МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Ковбашин В. І., Пік А. І.

Нарисна геометрія

Навчальний посібник

для загальноосвітніх технічних закладів нового типу,
а також студентів
усіх спеціальностей усіх форм навчання

Тернопіль
2020

УДК 515
Н 28

Укладачі:
Ковбашин В. І., докт. техн. наук, професор;
Пік А. І., канд. тех. наук, доцент.

Рецензенти:
Рогатинський Р. М., докт. техн. наук., професор;
Бочар І. Й., канд. тех. наук., доцент.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні вченої ради
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 8 від 24 червня 2020 р.

Н 28 Нарисна геометрія : навчальний посібник для загальноосвітніх технічних закладів нового типу, а також студентів усіх спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі : Ковбашин В. І., Пік А. І. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2020. – 204 с.

ISBN 978-966-305-107-9

УДК 51

ISBN 978-966-305-107-9

ВСТУП

Нарисна геометрія – наука про побудову зображень просторових фігур на площині.

Зображення, виконані за правилами нарисної геометрії, дають змогу уявити форму предметів, їх взаємне розміщення в просторі, дослідити геометричні властивості зображувальних предметів, визначити їх розміри. Такі зображення називають кресленнями або рисунками. За допомогою останніх можна викласти свої ідеї, задуми як про існуючі просторові форми, так і про нові, що проектуються, речі, предмети, машини, споруди. Отже, нарисна геометрія є основою технічної документації.

Предметом нарисної геометрії є обгрунтування основних правил і методів побудови зображень просторових (тривимірних) фігур на площині, а також способів розв’язування на зображеннях задач, що належать до цих фігур. У зв’язку з цим зміст курсу нарисної геометрії може зводитись до таких основних питань:

– вироблення, обгрунтування та використання методів побудови зображень просторових фігур на площині;

– вивчення геометричних властивостей предметів, їх форм, розмірів за рисунком;

– застосування методів зображення при розв’язуванні просторовографічних задач, які мають теоретичне і практичне використання в науці й техніці.

Прийняті позначення та символіка

1. Натуральна система координат позначається **Oxyz**.
2. Площини основної (координатної) системи площин проекцій позначають великою буквою **П** грецького адфавіту з додаванням індексу **1**, **2** або **3**. Горизонтальна площина проекцій – $\mathbf{П_1}$. Фронтальна площина проекцій – $\mathbf{П_2}$. Профільна площина проекцій – $\mathbf{П_3}$.
3. Центр проектування – велика буква латинського алфавіту **S**.
4. Точки позначають великими буквами латинського алфавіту: **A**, **B**, **C**, **D**, …, або арабськими цифрами **1**, **2**, **3**, **4**, ...
5. Лінії (прямі та криві) – малі букви латинського алфавіту: **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, … .
6. Площини та кути – малі букви грецького алфавіту: **α**, **β**, **γ**, **δ**, …
7. Поверхні – великі букви грецького алфавіту: **А**, **В**, **Г**, **Δ**, **Е**, ...

8. Додаткові площини проекцій позначають буквою П, додаючи черговий індекс: $\mathbf{П_4}$, $\mathbf{П_5}$, ...

9. Проекії точок, прямих та кривих ліній позначають тими ж буквами, якими позначені їх оригінали, з додаванням індексу, що відповідає індексу площини проекцій. Наприклад, проекції точки **А**, прямої **a** відповідно позначають: на площині $\mathbf{П_1}$ – $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{a_1}$; на площині $\mathbf{П_2}$ – $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{a_2}$; на площині $\mathbf{П_3}$ – $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{a_3}$; на площині $\mathbf{П_4}$ – $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{a_4}$.

10. Прямі особливого положення мають постійні позначення:
- горизонталь – **h**;
- фронталь – **f**;
- профіль – **p**.

11. Сліди площин:
- горизонтальний – $\mathbf{h_\alpha}$, $\mathbf{h_\beta}$, $\mathbf{h_\gamma}$, .. ;
- фронтальний - $\mathbf{f_\alpha}$, $\mathbf{f_\beta}$, $\mathbf{f_\gamma}$, ... ;
- профільний – $\mathbf{p_\alpha}$, $\mathbf{p_\beta}$, $\mathbf{p_\gamma}$, ...

12. Осі обертання – **i**, **j**.

13. Спосіб задавання геометричного об’єкта показують у дужках поряд з його буквеним позначенням:
- (**A**, **B**) – пряма, задана двома точками **A** і **B**;
- (**A**, **B**, **C**) – площина, задана трьома її точками **A**, **B**, **C**; – (**a**, **B**) – площина, задана прямою **a** і точкою **B**.
- 14. Символи:
- $\cap$ – знак перетину множини, $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta}$ – лінія **a** є результатом перетину площин **α** і **β**;
- $\in$ – знак належності, $\mathbf{A} \in \mathbf{b}$ – точка **A** належить прямій **b**;
- $\ni$ – знак включення (є підмножиною), $\mathbf{b} \ni \boldsymbol{\alpha}$ – площина **α** включає в себе лінію **b** або множина точок лінії **b** є підмножиною точок площини **α**;
- $\equiv$ – знак співпадання, тотожність;
- $=$ – знак результату дії, рівності;
- $\cup$ – об’єднання множин;
- $\dot{-}$ – знак, який показує, що прямі є мимобіжними (не перетинаються);
- $\|$ – знак паралельності;
- $\perp$ – знак перпендикулярності;

– $\backslash$ – знак заперечення;

– $\Rightarrow$ – імплікація – логічний наслідок.

Відстань між елементами простору позначають двома вертикальними відрізками, наприклад: $|\mathbf{A\ B}|$ – відстань між двома точками **A** і **B**.

1. Метод проекцій

Будь-яка плоска чи просторова фігура розглядається як сукупність точок, прямих (кривих) ліній та площин (поверхонь). Таку фігуру називають оригіналом. Для побудови проекцій оригіналу нарисна геометрія користується методом проекцій. Суть цього методу можна розглянути на прикладі побудови зображень точки – найпростішого складового елемента будь-якої геометричної форми.

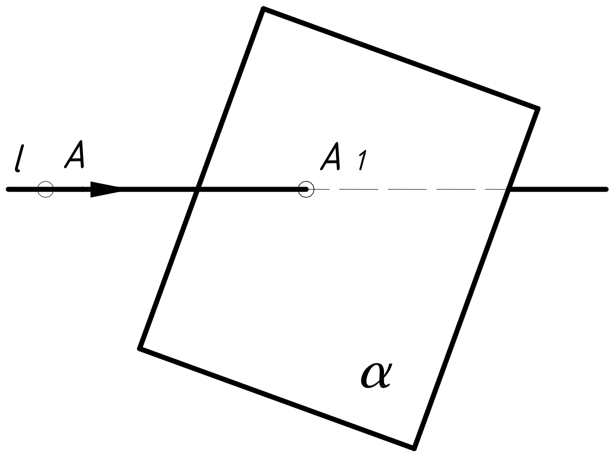


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показано просторову модель методу проекцій, де точка **A** – оригінал, пряма ***l*** – проекційна пряма (промінь), площина **α** – площина проекцій (зображення), точка $\mathbf{A_1}$ – зображення точки **A** на площині **α**, тобто проекція точки **A**. Побудова точки $\mathbf{A_1}$ за методом проекцій полягає в тому, що через точку **A** проводять пряму ***l*** у заданому напрямі до перетину проекційної прямої з площиною **α**. Точку перетину цієї прямої з площиною проекцій називають проекцією точки **A**.

1.1. Способи проектування

Процес побудови зображень за методом проекцій називають *проектуванням.*

Залежно від проекційних прямих існує два способи проектування: *паралельне* (коли проекційні прямі паралельні до заданого напряму проектування) та *центральне* (проекційні прямі виходять з однієї точки).

Центральне проектування – це такий спосіб побудови проекцій, коли проекційні промені напрямлені з однієї точки (центру) і проходять через кожну точку фігури до перетину з площиною проекцій.

Розглянемо побудову проекцій ліній як сукупності точок. Це зводиться до побудови проекцій точок, які сполучаються між собою.

На кривій лінії $\boldsymbol{l}$ (рис. 1.2) вибрано точки **A**, **B**, **C**, **D** і побудовано їх проекції $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_1}$ на площині $\boldsymbol{\alpha}$ при заданому центрі **S**. Сполучивши плавною кривою проекції точок, отримаємо проекції кривої лінії.

Сукупність проекційних прямих утворює конічну поверхню з центром у точці **S**. Ця поверхня проекційна і перетин її з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ дає проекцію заданої кривої лінії. Тому центральні проекції називають також *конічними*.

Паралельне проектування можна вважати окремим випадком центрального проектування, коли центр проекцій лежить у нескінченності й проекційні прямі таким чином стають паралельними між собою. Отже, для побудови паралельних проекцій необхідно задати напрям проектування, до якого проекційні прямі паралельні. Ці прямі можуть бути направлені до площини проекцій під довільним кутом.

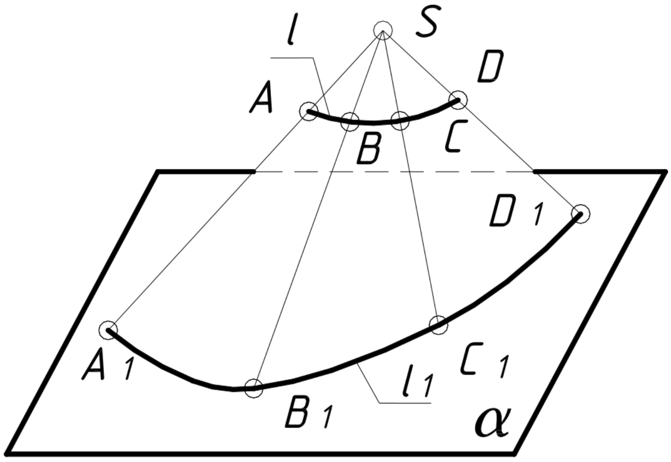


Рис. 1.2

Залежно від цього розрізняють косокутне (рис. 1.3) і *прямокутне* (*ортогональне*) (рис. 1.4) проектування.

Оскільки проекційні прямі, проведені паралельно до напряму проектування, в своїй сукупності утворюють циліндричну проекційну поверхню, паралельні проекції називають також *циліндричними* (рис. 1.5).

