.

- Abel — Grudzüge der Paläobiologie — Stuttgart 1912.  
 Ahlborn — Bedeutung der Heterocerkie für Ortsbewegung — Ztschr. Wiss. Zool. 1895 Bd 61.  
 A m a n s — Comparaison des organes de la locomotion aquatique — Ann. Soc. Not. Zool. 1888. T. 6.  
 Borelli — De motu animalium — Lugduni Batavorum 1685.  
 Casta — Fauna del regno di Napoli —  
 Cuvier et Valenciënne — Histoire naturelle des poissons — 1828, Paris.  
 Cuvier — Le regne animal... — 1836 Bruxelles.  
 Dietz — Ueber die Form der Myotome der Teleostier: Anat. Anz. 1913. Bd 24 Jena.  
 Dean — Fishes living and fossils — New York 1895.  
 Dugés — Role des nageoires chez les poissons — Bull. d. 1. Soc. Zool. d. France 1905. T. XXX.  
 Chevrel — Essai sur la morphologie et la physiologie des muscles laterales chez les poissons osseux — Arch. de Zool. Experet General 1913.  
 Dubois-Reymond — Zur Physiologie des Schwimmens — Arch, L. Anat. und Physiol. 1905.  
 Schlesinger — Die Locomotion der Notopteriden: Zool. Jahrb. Syst. 1910. Bd. 29.  
 J. T. Cunningham — A treatise on the common sole (*Solea vulgaris*) — Plymouth 1890.  
 Van Bisselick — Note on innervation of the Trunkmyotome — Proc. K. Akad. Wetenschappen Amsterdam 1905.  
 M. Sella — Struttura et attacchi Tendinei dei miosette e dell setto laterale dei Teleostei — Venezia 1925 Memaria CXII.  
 Baudelot — Observations sur la Structure et le Developement des Nageoires des poissons osseux — Arch. Zool. Exp. 1873. Vol. II.

<sup>1)</sup> Слід зазначити, що в роді *Gobius* знаходимо як виразно депресіоформні риби, наприклад: *Gob. Kessleri* так і подібного до *Blennius*'а *Gob. gymnotrachelus*, що рухаються різно і мають різну мускулатуру.

- Shann — Lateral muscles of Teleost — Proc. Zool. Soc. London 1914.
- Van Tricht — On the influence of the fins upon the form of the Trunkmyotome — Proc K. Akad. Wetenschappen. Amsterdam 1907.
- Maurer — Die Ventrale Rumpfmusculatur der Fische — Jena'sche Zschr. Natw. 1912 m. 49.
- Monoyer — Recherches experimentales sur l'équilibre et la locomotion des poissons — Ann. d. Sc. Nat. Zool. 1866 Vol. 6.
- Marey — La Chronophotographie — Rev. General. des Sc. pures et Appliqués Paris 1891.
- Marey — La locomotion animale — Extrait du Traité de Physique biologique. T. I.
- Pettigrew — Die Ortsbewegung d. Tiere 1875 Leipzig.
- Polimanti — Influenza della forma sulla locomotione dei pesci — Ztschr. Zool. Phys. 1911.
- Rosen — Body muscles of Plectognaths 1913. Stokholm Ark. Zool. 18.
- Stannius — Zootomie der Fische — Berlin 1854.
- Strasser — Zur Lehre von d. Ortsbewegung durch Biegung und der unp. Fl... — Stuttgart 1882.
- Schlesinger — Über die undulatorische Bewegung — Verhandl. Zool. Bot. Ges. Wien 1911. Bd 61.
- Schlesinger — Die Locomotion der taeniformen Fische — Zool. Jahrb. Syst. 1911. Bd. 31.
- Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus — Verhdl. Zool. Bot. Ges. Wien 1909.
- Schmalhausen — Zur Morphologie der unpaaren Flossen — Zschr. Wiss. Zool. Leipzig 1912.
- Schmalhausen — Непарные плавники (Скелет, мускулатура, функция и форма). Киев 1913. Записки Киевского Общ. Ест.
- Theacher — Media and paired Fins — Transact. of The Connecticut Acad. 1874 — 8 Bd. III.
- Whitehouse — The caudal Fin. Proc. of The R. Society of London Series 1910. Val. LXXXII.
- Zalenskyj — Развитие вертикальных плавников у осетровых — С. Петербург. Анн. Мич. 1899.
- Rollett — Ueber die Flossenmusculatur des Seepferdchens 1888. Arch. Mikr. Anat. Bd. 32.
- Goodrich — Notes en development structure and origine of the median and paired fines... — Quort Jarn. of micr. Sc. 1906. Val. 50.
- Harrison — The Metamerism of the Dors a Ventr. Longitudinals Muscles of the Teleostemi — J. Hopkins Univ. Circ. III.
- Harrison — The Developement of the Fins of Teleosts — J. Hopkins Univ. Circular III.
- Hinderson — Schwanzflossenmusculatur der Teleostei Anat. Anz. 1910. Jena XXXVI.

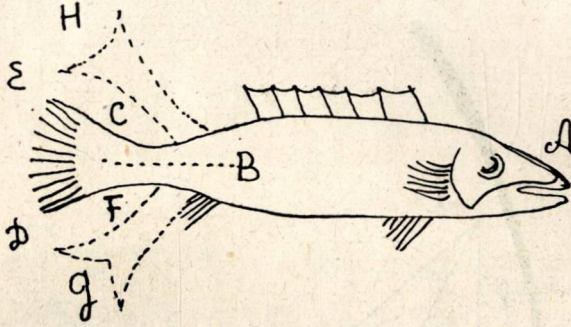


Рис. 1. Рух риби за Borelli-ом (стор. 138).

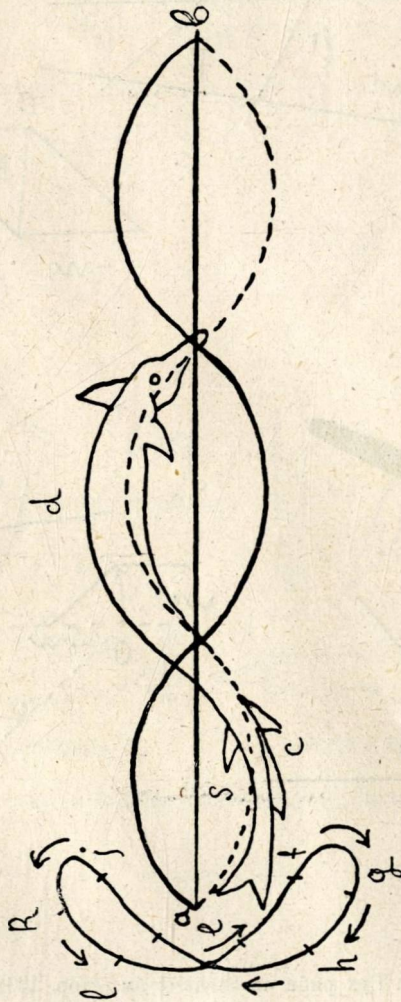


Рис. 2. Рух риби за Rettigev-ом (стор. 139).

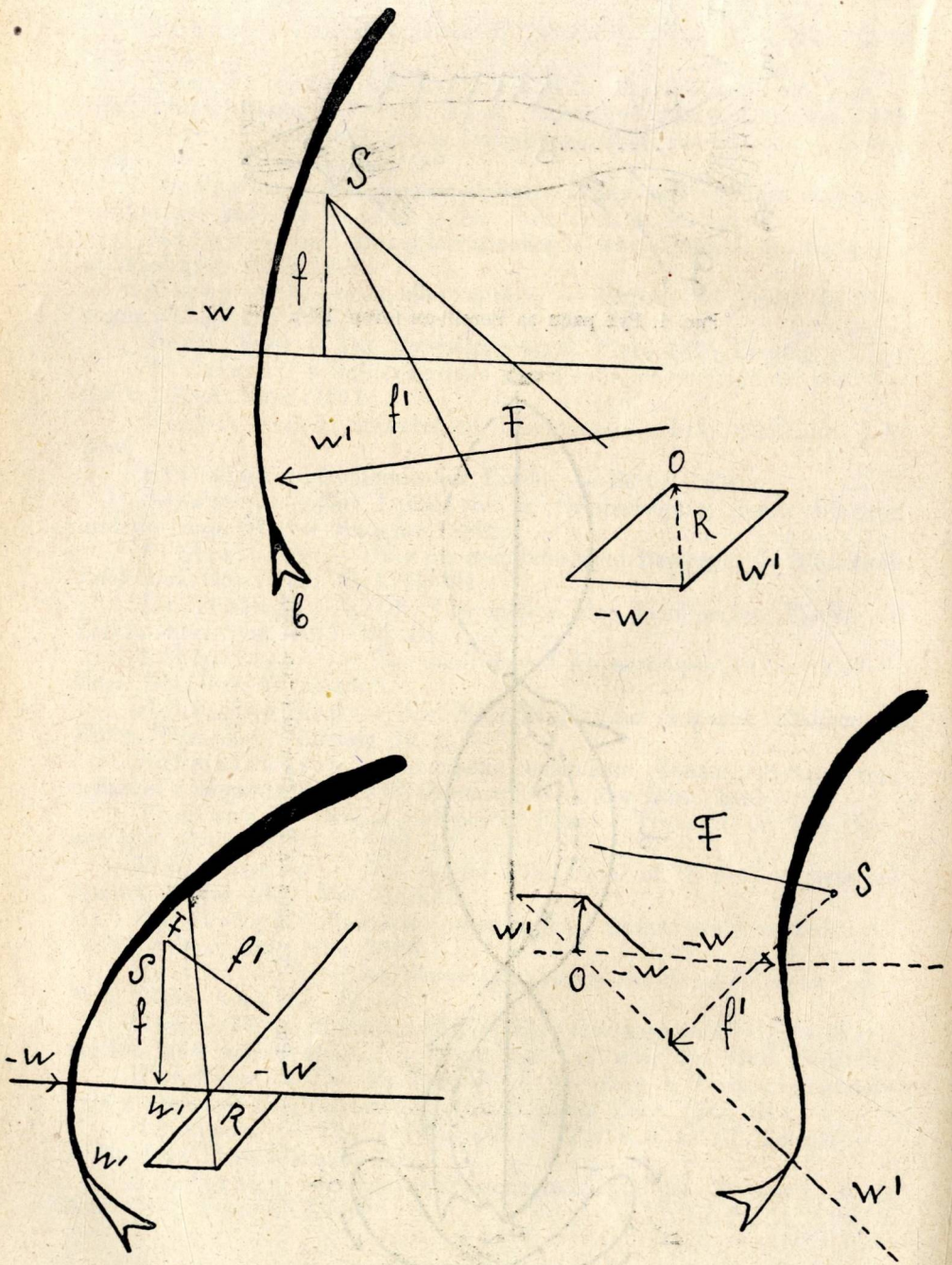
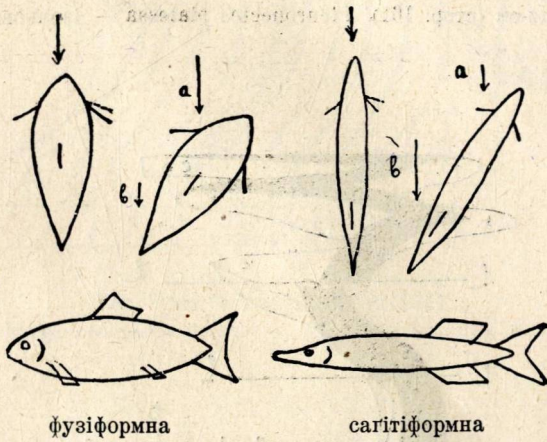


Рис. 3. Рух риби за Strasser-ом (стор. 139).



Рис. 4. Струї води на тілі риб — за Houssay-ом (стор. 144).



фузіформна

сагітіформна

Рис. 5. за Günther-Schlesinger-ом (стор. 154).

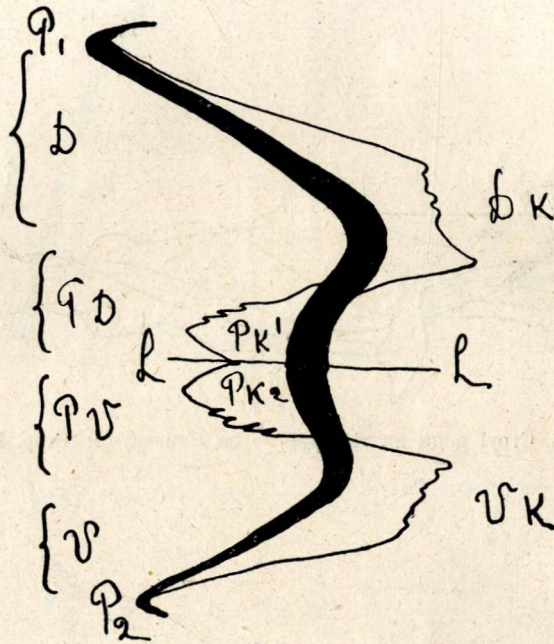


Рис. 6. за Dietz-ом (стор. 161). *Pleuronectes platessa* — ізольований міотом.

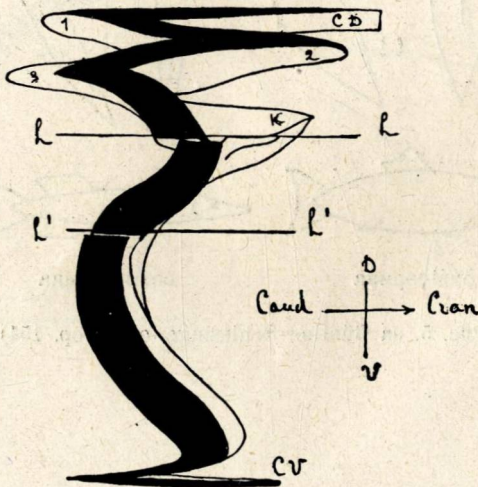


Рис. 7. за Langelaan-ом (стор. 163). Міотом пажора.

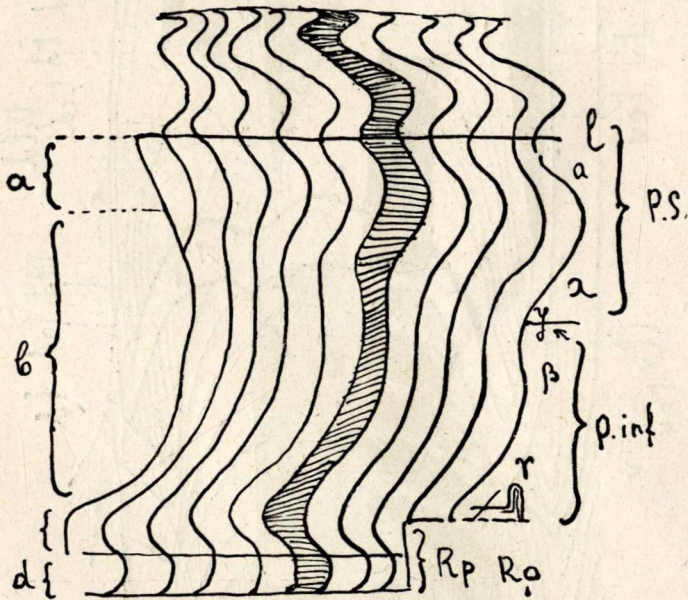


Рис. 8. за Маурег-ом (стор. 163).  
*Chlamidoselachus anguneus* — бокова частина тіла.

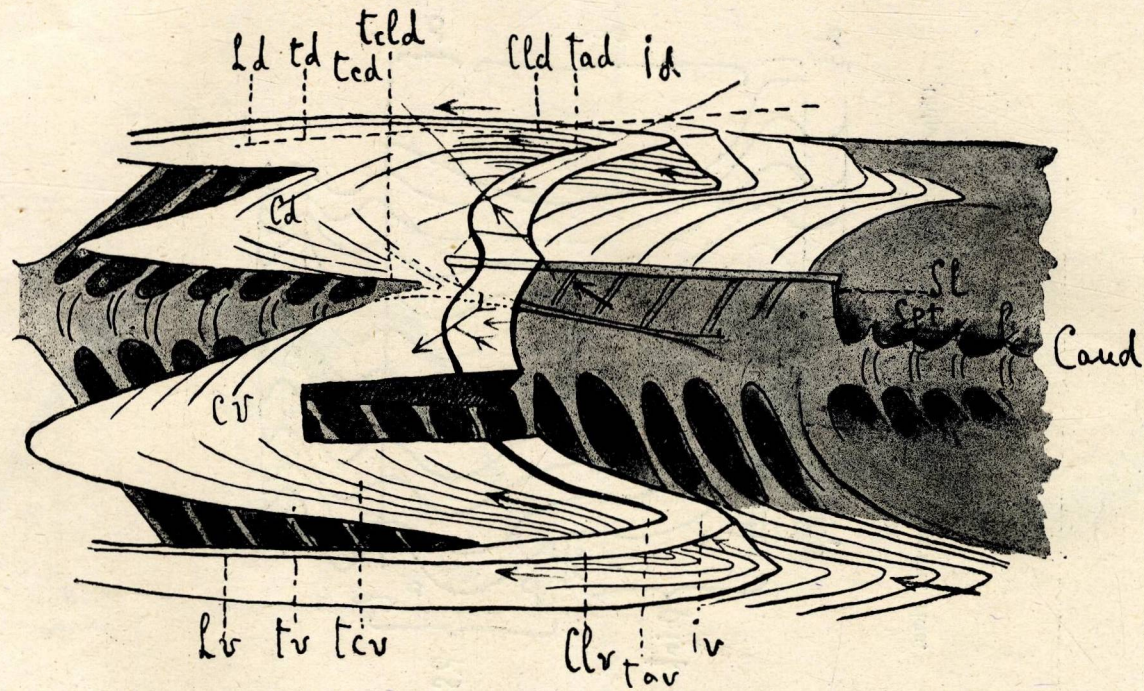


Рис. 9. за Sella-ом (стор. 165). Ізольований міотом і його фасції.

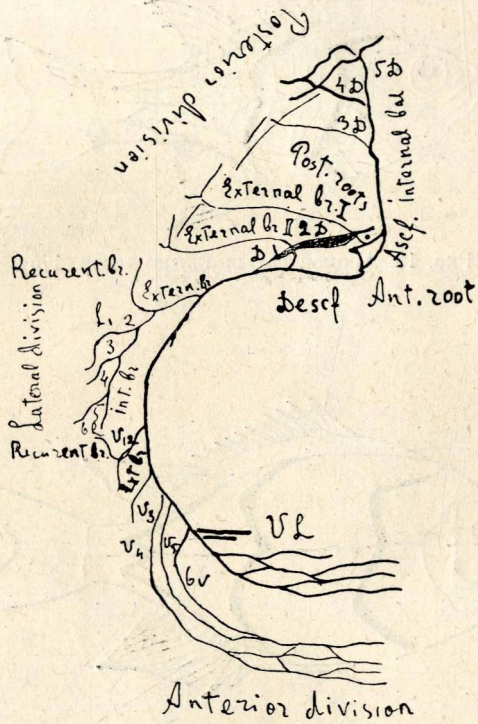


Рис. 10. за van Bisseluk-ом. Інєрвация мієтєла (стор. 165).

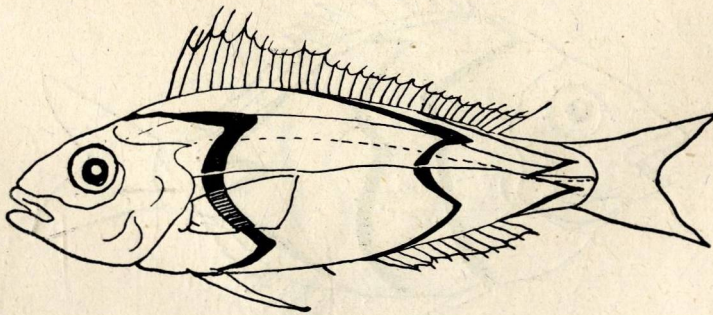


Рис. 11. *Smaris vulgaris* (стор. 173).