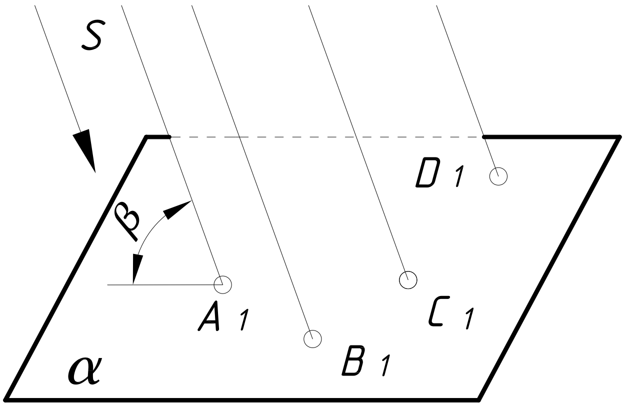


Рис. 1.3

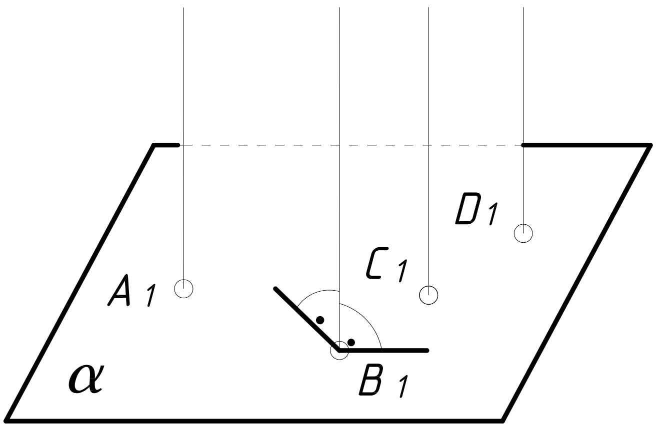


Рис. 1.4

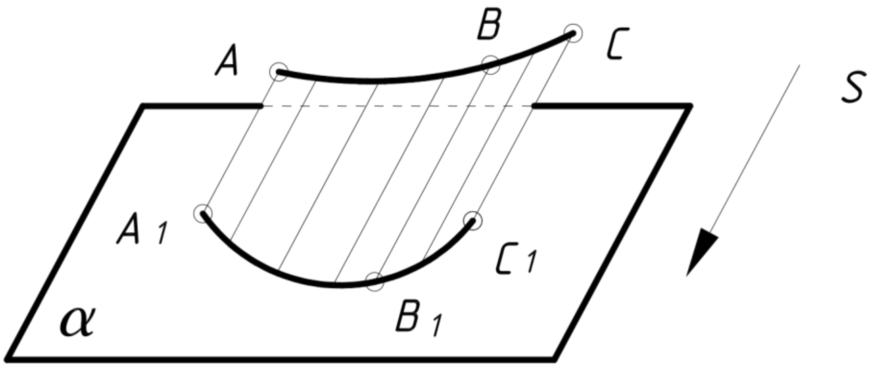


Рис. 1.5

Паралельні проекції як і центральні мають такі властивості:

1) одна проекція точки не визначає її положення в просторі;
2) кожна точка і пряма лінія в просторі мають єдину свою проекцію;

3) кожна точка на площині проекцій може бути проекцією множини точок, якщо через них проходить спільна для них проекційна пряма
(рис. 1.6);

4) кожна лінія на площині проекцій може бути проекцією множини ліній, якщо вони розташовані у спільній для них проекційній площині
(рис. 1.7);

5) для побудови проекцій прямої достатньо спроектувати дві її точки і через проекції цих точок провести пряму лінію;

6) якщо точка лежить на прямій, то її проекції належать проекції цієї прямої (рис. 1.8);

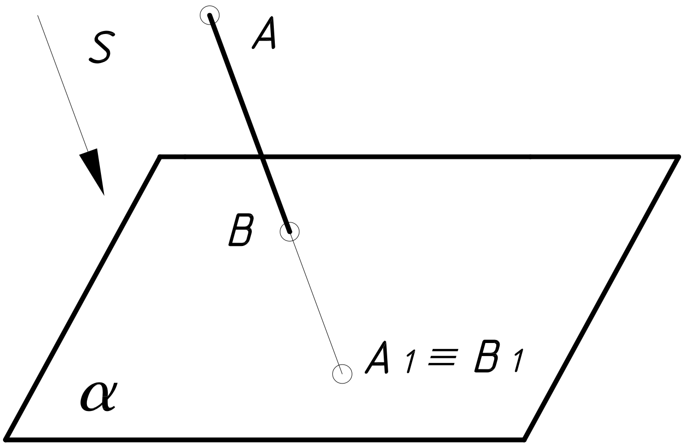


Рис. 1.6

7) при зміні напряму проектування утворюються нові проекції точок і ліній на тій самій площині.

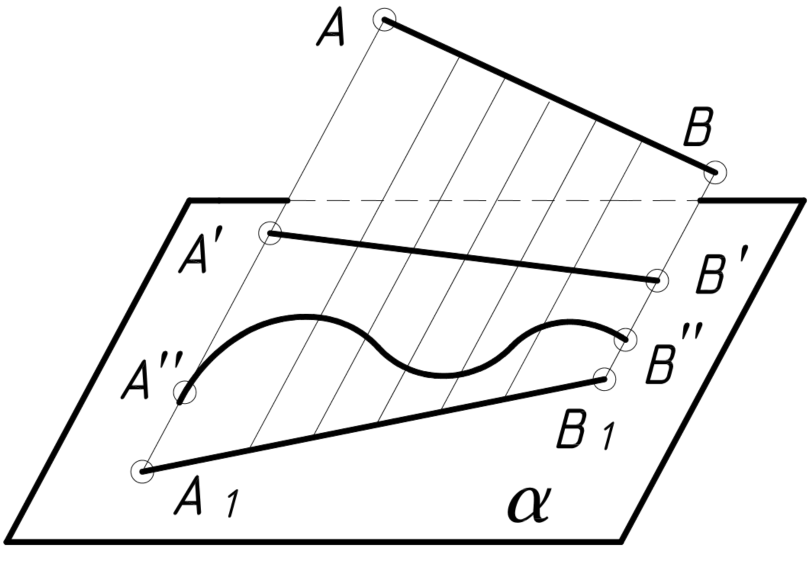


Рис. 1.7

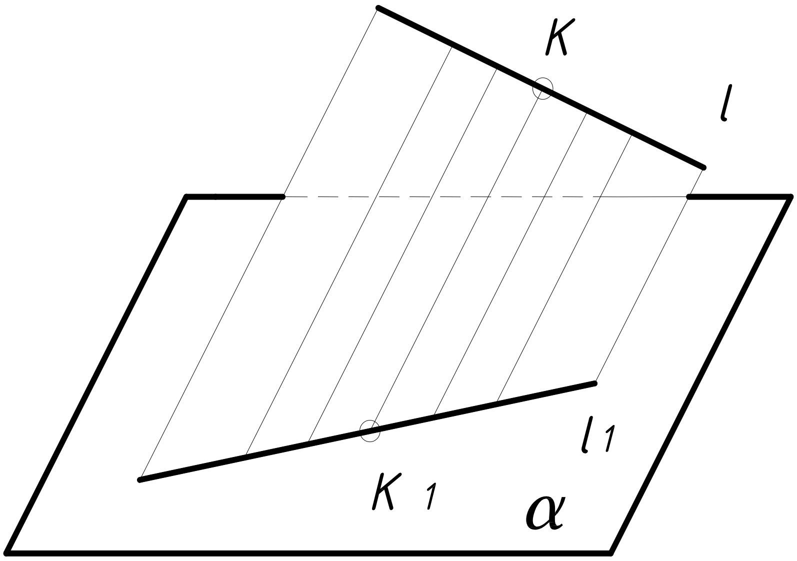


Рис. 1.8

Запитання для самоперевірки

1. Що є предметом нарисної геометрії?
2. В чому суть методу проекцій? Що таке проектування?
3. Назвіть способи проектування.
4. Які проекційні поверхні можуть утворювати проекційні промені?
5. Як побудувати центральну проекцію точки?
6. У якому випадку центальна проекція прямої буде у вигляді точки?
7. У чому суть способупаралельного проектування?
8. Як побудувати паралельну проекцію прямої лінії?
9. Як взаємно розміщені проекції точки і прямої лінії за умови, що точкалежить на прямій?
10. Назвіть основні властивості проекцій.

2. ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

2.1. Задавання точки на кресленні. Лінії зв'язку

Побудова проекцій точок та інших геометричних елементів грунтується на методі ортогонального паралельного проектування.

В ортогональному проектуванні знаходять кілька проекцій зображуваних геометричних елементів на взаємно перпендикулярні площини проекцій. Найпростішим зображенням є рисунок, який складається із двох зв'язаних між собою ортогональних проекцій оригіналу. Для виконання такого рисунка для кожної точки **A** знаходять дві прямокутні проекції $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{A_2}$ на взаємно перпендикулярних площинах проекцій (рис. 2.1).

Одну з таких площин розміщують горизонтально і називають горизонтальною площиною проекцій. Позначають – $\mathbf{П_1}$. Проекції елементів простору на ній $\mathbf{A_1}$, $\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{\alpha_1}$... називають горизонтальними проекціями (точки, прямої, площини).

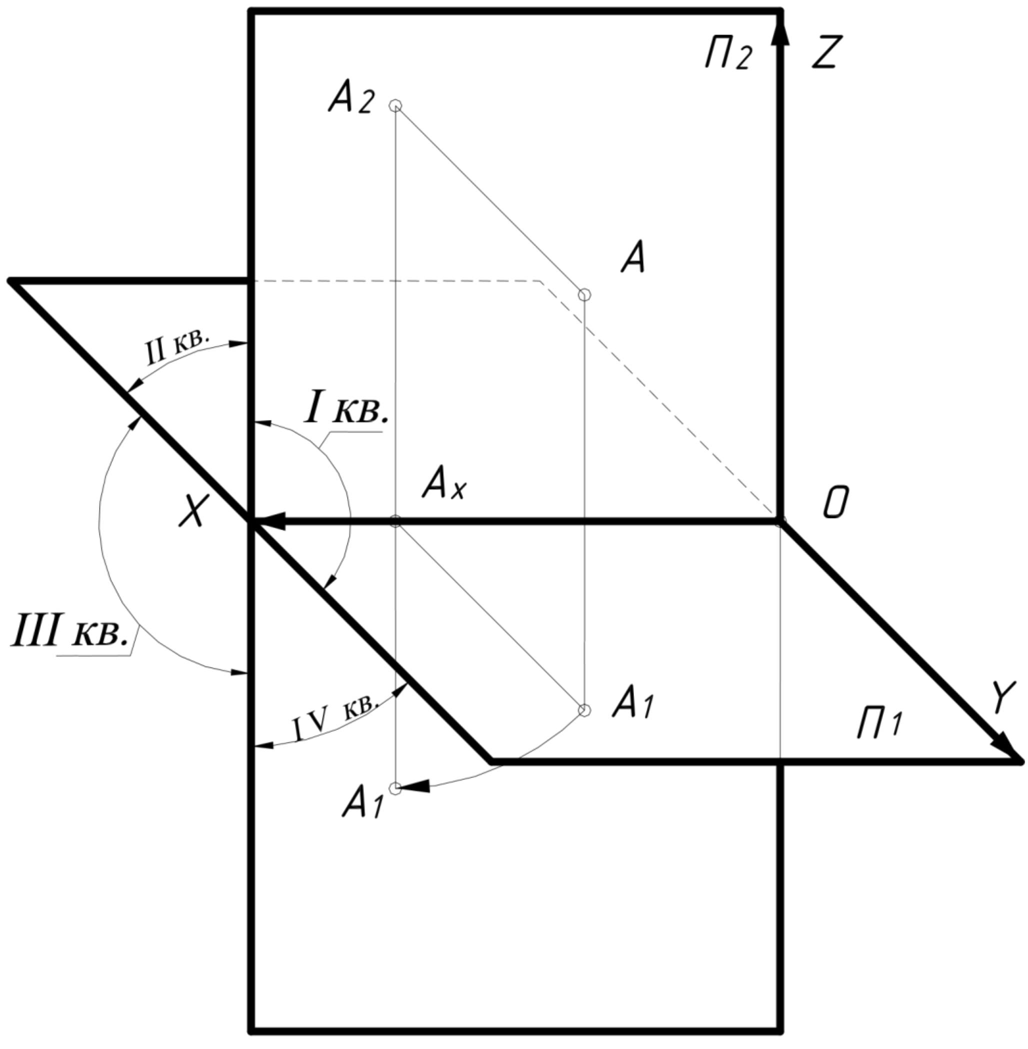


Рис. 2.1

Другу площину проекцій розміщують вертикально і називають фронтальною (вертикальною). Позначають її – **$П_2$**.

Площини проекцій **$П_1$**, **$П_2$** – перпендикулярні між собою і перетинаються по прямій лінії, яку називають віссю проекцій. Три взаємно перпендикулярні осі проекцій **OX**, **OY**, **OZ** утворюють прямокутну систему координат. Уявляючи ці площини нескінченними, зазначимо, що вони, перетинаючись, утворюють *чверті* (*квадранти*).

Як бачимо з рисунка, точка **А** розташована у І чверті та її проекцій **A_1** і **A_2** побудовані:

$AA_1 \perp П_1$; $AA_1 \cap П_1 = A_1$; $AA_2 \perp П_2$; $AA_2 \cap П_2 = A_2$.