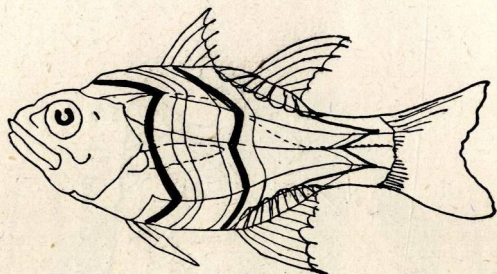


Рис. 12. *Apogon rex mullorum* (стр. 175).

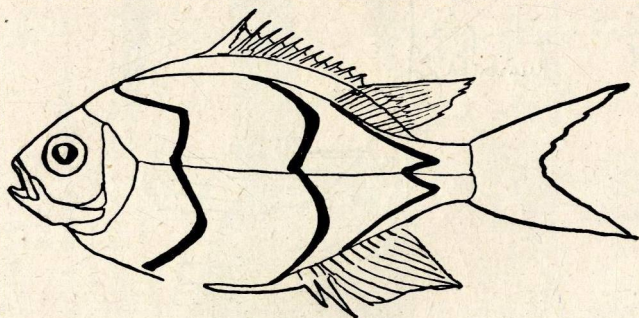


Рис. 13. *Haliases chromis* (стр. 175).

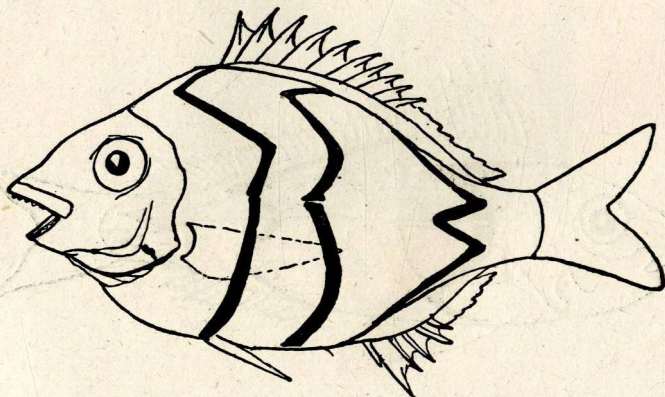


Рис. 14. *Sargus annularis* (стр. 176).

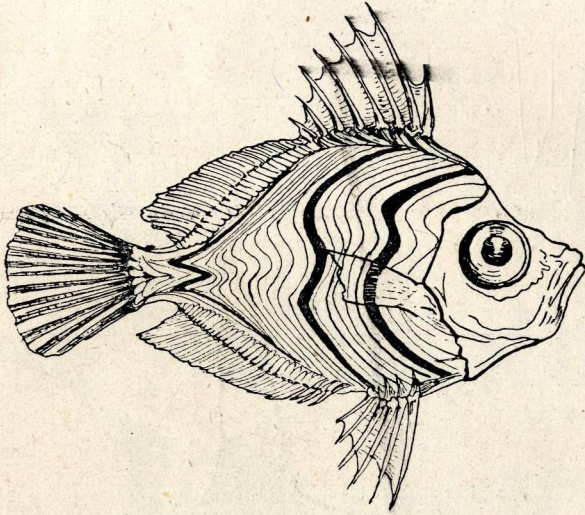


Рис. 15. *Capros aper* (стр. 176).



Рис. 16. *Centriscus scolopax* (стр. 179).

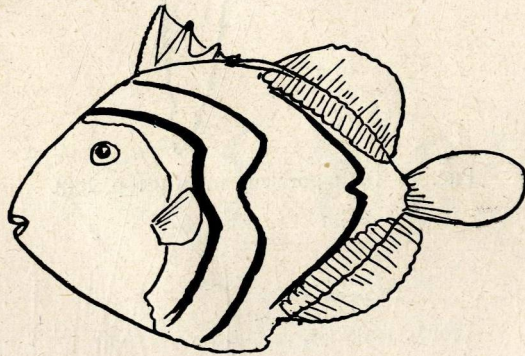


Рис. 17. *Balistes balistes* (стр. 179).

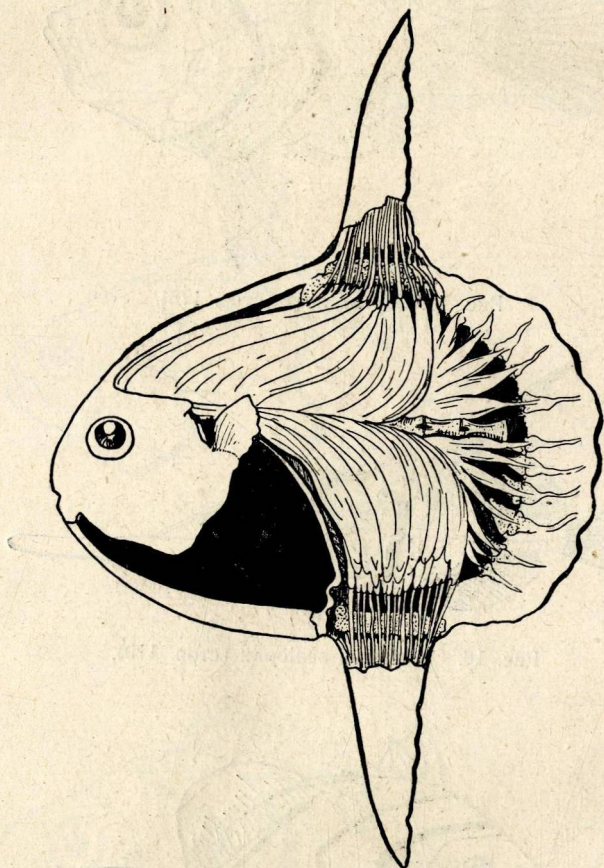


Рис. 18. *Orthogoriscus mola* (crop. 180).

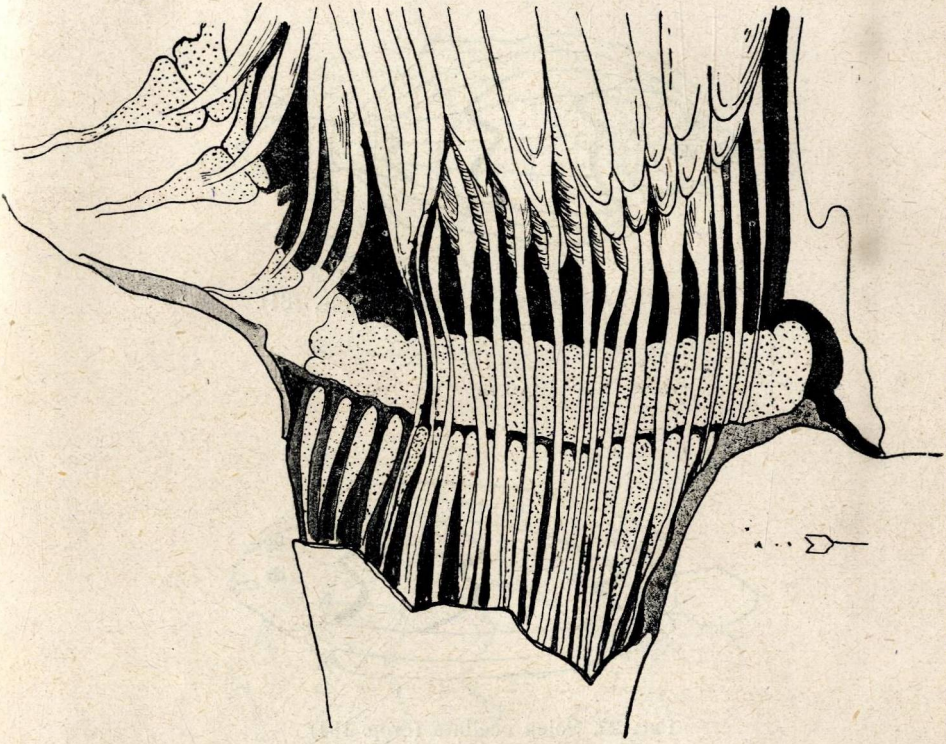


Рис. 19. Подрібний перехід м'язів в тужні у *Orthogoriscus mola* (точковані місця представляють хрящі (стор. 181)).

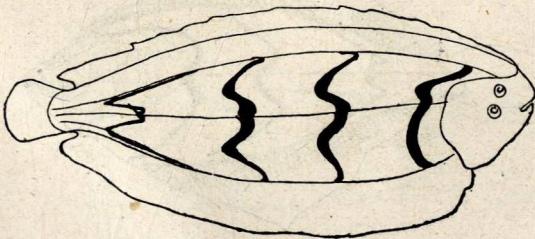


Рис. 20. *Solea lascaris* (стор. 184).

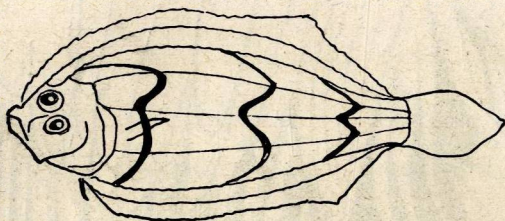


Рис. 21. *Arnoglossus Grohmanii* (стр. 184).

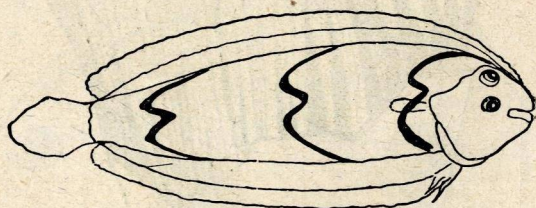


Рис. 22. *Solea ocellata* (стр. 184).

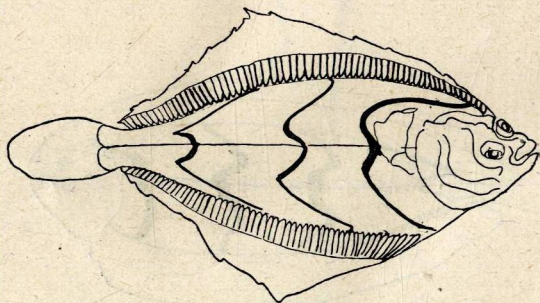


Рис. 23. *Platessa vulgaris* (стр. 185).

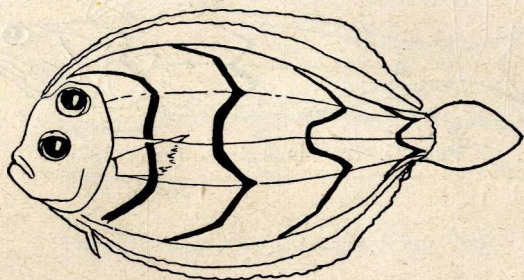


Рис. 24. *Rhomboidychthys podas* (стр. 185).

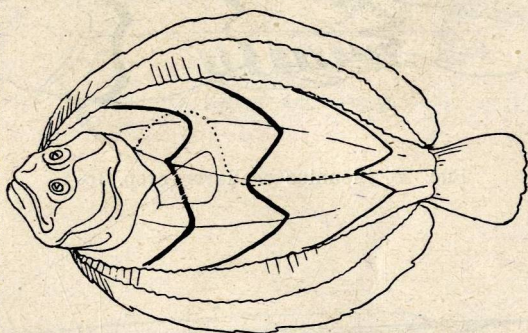


Рис. 25. *Rhombus rhombus* (стр. 185).

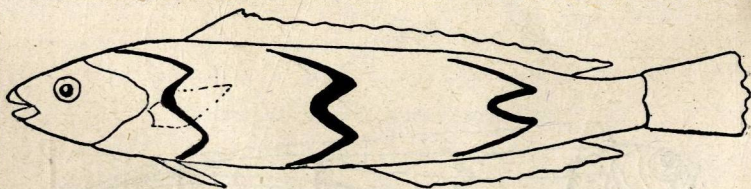


Рис. 26. *Jullus vulgaris* (стр. 187).

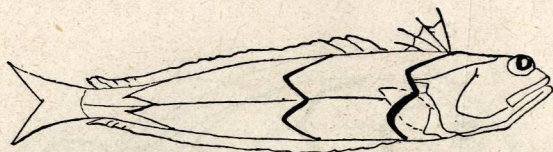


Рис. 27. *Trachinus draco* (стр. 187).

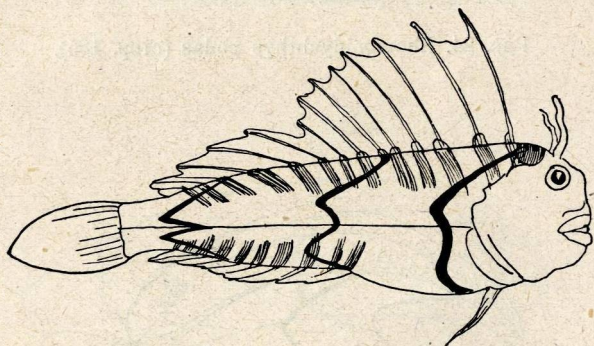


Рис. 28. *Blennius ocellaris* (стр. 187).

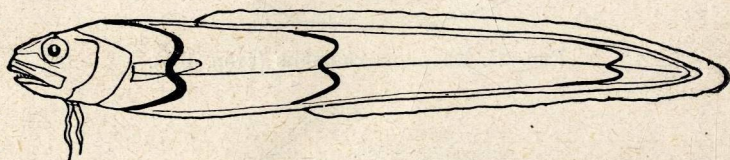


Рис. 29. *Ophidium barbatum* (стр. 188).

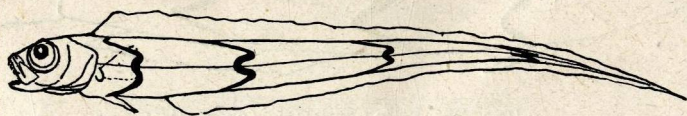


Рис. 30. *Serola rubescens* (стр. 188).

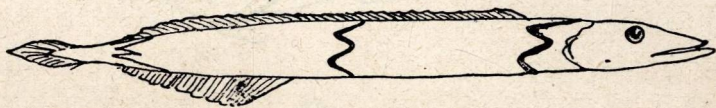


Рис. 31. *Ammodites tobianus* (стр. 189).

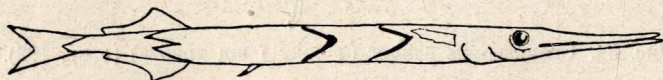


Рис. 32. *Belone acus* (стр. 189).

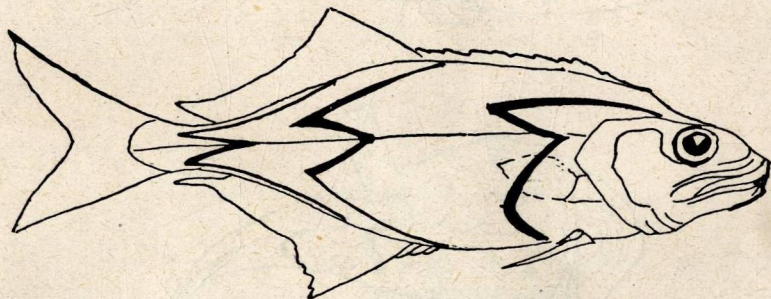


Рис. 33. *Lichia amia* (стр. 190).

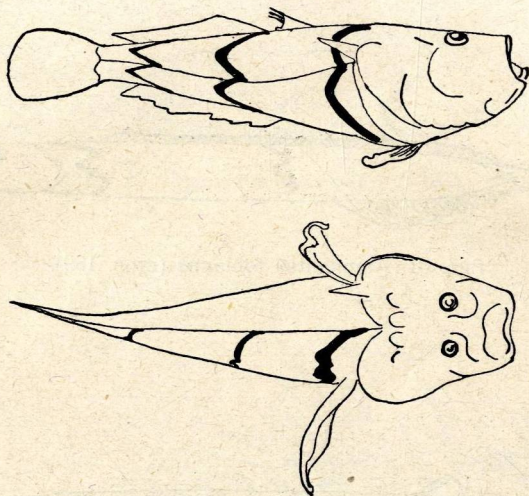


Рис. 34. *Uranoscorpus scaber* (з боку і від хребта) (стор. 192).

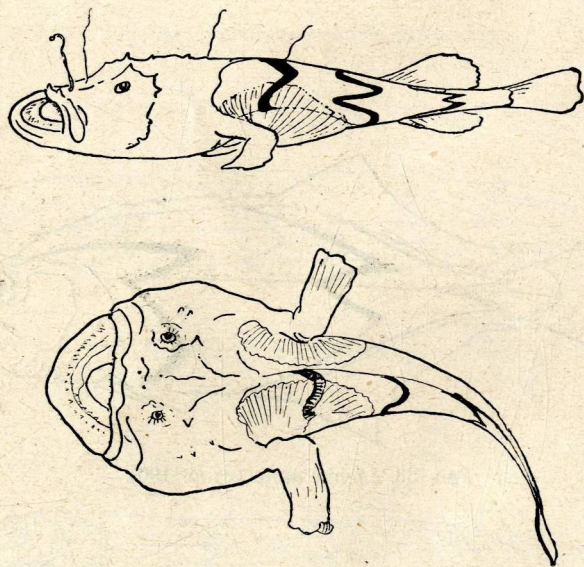
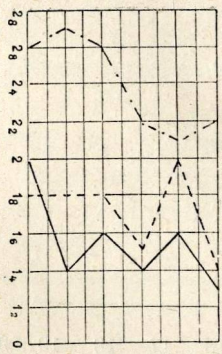


Рис. 35. *Lophius piscatorius* (з боку і від хребта) (стор. 192).

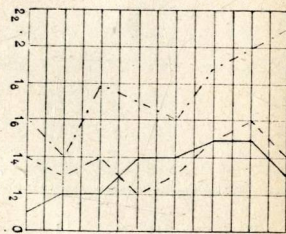
Табл. II.

Взаємовідношення складнання міотомів і степені спеціалізації в різних типах пристосування.



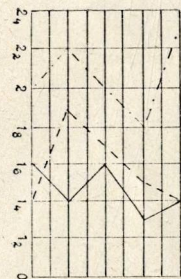
Cerola  
Orhidium  
Blamius  
Atheria  
Trachinus  
Julius

Теніформні



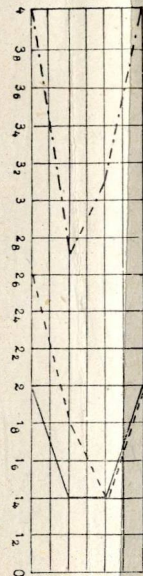
Arogon  
Oblatta  
Helases  
Sargus  
Zeus  
Centiscus  
Capros  
Ballistes

Компресіформні



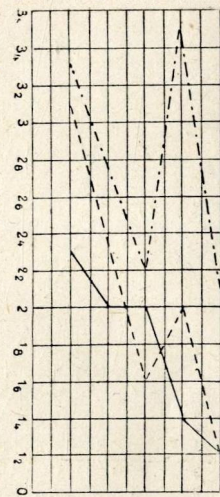
Rhombus  
Platessa  
Solea ocellata  
Solea laskir  
Amoglossus

Компресіформні асиметричні



Belone  
Esox  
Trachinus  
Lichia

Сагітіформні

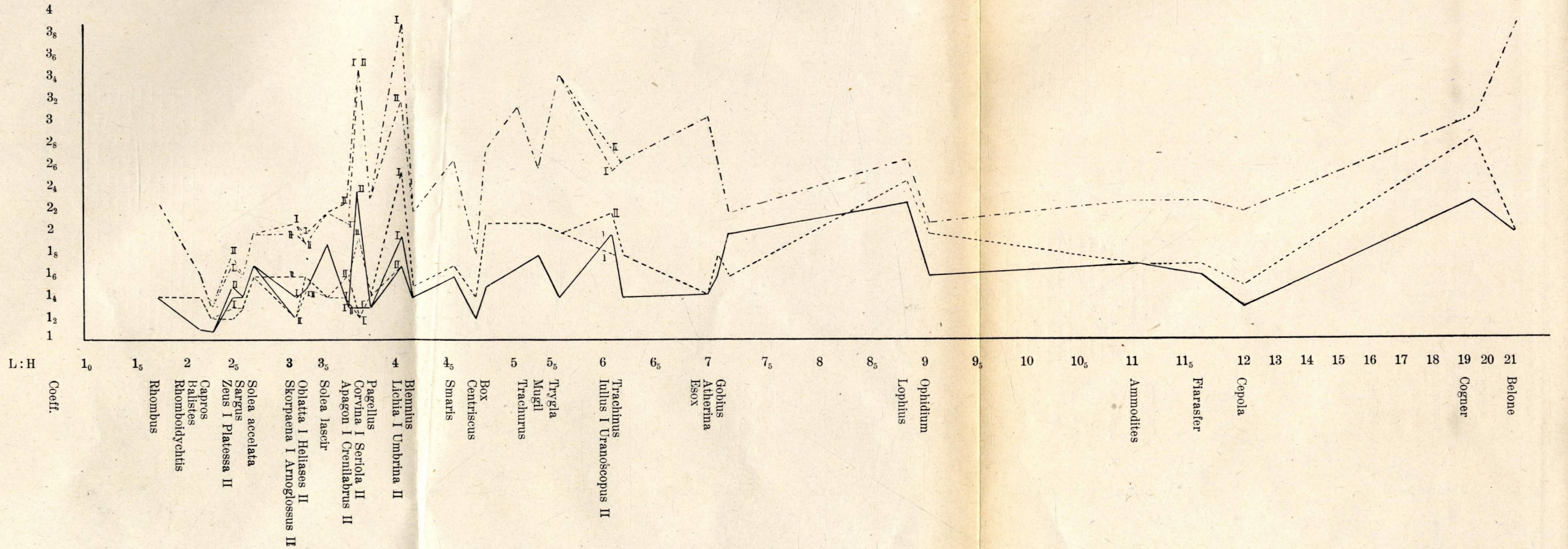


Scorpaena  
Tugla  
Gobius  
Uranoscopus  
Lorhinus

Депресіформні

Табл. III.

Взаємовідношення довжини тіла риби (L:H) і коефіцієнтів (Соефф) складкування міотомів.



## „Sur quelques critères concernant l'existence des dérivées d'une fonction d'une variable réelle“.

Dans son article „Sur la dérivée seconde généralisée de Riemann-Schwarz“ (Comptes rendus du 4-me Congrès des Mathématiciens Scandinaves, 1920) Prof. Dr. Bendixson a démontré un théorème, qui donne un critère de l'existence de la dérivée et dont la généralisation aux dérivées d'ordre supérieur peut présenter, ce semble, un certain intérêt, vu les conséquences et les différentes applications qui en découlent.

A cette question qui a été jadis l'objet des savantes recherches de Prof. Dr. P. Montel<sup>1)</sup> ont été consacrées aussi ce dernier temps les importants articles de Prof. Dr. M. Krawtchouk<sup>2)</sup> et l'un d'eux a paru récemment sur les pages de ce journal. Tout dernièrement le problème dont il s'agit a été traité avec une grande généralité dans un travail<sup>3)</sup> étendu soutenu par M. Marchaud comme thèse de doctorat devant la Faculté des Sciences de Paris.

Ce que précède prouve déjà l'intérêt du sujet qui, vu son ampleur, est loin d'être épuisé.

L'objet de cette note est de présenter quelques remarques relatives au sujet considéré et faites au cours du séminaire mathématique de Prof. Dr. N. Kryloff (Kiev).

La démonstration du § 1. appartient à N. Kryloff, celle du § 2. à N. Bogoliouboff.

Le § 3 contient un théorème qui a paru aux auteurs pas depourvu de tout l'intérêt.

---

<sup>1)</sup> Montel. Notice sur ses travaux. Paris 1920.

<sup>2)</sup> t. XXVI. V. aussi M. Кравчук. До теорії функцій дійсного змінного. Київ 1926.

<sup>3)</sup> M. Marchand. Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. Paris. G. Villars 1927.

§ 1. Théorème. Si la  $(k+1)$  différence divisée d'une fonction  $y(x)$  est uniformément bornée, c. à d. si

$$\left| \frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}} \right| \leq \lambda$$

alors  $y(x)$  possède la  $k$ -me dérivée, vérifiant la condition de Lipschitz.

Ce théorème connu encore à M. Montel et à M. Brouwer et généralisant celui de M. Bendixson peut être démontré en peu des mots de la manière que voici.

Soit

$$(1) \quad y_h(x) = \frac{1}{h^{k+1}} \int_x^{x+h} \int_x^{x+h} \dots \int_x^{x+h} y(x) dx^{k+1}, \text{ d'où } \frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}} = y_h^{(k+1)}(x);$$

alors d'après (1) on aura indépendamment de  $h$

$$|y_h^{(k)}(x'') - y_h^{(k)}(x')| \leq \lambda |x'' - x'|;$$

ceci prouve déjà que la suite des fonctions

$$(2) \quad y_{h_1}^{(k)}, \quad y_{h_2}^{(k)}, \quad y_{h_n}^{(k)}$$

est également continue. Pour démontrer que cette suite (2) est aussi uniformément bornée partons de l'identité

$$(3) \quad y_h(x) = \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x y_h^{(k+1)} dx^{k+1} + C_{j,h} + C_{i,h}x + \dots + C_{k,h}x^k;$$

Or  $y_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} y(x)$ , donc  $|y_h(x)| < M$ , par conséquent

$$(4) \quad |C_{j,h} + C_{i,h}x + \dots + C_{k,h}x^k| \leq M + \frac{\lambda}{(k+1)!};$$

d'autre part on a évidemment

$$C_{j,h} = \sum_{i=0}^x \alpha_{ji}^{(k)} P_{k,h} \left( \frac{i}{k} \right),$$

où  $\alpha_{ji}^{(k)}$  ne dépendent que de  $k$ , donc en vertu du (4) on s'assure que la suite (2) est uniformément bornée.

Cela étant, d'après le théorème bien connu d'Arzélà on peut extraire de (2) des suites uniformément convergentes  $[y_{h_\nu}]$  telles que  $y_{h_\nu}^{(k)} \rightarrow \varphi(x)$  pour  $\nu \rightarrow \infty$ .

En prenant donc l'identité

$$(5) \quad y_{h\nu}(x) = \int_0^x \int_0^{\bar{x}} y_{h\nu}^{(k)} d\bar{x}^k + C_{0, h\nu} + C_{1, h\nu} x + \dots + C_{k-1, h\nu} x^{k-1}$$

et en remarquant que  $y_{h\nu}(x) \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} y(x)$  on s'assure comme précédemment que  $P_{k-1, h\nu}(x) \xrightarrow[h\nu \rightarrow 0]{} P_{k-1}(x)$ , où  $P_{k-1}(x)$  est un polynôme du degré  $k-1$ . Le passage à la limite conduit donc à la relation

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{\bar{x}} \varphi(x) d\bar{x}^k + P_{k-1}(x)$$

d'où l'on voit entre autre que la fonction limite  $\varphi(x)$  est unique. De (5) on tire

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq \lambda |x'' - x'|,$$

ce que prouve le théorème dont la démonstration peut encore être simplifiée. Il va sans dire que le texte du théorème peut être énoncé comme il suit: „la condition nécessaire et suffisante pour que  $y(x)$  possède la  $k$ -me dérivée satisfaisant à la condition de Lipschitz est que la  $(k+1)$  différence divisée est uniformément bornée“<sup>1)</sup>.

§ 2. Pour obtenir les différentes généralisations du théorème précédent on peut procéder de bien de manières et entre autre on peut raisonner comme il suit, en supposant, ce qui est toujours possible, que  $y(x)$  possède la période égale à un dans  $(-\delta, 1+\delta)$ , où  $\delta > 0$ ; alors pour  $\Delta x$  suffisamment petit [ $(k+1)\Delta x \leq \delta$ ] les différences divisées  $\frac{\Delta^i y}{\Delta x^i}$ ,  $i = 1, 2 \dots k+1$  sont aussi périodiques.

D'autre part on a:

$$\sum_{i=0}^n y(x_i) \sin m\pi x_i \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{n}{k+1}}}{\lambda_m^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}} \sin m\pi x_i \Delta x;$$

(si  $(k+1)$  est pair)

$$\sum_{i=0}^n y(x_i) \sin m\pi x_i \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{n}{k+2}}}{\lambda_m^{\frac{k+2}{2}}} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \frac{\Delta \sin m\pi x_i}{\Delta x} \Delta x;$$

(si  $(k+1)$  est impair)

<sup>1)</sup> v. Krawtchouk. Zur Theorie der Funktionen der reellen Veränderlichen. p. 99.

$$\sum_{i=0}^n y(x_i) \cos m\pi x_i \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\bar{\lambda}_m^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}} \cos m\pi x_i \Delta x;$$

(si  $(k+1)$  est pair)

$$\sum_{i=0}^n y(x_i) \cos m\pi x_i \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{\bar{\lambda}_m^{\frac{k+2}{2}}} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \frac{\Delta \cos m\pi x_i}{\Delta x} \Delta x;$$

(si  $(k+1)$  est impair)

$$\text{où } \bar{\lambda}_m = 2 \left( \frac{1 - \cos m\pi \Delta}{\Delta^2} \right) = m^2 \pi^2 - \frac{m^4 \cdot \pi^4}{12} \Delta^2 +$$

alors

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=N}^{m=M} \left[ \bar{\lambda}_m^{k+1} \left\{ \left( \sum_{i=0}^n y(x_i) \sin m\pi x_i \Delta x \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^n y(x_i) \cos m\pi x_i \Delta x \right)^2 \right\} \right] = \\ = 2 \sum_{m=N}^{m=M} \left\{ \left( \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \sin m\pi x_i \Delta x \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \cos m\pi x_i \Delta x \right)^2 \right\} \leq \sum_{i=0}^n \left( \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}} \right)^2 \Delta x; \end{aligned}$$

(si  $(k+1)$  est pair)

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=N}^{m=M} \left[ \bar{\lambda}_m^{k+1} \left\{ \left( \sum_{i=0}^n y(x_i) \sin m\pi x_i \Delta x \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^n y(x_i) \cos m\pi x_i \Delta x \right)^2 \right\} \right] = \\ = 2 \sum_{m=N}^{m=M} \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \left\{ \left( \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}} \frac{\Delta \sin m\pi x_i}{\Delta x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x} \frac{\Delta \cos m\pi x_i}{\Delta x} \Delta x \right)^2 \right\} \leq \sum_{i=0}^n \left( \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}} \right)^2 \Delta x \end{aligned}$$

(si  $(k+1)$  est impair)

où  $N$  et  $M$  sont deux nombres entiers positifs. D'ici pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $M$  et  $N$  étant fixés, on tire

$$2 \sum_{m=N}^{m=M} [m^2 \pi^2]^{k+1} \left\{ \left( \int_0^1 y(x) \sin m\pi x dx \right)^2 + \left( \int_0^1 y(x) \cos m\pi x dx \right)^2 \right\} \leq \lambda^2,$$

si l'on suppose qu'indépendamment de  $\Delta$  on a

$$\sum_{i=0}^n \left( \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta^{k+1} x} \right)^2 \Delta x \leq \lambda^2;$$

par conséquent la série

$$2 \sum_1^{\infty} (m^2 \pi^2)^{k+1} \left\{ \left( \int_0^1 y(x) \sin m\pi x dx \right)^2 + \left( \int_0^1 y(x) \cos m\pi x dx \right)^2 \right\}$$

est convergente. Donc d'après le théorème bien connu de Riesz-Fischer il existe presque partout dans  $(0,1)$  une fonction  $\varphi(x)$  de carré sommable, dont les coefficients de Fourier sont:

$$\sqrt{2} (-1)^{\frac{k+1}{2}} (m\pi)^{k+1} \int_0^1 y(x) \sin m\pi x dx,$$

$$\sqrt{2} (-1)^{\frac{k+1}{2}} (m\pi)^{k+1} \int_0^1 y(x) \cos m\pi x dx,$$

(si  $(k+1)$  est pair)

$$\sqrt{2} (-1)^{\frac{k}{2}} (m\pi)^{k+1} \int_0^1 y(x) \cos m\pi x dx;$$

$$-\sqrt{2} (-1)^{\frac{k}{2}} (m\pi)^{k+1} \int_0^1 y(x) \sin m\pi x dx,$$

(si  $(k+1)$  est impair).

Cela étant, soit  $F(x)$  l'intégrale du système différentiel

$$\frac{d^{k+1} F(x)}{dx^{k+1}} = \varphi(x); \quad F(0) = F(1); \quad F^{(i)}(0) = F^{(i)}(1), \quad i = 1, 2, \quad k$$

en intégrant par parties on s'assure que

$$\int_0^1 F(x) \sin m\pi x dx = \int_0^1 y(x) \sin m\pi x dx;$$

$$\int_0^1 F(x) \cos m\pi x dx = \int_0^1 y(x) \cos m\pi x dx;$$

donc en vertu de la fermeture des fonctions trigonométriques on a  $y(x) = F(x)$ , c. q. f. d.

Ceci prouve le théorème:

„La condition nécessaire est suffisante pour que  $y(x)$  possède  $(k+1)$ -me dérivée presque partout dans  $(0,1)$  est que

$$\sum_{i=0}^n \left( \frac{\Delta^{k+1}y(x_i)^2}{\Delta x^{k+1}} \right) \Delta x \leq \lambda^2$$

où  $\lambda^2 = \text{const.}$

§ 3. Pour conclure établissons le théorème suivant généralisant le resultat de M. P. Montel<sup>1)</sup>:

„Si

$$\left| \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right| < \omega(\Delta x)$$

où  $\omega(\delta)$  pour  $\delta \rightarrow 0$  est une fonction positive non croissante et telle que la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

est convergente, alors  $y(x)$  possède la première dérivée continue<sup>2)</sup>.

En effet, soit

$$F_h = \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

alors

$$F_h(x) - F_{\frac{h}{2}}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x + \frac{h}{2}) + y(x)}{h},$$

donc

$$\left| F_h(x) - F_{\frac{h}{2}}(x) \right| \leq 2\omega\left(\frac{h}{2}\right).$$

Envisageons la série

$$F_1(x) + \left( F_{\frac{1}{2}}(x) - F_1(x) \right) + \dots + \left( F_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x) - F_{\frac{1}{2^m}}(x) \right) +$$

où

$$\left| F_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x) - F_{\frac{1}{2^m}}(x) \right| < 2\omega\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right);$$

<sup>1)</sup> Notice sur les travaux scientifiques de M. Paul Montel. 1920 p. 15 lignes 34-36.

<sup>2)</sup> Comp. avec les résultats de M. Marchand. Thèse, pp. 43-60.

cette série, d'après l'hypothèse admise, converge absolument et uniformément vers une fonction continue  $\varphi(x)$ , c. à d.:

$$\frac{F_1}{2^m}(x) \rightarrow \varphi(x), \quad \text{pour } m \rightarrow \infty.$$

Or on a identiquement

$$y(x_i) = \sum_0^{i-1} \frac{F_1}{2^m}(x_i) \Delta x + y(0),$$

où

$$x_i = \frac{i}{2^m}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^m; \quad \Delta x = \frac{1}{2^m},$$

donc en passant à la limite on aura

$$y(x) = \int_0^x \varphi(x) dx + y(0),$$

d'où l'on tire  $\varphi(x) = y'(x)$ , ce que démontre le théorème.

D'ici découle comme cas particulier le théorème de M. Montel:

si  $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^{1+\alpha}}$  est bornée ( $0 < \alpha \leq 1$ ) on peut affirmer que la dérivée première existe partout.

Il est évident que le résultat de ce § se généralise immédiatement pour les différences d'ordre supérieur.

En explicitant la fonction  $\omega(\Delta x)$  de différentes façons on peut obtenir du théorème ci-dessus démontré bien de résultats assez curieux.

12. V. 1928.  
Kiew, Ukraine.

# О двійности в геометрії і фізиці.

## I. О двійности в геометрії.

Поняття двійности є запозичене з геометрії, де означає воно правильну зв'язь тверджень, яка увидатнюється у тім, що на основі деяких замін понять можна твердження двійковим способом взаємно підпорядкувати. Двійність може бути двояка, а саме — геометрична і метрична. Перша займається відношеннями положень в просторі, друга знов метрикою в просторі.

Для пізнання першої двійности вистарчить вказати на прості твердження звичайної геометрії простору, які взаємно з себе виходять через заміну понять:

Точка → площа,

площа → точка,

проста → проста.

Наприклад: Дві точки визначають одну просту, а саме їх лучну. Двійне твердження: Дві площі визначають одну просту, а саме їх грану пересічи.

Дві прості, які переходять через одну точку, лежать в тій самій площі. Двійне твердження: Дві прості, що лежать в одній площі, мають одну спільну точку.

В тих судах поняття простої має значіння інваріанта.

Для вияснення двійности в метричній розумінню можуть служити твердження сферичної тригонометрії і відповідні їм твердження гіперболічної геометрії. Як відомо, — з кожного твердження першої можна вивести твердження другої в сей спосіб, що дійсну вартість луча кулі  $r$  заступаємо уявною вартістю  $ir$ , або що на одно виходить, коли поміняємо звичайні кутові функції кватів  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{r}$ ,  $\frac{c}{r}$  з гіперболічними функціями тих кватів.

І так: Твердженню достав сферичної тригонометрії:

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha \quad (1)$$

відповідає в геометрії гіперболічної площі взір:

$$ch \frac{a}{r} = ch \frac{b}{r} ch \frac{c}{r} - sh \frac{b}{r} sh \frac{c}{r} \cos \alpha; \quad (1a)$$

взірцеви на поверхню сферичного трикутника:

$$p = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \quad (2)$$

відповідає в гіперболічній геометрії взір на поверхню трикутника:

$$p = r^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \quad (2a)$$

Уклад замін понять, який ту промочує перехід з одної групи взорів до другої, є ось такий:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow ir \\ \cos \frac{a}{r} &\rightarrow ch \frac{a}{r}, & \cos \frac{b}{r} &\rightarrow ch \frac{b}{r}, & \cos \frac{c}{r} &\rightarrow ch \frac{c}{r}, \\ \sin \frac{a}{r} &\rightarrow -ish \frac{a}{r}, & \sin \frac{b}{r} &\rightarrow -ish \frac{b}{r}, & \sin \frac{c}{r} &\rightarrow -ish \frac{c}{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Наведені вище приміри вказують, яку науково-теоретичну вартість має основа двійности. Вона передовсім упрощує галузь науки в сей спосіб, що розділює загал тверджень на дві великі групи, собі взаємно протиставлені. Лучником, що посередничить між обома групами, є підпорядкування понять немов в роді якогось словника так, що знання понять одної групи потягає за собою пізнання другої, о скільки стоять до розпорядимости поняття, які даються взаємно підпорядковувати. Тому основа двійности є дійсно помічним середником, що веде до об'єднання думання; можна її отже уважати логічно-економічною основою.

Хосей основи двійности виступає тим нагляднійше, чим ширший є обсяг судів, до яких її стосується. В наведених вище випадках основа двійности була лучником між судами одної і тої самої дисципліни — геометрії. Питання і висліди новішої теоретичної фізики виказують, що основа двійности лучить також дві різні дисципліни, а саме фізику і геометрію.