Промені **AA_1** і **AA_2** взаємно перпендикулярні. Вони утворюють у просторі площину **$AA_1A_xA_2$**, яка перпендикулярна до площини проекцій **$П_1$** і **$П_2$** і перетинає ці площини по лініях, що проходять через проекції **A_1** і **A_2** деякої точки **А** так, що положення точки в просторі стає визначеним. Для цього слід опустити перпендикуляри – з точки **A_1** до площини **$П_1$** і з точки **A_2** до площини **$П_2$**, які в перетині визначають точку **А.**

Отже, дві проекції точки повністю визначають її положення в просторі відносно даної системи площин проекцій. Однак для зручності рисунки і побудови геометричних зображень виконують на горизонтально розміщеному папері. З цією метою просторову систему двох взаємно перпендикулярних площин проекцій необхідно перетворити на плоску, тобто сумістити площини **$П_1$** і **$П_2$**. Для цього повертають площину **$П_1$** навколо осі проекцій на кут 90^0 до суміщення із площиною **$П_2$**, яка залишається незмінною. Обертання проводять за годинниковою стрілкою (донизу). Після обертання утворюється одна вертикально розміщена площина – площина рисунка, що відомий під назвою *епюра* Монжа
(рис. 2.2, 2.3).

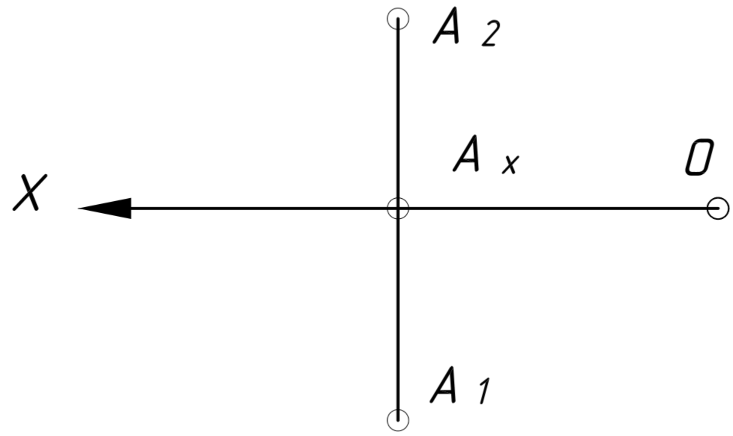


Рис. 2.2

Розглядаючи епюр точки **А**, бачимо, що проекції $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{A_2}$ розміщені на одному перпендикулярі до осі **ОХ**. Пряму $\mathbf{A_1A_2}$, що з'єднує горизонтальну $\mathbf{A_1}$ і фронтальну $\mathbf{A_2}$ проекції точки, називають лінією зв'язку.

Залежно від чверті, в якій знаходиться точка, буде змінюватися її епюр. Розглянемо епюр точок (рис. 2.3.):

– точка **А** розташована у І-ій чверті;
– точка **В** розташована у ІІ-ій чверті; – точка **С** розташована у ІІІ-ій чверті;
– точка **D** розташована у ІV-ій чверті.

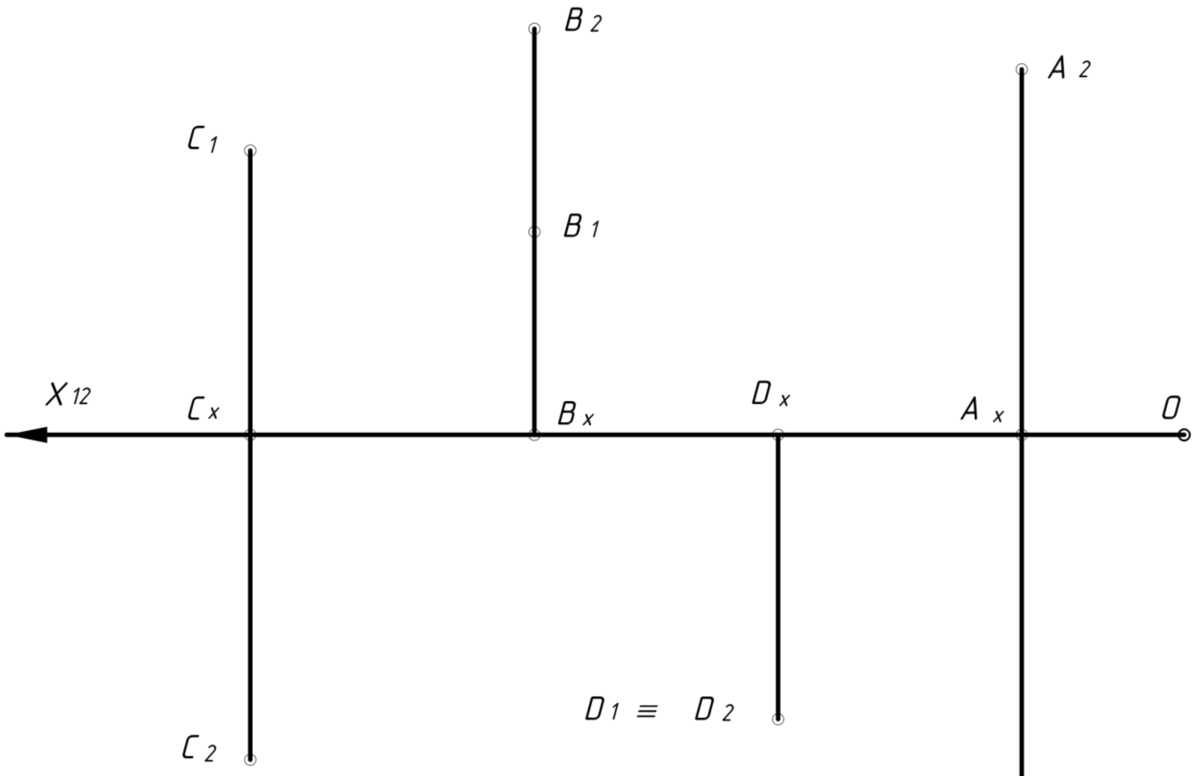


Рис. 2.3

Як бачимо, в системі двох взаємно перпендикулярних площин положення будь-якої точки у просторі стає визначеним. Проте, коли маємо фігуру складної форми, то для з'ясування форми і всіх потрібних її розмірів іноді двох проекцій недостатньо. Тому виникає потреба побудувати ще одне зображення фігури на третій – профільній площині проекцій. Цю площину позначають $\mathbf{П_3}$ і розміщують праворуч від спостерігача, перпендикулярно як до горизонтальної $\mathbf{П_1}$, так і до фронтальної $\mathbf{П_2}$ площин проекцій (рис. 2.4).

Три взаємно перпендикулярні площини проекцій перетинаючись по трьох прямих лініях – осях проекцій – **X**, **Y**, **Z**, поділяють простір на вісім частин – тригранні кути, які називають *октантами.* Ребрами цих кутів є осі **X**, **Y**, **Z**, а гранями – відповідні частини площин проекцій **П1**, **П2**, **П3**. Осі **X**, **Y**, **Z** перетинаються між собою в точці **O**, яку називають початком осей проекцій.

Кожному октанту відповідає своя система знаків напряму осей проекцій. Наприклад, додатну вісь **X** беруть ліворуч від точки **O**, а від'ємну – праворуч; додатну вісь **Y** – до нас від точки **O** і від'ємну – від нас; додатну вісь **Z** – вгору від точки **O**, від'ємну – вниз (див. таблицю 2.1). Якщо осям **X**, **Y**, **Z** надати певних числових значень, то положення точки в просторі буде цілком визначеним. Наприклад, щоб показати, що точка **A** розташована у VI октанті, треба записати: **A** (-**x**, -**y**, **z**). Оскільки числове значення осі у прийнятих одиницях (міліметр, сантиметр тощо) показує відстань точки, а знак «**+**» і «**-**» – напрямок від початку осей, то відстань і напрямок точки від площин проекцій стають відомими.

Користуючись описаним раніше способом суміщення площин проекцій, можна перейти від просторової системи трьох взаємно перпендикулярних площин проекцій до плоскої (епюра), тобто до зображення суміщених з фронтальною площиною проекцій горизонтальної та профільної площин проекцій (рис. 2.5). Для цього горизонтальну площину проекцій обертають навколо осі **X** як і в системі **П1** і **П2**, а профільна площина проекцій обертається навколо осі проекцій **Z** проти руху годинникової стрілки до суміщення з фронтальною площиною проекцій. При цьому вісь **Y** ніби роздвоюється.

Таблиця 2.1

Вісь проекцій	**Знак в октанті**							
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