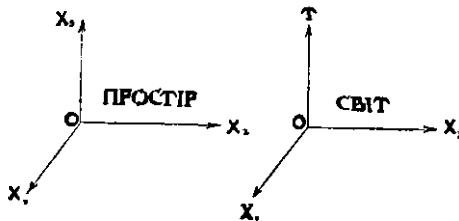
## II. О двійности в геометрії і фізиці.

Праці Германа Мінковського показали нам дорогу, якою можна перейти з області фізикальних явищ в обсяг геометрії. А сею дорогою є чотиророзмірна ріжноманітність, утворена з трирозмірного простору і однорозмірного часу. Нагоду до сього кроку дала Мінковському електродинаміка тіл в русі, з якої опісля повсталала спеціальна теорія релятивности А. Айнштайна. Остання, спираючись на класичній основі релятивности і на постулаті постійности скорости світла, дозволила відтворити „світ“ на чотиророзмірній ріжноманітності в евклідовій метриці. Ту по раз перший відкрито двійність між фізикальними і геометричними теоремами. Так відкрита двійність найшла згодом поширення і поглиблення, коли Айнштайн розтягнув постулат рівноправности для опису законів природи на всі уклади віднесення, які можуть довільно порушатися відносно себе. А зробив він це в своїй загальній теорії релятивности, яка є рівночасно теорією гравітації. Справа двійности між фізикальними а геометричними теоремами, яка виринула в спеціальній теорії релятивности, виступила в загальній теорії релятивности ще яркйше. Розуміється, що не можна ту уживати метрики Евкліда; треба було закинути евклідову геометрію, а заступити її ріманівською геометрією. В загальній теорії релятивности маємо сю велику синтезу геометрії і фізики, яка представляє може найбільший крок вперед на дорозі до одноцільного пізнання природи. А при тій синтезі приходиться до значіння в цілій повні економічний характер основи двійности.

### А. Евклідова геометрія а світ спеціальної теорії релятивности.

Трирозмірний простір є предметом евклідової геометрії. Кожда точка такого простору є все визначена трома числами, які її підпорядковуємо в обранім укладі віднесення; сі три числа називаємо сорядними простору. Фізикальні явища відбуваються в просторі і часі, тому до опису якоїсь події (події точкової) треба вже чотирох чисел, а саме: трох співрядних простору і співрядної часу. З тої причини говоримо, що загал всякого фізикального явища становить чотиророзмірну ріжноманітність, яку називаємо „світом“. Співрядні простору і співрядна часу творять разом „співрядні світа“.

Коли хочемо протиставити собі простір і світ, то покажуться як конечне в стиснути бодай одну простірну співрядну світа. Тоді світ буде складатися з дворозмірного простору (площі) і часу, так що відтворення його на трирозмірнім евклідовім просторі буде можливе. В таким разі можемо звичайному простірному прямокутному укладові віднесення  $(x_1, x_2, x_3)$  протиставити формально такий самий уклад, який, постронний з двох співрядних простору  $(x_1, x_2)$  і співрядної часу  $t$ , представлятиме наш трирозмірний світ (Рис. 1).



(Рис. 1.)

Коли в укладі сорядних світа поведемо рівнобіжний переріз до площі  $(x_1, x_2)$  в якімсь означенім відступі, т. зн. для якогось означеного часу  $t$ , тоді поведена площа відтворює всі простірні відношення в хвилі  $t$ . Кожний такий переріз рівнобіжний до площі  $(x_1, x_2)$  подає відношення в просторі все в иншім часі  $t$ ; творить він збір рівночасових відношень в просторі. Такі плоскі перерізи в густо стисненім слідуванню по собі, або инакше площу рівнобіжну до площі  $(x_1, x_2)$ , що порушається здовж додатної осі часу, можемо обсервувати на екрані кожного кінематографу.

Своєрідна природа трирозмірного евклідового простору має свій характер в означенню міри. Його основне в теорема Пітагора:

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (4)$$

яка в таким виді означає квадрат віддалення точки  $(x_1, x_2, x_3)$  від початку укладу співрядних. Найважливіша істотна прикмета цього означення міри полягає у тому, що величина відступу  $d$  не залежить від добору укладу співрядних. Коли вберемо довільно другий прямокутний уклад співрядних  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  тоді:

$$d^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3. \quad (4a)$$

Говоримо отже, що пітагорейська сума квадратів, яку можемо уважати характеристичною, основною формою метричного евклідового простору, є інваріантом супроти пересунень і скручень укладу співврядних.

Питання, чи цього рода інваріантне означення міри існує у трирозмірнім світі, який що правда може бути відтворений на трирозмірнім просторі, однак в дійсности є від нього зовсім ріжний. Як аналогію до теорема Пітагора для трирозмірного світа з погляду спеціальної теорії релятивности маємо квадратеву форму:

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2, \quad (6)$$

де  $c$  означає скорість світла. Форма (6) є інваріантом кожної трансформації між двома укладами віднесення, які порушаються з огляду на себе рівномірно і простолінійно. Тому величину  $s$  можемо назвати „просторо-часовим відступом“ світової точки  $(x_1, x_2, t)$  від початку укладу співврядних  $O$ .

Підпорядковуючи отже кожній точці світа означене, від укладу співврядних незалежне число  $s$ , т. зн. її просторо-часовий відступ від початку укладу сорядних  $O$ , робимо те саме, що зробив у трирозмірнім евклідовім просторі Пітагорас, будуючи свою теорему. В сей спосіб творимо в світі метрику незалежну від укладу віднесення, а в ній уґрунтовуємо геометрію явищ природи. В творенню цюї геометрії нема ніякої довільности, бо дорогу до неї показали строгі досліди фактів природи.

Питома прикмета цього нового уняття природи світа полягає в тім, що ним вводимо фізику в область геометрії; тим самим промощуємо дорогу між обома дісциплінами, яка веде з геометричного простору в світ явищ природи і навпаки зі світа до простору; а вираженням сього є субституція:

$$x_3^2 = -c^2 t^2, \text{ або: } x_3 = +ict, \quad (7)$$

яка перетворює основну метричну форму світа:

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2$$

на основну метричну форму трирозмірного евклідового простору:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Субституція (7) лучить обсяг геометрії з обсягом фізики і навпаки. Показує вона, що хотяй час  $t$  як такий є в істоті чужий для змінних простору, однак уявна вели-

чина  $ict$  має характер співрядної простору, подібно як  $x_1$  і  $x_2$ .

Субституція (7) веде до взаємної відповідності на переміну геометричних і фізикальних теорем та протиставить двійно просторови — світ. Завдяки їй можна отримати з чисто геометричних зв'язків фізикальні і навпаки кожна фізикальна правильність мусить відбиватися в такій же геометричній. Існування двійності фізики і геометрії унаглядняють нижше подані її приміри.

*а) Евклідова площа  $(x_1, x_2)$  — дворовмірний світ  $(x_1, t)$ .*

Ограничуємось поки що до таких фізикальних явищ, які відбуваються тільки в однім вимірі, а передовсім в одній простій. Усуваємо отже ще одну співрядну ( $x_2$ ), так, що світ зводимо до дворовмірного твору  $(x_1, t)$  і можемо його відтворити на плоскім укладі віднесення  $(x_1, x_2)$ . Фундаментальна метрична форма цього світа буде:

$$x_1^2 - c^2 t^2, \quad (7)$$

яка через субституцію:

$$x_2 = \pm ict \quad (8)$$

переходить в:

$$x_1^2 + x_2^2, \quad (9)$$

т. зн. в фундаментальну метричну форму евклідової площі  $(x_1, x_2)$ . Таким способом буде можна висловлювати твердженнями плоскої геометрії — суди о фізикальних явищах, які відбуваються в одній простій.

#### 1. Проста — рівномірний простолінійний рух.

Евклідову просту в прямокутнім укладі співрядних  $(x_1, x_2)$  (рис. 2) виражуємо рівнянням:

$$x_1 = x_2 \operatorname{tg} \alpha + b. \quad (10)$$

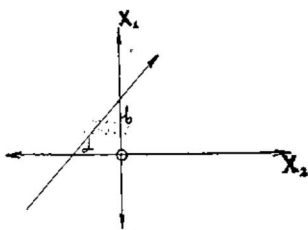
Стосуючи субституцію

$$x_2 = \pm ict$$

до рівняння простої, дістанемо в мові фізики:

$$x_1 = \pm ict \operatorname{tg} \alpha + b. \quad (11)$$

Дістали ми отже лінійну функцію часу  $t$ , яка визначає рівномірний рух, в данім випадку на співрядній  $X_1$ . Співчинник



(Рис. 2.)

при  $t$  представляє швидкість руху  $v$ . Таким способом дістаємо фізикальне значіння для геометричного поняття кута, а радше для його тригонометричної тангенти, помноженої уявною одиницею. Отже:

$$\text{або: } \left. \begin{aligned} v &= i c \operatorname{tga} \\ \operatorname{tga} &= \frac{v}{i c} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Підставивши останню вартість для  $\operatorname{tga}$  у взорі (12), тоді дістанемо просту дворозмірного світа  $(x_1, t)$ :

$$x_1 = \pm v t + b, \quad (12 \text{ a})$$

яка визначає рівномірний рух точки оживленої швидкістю  $v$  в світі  $(x_1, t)$ , де  $b$  означає відступ точки в часі  $t = 0$  від початку  $O$  укладу віднесення. Подвійний знак при  $v$  говорить, що рух точки може відбуватися або в додатнім або у від'ємнім напрямі осі  $X_1$ . Задержавши отже подвійний знак при субституції:  $x_2 = \pm i c t$  бачимо, що кожній евклідовій простій відповідають у фізиці два рівномірні рухи з однаковою швидкістю  $v$ , але в протилежних напрямках на осі  $X_1$ ; при тім можемо обмежити для  $\alpha$  інтервал:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Допустім натомість також від'ємні вартості для  $\alpha$ , тоді для повного опису вистарчить брати:

$$x_2 = + i c t \quad (14)$$

З того виходить, що кожній простій відповідає тільки один рівномірний рух на осі  $X_1$ , а всім простим з додатним нахиланням  $\alpha$  відповідають рухи з додатними швидкостями  $v$  в напрямі додатної осі  $X_1$ .

Завважмо дві прості з нахиланнями  $\alpha'$  і  $\alpha''$ , то на основі (13) і (14) представляють вони два рівномірні простолінійні рухи зі швидкостями  $v'$  і  $v''$ , а саме:

$$v' = i c \operatorname{tga}', \quad v'' = i c \operatorname{tga}'', \quad (15)$$

з чого слідує:

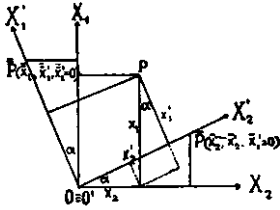
$$v' : v'' = \operatorname{tga}' : \operatorname{tga}'' \quad (15 \text{ a})$$

Швидкості рухів є пропорційні до кутів нахилання.

## 2. Скрут укладу сорадних — трансформація Лоренца.

Возмім тепер під увагу скрут укладу співрядних околу його початку  $O$ . Най  $\alpha$  означає кут, о який скрутилася вісь  $X_2$  в додатнім змислі.

Дістаємо отже знані взори (рис. 3):



(Рис. 3.)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\ x_2' &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Положимо:

$$x_2 = ict, \quad x_2' = ict',$$

і:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{v}{ic} = \frac{\beta}{i},$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ , та визначимо:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\beta}{i\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (17)$$

то підставивши ці вираження в рівняння (16), дістанемо:

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ict' = \frac{-i\beta x_1 + ict}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

або:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (18)$$

т. зв. трансформаційні взори Льюренца.

Спираючись на висновках попереднього уступу, пізнаємо зараз значіння останніх трансформаційних взорів. Викручена о кут  $\alpha$  від осі  $X_2$  — вісь  $X_2'$ , представляє в фізикальному значінню рівномірний і простолінійний рух обсерватора зі швидкістю  $v$ ; він робить свої обсервації в укладі віднесення  $(x_1', t)$ . Трансформаційні взори промощують перехід від подуманого укладу віднесення в спочинку  $(x_1, t)$  до укладу, що порушається з релятивною швидкістю  $v$ .

Звернути ту треба увагу ще на слідуючі обставини:

1) Трансформаційні взори (18) мають дійсну вартість під умовою, що:

$$\beta \leq 1, \quad \text{або: } v < c, \quad (19)$$

т. зв. швидкість світла  $c$  є в спеціальній теорії релятивності нескінченно великою швидкістю; від неї немає більшої швидкості.

2) Для точки  $\bar{P}$  на осі  $X_1'$  (рис. 3), яку в рухомім укладі визначає в хвилі  $t' = 0$  ( $x_2' = 0$ ) відтинок  $O'\bar{P} = \bar{x}_1'$  умовленої міри, заходить реляція:

$$\bar{x}_1' = \frac{\bar{x}_1}{\cos \alpha} = \bar{x}_1 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (20)$$

Правда, що  $\bar{x}_1$  має таку саму довготу, що  $\bar{x}_1'$ , однак беручи річ зі становиська спочинкового укладу в хвилі  $t = 0$  ( $x_2 = 0$ ), тоді рівняння (20) говорить, що довгота рухомої міри скоротилася у віднесенню до спочинкової довготи у відношенню  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ ; а це т. зв. контракція Льюренца.

3) Для точки  $\bar{P}$  на осі  $X_2'$  (рис. 3), в руховім укладі значує фізикально годинник, установлений в початку укладу ( $x_1' = 0$ ), якийсь інтервал часу  $t'$  — мірений від хвилі коінциденції обох укладів. Співрядня часу рухомого укладу  $\bar{t}$ :

$$\bar{x}_2' = \frac{\bar{x}_2}{\cos \alpha} = \bar{x}_2 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (21)$$

або в мові фізики:

$$\bar{t}' = \bar{t} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (21 \text{ а})$$

А що інтервали  $\bar{t}$  і  $\bar{t}'$ , мірені годинником наставленим в початку спочинкового укладу ( $x_1 = 0$ ) є рівні, тому заключаємо з взору (21 а), що в наслідок вірномірного і простолінійного руху укладу зі швидкістю  $v$ , хід годинника опізнюється в такій мірі, в якій скорочуються міри довготи.

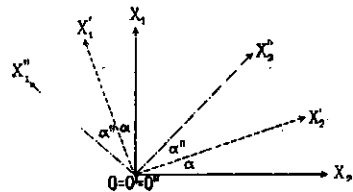
### 3. Теорема додавання функції тангентів — теорема додавання швидкостей.

Возмім під увагу три прямокутні уклади співрядних, викручені відносно себе около спільного початку  $O = O' = O''$  (рис. 4). Теорема додавання функції тангентів:

$$tg(\alpha + \alpha') = \frac{tg \alpha + tg \alpha'}{1 - tg \alpha tg \alpha'} \quad (22)$$

позволяє обчислити тангенту кута цілого скруту безпосередно з тангентів кутів подинних скрутів.

По мысли взору (13) маємо:



(Рис. 4.)

$$tg \alpha = \frac{v_1}{ic}, \quad tg \alpha' = \frac{v_{21}}{ic}, \quad tg(\alpha + \alpha') = \frac{v_2}{ic}, \quad (23)$$

де означають:  $v_1$ ,  $v_2$  скорости укладів  $(x_1', t')$ ,  $(x_1'', t'')$  у віднесенню до укладу  $(x_1, t)$ , а  $v_{21}$  скорість укладу  $(x_1'', t'')$  у віднесенню до укладу  $(x_1', t')$ . З (22) і (23) дістаємо:

$$v_2 = \frac{v_1 + v_{21}}{1 + \frac{v_1 v_{21}}{c^2}}; \quad (24)$$

а з того дальше дістаємо:

$$v_{21} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (24 \text{ а})$$

Є це теорема додавання скоростей спеціальної теорії релятивності.

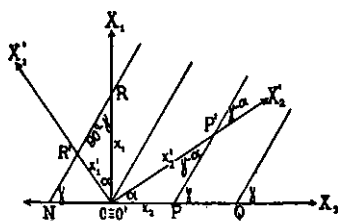
Коли підставимо в (24)  $v_1 = c$ , одержимо дуже дивний, вислід, а саме:

$$v_2 = \frac{c + v_{21}}{1 + \frac{v_{21}}{c}} = c. \quad (25)$$

Сей вислід дістали ми в попереднім уступі з льоренцової трансформації, а саме, що по думці спеціальної теорії релятивності, ніяка скорість не може перевищити скорости світла.

#### 4. Сінусова теорема — ефект Допплера.

Зауважмо прямокутні уклади співрядних  $(X_1, X_2)$  і  $(X_1', X_2')$  зі спільним початком  $O = O'$ ; осі другого з них творають з вісями першого укладу кут  $\alpha$ .



(Рис. 5.)

Поведім дальше з початку укладів  $O$  і в точках  $P, Q, N$  рівновіддалені прості рівнобіжні, наклонені до  $X_2$  під кутом  $\gamma$  (рис. 5).

З трикутника  $OPP'$  маємо зв'язь:

$$\frac{x_2}{x_2'} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma},$$

або:

$$\frac{x_2}{x_2'} = \cos \alpha \left(1 - \frac{tg \alpha}{tg \gamma}\right). \quad (26)$$

Підставивши :

$$\operatorname{tga} = \frac{v}{ic}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{w}{ic}, \quad (27)$$

дістаємо при застосуванні (14) і (17) двійне твердження фізики :

$$\frac{t}{t'} = \frac{1 - \frac{v}{w}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (28)$$

якого значіння заналізуємо.

Представмо собі якесь періодичне явище, хай би це був якийсь тяг филь, то обсерватор в початку укладу  $O(x_1, t)$  запримітить, що цей самий стан буде знов повертати по упливі якогось відступу часу. Сей відступ часу  $T$  буде наворотом дрганя.

Глядач знов в початку рухомого укладу  $(x_1', t')$  визначить инший наворот дрганя  $T'$ .

Приймім, що скорість розходження філі в нерухомім укладі є  $w$ , то геометричний образ світової лінії наворотного стану представляє проста  $P P'$  наклонена під кутом  $\gamma$  до осі  $X_2$ , а відтинок  $OP$  на осі  $X_2$  є геометричним образом навороту дрганя  $T$ . Ця світова лінія перетинає геометричний образ світової лінії глядача рухомого укладу, отже вісь  $X_2'$ , в точці  $P'$ . Відтинок  $O' P' = x_2'$  є образом навороту дрганя  $T'$ , який визначає глядач рухомого укладу.

Спирячись на відношенню часів реляції (28), маємо :

$$\frac{T}{T'} = \frac{1 - \frac{v}{w}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (28a)$$

Завважмо дальше, що маємо до діла з філями світла, тоді :

$$w = c, \quad (29)$$

а в такім разі :

$$\frac{T}{T'} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (30)$$

що подає основу Допплера з погляду спеціальної теорії релятивності. Заступаючи навороти  $T$  і  $T'$  частотами дрганя  $\nu$  і  $\nu'$ , дістанемо :

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (31)$$

Коли в тім рівнянню занедаємо 2-ий степеь дроба  $\beta$ , тоді дістанемо:

$$\frac{v'}{v} = 1 - \frac{v}{c}, \quad (31 \text{ а})$$

зване виражіння на основу Допплера з клясичної оптики.

Кожда з рівнобіжних в рівних відступах (рис. 5), поведених до осі  $X_2$  під кутом  $\gamma$ , в Геометричним образом, як вище було згадане, світової лінії якогось означеного, все навертаючого стану руху; на примір можуть вони уявляти Геометричні образи світових ліній всіх хребтів філі. В такім випадку ці рівнобіжні в Геометричним образом тягу по собі наступаючих филь. Відтинки на осі  $X_2$ :

$$OP = ON = PQ = \quad = x_2$$

дають Геометричний образ навороту дрганья  $T$ .