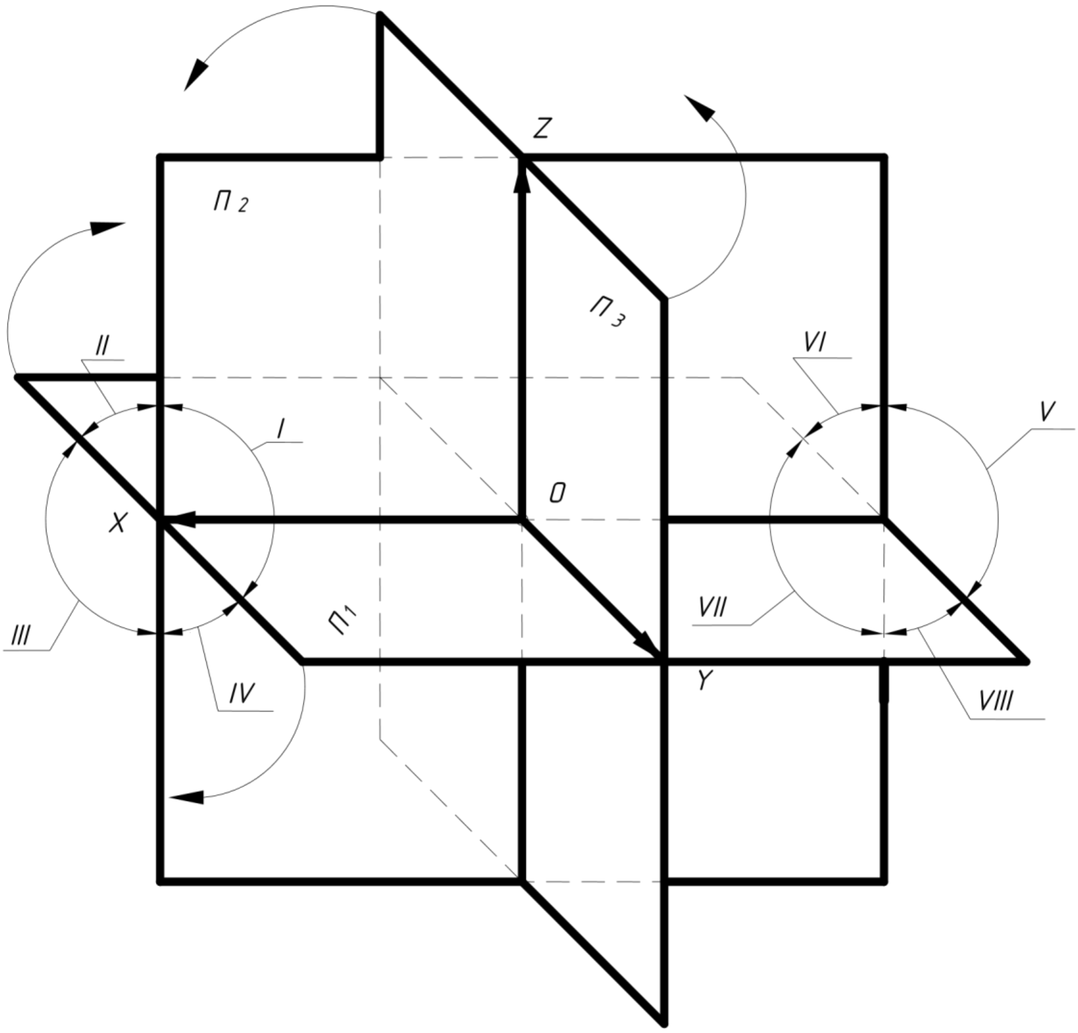


Рис. 2.4

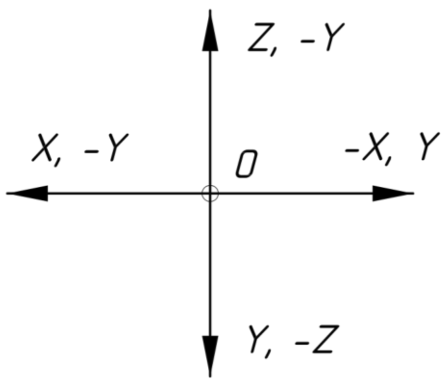


Рис. 2.5

Розглянемо точку **A**, що розміщена в І-му октанті (рис. 2.6). Як видно з епюра, горизонтальна $\mathbf{A_1}$ і фронтальна $\mathbf{A_2}$ лежать на вертикальній лінії зв'язку, фронтальна $\mathbf{A_2}$ і профільна $\mathbf{A_3}$ – на горизонтальній (пряма $\mathbf{A_2A_3}$ перпендикулярна до осі **OZ**); горизонтальну $\mathbf{A_1}$ і профільну $\mathbf{A_3}$ зв'язує ламана лінія $\mathbf{A_1A_yA_yA_3}$. Профільну проекцію $\mathbf{A_3}$ за заданою горизонтальною і фронтальною можна побудувати за допомогою дуги **OAy** (проекційним способом). Для цього можна використати також бісектрису кута **YOY** – пряму **k**.

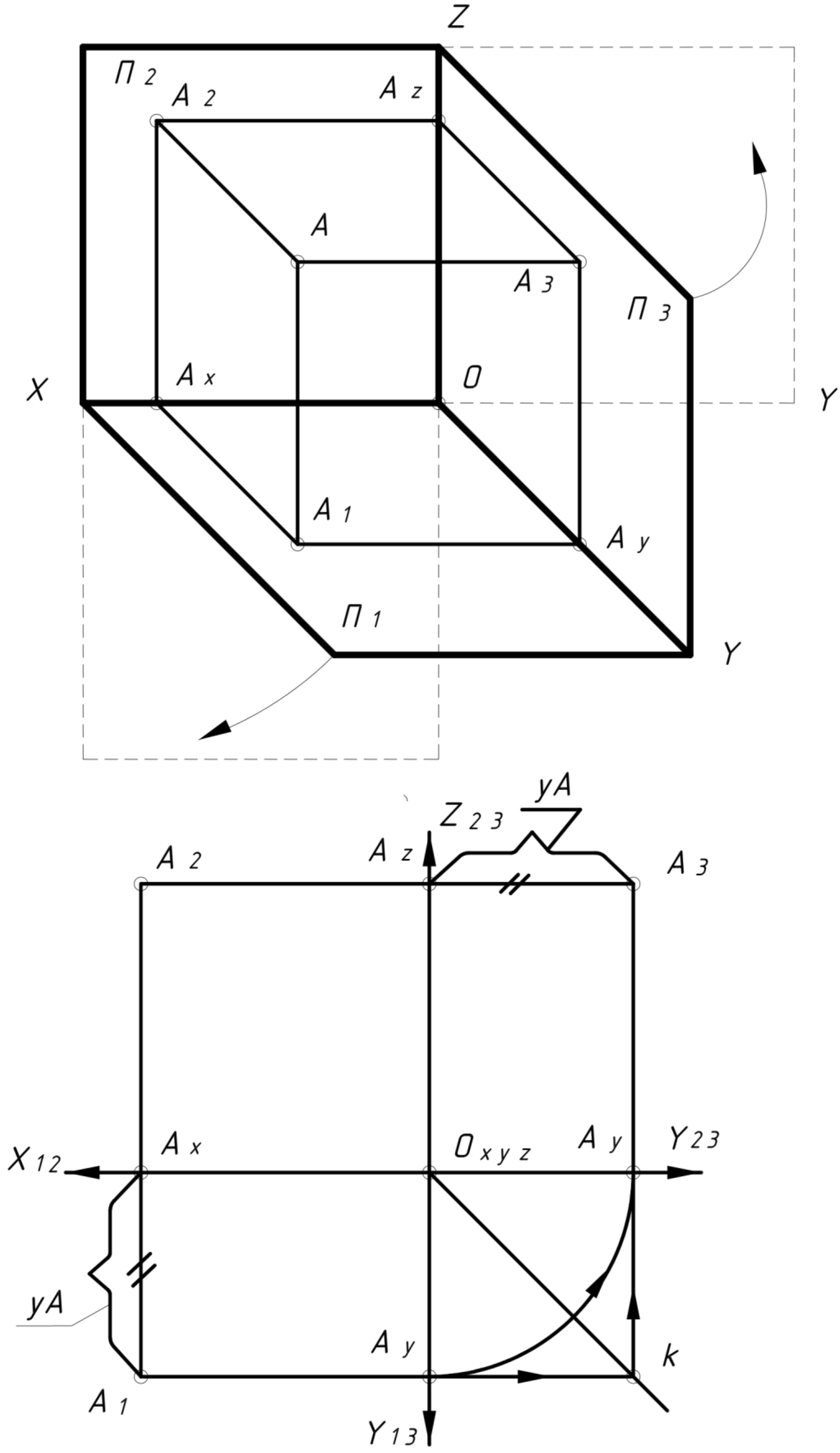


Рис. 2.6

На рис. 2.7 – 2.13 наведено наочні зображення та епюри точок, що знаходяться у II-му – VIII-му октантах.

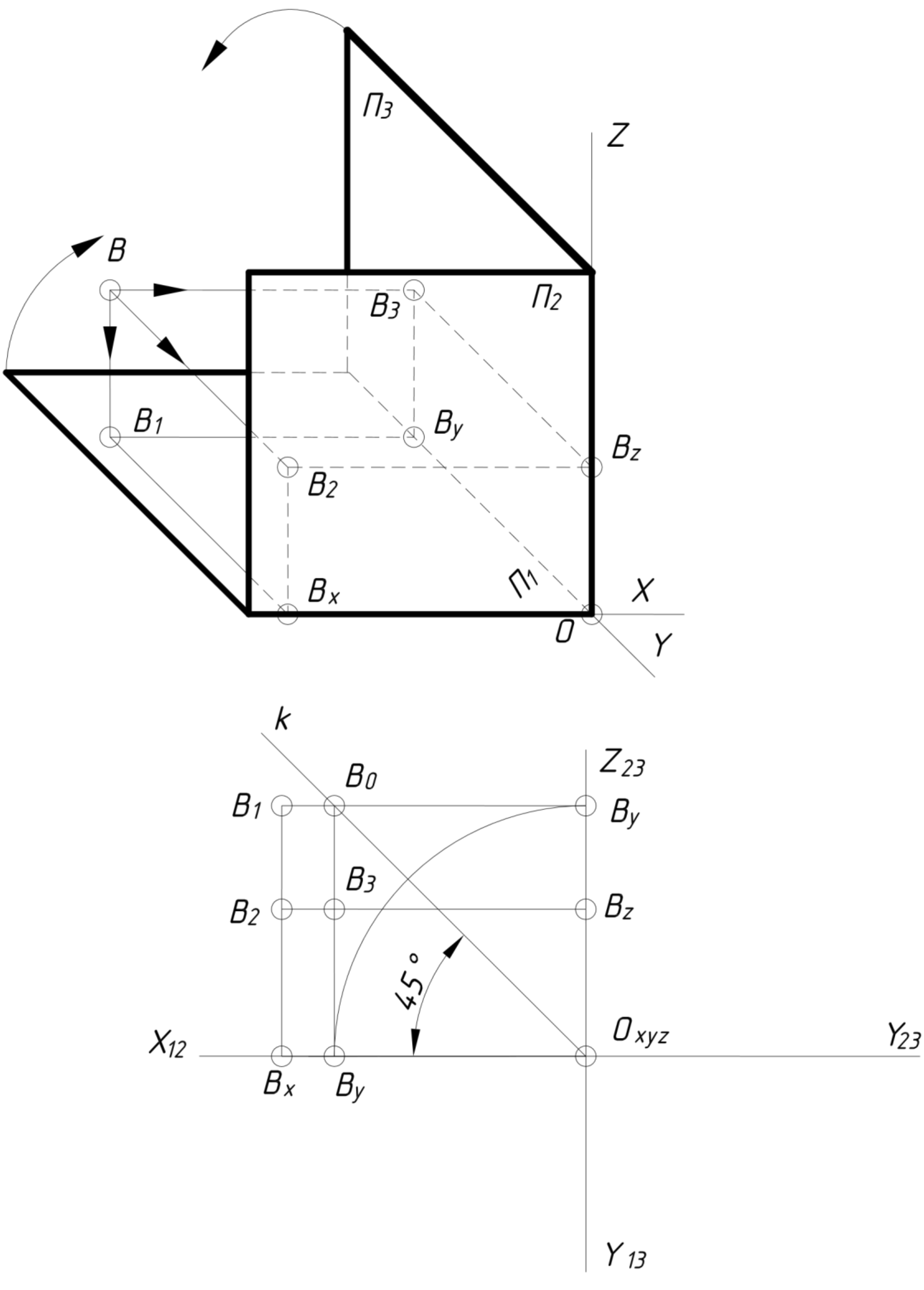


Рис. 2.7

Точка **В** знаходиться у другому октанті.

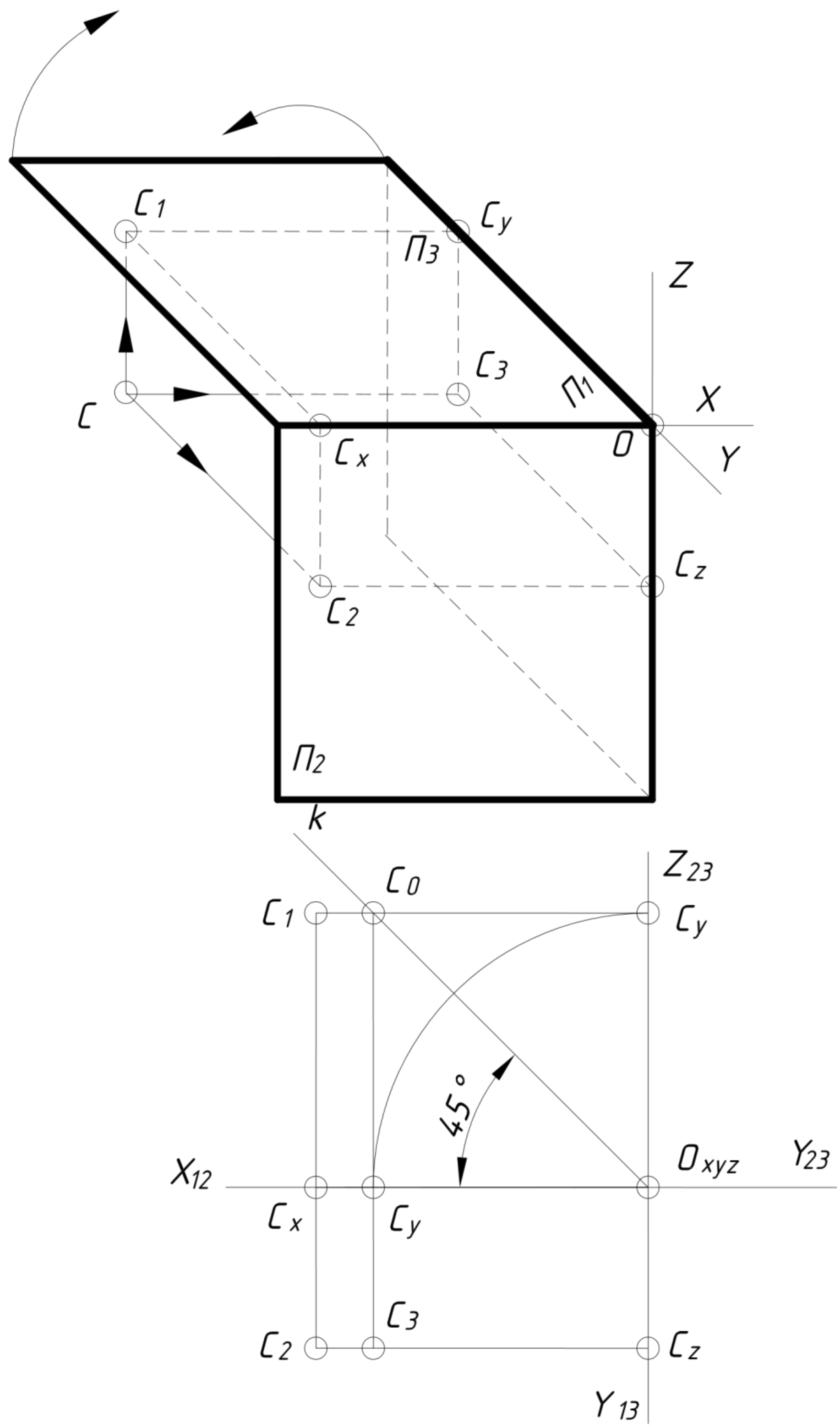


Рис. 2.8

Точка **C** знаходиться у третьому октанті.