Ця громада рівновіддалених рівнобіжних відтинає на осі  $X_1$  і до неї рівнобіжних відтинки між собою рівні, величини  $OR = x_1$ , які треба уважати за Геометричні образи довготи філі  $\lambda$ , коли  $x_2$  в Геометричним образом навороту  $T$ .

Сей спосіб розумування примінений до рухомого (викрученого) укладу веде до висновку, що як  $O'P' = x_2'$  представляє Геометричний образ навороту дрганья  $T'$ , так відтинок  $O'R' = x_1'$  в Геометричним образом довготи філі  $\lambda'$  для глядача в рухомім укладі. В такім разі:

$$x_1 = \lambda, \quad x_1' = \lambda'. \quad (32)$$

Коли застосуємо до трикутника  $ORR'$  сінусове твердження, отримаємо:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma},$$

або:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma). \quad (33)$$

Коли до останнього рівняння введемо взори (17) і (27), дістанемо таку фізикальну звязь:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{1 - \frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left( \text{де } \beta = \frac{v}{c} \right). \quad (34)$$

або:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 - \frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (34 \text{ а})$$

Прийнявши знов:

$$w = c,$$

дістаємо:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c}} \quad (35)$$

Занедбуючи другий і вищий степені дроба  $\beta$ , дістаємо знов знаний взір класичної оптики:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 1 + \frac{v}{c}. \quad (36)$$

*в) Евклідовий простір  $(x_1, x_2, x_3)$  — трирозмірний світ  $(x_1, x_2, x_3, t)$ .*

Варта звернути увагу ще на одну зв'язь в геометрії, яка веде до явища відклонення світляного луча в наслідок релятивного руху глядача.

Підпорядкуймо в евклідовім просторі  $(x_1, x_2, x_3)$  співрядній  $X_2$  — вісь часу  $t$  трирозмірного світа  $(x_1, x_2, x_3, t)$ , тоді на основі субституції (14) маємо:

$$x_2 = ict.$$

Відношення площі  $(x_1, x_3)$  простору переносяться безпосередно на площу  $(x_1, x_3)$  світа, яка представляє поле фізикальних явищ; площі  $(x_1, x_2)$  і  $(x_3, x_2)$  задержують свою роль як в просторі  $(x_1, x_2, x_3)$ . З огляду на визначення осі  $X_2$  субституцією (14), має з тої причини наш евклідовий простір бігуновий характер.

Скрутимо далі уклад співврядних  $(x_1, x_2, x_3)$  (рис. 6.) о кут  $\alpha$  в додатнім напрямі около  $X_3$  як осі скруту; отримаємо уклад співврядних

$$(x_1', x_2', x_3'),$$

в яким:

$$x_3' \equiv x_3. \quad (37)$$

А далі поведім в площі  $(x_2, x_3)$  просту  $OP$  під кутом  $\gamma$  до осі  $X_2$ ; мет її на площу  $(x_1', x_3')$  в проста  $O'P'$  (рис. 6.), наклонена до осі  $X_3$  під кутом  $\delta$ .  
З рисунку 6. маємо:

$$x_2 = x_3 \operatorname{ctg} \gamma \quad (38)$$

і:

$$x_1' = x_2 \sin \alpha = x_3 \operatorname{tg} \delta, \quad (39)$$

з чого:

$$\operatorname{tg} \delta = \sin \alpha \operatorname{ctg} \gamma. \quad (40)$$

Для фізикальної інтерпретації положім як передше в (13):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{ic}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{w}{ic}, \quad (41)$$

тоді з огляду на (17) дістанемо:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{ic \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{ic}{w}$$

або:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{w \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (42)$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ .

В інтерпретації фізики скрут укладу співврядних  $(x_1, x_2, x_3)$  около  $X_3$  як осі о кут  $\alpha$  означає після (41) рівномірний поступний рух площі  $(x_1, x_3)$  в напрямі осі  $X_1$  з релятивною швидкістю  $v$ . Проста  $OP$  є знов геометричним образом світової лінії проміння світла в додатнім напрямі осі  $X_3$ , а кут її нахилу  $\gamma$  до осі  $X_2$  означає після (41) швидкість світла  $w$ , яка в порожнім просторі є:

$$w = c. \quad (43)$$

Така буде інтерпретація світляного явища глядача, що обсервує перебіг явища в початку укладу  $O$  у світі  $(x_1, x_3, t)$ .

Приймім, що в хвилі появи проміння світла початок рухомого укладу  $O'$  покривався з початком нерухомого укладу  $O$ . Глядач, що знаходиться в початку  $O'$  укладу рухомого заобсервує в світі  $(x_1', x_3', t)$  напрям проміння світла як мет його світової лінії на площу  $(x_1', x_3')$  в напрямі осі часу  $T'$ ; в це, як знаємо, проста  $O'P'$ ; вона визначує напрям світляного проміння, поміченого глядачем рухомого укладу. Напрям його замикає з напрямом проміння нерухомого укладу, т. зн. осею  $X_3$  кут  $\delta$ , який означуємо як кут аберації. Коли у взорі (42) застосуємо реляцію (43), дістанемо для кута аберації  $\delta$ :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (44)$$

або з огляду на (17):

$$\sin \delta = \beta, \quad (44 \text{ а})$$

де:  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Пропускаючи  $\beta^2$  як дуже малий дріб, дістанемо:

$$\operatorname{tg} \delta = \beta = \frac{v}{c}, \quad (45)$$

взір добре знаний з класичної оптики.

## В. Неевклідова геометрія а світ загальної теорії релятивності.

*Відзоровання світа матеріальної точки в спочинку на оборотовій поверхні.*

Зауважмо світ матеріальної нерухомої точки і обмежм його знов до двох розмірів; в таким разі маємо в нім до діла з однорозмірними явищами, отже з радіяльним рухом в поли ділання матеріальної точки. Для визначення міри сього дворозмірного світа не буде вже можна ужити метричної основної форми (8) евклідової геометрії, якою послуговується спеціальна теорія релятивності. Але в можливе відзоровувати такий дворозмірний світ на кривій поверхні в трирозмірнім евклідовім просторі. Тоді кождому закону фізики мусить відповідати твердження, яке належить до геометрії тої кривої по-

верхні. Тому необхідним показується, зазнайомитися з геометрією такої кривої поверхні, щоби послугуючись двійнуванням дійти до фізикальної правильности.

Вже Гавсс в своїй „теорії поверхні“ (Flächentheorie) опрацював зовсім загально геометрію на довільній кривій поверхні. В сей спосіб подав він основу метрики кривих поверхній, якої висловом є квадратна ріжничкова форма:

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2 g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2; \quad (46)$$

вона заступає пітагорейську теорему евклідової площі. Квадрат елемента лука  $ds$  є функцією  $dx_1$  і  $dx_2$  а також представляє місцеву функцію, о скільки співчинники  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  є функціями  $x_1$  і  $x_2$ .

Возьмій як примір оборотову поверхню (що в дальших уступах використаємо). Най  $\varrho$  означає радіяльну співрядну, змірену прямо до оборотової осі,  $z$  — співрядну в напрямі оборотової осі (вісь  $Z$ ), а  $\varphi$  — кут, який рахуємо від якогось означеного зероного полуденника. Тоді в загальній формі рівняння кривої полуденника виглядає:

$$z = f(\varrho), \quad (47)$$

а квадрат лука (46) приймає знаний вид:

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{df}{d\varrho} \right)^2 \right] d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2. \quad (48)$$

Вернім знов до питання поля матеріяльної точки. Стосуючи звичайні співрядні бігунові:  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  і час  $t$  для визначення квадрату лінійного елемента світа для масового осередка в спочинку, дістанемо по думці загальної теорії релятивности:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\psi^2) - c^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right) dt^2, \quad (49)$$

де  $\alpha$  означає промінь гравітаційного ділання поля; він є звязаний з масою  $m$  клясичної динаміки реляцівою:

$$\alpha = 2 \frac{km}{c^2} = 1.48 \cdot 10^{-28} m^2, \quad (50)$$

<sup>1)</sup> Н. Bauer: *Matemat. Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins* nebst u. s. w. 1922. S. 54. 62.

<sup>2)</sup> *Ibidem*, pp. 60.

де співчинник  $k = 6.68.10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ gr}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ , означає гравітаційну постійну, а  $c = 3.10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$ , швидкість світла.

Для явищ, які відбуваються тільки в радіальній напрямі, треба у рівнянні (49) положити:

$$d\vartheta = d\psi = 0,$$

тоді дістанемо:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2, \quad (49 \text{ a})$$

як визначення міри для дворовмірного світа масової точки.

Застосуємо далі трансформацію:

$$\varphi = i t, \quad (51)$$

аналогічну до трансформації (7) Мінковського, тоді (49 а) переходить в квадрат лінійного елемента кривої поверхні в тривимірному просторі Евкліда, а саме:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) d\varphi^2. \quad (52)$$

Згадану криву поверхню можна легко відобразити на оборотній поверхні особливого рода.

В такому випадку треба прийняти:

$$\varrho = c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}, \quad (53)$$

або:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \frac{\varrho^2}{c^2},$$

і утворити:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{\alpha c}{2 r^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

або:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{c^2}{2 \alpha \varrho} \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^2 \quad (54)$$

Підставивши одержані зв'язки (53) і (54) в (52), дістанемо (52) у виді подібним як (48), а саме:

$$ds^2 = \frac{4 \alpha^2 d\varrho^2}{c^2 \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4} + \varrho^2 d\varphi^2. \quad (55)$$

З порівняння (55) з (48) виходить різничкове рівняння для полуденникової кривої  $z = f(\varrho)$  таке:

$$1 + \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{4a^2}{c^2 \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4} = \frac{4r^4}{a^2 c^2}, \quad (56)$$

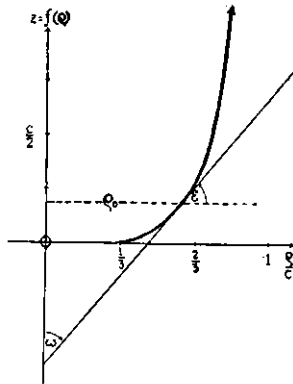
або:

$$\frac{df}{dt} = \pm \frac{\sqrt{4 \frac{a^2}{c^2} - \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4}}{\left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{4r^2 - a^2 c^2}}{ac}. \quad (56a)$$

Зі зв'язків (53) і (56a) слідує, що тільки в області

$$c \geq \varrho \geq c \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2a}{c}}} \quad (57)$$

полуденникова крива приймає дійсні значення. (Рис. 7.) представляє образ такої кривої для  $\frac{a}{c} = \frac{32}{81}$ .



(Рис. 7.)

## Приклади до двійності геометрії та фізики.

### 1. Геодетичні лінії на оборотній поверхні — радіальний рух в полі масової точки.

З теорії поверхней знаємо для геодетичних ліній оборотної поверхні різничкове рівняння<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Н. Вауер, І. с. рр. 17 і 18.

$$\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{e}{K} \sqrt{\frac{e^2 - K^2}{1 + \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2}}, \quad (58)$$

де  $K$  означає постійну інтегрування.

Означім луковий елемент полуденникової кривої  $ds_m$  і порівнаймо звязки (52) і (48), то виходить, що:

$$ds_m = d\varphi \sqrt{1 + \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}. \quad (59)$$

В такім разі звязь (58) можна написати у виді:

$$\frac{ds_m}{d\varphi} = \frac{e}{K} \sqrt{e^2 - K^2}. \quad (60)$$

При помочи взорів (51) і (53) переводимо рівняння для геодетичної лінії оборотової поверхні на мову фізики, а саме дістанемо:

$$\frac{ds_m}{dt} = \frac{ic}{K} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - K^2}. \quad (61)$$

Елемент  $ds_m$  означає також елемент дороги в радіальнім напрямі, отже відношення  $\frac{ds_m}{dt}$  представляє скорість руху  $v$  в радіальнім напрямі, якої виразом є:

$$v = -\frac{c}{K} \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[K^2 - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\right]}. \quad (62)$$

В нескінченнім віддаленню від масової точки, т. зн. для  $\lim v = \infty$  маємо:

$$v_\infty = -\frac{c}{K} \sqrt{K^2 - c^2}.$$

або:

$$K = -\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}}. \quad (63)$$

Підставивши так визначену відємну вартість для  $K$  у (62), отримаємо:

$$v = c \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}\right)\right]}, \quad (64)$$

або:

$$v = c \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{v_{\infty}^2}{c^2} - \frac{\alpha v_{\infty}^2}{r c^2}\right)}. \quad (64a)$$

Пропускаючи виличини, зложені з  $\frac{\alpha^2}{r^2}$  і здобутка  $\frac{\alpha}{r}$  і  $\frac{v_{\infty}^2}{c^2}$

як нескінченно малі, дістанемо з (64a) вартість для  $v$  в першій приближенню:

$$v = c \sqrt{\frac{\alpha}{r} + \frac{v_{\infty}^2}{c^2}} \quad (65)$$

Піднесім останнє вираження до квадрату і поділім на 2, дістанемо:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha c^2}{2r} = \frac{v_{\infty}^2}{2} = W \text{ (const)}, \quad (65a)$$

т. зн. вираження енергії класичної механіки; другий член (65a) представляє після (50):

$$- \frac{\alpha c^2}{2r} = K \frac{m}{r} = V, \quad (65)$$

т. є. гравітаційний потенціал Ньютона. В такім разі (65a) приймає вид:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_{\infty}^2}{2} = V. \quad (65b)$$

Визначім дальше гравітаційне прискорення  $\gamma$ . З огляду на (59) і (64a) маємо:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{ds_m}{dt} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \frac{d(v^2)}{dr} \end{aligned} \quad (67)$$

а дальше:

$$\gamma = - \frac{\alpha c^2}{2r^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{2\alpha}{r} - \frac{2v_{\infty}^2}{c^2} + \frac{2\alpha v_{\infty}^2}{r c^2}\right). \quad (68)$$

Абстрагуючи від знаку і стосуючи (50), дістанемо з останнього рівняння в першій приближенню нютонівську вартість прискорення тяготіння:

$$g = \frac{\alpha c^2}{2r^2} = k \frac{m}{r^2}. \quad (69)$$

## 2. Стіжок стичности на рівнобіжнику оборотової поверхні — однорodne поле тяготіння.

а) Sinus половини кута стіжка стичности — прискорення тяготіння Ньютона.

Зауважмо оборотовий стіжок, виставлений на рівнобіжнику оборотової поверхні  $z = f(\varrho)$ , якого промінь виводить:

$$\varrho_0 = c \sqrt{2 - \frac{\alpha}{r_0}}, \quad (70)$$

тоді для нього маємо:

$$\frac{df}{d\varrho} = \text{const.}$$

Означім даліше  $2\omega$  як кут осевого перерізу стіжка, тоді дістанемо зв'язь, яку бачимо на (рис. 7.), а саме:

$$\frac{df}{d\varrho} = \text{tg } \varepsilon = \text{tg } \omega; \quad (71)$$

з того знов дістанемо:

$$1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2 = 1 + \text{ctg}^2 \omega = \frac{1}{\sin^2 \omega}. \quad (71a)$$

Коли в рівнянню (56) напишемо  $r_0$  місто  $r$  [стосовно до (70)] і порівнаємо його з (71a), тоді отримаємо:

$$\frac{1}{\sin \omega} = \frac{2r_0^2}{\alpha c}$$

або:

$$\sin \omega = \frac{\alpha c}{2r_0^2}. \quad (72)$$

Порівнюючи знов (72) з (69), маємо:

$$g = c \sin \omega, \quad (73)$$

т. зв. sinus половини кута стіжка стичности, є пропорційний до прискорення тяготіння  $g$  Ньютона в одроднім полі.

б) Геодетичні лінії оборотового стіжка — свобідне падання.

Ріжничкове рівняння геодетичних ліній стичного стіжка виходить з взору (58) при застосуванню зв'язку (71a), отже:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho \sin \omega}{K} \sqrt{\varrho^2 - K}, \quad (74)$$

або:

$$\frac{K}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{K^2}{\rho^2}}} = \sin \omega d\varphi. \quad (74a)$$

По з'янтегруванню отримаємо:

$$(\varphi - \varphi_0) \sin \omega = \arccos \frac{K}{\rho}, \quad (75)$$

або:

$$\rho \cos [(\varphi - \varphi_0) \sin \omega] = K, \quad (75a)$$

де  $\varphi_0$  є постійною інтегрування. Коли заложимо, що для  $\varphi = \varphi_0$  приймає вартість  $\rho = \rho_0$ , то в такому разі:

$$K = \rho_0. \quad (76)$$

Рівняння (75a) приймає тоді вид:

$$\rho \cos [(\varphi - \varphi_0) \sin \omega] = \rho_0. \quad (77)$$

Коли до останнього рівняння введемо взір трансформаційний:

$$\varphi_0 = i t_0 \quad (78)$$

і застосуємо попередні взори (53), (70) і (73), тоді (77) напишемо у виді:

$$\sqrt{1 - \frac{2gr_0}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2gr_0^2}{c^2 r}} \cos \left[ i(t - t_0) \frac{g}{c} \right]. \quad (79)$$

Знаючи однак, що:

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

можемо (79) написати також у виді:

$$\sqrt{1 - \frac{2gr_0}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2gr_0^2}{c^2 r^2}} \left[ e^{\frac{g}{c}(t-t_0)} + e^{-\frac{g}{c}(t-t_0)} \right]. \quad (80)$$

Отримане рівняння визначує нам рух матеріальної точки в однороднім полі тяготіння з ньютонівським прискоренням з погляду загальної теорії релятивності є це релятивістичне представлення свобідного падання.  $r_0$  є ту відступом (і то дуже великим) вихідної точки руху від маси, що витворює поле; отже:

$$r_0 - r = s \ll r_0 \quad (81)$$

означає в першім приближенню дорогу, відбуту свобідним паданням.

В кінці звернім ще увагу на перехід до класичної фізики. Дістанемо се, коли  $\frac{g}{c}$  і  $\frac{s}{r_0}$  уважатимемо як малі величини першого ряду і обчислимо (80) з огляду на (81) в першій приближенню; тоді знайдемо:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{r_0 - s} \sim 1 + \frac{s}{r_0}. \quad (82)$$

Положимо далі для упрощення:

$$t_0 = 0, \quad (83)$$

тоді з (80) дістанемо:

$$1 - \frac{g r_0}{c^2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{g r_0}{c^2} \left( 1 + \frac{s}{r_0} \right) \right] \left( 2 + \frac{g^2}{c^2} t^2 \right),$$

або:

$$1 - \frac{g r_0}{c^2} = 1 - \frac{g r_0}{c^2} - \frac{g}{c^2} s + \frac{g^2}{2 c^2} t^2$$

та нарешті:

$$s = \frac{g}{2} t^2, \quad (84)$$

т. зн. знаний взір на дорогу свободного падання класичної механіки.

У Львові, в травні 1928 р.

## Похідна і когеренція абстрактної множини.

В теорії точкових множин означається деякі операції, на основі яких кожній множині  $A$  відповідають однозначно інші множини. Так н. пр. кожній множині  $A$  припорядковується її похідна  $A^d$ , її замкнення (fermeture, abgeschlossene Hülle)  $A^r$ , її обмеження (frontiere, Begrenzung)  $A^f$ , її беріг (bord, Rand)  $A^b$ , її середовину (l'interieur, das Innere der Menge)  $A^i$ , та її когеренцію  $A^k$ .

Крім сего досліджується там деякі особливі множини, що мають якісь особливі властивості, як н. пр. замкнені (fermé, abgeschlossen), розімкненні (ouvert, offen), густі (dense, dicht), берігові (ensemble frontiere, Randmengen), та ізольовані (isolé, isoliert) множини.