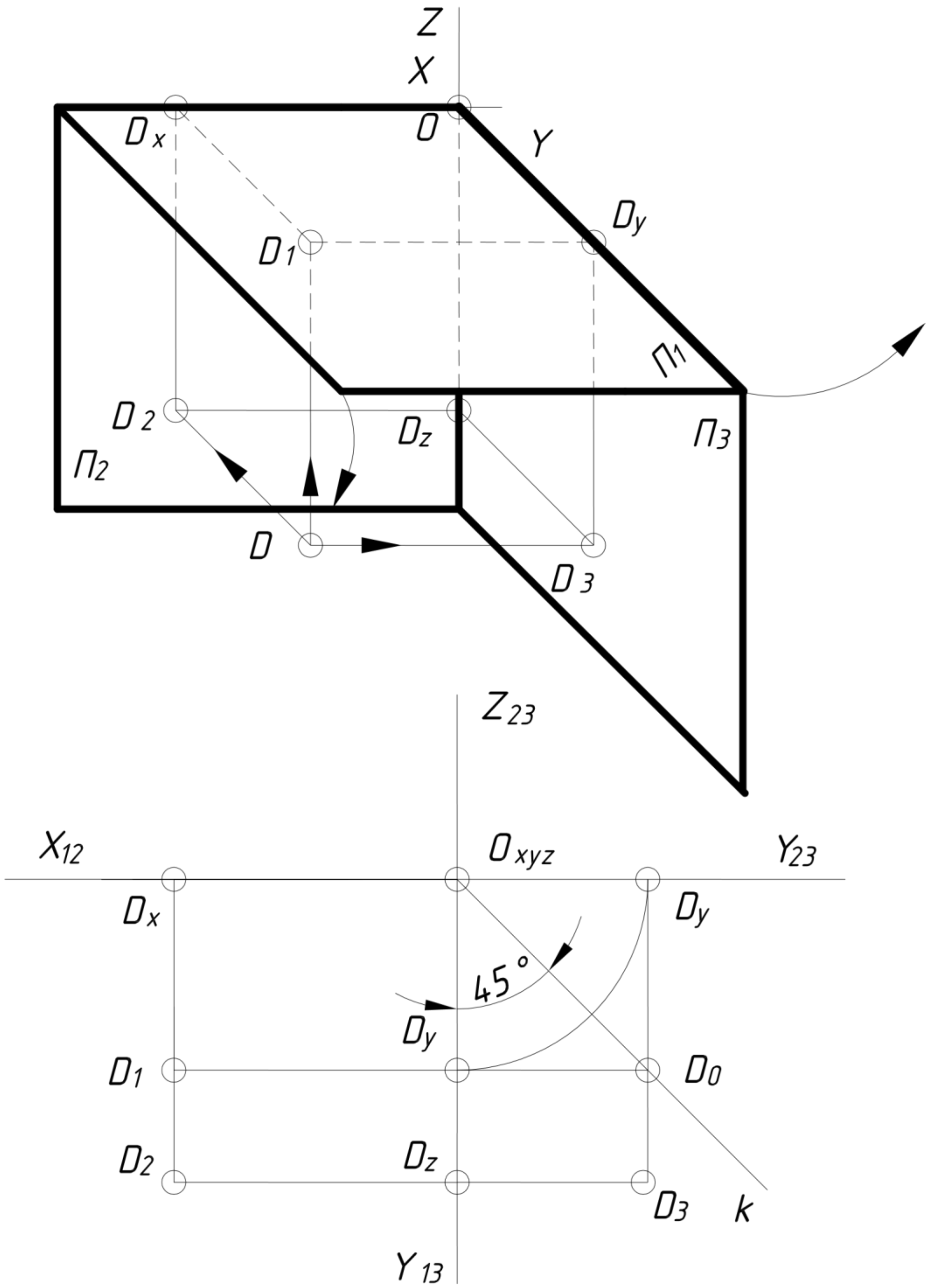


Рис. 2.9

Точка **D** знаходиться у четвертому октанті.

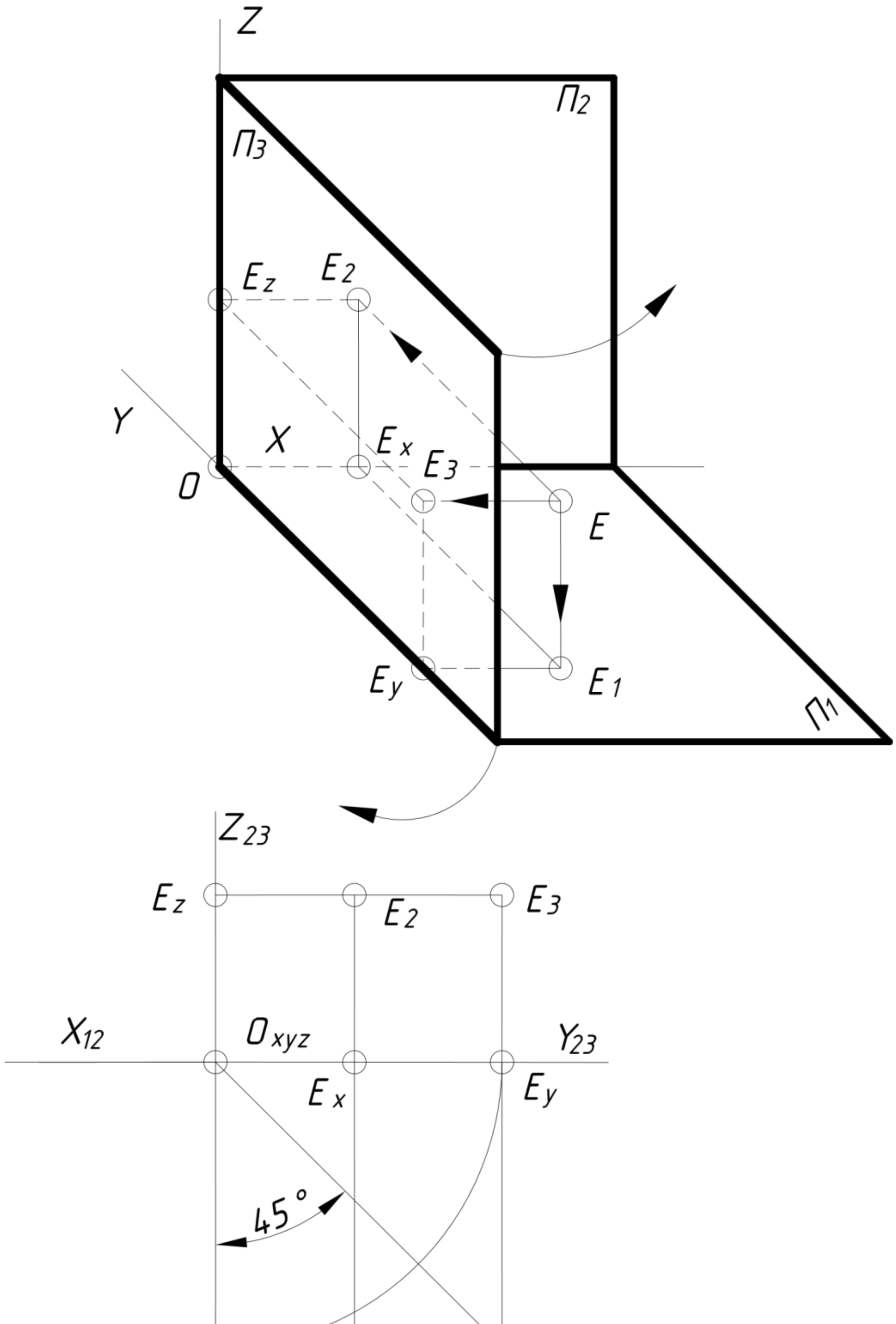


Рис. 2.10

Точка **E** знаходиться у п’ятому октанті.

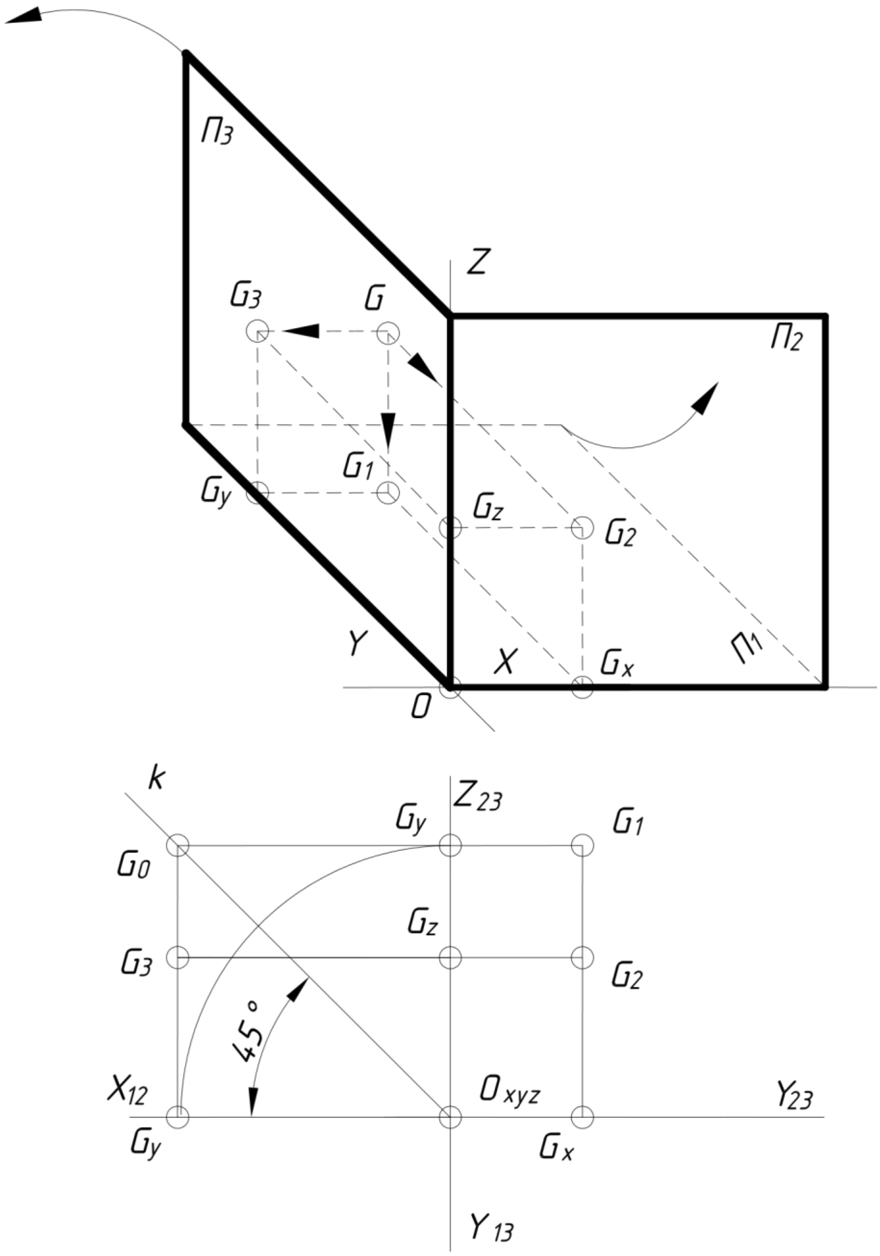


Рис. 2.11

Точка **G** знаходиться у шостому октанті.

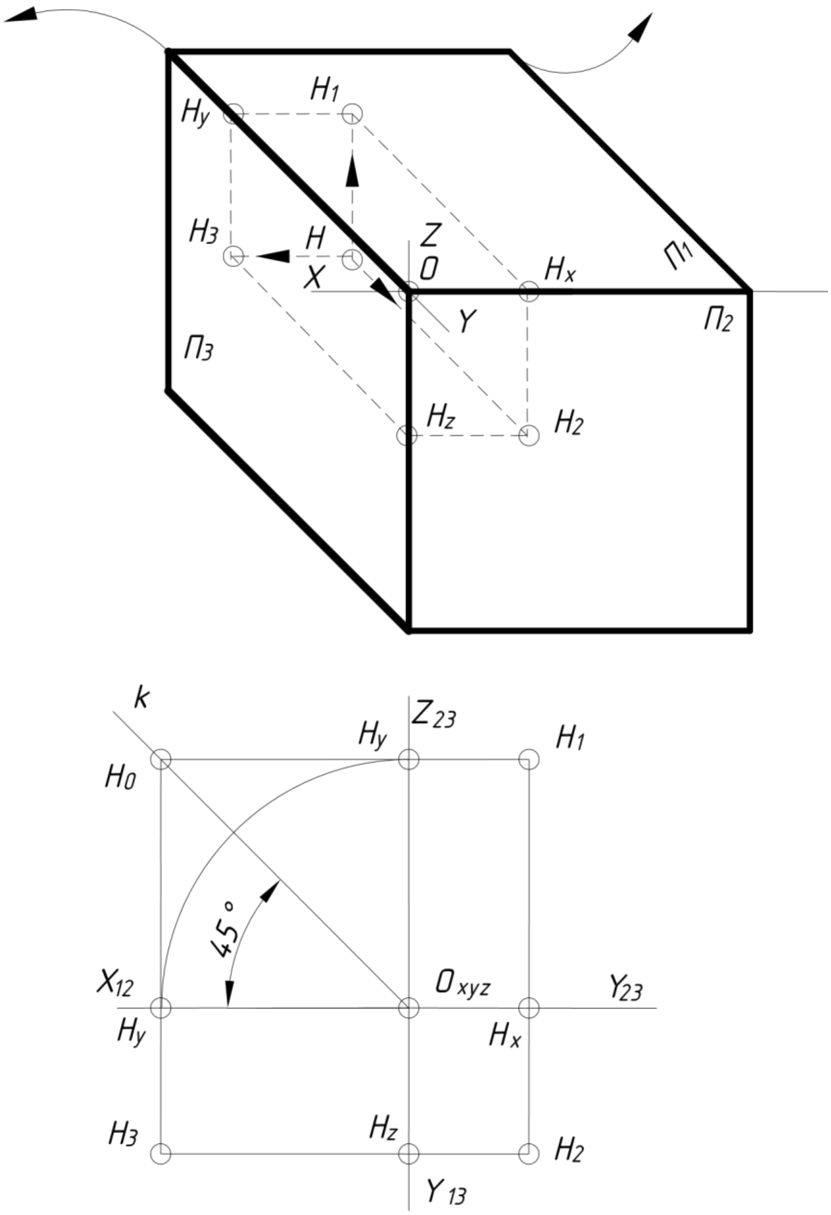


Рис. 2.12

Точка **Н** знаходиться у сьомому октанті.

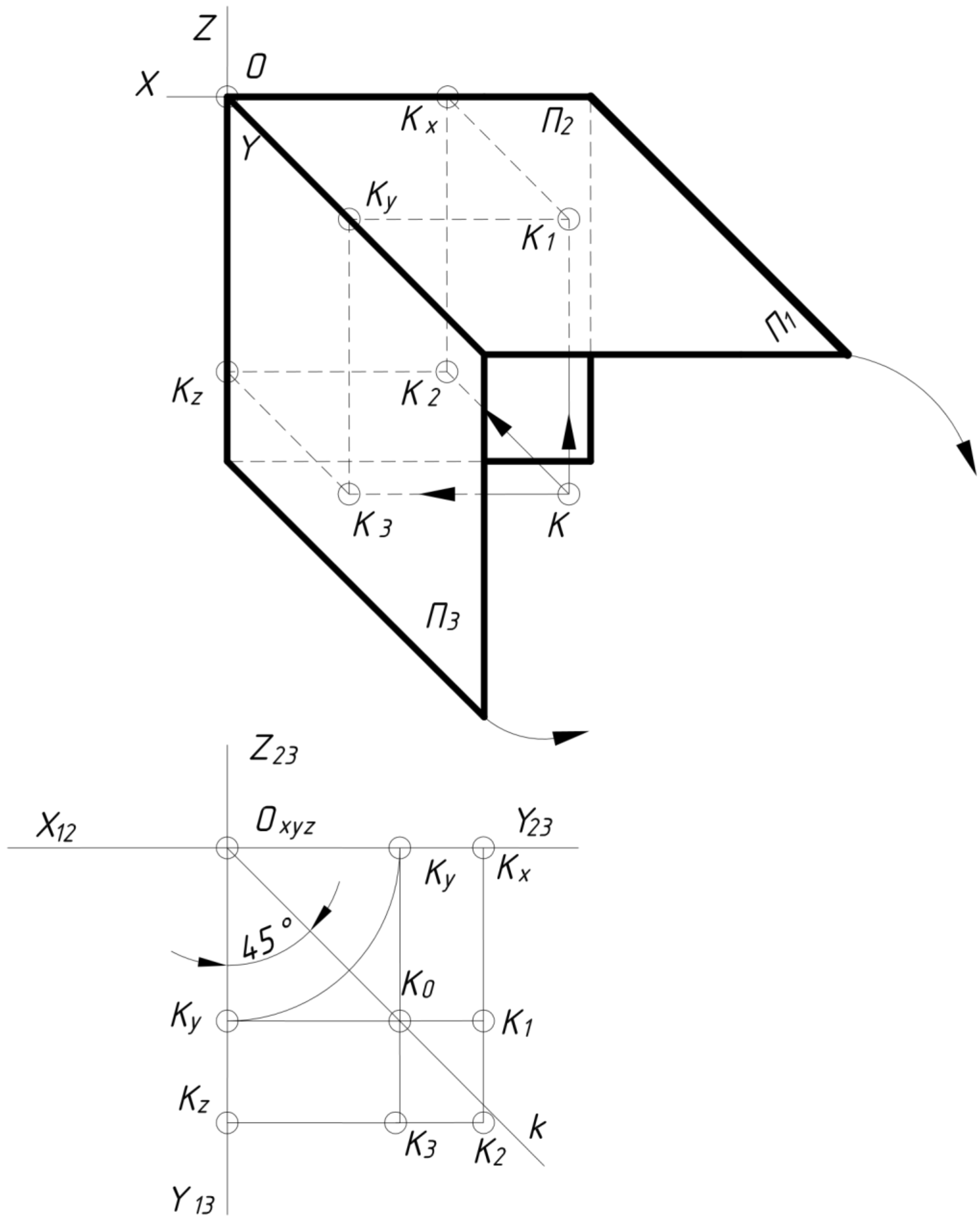


Рис. 2.13

Точка **К** знаходиться у восьмому октанті.

Будь-яка точка може займати визначене положення у просторі будьякого октанта за умови, що задані її координати не дорівнюють нулю і відомі знаки координат. Проте точка може лежати в будь-якій із площин проекцій, на осі проекцій чи бути суміщеною з точкою **О** тоді, коли одна, дві або три координати дорівнюватимуть нулю. У цьому разі точка займає особливе положення відносно площин проекцій.

На рис. 2.14 показано наочне зображення і епюр точок **А**, **В**, **С**. Точка **А** лежить у площині $\mathbf{П_1}$, оскільки координата $\mathbf{z} = 0$ і проекція $\mathbf{A_1}$ збігається з точкою **A**. Проекції **A2** і **A3** лежать на відповідних осях проекцій. Точка **B** розміщена на осі **Z**, бо її координати **x** та **y** дорівнюють нулю. Точка **C** суміщена з точкою **O** – всі три координати цієї точки дорівнюють нулю.

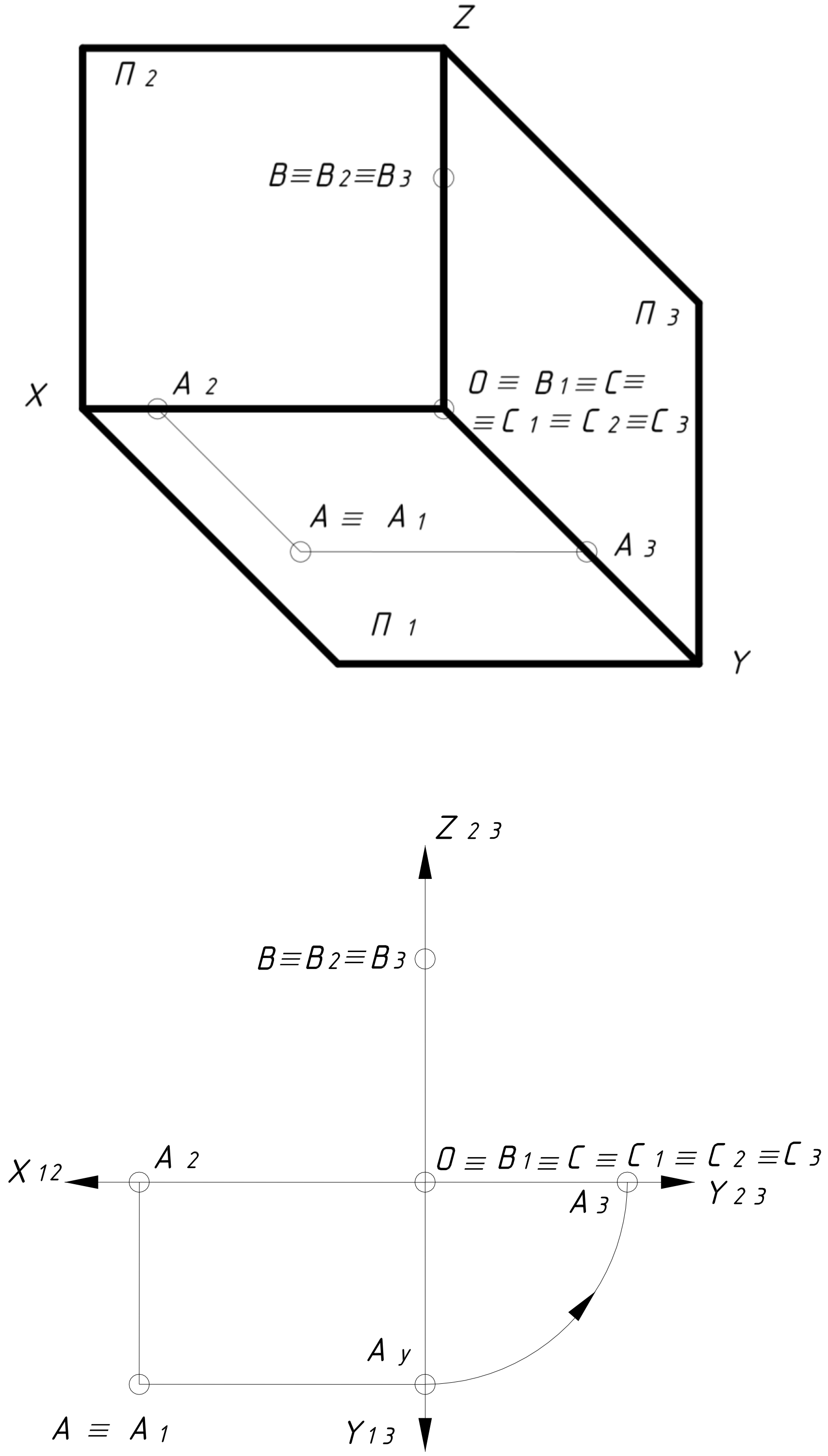


Рис. 2.14

2.2. Взаємне положення двох точок. Конкуруючі точки

При побудові проекцій просторових фігур часто виникає необхідність зобразити деякі її точки, для яких дві будь-які координати однакові.
Наприклад.