Тому, що оба роди наведених особливих множин є дуже важні в теорії точкових множин, давно вже досліджували учені їх основні властивості. При тому від часу появи дисертації проф. Fréchet вибирається одну із особливих припорядкованих множині  $A$  множин як основне поняття теорії, означається його істотні властивості при помочі кількох незалежних аксіомів, із сих аксіомів висновується інші властивості вибраного основного поняття, при його допомозі означається інші основні поняття і висновується їх властивості і так повстає теорія абстрактних множин, себто теорія множин, що не мають ніякої означеної якості, та про які знаємо лише се, що нам про одну якусь виконувану на них операцію каже основний уклад аксіомів.

Поняття граничної точки точкового поступу було основним поняттям в першій праці проф. Fréchet<sup>1)</sup>. Проф. Riesz<sup>2)</sup> прослі-

<sup>1)</sup> M. Fréchet: Thèse. Paris 1905.

<sup>2)</sup> F. Riesz: Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV, Congresso internazionali dei Matematici, Roma 1908.

джував поняття точки скупчення множини, а проф. Hausdorff<sup>1)</sup> поняття оточення точки. Проф. Куратовські<sup>2)</sup> вибрав поняття замкнення множини, а проф. Сєрпінські<sup>3)</sup> поняття похідної множини як основне поняття теорії абстрактних множин.

В IX томі журналу *Fundamenta mathematicae*<sup>4)</sup> прослідив я загальні прикмети наступних основних понять топології: „збір околических точок“ (l' exterieur), „збір середових точок“ (l' interieur), обмеження (la frontiere) і беріс (le bord). В журналі *Transactions of the American Mathematical Society* подав я недавно загальні властивості поняття когеренції.

В 1 § отсеї праці просліджую деякі загальні властивості поняття похідної множини. Сі властивості висновую з укладу чотирох аксіомів, які подав в згаданій вже праці проф. Куратовські<sup>5)</sup>.

В 2 § подаю властивості поняття когеренції і показую, як можна при помочі сего поняття означити інші основні поняття теорії абстрактних множин<sup>6)</sup>.

## § 1.

1. Означім поняття похідної  $A^d$  множини  $A$  наступними чотирма формулами:

$$I_a: (A + B)^d = A^d + B^d$$

$$II_a: C^d = C$$

$$III_a: O^d = O$$

$$IV_a: A^{dd} = A^d.$$

Літерою  $C$  зазначую простір, у якому є уміщені всі обговорювані множини, множину без елементів зазначую через  $O$ . Символ  $A^c$  значить доповнення множини  $A$ :  $A^c = C - A$ . Замість

<sup>1)</sup> F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* 1914.

<sup>2)</sup> C. Kuratowski: *Sur l'Operation  $\bar{A}$  d'Analysis Situs*. *Fundam. Math.* III.

<sup>3)</sup> W. Sierpiński: *La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits*. *Mathematische Annalen*, 97. 1926.

<sup>4)</sup> M. Zarycki: *Quelques notions fondamentales d'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique*. *Fund. Math.* IX.

<sup>5)</sup> M. Zarycki: *Allgemeine Eigenschaften der Cantorsche Kohärenzen*, *Transactions of the Americ. Mathem. Society*, 1928.

<sup>6)</sup> Більшу часту сїх властивостей найшов проф. Куратовські, але досі не оголосив їх друком.

<sup>7)</sup> Деякі висновки про когеренцію (без доказів) подав я в рефераті на I. польськїм математичнїм конгресі у Львові (1927). Протоколи сего конгресу ще не видруковані.

$(A^d)^d$  пишу  $A^{dd}$ . Символом  $A \subset B$  або  $A \rightarrow B$  означую, що множина  $A$  є частию множини  $B$ .

2. Тепер на основі  $I_d - IV_d$  докажу наступні теореми:

1<sub>d</sub>: коли  $A \subset B$ , то  $A^d \subset B^d$

2<sub>d</sub>:  $(AB)^d \subset A^d B^d$

3<sub>d</sub>:  $A^d B^{dc} \subset (A B^c)^d$

4<sub>d</sub>:  $A^{dc} \subset A^{cd}$

5<sub>d</sub>:  $A^{dcdcdcd} = A^{dcd}$ .

Докази теорем 1<sub>d</sub> — 5<sub>d</sub>:

1<sub>d</sub>: Коли  $A \subset B$ , то  $B^d = A^d + B^d$  (1<sub>d</sub>), отже  $A^d \subset B^d$ .

2<sub>d</sub>: З формул  $AB \subset A$  і  $AB \subset B$  виходить:  
 $(AB)^d \subset A^d$  і  $(AB)^d \subset B^d$  (1<sub>d</sub>), отже:  
 $(AB)^d \subset A^d B^d$

3<sub>d</sub>: Згідно з законами алгебричної логіки маємо:

$$A \subset AB^c + B, \text{ отже:}$$

$$A^d \subset (AB^c + B)^d = (AB^c)^d + B^d \quad (1_d, I_d).$$

Коли обі сторони останньої реляції помножимо через  $B^{dc}$ , дістанемо:

$$A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d B^{dc} + B^d B^{dc} = (AB^c) B^{dc} \subset (A B^c)^d.$$

4<sub>d</sub>: З ідентичности:  $A^{dc} = CA^{dc}$  виходить:

$$A^{dc} = C^d A^{dc}, \quad (II_d)$$

$$\text{отже: } A^{dc} \subset (CA^c)^d = A^{cd} \quad (3_d).$$

5<sub>d</sub>: З формул 4<sub>d</sub> і IV<sub>d</sub> дістаємо:

$$A^{dcdc} \subset A^{dccd} = A^{dd} \subset A^d, \text{ отже на основі } 1_d \text{ і } IV_d:$$

$$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d, \text{ отже також:}$$

$$A^{dc} \subset A^{dcdcd} \text{ і на основі формули } 1_d:$$

$$A^{dcd} \subset A^{dcdcdcd} \quad (\alpha)$$

З другої сторони з формул 4<sub>d</sub> і IV<sub>d</sub> виходить, що:

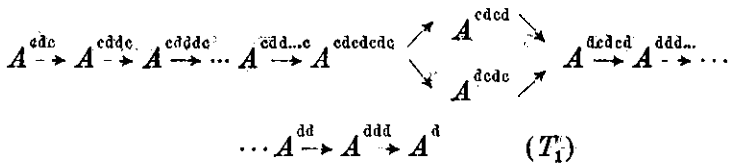
$$A^{dcdcdcd} \subset A^{dcdcd} = A^{dcd} \subset A^{dcd}$$

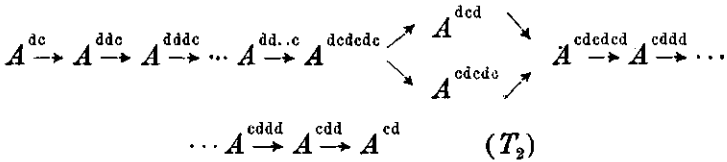
а далі з формул 1<sub>d</sub> і IV<sub>d</sub>:

$$A^{dcdcdcd} \subset A^{dcd} \subset A^{dcd} \quad (\beta)$$

формули (α) і (β) разом взяті дають теорему 5<sub>d</sub>.

3. При помочі аксіом  $I_d - IV_d$  і теорем 1<sub>d</sub> — 5<sub>d</sub> докажемо тепер реляції зазначені в наступних таблицях:





Наперед докажу, що коли:  $A \subset B$  то:  $A^{cdc} \subset B^{cdc}$ . ( $\gamma$ )

Доказ: коли  $A \subset B$ , то  $B^c \subset A^c$  і  $B^{cd} \subset A^{cd}$  ( $1_d$ ),

отже:  $A^{cdc} \subset B^{cdc}$ .

Тепер докажу по черзі правдивість всіх реляцій, що містяться в таблиці ( $T_1$ ):

- 1) Т.)  $A^{cdc} \subset A^{cdcdc}$   
 Д.)  $A^{cddc} \subset A^{cdcd}$  ( $4_1$ )  
 отже:  $A^{cdcdc} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$  ( $IV_d$ )  
 $A^{cdcdcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$  ( $1_d, IV_d$ )  
 $A^{cdc} \subset A^{cdcdc}$ .
- 2) Т.)  $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$   
 Д.)  $A^{cdcdcc} \subset A^{cdcdcd}$  ( $4_1$ )  
 $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd} \subset A^{cdcd}$  ( $IV_d$ )
- 3) Т.)  $A^{cdcdcdc} \subset A^{dcd}$   
 Д.) Маємо:  $A^{dc} \subset A^{cd}$  ( $4_2$ )  
 $A^{dcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$  ( $1_d, IV_d$ ), а на основі теореми ( $\gamma$ ):  
 $A^{dcdcdc} \subset A^{cdcdc}$ .

Остання реляція є правдива для кожної множини, отже і для множини  $A^c$ , отже дістаємо:

$$A^{cdcdcdc} \subset A^{dcdc}.$$

- 4) Т.)  $A^{cdcd} \subset A^{dcdc}$   
 Д.) З доказаної вже реляції  $A^{cdc} \subset A^{dcdc}$  1), 3) виходить що:  $A^{cdcd} \subset A^{dcdc}$  ( $1_d$ ).
- 5) Т.)  $A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}$   
 Д.) Маємо:  $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$ , отже коли ту замість  $A$  положимо  $A^c$ , дістаємо:  
 $A^{dcdcdc} \subset A^{dcd}$  і даліше:  
 $A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}$ .
- 6) Т.)  $A^{dcdcd} \subset A^d$   
 Д.)  $A^{dcdc} \subset A^{dccc} \subset A^{dd} \subset A^d$  ( $4_d, IV_d$ )  
 $A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d$  ( $1_d, IV_d$ ).

Тепер мусимо доказати правдивість двох важних формул:

$$m) A^{cdcdc} = A^{cdcd}$$

$$n) A^{dcdcd} = A^{dcd}.$$

Доказ: Маємо:  $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$  2)

$$A^{cdcdcdcd} \subset A^{cdcd} \quad (1_a)$$

отже:  $A^{cdcd} \subset A^{cdcd}$ , бо згідно з теоремою 5<sub>a</sub> маємо:  
 $A^{cdcdcdcd} = A^{cdcd}$ .

З другої сторони маємо:  $A^{cdcd} \subset A^{cdcd}$  (IV<sub>a</sub>).

Формули:  $A^{cdcd} \subset A^{cdcd}$  і  $A^{cdcd} \subset A^{cdcd}$  дають теорему (m).

Теорему (n) дістанемо з теореми (m), коли замість  $A$  положимо там  $A^c$ .

Тепер можемо доказати нову теорему:

$$(p): \quad A^{dd\dots cdc} = A^{ddcd}.$$

$$\text{Доказ: } A^{ddcd} \subset A^d \quad (6)$$

а через многократне приложення теореми (n) дістаємо:

$$A^{ddcd} \subset A^{dd\dots}$$

$$\text{а даліше: } A^{cdcdcdcd} \subset A^{dd\dots cdc} \quad (\gamma)$$

$$(1'): \quad A^{ddcd} \subset A^{dd\dots cdc} \quad (5_1)$$

З другої сторони маємо:  $A^{dd\dots} \subset A^d$  (IV<sub>a</sub>)

отже:

$$(2'): \quad A^{dd\dots cdc} \subset A^{ddcd} \quad (\gamma).$$

Реляції (1') і (2') дають теорему (p).

Тепер легко вже можна доказати наступні формули:

$$(r): \quad A^{dd\dots cd} = A^{ddcd}$$

$$(s): \quad A^{cd\dots cd} = A^{cdcd}$$

$$(t): \quad A^{cd\dots cdc} = A^{cdcdc}.$$

Докажемо тепер реляцію:

$$7) \quad \text{Т.) } A^{cdcd} \subset A^{dd\dots c} \subset A^{cdcdcd}$$

$$\text{Д.) } A^{dd\dots} \subset A^{cd}, \text{ отже:}$$

$$A^{cd} \subset A^{dd\dots c}.$$

$$\text{Даліше: } A^{cdcdcd} \subset A^{cd} \quad (6)$$

$$\text{а також: } A^{cdcdcd} \subset A^{dd\dots} \quad (1_a), (n)$$

$$\text{отже: } A^{dd\dots c} \subset A^{cdcdcd}.$$

$$8) \quad \text{Т.) } A^{ddcd} \subset A^{dd\dots} \subset A^d.$$

Д.) Коли в формулі 7) замість  $A$  положимо  $A^c$ , дістанемо:

$$A^{dd\dots c} \subset A^{ddcdcd}$$

$$\text{отже також: } A^{cdcd} \subset A^{dd\dots}$$

Реляція:  $A^{dd\dots} \subset A^d$  виходить з (IV<sub>a</sub>).

Так доказали ми всі реляції, що містяться у таблиці (T<sub>1</sub>). Реляції поміщені в таблиці (T<sub>2</sub>) дістанемо, коли в таблиці (T<sub>1</sub>) підставимо всюди  $A^c$  замість  $A$ .

4. Зазначім тепер знаком  $A^\sigma$  множину, що повсталала з множини  $A$  через приложення до неї скінченного числа операції  $A^d$  і  $A^c$  у довільнім порядку. Так отже покажчик  $\sigma$  зазначає скінчений поступ, що його елементами є літери  $d$  і  $c$ .

Докажемо тепер наступні твердження:

I. Для загальної множини  $A$  всі множини типу  $A^\sigma$ , що містяться у таблицях  $(T_1)$  і  $(T_2)$  є різні (нема між ними двох множин ідентичних).

II. Ніякі інші реляції типу  $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$  не є правдиві для ніяких  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (взятих із наведених таблиць) крім тих реляцій, що їх находимо у таблицях.

III. Кожда множина типу  $A^\sigma$  є ідентична з одною з множин, що є поміщені в таблицях  $(T_1)$  і  $(T_2)$ . Правдивість твердження III. виходить з теорем  $(5_d), (m) (n) (r) (s) (t)$ .

Щоби доказати теореми I і II треба сконструувати таку множину  $M$ , що має наступні властивості:

1) Коли  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  є двома різними показчиками, що їх можна знайти в таблицях  $(T_1)$  і  $(T_2)$ , то все є:  $M^{\sigma_1} \neq M^{\sigma_2}$ .

2) Коли  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  є двома різними показчиками, що знаходяться у таблицях, то ніякі реляції типу  $M^{\sigma_1} \subset M^{\sigma_2}$  (ані  $A^{\sigma_2} \subset A^{\sigma_1}$ ) не є правдиві, крім тих, що є вписані у таблицях.

Подамо тепер конструкцію такої множини.

Нехай простором  $C$  буде збір дійсних чисел відтинка:  $0 \leq x \leq 1$ .

$A_1 =$  множина дійсних чисел відтинка:  $0 \leq x < 1$ ,

$A_2 =$  вимірних "  $2 \leq x < 3$ ,

$A_3 =$  чисел:  $x = 5 - \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$A_4 =$  відтинків:  $7 - \frac{1}{2^n} < x < 7 - \frac{1}{2^{n+1}}$ ,  
 $n = 1, 2, 3, \dots$

$A_5 =$  " дійсних чисел відтинка:  $7 < x \leq 8$ ,

$A_6 =$  довільна добре упорядкована (bien ordonné) множина типу  $\omega^\omega$  чисел положених на відтинку:  $8 < x < 9$ ,

$A_7 =$  різниця між множиною чисел відтинка:  $9 \leq x \leq 10$  і довільною добре упорядкованою множиною типу  $\omega^\omega$  чисел положених на сім відтинку.

Коли означимо тепер похідну як множину точок скупчення,

то легко можна перевірити, що множина  $M = \sum_{n=1}^7 A_n$  має обі властивості 1) і 2).

5. Означимо тепер при помочі поняття похідної найважливіші поняття топології.

Множину  $A$  називаємо замкнутою, коли:  $A^\# \subset A$ .

Множину  $A$  називаємо у собі густою (dense en soi), коли:  
 $A \subset A^d$ .

Множину  $A$  називаємо завершеною (parfait), коли:  $A = A^d$ .

Множину  $A$  називаємо ізольованою (isolé), коли:  $A^d \subset A^c$ .

Множину  $A$  називаємо розімкненою (ouvert), коли:  $A \subset A^{cd}$ .

Множину  $A$  називаємо всюди густою (partout dense), коли:  
 $A^d = C$ .

Множину  $A$  називаємо береговою (ensemble frontière), коли:  
 $A^{cd} = 0$ .

Множину  $A$  називаємо негустою (non dense), коли:  $A^{cd} = 0$ .

Через відповідні операції можна з кожної множини  $A$  дістати інші множини, що є функціями цієї множини. Подаю означення найважливіших із таких функцій:

Множину  $A^i = A \cdot A^{cd}$  називаємо середовиною (intérieur) множини  $A$ .

Множину  $A^f = A \cdot A^{cd} + A^c \cdot A^d$  називаємо обмеженням (frontière) множини  $A$ .

Множину  $A^b = A \cdot A^{cd}$  називаємо берегом множини  $A$ .

Множину  $A^r = A + A^d$  називаємо замкненням (fermeture) множини  $A$ .

Легко можна перевірити, що множина  $A^d$  є все замкнена,  $A^{dc}$  є все у собі густа, а множина  $A^{dcd}$  є завершена.

6. Усі теореми, що їх досі доказано, є логічними консеквенціями аксіомів  $I_d - IV_d$ . Легко можна доказати, що спійність (connexité) простору не є консеквенцією цих аксіомів. Коли хочемо мати уклад аксіомів, з якого можна вивести спійність простору, треба до аксіомів  $I_d - IV_d$  додати ще аксіому:

$V_d$ : Коли:  $A^d \subset A \subset A^{cd}$ , то:  $A = 0$  або  $A = C$ .<sup>1)</sup>

Докажемо тепер дві наступні теореми:

I. Простір  $C$  є спійною множиною.

II. Лише множина без елементів ( $O$ ) і простір  $C$  є множинами і замкненими і розімкненими.

Доказ теореми I:

Множину  $A$  називаємо спійною, коли не можна знайти таких двох множин  $M$  і  $N$ , щоби:

$$\alpha) M \neq O, N \neq O,$$

$$\beta) M + N = A,$$

$$\gamma) MN + MN^d + M^dN = O.$$

<sup>1)</sup> Деякі аксіому рівнозначну аксіомі  $V_d$  і її консеквенції можна знайти у моїй ноті: Про спійність простору, Збірник, мат.-прир.-лік. секції Н. Т. ім. Ш., том XXVI.

Приймім умову, що простір  $C$  можна розділити на такі дві множини  $M$  і  $N$ , щоби для них формули  $\alpha)$ ,  $\beta)$  і  $\gamma)$  були правдиві.

З формул виходить, що:  $N = M^c$  (бо  $M + N = O$ ). Отже дістаємо;  $MM^{cd} + M^dM^c = O$ , або:

$$MM^{cd} = O, \quad M^dM^c = O.$$

З останніх формул виходить:

$$M \subset M^{cdc} \text{ і } M^d \subset M, \text{ отже:}$$

$$M^d \subset M \subset M^{cdc}$$

На основі формул  $\alpha)$ ,  $\beta)$ ,  $\gamma)$  множина  $M$  не може бути ані множиною без елементів, ані ідентична з цілим простором. Із сего виходить на основі акс.  $V_a$ , що формула  $M^d \subset M \subset M^{cdc}$  є неможлива. А що остання формула є консеквенцією умови, що простір не є спійний, то і ся умова є незгідна з акс.  $V_a$  і простір є множиною спійною.