Дано: точку **A** з координатами x=20; y=10; z=10 і точку **B** з координатами x=20; y=10; z=20 (рис. 2.15). На рис. 2.15 точки **A** і **B**, маючи однакові координати x і y, лежать на одній проекційній прямій, тому їх проекції $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{B_1}$ збігатимуться. Розглянемо точки **C** і **D** з координатами: **C**: x=30; y=10; z=20; **D**: x=30; y=20; z=20.

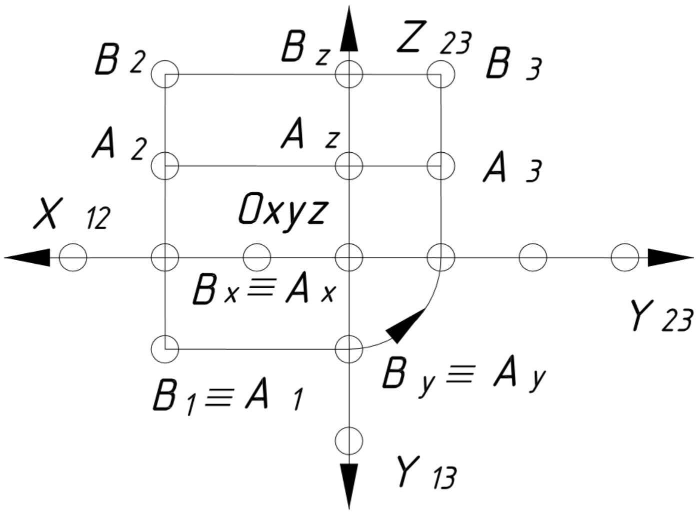


Рис. 2.15

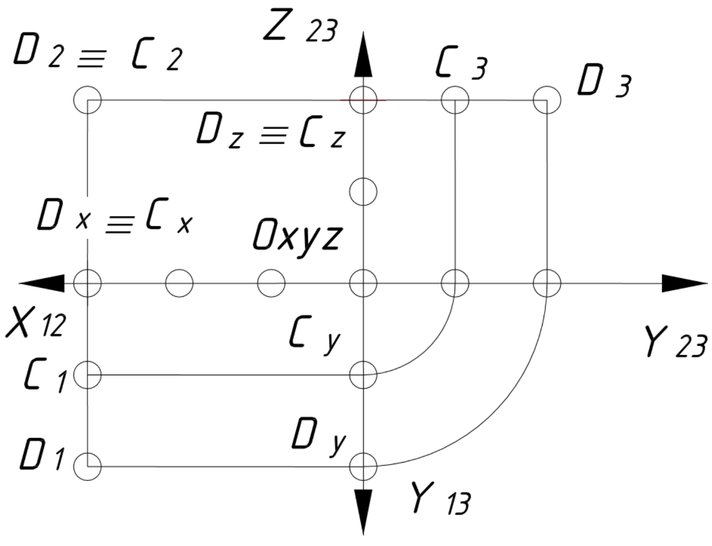


Рис. 2.16

У цьому випадку точки **C** і **D** лежать на проекційній прямій, але збігаються точки $\mathbf{C_2}$ і $\mathbf{D_2}$ Точки, що лежать на одній проекційній прямій, називають конкуруючими. Якщо дві точки лежать на одній проекційній прямій, то одна з них закриває другу. Виникає потреба визначити, яка з цих точок видима, а яка невидима. Із рис. 2.15 бачимо, що точка **B** розміщена вище за точку $\mathbf{A_1}$, оскільки координата **Z** точки **B** більша. Тому при проектуванні на горизонтальну площину проекцій точка **B** закриває точку **A**. Точка **A** – невидима.

Отже, можна зробити висновок, що із двох горизонтальноконкуруючих точок на горизонтальній площині проекцій, буде видима та, яка розміщена у просторі вище. Про це свідчить фронтальна проекція, на якій обидві точки видимі.

Міркуючи аналогічно і розглядаючи рис. 2.16, можна зробити висновок, що з двох фронтально-конкуруючих точок на фронтальній площині проекцій видима та, що розміщена ближче до спостерігача. Це добре видно на горизонтальній площині проекцій, де проеція $\mathbf{D_1}$ більш віддалена від осі $\mathbf{X_{12}}$, ніж $\mathbf{C_1}$. Отже, на фронтальній проекції точка **D** – видима, а **C** – невидима.

Можна також показати, що з двох проекцій точок на площині проекцій $\mathbf{\Pi_3}$ видима та, у якої координата **X** більша.

У позначенні проекцій двох конкуруючих точок, які збігаються, прийнято позначати першою проекцію видимої точки, другою – невидимої.

2.3. Побудова безосного епюра точки

В практиці проектування проекції об’єкта розміщують на довільних відстанях одна від одної в проекційному зв’язку. Наприклад, при побудові ортогональних проекцій точки **A** горизонтальну проекцію $\mathbf{A_1}$ і фронтальну $\mathbf{A_2}$ розміщують на вертикальній лінії зв’язку $\mathbf{A_1A_2}$, а фронтальну проекцію $\mathbf{A_2}$ і профільну $\mathbf{A_3}$ – на горизонтальній лінії зв’язку $\mathbf{A_2A_3}$ (рис. 2.17).

При побудові ортогональних проекцій системи точок одну точку приймають за базову і позначають верхнім лівим індексом у вигляді нуля (наприклад, $\mathbf{^0A}$). Проекції базової точки розміщують довільно на відповідних лініях зв’язку, а проекції решти точок даної системи будують за відносними координатами, які пов’язують їх з прийнятою базовою точкою системи. При цьому слід пам’ятати, що:

– для заданих точок система площин проекцій має бути одна і та ж;

– точки, які лежать у площинах проекцій, визначають двома координатами (третя координата для них дорівнює нулю).

При побудові епюра знаки відносних координат визначають відносно базової точки. Координата **Х** може бути відкладена відносно горизонтальної або фронтальної проекції базової точки (зі знаком «плюс» ліворуч, зі знаком «мінус» праворуч); координату **У** відкладають відносно горизонтальної проекції базової точки (додатні значення вниз, від'ємні – вгору) і відносно профільної проекції базової точки (додатні значення праворуч, від'ємні – ліворуч). Координату **Z** відкладають тільки відносно фронтальної проекції базавої точки (додатні значення – вгору, від'ємні – вниз).

Приклад

Побудувати три проекції точок ^{0}**А** і **В**, якщо дано відносні координати точки **В** ($x_в$=15; $y_в$=17; $z_в$=23), а точка **А** є базовою.

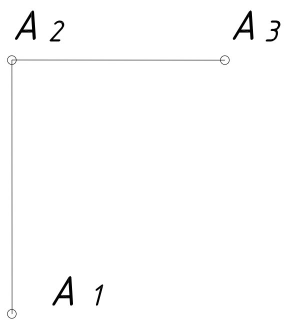


Рис. 2.17

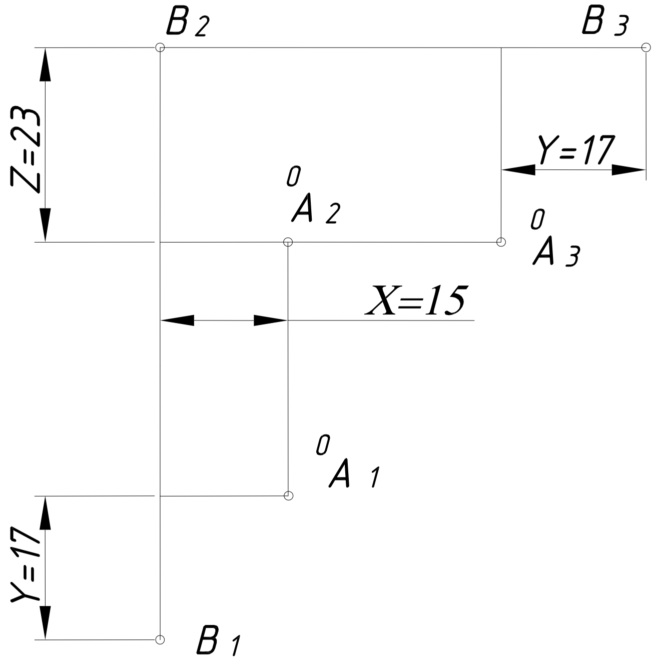


Рис. 2.18

Розв'язування

Приймаємо проекції ^{0}**А**$_1$ ^{0}**А**$_2$ ^{0}**А**$_3$ базової точки ^{0}**А**, а проекції точки **В** будуємо за відносними координатами ($x_в$=15; $y_в$=17; $z_в$=23), як зображено на рис. 2.18.

З розглянутого бачимо, що відносні координати пов'язують між собою точки заданої системи так, що за епюром однієї з них (базової) можна побудувати проекції решти точок за їх відносними координатами.

«Приймаємо» означає, що будуємо три (або дві) проекції базової точки як на рис. 2.17.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке система квадрантів?
2. Що називають віссю проекцій?
3. Як утворюється епюр Монжа?
4. Як побудувати проекції точки в системі квадрантів?
5. Що таке лінії зв'язку і якими бувають ці лінії?
6. Чому лінії зв'язку перпендикулярні до відповідних осей проекцій?
7. Як утворюється система октантів?
8. Як побудувати профільну проекцію точки за відповідними її горизонтальною і профільною проекціями?
9. У чому подібність ортогональних проекцій і системи прямокутних координат?
10. Коли точка займає особливе положення відносно площин проекцій?
11. Що таке конкуруючі точки?
12. Що таке безосний епюр?
13. Базова точка та побудова відносно неї ортогональних проекцій інших точок.

3. ПРЯМА

3.1. Задавання прямої на кресленні

Пряма – це сукупність «нескінченного» ряду точок. Щоб побудувати проекції прямої, достатньо визначити положення двох її точок (відрізка).

Отже, досить на прямій визначити дві точки **A** і **B**, якими виділяємо відрізок на прямій ***l***, і за відомим способом побудувати проекції цих точок. Потім сполучити однойменні проекції точок прямими лініями й отримати проекції відрізка **AB** прямої лінії ***l*** (рис. 3.1 і 3.2).

Профільну проекцію проямої за заданими горизонтальною і фронтальною проекціями можна також побудувати, використовуючи різницю відстаней її точок до фронтальної площини, тобто координатним способом побудови проекцій точки. Цей спосіб простіший, точніший і використовується в практиці виконання рисунків (рис. 3.3).