Доказ теореми II.:

Множина без елементів і простір є множинами замкненими і розімкненими, бо:

$$O^d = O, \quad O \subset O^{cdc} = O; \quad C^d = C, \quad C \subset C^{cdc} = C.$$

Треба ще доказати, що ніяка інша множина не може бути і замкнена і розімкнена. Така множина  $A$  мусілаби мати наступні властивості:

$$A^d \subset A \text{ і } A \subset A^{cdc},$$

а се є незгідне з акс.  $V_a$ .

7. Щоби доказати незалежність аксіом  $I_a - V_a$ , треба означити для якогось простору похідну на п'ять різних способів так, щоби кожда дефініція була згідна із всіма аксіомами крім одної.

Нехай простір складається з трох елементів  $a, b, c$ , отже  $C = (a, b, c)$ . В наступній таблиці подаємо п'ять дефініцій похід-

	$I_a$	$II_a$	$III_a$	$IV_a$	$V_a$
$O^d =$	$O$	$O$	$(a, b, c)$	$O$	$O$
$(a)^d =$	$O$	$O$	$(a, b, c)$	$(a, b)$	$(a)$
$(b)^d =$	$O$	$O$	$(a, b, c)$	$(b, c)$	$(b)$
$(c)^d =$	$O$	$O$	$(a, b, c)$	$(c, a)$	$(c)$
$(a, b)^d =$	$(a, b, c)$	$O$	$(a, b, c)$	$(a, b, c)$	$(a, b)$
$(b, c)^d =$	$(a, b, c)$	$O$	$(a, b, c)$	$(a, b, c)$	$(b, c)$
$(c, a)^d =$	$(a, b, c)$	$O$	$(a, b, c)$	$(a, b, c)$	$(c, a)$
$(a, b, c)^d =$	$(a, b, c)$	$O$	$(a, b, c)$	$(a, b, c)$	$(a, b, c)$

ної множин сего простору. Кожда з дефініцій є згідна з чотирма аксіомами, а незгідна з одною аксіомою зазначеною над тим стовпцем, у яким є виписані означення похідної всіх множин простору.

Легко можна переконатися, що аксіоми  $I_a - V_a$  є правдиві в евклідовім просторі, коли  $A^d$  означимо як множину точок скупчення множини  $A$ . Однак крім сего можна їх також прикладати у загальніших абстрактних просторах.

Аксіома  $I_a$  каже, що операція  $A^d$  є аддитивна.

З аксіоми  $IV_a$  виходить, що похідна є все замкнена.

Аксіома  $V_a$  є рівнозначна теоремі: Множина без елементів і простір є одинаковими множинами, яких обмеження є множиною без елементів.

## § 2.

1. G. Cantor назвав множину  $A^k = A A^d$  когеренцією множини  $A$ . Колиж хочемо означити похідну множини  $A$  через її когеренцію, то бачимо, що похідної не можна означити як функцію когеренції, т. зн. що коли на загальній множині  $A$  будемо виконувати операції  $A^k$  і  $A^c$ , та будемо творити логічні суми і добутки на множинах типу  $A^n$ , то не дістанемо такої множини, що означувалаби загально похідну множини  $A$ . Про правдивість сеї замітки можна легко переконатися. Означім похідну так, як її означається в теорії точкових множин і нехай  $A$  буде множиною, якої елементами є обернені вартости цілих додатних чисел:  $A = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ . Коли  $C$  є множиною дійсних чисел, то легко можна переконатися, що всякі можливі логічні операції виконувані на множинах  $A$ ,  $A^k$  і  $A^c$  дають все лише одну з наступних множин:  $A$ ,  $A^c$ ,  $O$ ,  $C$ , а нема між ними похідної множини  $A$ , яка є множиною, що має лише один елемент, яким є число  $O$ .

Однак похідну можна означити при допомозі когеренції, коли допустимо також формули, що представляють реляції між множиною і її елементами. Кажемо іменно, що елемент „ $a$ “ є елементом похідної  $A^d$ , коли:  $a \in \{A + (a)\}^k$ .<sup>1)</sup>

Покажемо, що ся дефініція є рівнозначна звичайній дефініції похідної в таких клясах, у яких для похідної є правдиві дві наступні формули:

<sup>1)</sup>  $a \in A$  значить, що „ $a$ “ є елементом множини  $A$ .  $(a)$  значить множина, що має лише один елемент „ $a$ “.

$$\begin{aligned} a) & (A + B)^d = A^d + B^d \\ b) & (a)^d = O. \end{aligned}$$

Доказ:

Коли  $a \in \{A + (a)\}^k$ , то:

$$(a) \subset \{A + (a)\}^k = \{A + (a)\} \{A^d + (a)^d\} = \{A + (a)\} A^d \subset A^d.$$

З другої сторони, коли:

$(a) \subset A^d$ , то також:

$$(a) \subset (a). A^d \subset (a) A^d + A A^d = \{A + (a)\} \{A^d + (a)^d\} = \{A + (a)\}^k.$$

Бачимо, що наша дефініція похідної придатна в клясах  $(L)$  і  $(H)$  Fréchet'a. Можна її також прикладати і в таких просторах, у яких похідна не мусить бути замкнена. Треба лише, щоби були правдиві формули  $a)$  і  $b)$ .

Коли вже маємо означення похідної при допомозі когеренції, то можна вже означити при допомозі когеренції і інші основні поняття топології.

Так н. пр. множину  $A$  називаємо замкненою, коли з реляції:

$$a \in \{A + (a)\}^k$$

виходить що:

$$a \in A.$$

Множину  $A$  називаємо в собі густою коли з реляції:  $a \in A$

виходить, що:  $a \in \{A + (a)\}^k$ .

Замкнення  $A^r$  множини  $A$  можна означити в наступний спосіб:

$$a \in A^r \text{ коли: } a \in A + \{A + (a)\}^k.$$

2. Загальні властивості когеренції виведемо з наступних трох незалежних аксіомів:

$$I_k: A^k + B^k \subset (A + B)^k$$

$$II_k: A^k \subset A$$

$$III_k: A^{c^k c^k} = A^{k c k c}.$$

Правдивість сих формул виходить з дефініції поняття когеренції ( $A^k = A A^d$ ), та з аксіомів  $I_d - IV_d$ .

Доказ  $I_k$ :

$$\begin{aligned} A^k + B^k &= A A^d + B B^d, \quad (A + B)^k = (A + B)(A + B)^d = \\ &= (A + B)(A^d + B^d) = A A^d + B B^d + B A^d + A B^d, \end{aligned}$$

отже:

$$A^k + B^k \subset (A + B)^k.$$

Доказ  $II_k$ :  $A^k = A A^d \subset A$ .

Доказ  $III_k$ :

$$\begin{aligned} A^{c^k c^k} &= (A^c A^{cd})^{ck} = (A + A^{cdc})^k = (A + A^{cdc})(A + A^{cdc})^d = \\ &= (A + A^{cdc})(A^d + A^{cdcd}) = (A + A^{cdc})A^d = A A^d + A^{cdc} A^d = \\ &= A A^d + A^{cdc}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{k c k c} &= (A A^d)^{ckc} = (A^c + A^{dc})^{kc} = \{(A^c + A^{dc})(A^c + A^{dc})^d\}^c = \\ &= \{(A^c + A^{dc})(A^{cd} + A^{dcd})\}^c = \{A^c A^{cd} + A^{dc} A^{cd} + A^c A^{dcd} + A^{dc} A^{dcd}\}^c = \\ &= \{A^c A^{cd} + A^{dc} + A^c A^{dcd} + A^{dc}\} = \{A^{dc} + A^c(A^{cd} + A^{dcd})\}^c = \end{aligned}$$

$$= \{A^{dc} + A^c A^{cd}\} = A^d(A + A^{cdc}) = AA^d + A^d A^{cdc} = AA^d + A^{cdc},$$

отже:  $A^{ckck} = A^{kckc}.$

3. При допомозі аксіом  $I_k - IV_k$  докажемо тепер наступні формули:

$$1_k: \text{коли } A \subset B, \text{ то } A^k \subset B^k$$

$$2_k: (AB)^k \subset A^k B^k$$

$$3_k: O^k = O$$

$$4_k: C^k = C$$

$$5_k: A^{ck} \subset A^{kc}$$

$$6_k: (A - B)^k \subset A^k - B^k$$

$$7_k: A^{kckk} = A^{ckck}$$

$$8_k: A^{kkck} = A^{kckckc}.$$

Докази:

$1_k$ : Коли  $A \subset B$ , то з акс.  $I^k$  виходить:

$$A^k + B^k \subset B^k, \text{ отже:}$$

$$A^k \subset B^k.$$

$2_k$ : Маємо:  $AB \subset A$  і  $AB \subset B$ , отже:

$$(AB)^k \subset A^k \text{ і } (AB)^k \subset B^k, \quad (1_k)$$

а через вимноження дістаємо:

$$(AB)^k \subset A^k B^k.$$

$3_k$ : З акс.  $II_k$  виходить:

$$O^k \subset O, \text{ або: } O^k = O.$$

$4_k$ : Щоби доказати теорему  $4_k$ , треба наперед доказати, що когеренція кожної множини в частині когеренції простору, т. з. що для кожної множини  $M$  в правдива реляція  $M^k \subset C^k$ .

Коли в акс.  $I_k$  положимо:  $A = M, B = C$ , то дістанемо:

$$M^k + C^k \subset (M + C)^k = C^k, \text{ отже:}$$

$$M^k \subset C^k.$$

Положимо тепер:  $M = A^{ckc}$ ,

то дістанемо:  $A^{ckck} \subset C^k$ , а також:

$$A^{kckc} \subset C^k. \quad (\text{акс. III}_k)$$

Положимо:  $A = O$ , то:

$$O^{kckc} \subset C^k.$$

$$\text{Але: } O^{kckc} = O^{ckc} = C^{kc}, \quad (3_k)$$

отже:  $C^{kc} \subset C^k$ ,

$$C^{kc}, C^{kc} = O, \quad C^k = C.$$

$$5_k: \text{Маємо: } A^{ck} \subset A^c \quad (\text{акс. II}_k)$$

а дальше:  $A \subset A^{ckc}$ ,

$$\text{але: } A^k \subset A \quad (II_k)$$

отже:  $A^k \subset A^{ckc}$

$$A^{ck} \subset A^{kc}.$$

6<sub>k</sub>: Згідно з теоремою 2<sub>k</sub> маємо:

$$(AB^c)^k \subset A^k B^{ck} \subset A^k B^{kc} = A^k - B^k.$$

7<sub>k</sub>: Коли в акс. III<sub>k</sub> за  $A$  положимо  $A^c$ , то дістаємо:

$$A^{kck} = A^{ckckc}$$

$$A^{kkckk} = A^{ckckckk}.$$

8<sub>k</sub>: При доказі останньої теореми мали ми реляцію:

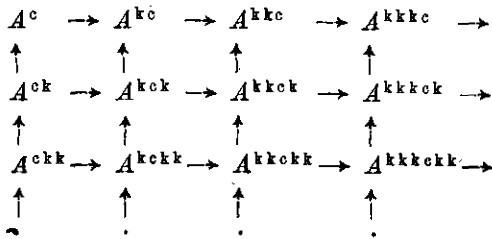
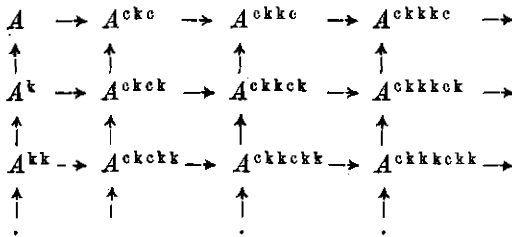
$$A^{kck} = A^{ckckc}.$$

Положимо ту  $A^k$  за  $A$ , то дістанемо:

$$A^{kkckk} = A^{kkckckc}.$$

4. Тепер розглянемо проблему аналогічну до сеї, яку ми досліджували в § 1. 4.

Докажемо, що правдиві в реляції інклюзії, що містяться у наступних таблицях:



Що кожда множина є частиною множини, яка лежить у таблиці над нею, виходить з акс. II<sub>k</sub>.

Треба ще лише доказати, що кожда множина є частиною, що лежить у таблиці на право від неї. Вистане доказати се для першого ряду таблиці.

(II<sub>k</sub>)  $A^{ck} \subset A^c$ , отже  $A \subset A^{ckc}$

(I<sub>k</sub>)  $A^{ckk} \subset A^{ck}$ ,  $A^{ckc} \subset A^{ckkkc}$

(1<sub>k</sub>)  $A^{ckkkk} \subset A^{ckk}$ , „  $A^{ckkkc} \subset A^{ckkkkc}$  і т. д.

Другу таблицю дістаємо з першої через підставлення  $A^c$  на місці  $A$ .

При допомозі теорем  $\text{III}_k$ ,  $7_k$  і  $8_k$  можна кожену множини, що повстала через приложення до неї скінченного числа операції  $A^o$  і  $A^k$  перетрансформувати ідентично на одну з множин, що містяться у таблицях. Отже нема інших множин типу  $A^o$  крім цих, що їх находимо у таблицях.

Всі множини, що є у таблицях, є різні і нема між ними ніяких інших реляцій інклюзії, крім цих, що їх находимо у таблицях. Можна се легко перевірити на множині  $M$ , що є сумою двох множин  $A_1$  і  $A_2$ , які означимо в наступний спосіб:

$A_1$  є якою небудь упорядкованою (bien ordonné) множиною типу  $(\omega+1)^{\omega+1}$  зложеною з точок відтинка:  $0 < x < 1$ ,

$A_2$  є різницею між відтинком:  $1 < x < 2$  і якоюсь добре упорядкованою множиною типу  $(\omega+1)^{\omega+1}$  зложеною з точок сего відтинка.

5. Доказом незалежності аксіомів  $\text{I}_k - \text{III}_k$  є наступна табеля:

$C = (a, b, c)$	$\text{I}_k$	$\text{II}_k$	$\text{III}_k$
$(O)^k =$	$O$	$O$	$O$
$(a)^k =$	$(a)$	$O$	$O$
$(b)^k =$	$(b)$	$O$	$O$
$(c)^k =$	$(c)$	$O$	$O$
$(a, b)^k =$	$O$	$(a, b, c)$	$O$
$(b, c)^k =$	$O$	$(a, b, c)$	$O$
$(c, a)^k =$	$O$	$(a, b, c)$	$O$
$(a, b, c)^k =$	$(a, b, c)$	$(a, b, c)$	$O$

Простір  $C$  є ту множини зложеною з трох елементів:  $C = (a, b, c)$ .

Під кожною аксіомою находимо такі дефініції усіх множин простору, що не є згідні з сею аксіомою, а згідні з іншими аксіомами.



Ч(с)У-3:54+54 (014)

Др. Роман Цегельський.

## Про українську хемічну термінольоґію.

(Реферат на засіданню мат.-прир.-лік. Секції Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові дня 18. лютого 1928).

Українська хемічна термінольоґія має вже за собою історію. Початки її сягають ще сімдесятих років XIX. століття. Тоді саме впроваджено українську викладну мову в академічній гімназії у Львові і тим самим зайшла потреба вчити хемії по українськи. В слід за тим появилися українські підручники фізики та хемії для гімназій (Полянського, Огоновського Петра), де находимо перші українські хемічні назви. Перший авторитетний „Начерк термінольоґії хемічної“ зладив др. В. Левицький та напечатав його у IX. т. Збірника мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові 1903. Називаю його авторитетним тому, що основи сього начерку приняла і затвердила мат.-прир.-лік. Секція Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові<sup>1)</sup>.

Др. В. Левицький, а за ним і мат.-прир.-лік. Секція Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові станули були тоді на становищі націоналізації хемічних термінів, ідучи за прикладом інших народів, впр. Поляків, Чехів, Росіян. В рік опісля подав проф. др. Ів. Горбачевський у X. т. згаданого Збірника критику сеї термінольоґії п. з. „Уваги о термінольоґії хемічній“. Його становище було принципіально відмінне від становища др. В. Левицького. Він висказав погляд, що українська термінольоґія мусить бути передусім така, щоби як найтісніше прилягала до міжнародної термінольоґії і що витворення та ви-

<sup>1)</sup> Проф. Анатолій Семенцов називає у своїх „Увагах до української хемічної термінольоґії“, виданих в II. кн. Записок Київського Інституту Народної Освіти, єдиним авторитетним джерелом словник хемічної термінольоґії, який склала О. Курило й ухвалила термінольоґічна Комісія Київського Наук. Товариства, а видало 1923. року ДВУ. Я думаю, що всеж таки праця д-ра В. Левицького з 1903 р. мала велике значіння і дала привід до дискусії над українською хемічною термінольоґією.

ключне уживання народньої, зовсім оригінальної термінології або термінології, переробленої з якоїсь славянської мови не лише не вигідне і непотрібне, але навіть некорисне. Виїмок допускає проф. Горбачевський лише для найвизначніших загально знаних сполук, але жадає, щоби основою цілої термінологічної системи була міжнародня термінологія таї щоби знаціоналізовані терміни відповідали їй. Сю вимогу вважає проф. Горбачевський оправданою також тому, що в органічній хемії властиво нема ніяких народніх термінологій, лише міжнародня з виїмком небогатох імен сполук, які були вже давніше звісні перед надзвичайно скорим розвитком органічної хемії у другій половині ХІХ. віка. Творити народню термінологію органічної хемії було би прямо неможливим з причини надзвичайно великої скількості матеріялу, а впрочім се було би злишне і без вартости. В неорганічній хемії у ріжних народів є по части оригінальна народня термінологія, по части і міжнародня. Сі народні терміни неорганічної хемії витворилися були ще в часах, коли наукові міжнародні звязки не були такі живі, як тепер, і коли неорганічна хемія розвивалася ще дуже поволи.

Одначе тепер починає розвиватися сильно також неорганічна хемія. Нові сполуки, особливо нові досі незнані типи, дістають міжнародні назви. Міжнародня термінологія випирає чим раз більше т. зв. народні терміни тим більше, що останні є переважно неприцизні і часто утворені доволі незугарно. За міжнародньою термінологією промовляє у нас також і те, що Українець, навчившись міжнародньої термінології з українського підручника, зможе легко познакомлюватися з всесвітньою літературою.

Після цих уваг подав проф. Горбачевський подрібну критику термінів д-ра В. Левицького і zarazом проєкт иншої термінології, опертої на інтернаціоанальнім принципі.

На сім спинилася на довший час дискусія над хемічною термінологією. Але праця над нею поступала поволи вперед з огляду на практичні потреби. І так у передвоєнних числах „Здоровля“, органу львівського товариства українських лікарів, находимо термінологію, зібрану д-ром Е. Озаркевичем, що відносилася здебільша до лікарської хемії. Рівночасно появилася ряд шкільних та популярних підручників хемії та хемії і мінеральогії (Р. Цегельського, Ю. Гірняка, М. Мельника, Мазуренка), в котрих автори були приневолені впровадити значну скількість хемічних термінів в українській мові. В подіб-

нім положенню був д-р Ю. Гірняк при писанню своїх праць з теоретичної хемії<sup>1)</sup>. В 1922. появилося ще два підручники в Кам'янці Подільській (автор М. В.) і в Києві (Мазуренка П. вид.).

У всіх тих підручниках термінологія дуже різнородна, оперта здебільша на принципі націоналізації.

Само життя посувало справу бисто вперед. В 1917. р. вибухла в Росії революція, що принесла за собою утворення Української Держави. На Україні, не зважаючи на війну, закипіла жива праця на науковім полі. При Українськїм Народнїм Товариствї в Києві повстала Термінологїчна Комісія, якої завданням було складати шкільну термінологїю. Голова сеї Комісії П. І. Холодний доручив ще з початку 1918. р. О. Курилові скласти словник української хемїчної термінологїї для шкільного вжитку. Авторка використала крім згаданих вище жерел також матеріали колишньої Термінологїчної Комісії, Гуртка Натуралїстів при Київській Полїтехніці, словники Е. Тимченка і Грінченка таї ще кілька менших підручників. Термінологїчна Комісія виділила з поміж себе Хемїчну Підкомісію, якої головою був М. І. Доманицький. Остаточним вислїдом сеї праці є „Словник хемїчної терїнологїї“ що появился 1923. р. в Києві під редакцією О. Курило як 4. випуск Природничого Відділу Інституту Наукової Мови при Всеукраїнській Академії Наук накладом Державного Видавництва України. Укладчики сього словника старалися погодити педагогїчний та науковий принципи. Вони вїшли з того погляду, що інтернаціональні, чужі терміни можуть побільшити труднощі при навчанню хемїї в нижчих школах, де при науці необхідно виходити від понять, знаних ученикам. Тому основи, на яких оперлася Хемїчна Підкомісія, мало рїзняться від основ „Начерку“ д-ра В. Левицького, а рівнорядно попри народні чи знаціоналізовані терміни стрїчаємо у „Словнику“ також міжнародні. Але поки-що сеї „Словник“ є проєктом без загально обовязуючої сили.

Мїжтим почалися виклади хемїї в українській мові на українських університетах в Празї і у Львові, на українській полїтехніці у Львові, в Господарській Академії в Подєбрадах таї у рїзних школах Радянської України. Ізза того устійнення української хемїчної термінологїї стало пекучою потребою і сю справу необхідно полагодити у як найкоротшому часі.

З того приводу забрав проф. І. Горбачевський вдруге

<sup>1)</sup> Гл. Збірники мат.-прир.-лїк. Секції Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові. Т. ІХ, ХІ—ХV.

голос у цій справі і помістив в 1. ч. „Українського Медичного Вістника“ в Празі з 1923. р. статтю п. з. „Уваги до хемічної термінології“, де попри критику поглядів Левицького, Мазуренка і Подєбрадської Академії подав досить подрібний проєкт своєї термінології, опираючися на тих самих основах, що в 1904. р. А в 1924. р. видав обмистий підручник „Органічної Хемії“, де находимо багатий термінологічний матеріал і уваги до хемічної термінології у „Переднім Слові“.

Погляди проф. Горбачевського, людини найбільше у нас авторитетної на полі хемії і хемічної термінології, відбилися голосним відгомонам у працях Номенклятурної Комісії Хемічного Відділу Київського Товариства Природознавців, що відбувала свої засідання в протягу 1927. р. під проводом проф. А. П. Семенцова. Комісія оперлася на назвах, які запропонувала Комісія Німецького Хемічного Товариства у 1925. р., зробивши у німецьких назвах лише такі зміни, які треба було зробити, щоби пристосувати ці назви до української мови. Номенклятура Німецької Комісії є дуже раціональна і може бути примінена до будь-якої мови. Ізза того Комісія припускала, що ця номенклятура буде основою міжнародньої номенклятури і тоді номенклятура, що її пропонує Комісія, буде так само міжнародньою. А хочби надії Комісії не здійснилися, все ж таки Українці матимуть міжнародню номенклятуру, що позволить їм легко орієнтуватися в німецькій та иньшій західноєвропейській хемічній номенклятурі.

Ідучи за сею думкою консеквентно, Комісія наблизилася до становища проф. Горбачевського та прийняла багато позицій його. Голова Комісії проф. Семенцов навів у своїй доповіді<sup>1)</sup> аргументи, що промовляють за інтернаціональною термінологією, зближені до аргументів проф. Горбачевського, і зазначив, що Українці мають надзвичайно сприятливі обставини для запровадження раціональної та міжнародньої номенклятури, бо на Україні ще майже нема хемічної літератури.

Про висліди своєї роботи Комісія зробила доповідь пленуму Відділу 7. червня 1927. Пленум затвердив всі постанови Комісії з виїмком постанови про зазначення стехіометричних відношень, що її прийнято у редакції меншости Комісії.

На сім місци подаю до відома, що мат.-прир.-лік. Секція Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові радила над по-

<sup>1)</sup> А. Семенцов. Про раціональну номенклятуру хемічних індивідуумів. Записки Київ. Т-ва Природ. Т. XXVII, в. 2.

становами Київської Комісії на двох засіданнях та заявила за впровадженням міжнародньої хемічної номенклатури після основ, предложених цією Комісією, однак висказала думку, що у нижчих школах з педагогічних причин необхідно буде при науці хемії послуговуватися також повсякденними назвами бодай у мінімальних розмірах.

Понижче подаю подрібно постанови Київської Комісії<sup>1)</sup> і в звязи з ними з'ясовую погляди свої та мат.-прир.-лік. Секції Н. Т. ім. Ш. на кожду з них з окрема.

### I. Назви елементів.

Назви елементів складаються з їх латинських назв, замінюючи закінчення „ium“ на закінчення „ій“ та відкидаючи зовсім закінчення „um“. Н. пр. *Na* натрій, *Mg* маґнезій, *As* арсенік, *B* бор.

З цього загального правила робить Комісія два виїмки, по перше для всіх елементів, що мають назву в повсякденній мові, залишає ці назви, н. пр. *Fe* залізо, *Pb* олово, *S* сірка, *Sn* цина. По друге, для елементів *O* кисень, *H* водень, *N* азот та *C* вуглець залишає ці назви, що стали вже традиційними.

Ту зверну увагу, що проф. Горбачевський<sup>2)</sup> промовляє за задержанням латинського закінчення „ium“ (іум) з огляду на назви хемічних сполук, н. пр. баріум, баріумкарбонат. Замість „арсенік“ уживає коротшої назви „арсен“, замість „вуглець“ назви „вугіль“, а попри „кальціум“ назви „вапень“, попри „сіліціум“ назви „кремій“.

Тому, що в „Переднім Слові“ до своєї „Органічної Хемії“ проф. Горбачевський не противиться закінченню „ій“, можна згодитися на нього. Крім того думаю, що необхідним є впровадити також інтернаціональні терміни попри ті народні, що є загально прийняті н. пр. назву „нітроґен“ попри „азот“ з огляду на назви хемічних сполук. Попри назву „сіліціум“ можна би уживати назви, випровадженої від народньої, у формі „крем“ замість „кремій“, бо це не є латинська назва. Зате референтови, як і членам Секції здається доцільнішим, уживати назви „вугіль“.

Трудність є з назвою ртуті, яку нарід зчаста називає „живим сріблом“. На думку референта не лишається нічого иншого, як впровадити як головну назву „гідрарґрій“, а обі народні

<sup>1)</sup> Гл. „Звіт Номенклатурної Комісії Хемічного Відділу Київського Товариства Природознавців“. (Записки Клів. Т-ва Природ. Т. XXVII, в. 2).

<sup>2)</sup> Укр. Медичний Вістник. Прага 1923, 1 ч. 8 стр.

назви вважати побічними. Мат.-прир.-лік. Секція Н. Т. ім. Ш. заявляється взагалі протів назви „живе срібло“, а задержує назву „ртуть“.

Обговорюючи назви елементів, мушу разом з проф. Горбачевським<sup>1)</sup> і згідно зі своєю Секцією виступити за задержанням букви г (латинське G) в назвах, в яких вона приходить, — чого не бачимо у „Словнику хемичної термінології“ О. Курилової, — а саме „Gallium“ треба писати „галій“ в супротиставленню до „гелія“ (Helium) тому, що можуть вийти непорозуміння, н. пр. Acidum gallicum є по українськи „гальова кислота“, а не „гальова“, бо гальовими кислотами є  $HF$ ,  $HCl$ ,  $HBr$ ,  $HI$ .

## II. Назви сполук.

Назви всіх сполук за виїмком назв кислот та їх ангідридів складаються в проєкті Київської Комісії з двох частей — аніону і катіону. Назви аніонів творить вона, додаючи відповідні закінчення до пня латинської назви центрального атому аніону. Назву катіону ставить у 2. відмінку. За прикладом Німецької Термінологічної Комісії для зазначення валентности катіону на письмі ставить після назви катіону відповідну римську цифру у дужках, а у вимові вставляє перед назвою катіону відповідно „двохвалентного“, „трохвалентного“ і т. д.

Коли валентність елементу у сполуці невідома, то для зазначення різних сполук тих самих елементів зазначає стехіометричні відношення, додаючи до назв відповідних елементів грецькі числівники.

На основі цих загальних принципів зложила Київська Номенклятурна Комісія назви для окремих клас сполук у такий спосіб:

Бінарні сполуки. Аніони їх дістають закінчення „ід“, н. пр.  $NaCl$  хлорид натрія,  $HF$  флюорид водня<sup>2)</sup>,  $Fe_2O_3$  оксид трохвалентного заліза,  $MnO_2$  діоксид мангану,  $AsH_3$  арсенід водня. Оксиди, що з кислотами виділюють  $H_2O_2$ , називає Комісія пероксідами:  $BaO_2$  пероксид барія.

Для ціяну та амоніяку Комісія залишила ці назви.

На цьому місці хочу зауважати, що досі уживали у нас замість „оксид“ назви „окис“. Вона має вже у нас „традицію“ і є дуже популярна. Ізза того проф. Горбачевський уживає попри „оксид“ також назви „окис“ і на мою думку, а також і на

<sup>1)</sup> Органічна Хемія. Прага 1924. IV. стр.

<sup>2)</sup> У Звіті Комісії читаємо „водню“, „барію“.

погляд Секції необхідно буде залишити її ізза педагогічних причин як побічний термін.

Дуже практичними є назви проф. Горбачевського для більшої кількості оксидів того самого елемента, н. пр.:

$N_2O_5$  — діазотпентоксид, двоазотпятиокис,

$N_2O_4$  — діазоттетроксид, двоазотчотириокис,

$N_2O_3$  — діазоттріоксид, двоазоттроокис,

$NO$  — азотмоноксид, азотодноокис,

$N_2O$  — діазотмоноксид, двоазотодноокис.

В термінології, пропонованій Київською Комісією, одержить  $N_2O_5$  назву оксид (V) азоту себто оксид п'ятивалентного азоту.

В „Органічній Хемії“ проф. Горбачевського находимо на  $H_2S$ ,  $CS_2$ ,  $AsH_3$  назви: сірководень, сірковуголь і арсеноводень. Після київського проєкту ці сполуки одержать мабуть назви: сульфід водня, сульфід вугля і арсенід водня. Ці назви треба прийняти як головні, а другі випроваджувати поволи з ужиття.

Отвертим лишається питання, чи такі сполуки, як  $N_3H$ ,  $N_2H_4$ ,  $PH_3$  називати дальше інтернаціональними термінами, досі уживаними, як азоїмід, гідразін, фосфін, чи перетворювати їх відповідно до основ, прийятих Комісією. Мені здається, що краще лишити назви азоїмід, гідразін і фосфін.

Розчин хлориду водня ( $HCl$ ) у воді називають загальною сільною кислотою; сю назву треба буде задержати з педагогічних причин.

Соли кисневих кислот. Для утворення аніонів кисневих кислот Комісія вживає дві приставки „гіпо“ та „пер“ та два закінчення „їт“ та „ат“, щоби зазначити ріжну валентність центрального атому аніону. При найнижчому ступені окислення центрального атому вживає приставки „гіпо“ та закінчення „їт“, при наступному ступені окислення закінчення „їт“ без приставки, далі закінчення „ат“ без приставки і вкінці приставку „пер“ та закінчення „ат“. Н. пр. для кисневих аніонів кислот хлору одержуємо назви:

$ClO'$  гіпохлорїт,

$ClO_2$  хлорїт,

$ClO_3$  хлорат,

$ClO_4$  перхлорат.

Якщо є тільки два ступені окислення, Комісія не впроваджує приставок н. пр. для кислот азоту і сірки:

$NO_2$  нітрїт,  $SO_3$  сульфїт,

$NO_3$  нітрат,  $SO_4$  сульфат.

Після того одержуємо такі назви:  $NaClO$  гіпохлорит натрія,  $KMnO_4$  перманганат калія,  $CuSO_4$  сульфат міді,  $Fe(NO_3)_3$  нітрат трохвалентного заліза,  $K_3AsO_3$  арсеніт калія.

Для солей кислот, утворених з того самого ангідриду з різною кількістю води, Комісія пропонує приставки „орто“, „мета“ та „піро“, які вже і давніше уживано, отже  $Na_2SiO_4$  ортосілікат натрія,  $KBO_2$  метаборат калія,  $Na_4P_2O_7$  пірофосфат натрія, а для солей складних кислот зазначає кількість молекулів ангідриду грецькими числівниками, н. пр.  $R_2B_4O_7$  тетраборат,  $R_4Si_3O_8$  трісілікат,  $R_2WO_8O_{25}$  октовольфрамат.

Аніони кислот, що в їх молекулі замінено атоми кисня<sup>1)</sup> на атоми сірки, одержують приставку „тіо“, н. пр.  $Na_2S_2O_3$  тіо-сульфат натрія,  $(NH_4)_3AsS_3$  тіоарсеніт амонія.

Приставка „гідро“ призначена до зазначення присутності атомів водня у аніоні, н. пр.  $NaHSO_4$  гідросульфат натрія,  $Ca(H_2PO_4)_2$  дігідрофосфат кальція,  $NaOH$  гідроксид натрія,  $KSH$  гідросульфід калія.

Назви основних солей дістають приставку „гідроксі“ або „оксі“ залежно від того, чи в молекулі є „гідроксиль“  $OH$  чи лише атоми кисня, н. пр.  $CrOH(SO_4)_2$  гідроксісульфат хрому,  $BiOCl$  оксіхлорид вісмуту<sup>2)</sup>.

Ті всі терміни є дуже влучно утворені. Але все таки не обійдеться у нижчих школах без деяких народніх термінів, як н. пр. салітра (нітрат калія і натрія).

Кислоти та їх ангідриди. Ідучи за проф. Горбачевським, Комісія впровадила для кислот терміни, що складаються з назв їхніх аніонів з долученням закінчення „ова“ та слова „кислота“ н. пр.  $H_2SO_4$  сульфатова кислота,  $HMnO_4$  перманганатова кислота,  $HClO$  гіпохлоритова кислота,  $HNO_2$  нітритова кислота. Відси можна випровадити легко назви ангідридів:  $Cl_2O$  гіпохлоритовий ангідрид,  $N_2O_5$  нітратовий ангідрид,  $SO_2$  сульфитовий ангідрид,  $Mn_2O_7$  перманганатовий ангідрид.

Також деякі кисневі кислоти мають у практичній житті назви, які необхідно буде уживати в школі попри міжнародні, н. пр. сульфатова кислота ( $H_2SO_4$ ) — сірчана (сіркова), карбонатова ( $H_2CO_3$ ) — вугляна (вуглева), нітратова ( $HNO_3$ ) — азотова (салітрова).

Подвійні соли. Назви їх творить Комісія, сполучаючи два катіони їх словом „та“, н. пр.  $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2$  сульфат двох-

<sup>1)</sup> В звіті київської Комісії уживається форма „кисеню“.

<sup>2)</sup> Київська Комісія уживає назви „бісмут“, проф. Горбачевський „вісмут“

валентного заліза та амонія,  $NaNH_4HPO_4$  гідрофосфат натрія та амонія. Якщо подвійна сіль має два аніони, то сполучається обидва аніони в одно слово, н. пр.  $MgClBr$  хлоробромід магнезія.

Для комплексних сполук впровадила Комісія назви Вернера, що спеціально займався ними та й утворив для них послідовну термінологію. На ті всі терміни можна згодитися без ніяких застережень.

Крім справи самої хемічної номенклятури необхідно ще порішити справу загальних термінів. Згідно з проф. Семенцовим<sup>1)</sup> можемо прийняти терміни: матерія, субстанція, валентність замість вартісність, альотропія, ізотопи, ізомерія, атом, молекул (чи молекула), елемент. Крім останньої назви маємо також українську назву „первень“, що має вже за собою „традицію“ і є признана проф. Горбачевським. Сю назву можемо задержати як побічну.

Що до інших назв, то Секція рішається на терміни: „кислота“ замість „квас“ (Säure), „основа“ замість „засада“ (Base), „хемічна сполука“ замість „сполучення“ або „злука“.

Природні громади первнів найкраще називати за проф. Горбачевським<sup>2)</sup>: гальогени або гальові первні, метали алькаліїв, метали алькалічних земель, метали рідких земель. Інші громади треба би називати іменем першого елементу відносної громади н. пр. громада кисня, азоту, вугля. Впрочім можна би взяти під увагу валентність і називати: громада одно-, дво-, три- і чотиrowалентних металюідів і металів.

Термінами органічної хемії Київська Комісія не займалася. Одначе ту стоїть справа куди краще тому, що можна творити міжнародні терміни на основі принципів, установлених міжнародною хемічною Комісією, що зібралася була в Женеві 1892. р., та впровадити їх прямо в українську хемічну термінологію<sup>3)</sup>.

Проф. Горбачевський виконав кольосальну підготовну працю і зібрав у своїй „Органічній Хемії“ назви, які можна буде прийняти майже без дискусії. Вийком могли би бути лише назви, взяті з практичного життя, для яких подекуда буде необхідна рада фільологів. Стрічаємо там такі влучні терміни, як подвійні вязання, скуплення (н. пр. нітроскуплення  $N=O$ , азове скуплення  $N=N$ , алькілеве скуплення  $CH_3$ ,  $C_2H_5$  і т. д.), мочовина (карбанід), але є і назви „односитні і більшеситні алькоголі

<sup>1)</sup> А. Семенцов. Уваги до укр. хем. термінології.

<sup>2)</sup> Укр. Мед. Вістник. Прага 1923. ч. 1. стр. 9.

<sup>3)</sup> Гл. Горбачевський. Органічна Хемія. Прага 1924.

(кислоти)“ попри „одно- більше вартісні“, „алькоголічне квашення“, „масні“ кислоти, над якими необхідно застановитися. Що до першої, найлутше було би уживати назви „одно- і більше валентні алькоголі та одно- і більше основні кислоти“. Слово „квашення“ радив би я заступити назвою „ферментація“. Проф. Горбачевський уживає алькоголічне, оцтове квашення. Хоч ся назва незла, одначе має ту хибу, що вона повинна виражувати неперехідну чинність, а вона виражає фактично перехідну, н. пр. говориться про квашення огірків, капусти. Таксамо неясним є для мене, чому має бути „масні“ кислоти, а не „товсті“, коли вони мають звязь з товщами; подібно „масний“ ряд, а не „товщевий“.

Також можна би ще дебатовати над закінченням прикметників, утворених від назв органічних сполук. Проф. Горбачевський уживає послідовно „бензолъовий“, „фенолъовий“, „алькілъовий“ і в звязи з тим „вугльоводні“. Я заявивсяб за закінченням „евий“; отже „бензолевий“, „фенолевий“, „алькілевий“ і в звязи з тим „вуглеводні“.

Інші назви, що не належать до номенклятури, можна буде устійнити на основі „Словника“ О. Курило. Там находимо цілий ряд назв, на які легко всі погодяться н. пр. сполукова одиниця, подвійне заміщення (субституція), полива, пальник, дмухало, поволока, проціджувати (фільтрувати) і т. д., але є і назви, над якими необхідна дискусія. Н. пр. годі уживати назви „вага“ у двох значіннях: німецьке Gewicht і Wage. Треба рішитися на дві окремі назви. В Галичині уживають тягар на означення нім. терміну „Gewicht“, а вага це прилад до важення (Wage). Після того є атомовий, питомий, сполуковий тягар, тягарове відношення.

Свої уваги кінчу побажанням, щоби Хемічний Відділ Київського Товариства Природознавців засягнув опінії Академії Наук та других українських наукових установ в сій важній справі, стежив пильно за її розвитком як ініціатор її та допровадив як найшвидше до всеукраїнського хемічного з'їзду, де вирішено би її остаточно.