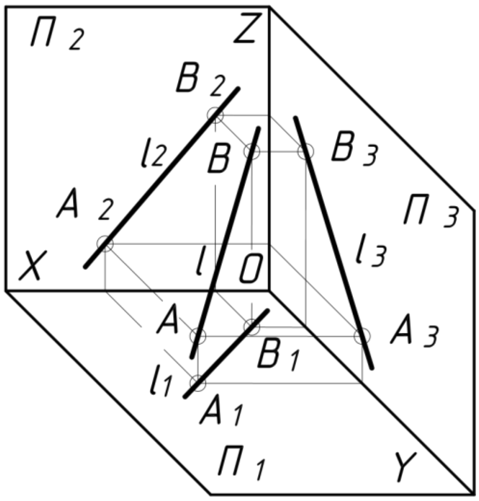


Рис. 3.1

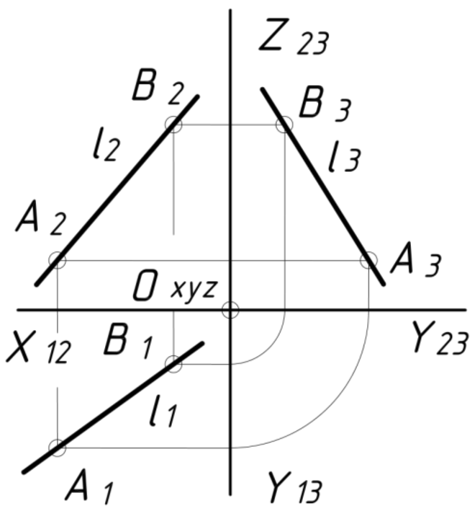


Рис. 3.2

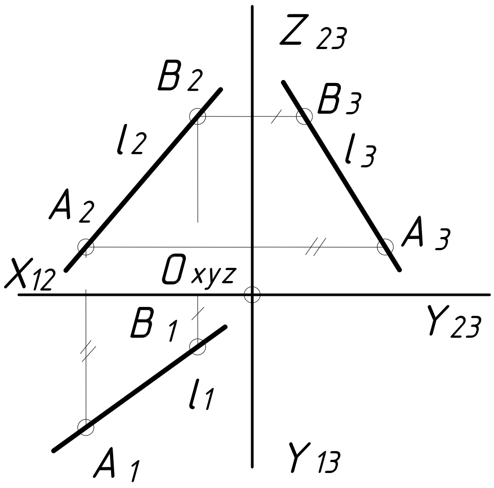


Рис. 3.3

3.2. Класифікація прямих

Положення прямої у просторі характеризується її положенням відносно площин проекцій. На епюрі положення прямої у просторі визначається положенням проекцій прямої щодо осей проекцій. Відносно трьох площин проекцій **П**$_1$; **П**$_2$; **П**$_3$ – пряма лінія може займати різні положення. *Загальне* положення – це таке положення прямої, коли вона перетинає всі три площини проекцій під довільними кутами, тобто коли пряма не паралельна і не перпендикулярна до жодної із площин проекцій (рис. 3.4). Усі інші положення прямої називають *особливими*.

Це – прямі *рівня*:

– *горизонтальна* пряма – пряма, паралельна до горизонтальної площини проекцій (**П**$_1$) (рис. 3.5);

– *фронтальна* пряма – пряма, паралельна до фронтальної площини проекцій (**П**$_2$) (рис. 3.6);

– *профільна* пряма – пряма, паралельна до профільної площини – проекцій (**П**$_3$) (рис. 3.7).

Інший вид прямих особливого положення – *проектуючі* прямі: – *горизонтально-проектуюча* – пряма, перпендикулярна до

горизонтальної площини проекцій (**П**$_1$) (рис. 3.8);

– *фронатально-проектуюча* – пряма, перпендикулярна до

фронтальної площини проекцій (**П**$_2$) (рис. 3.9);

– *профільно-проектуюча* – пряма, перпендикулярна до профільної площини проекцій (**П**$_3$) (рис. 3.10).

Крім того пряма може лежати на будь-якій площині проекцій (рис. 3.11) чи розміщуватися на одній із трьох осей проекцій (рис. 3.12).

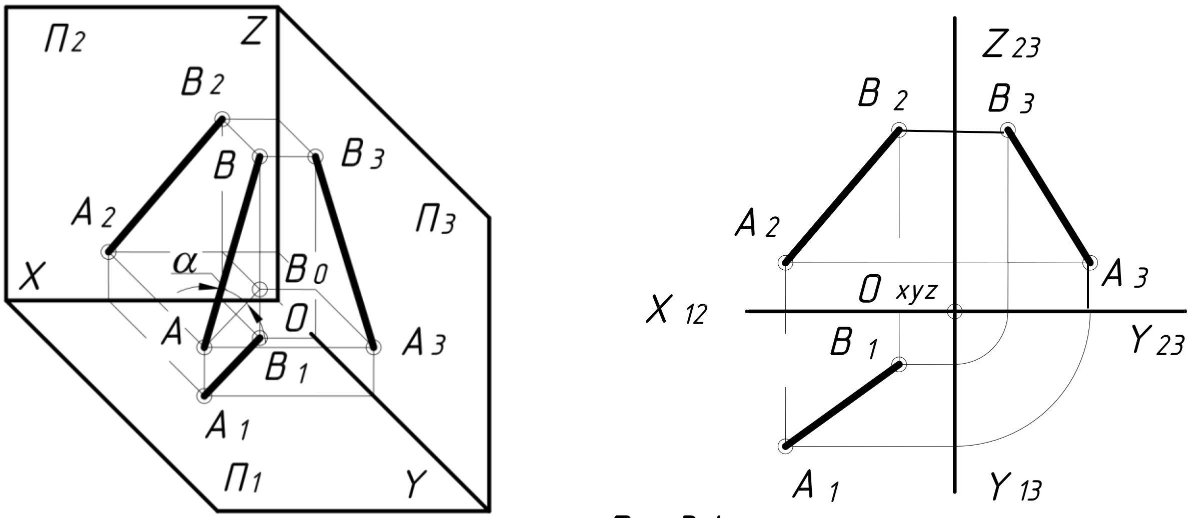


Рис.3.4

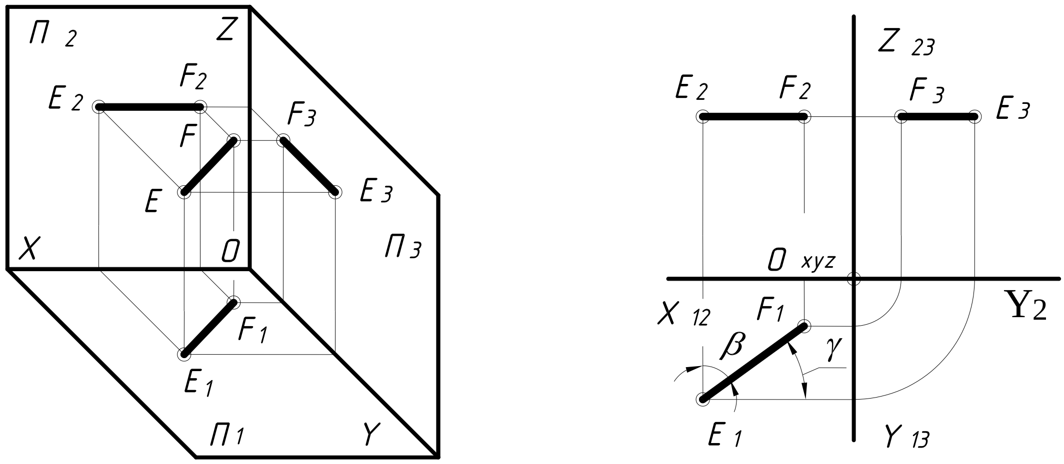


Рис.3.5

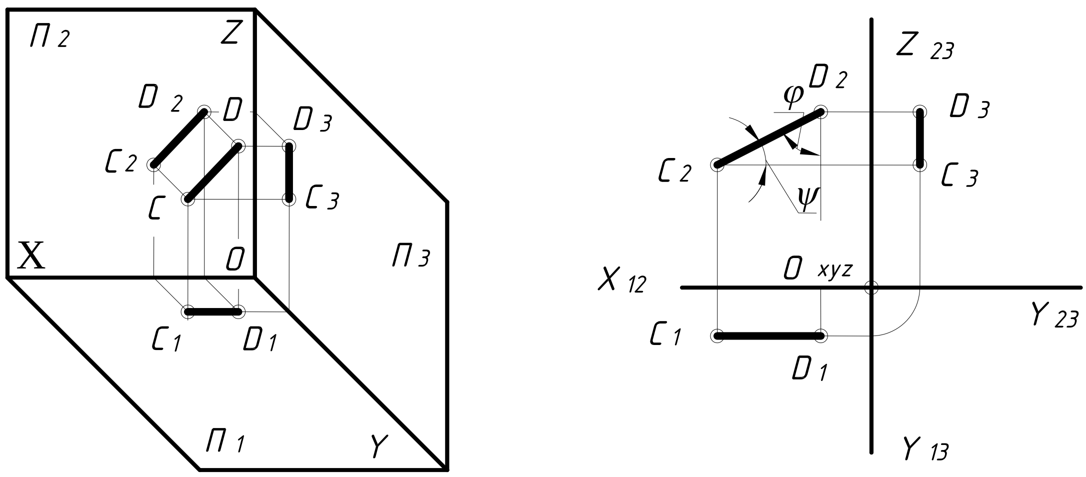


Рис.3.6

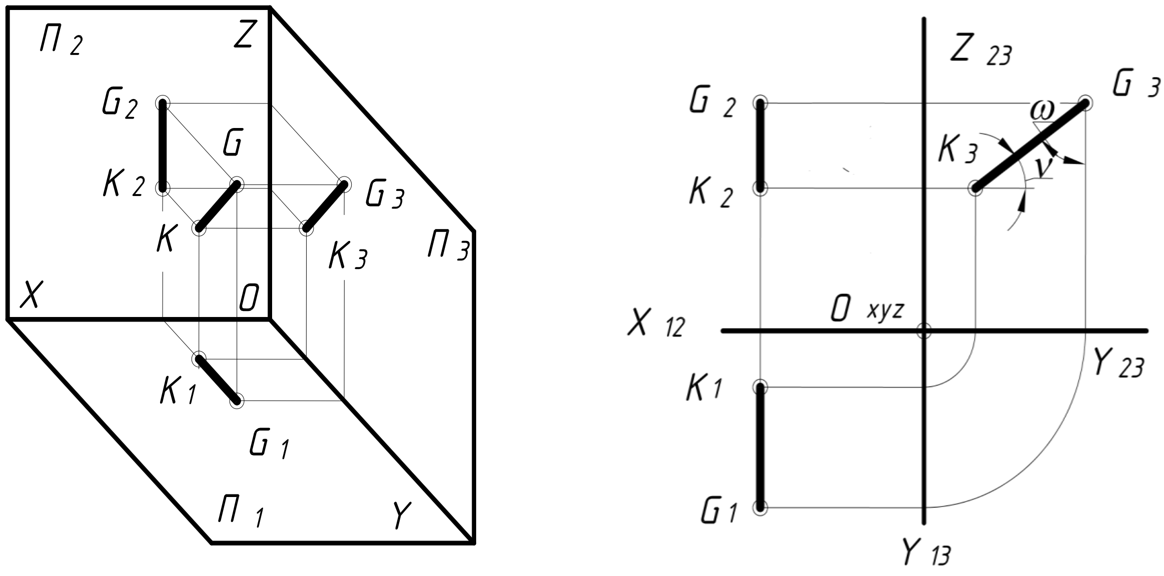

П 2
Z
G 2
G
K 2
G 3
K
K 3
П 3
X
O
K 1
G 1
П 1
Y
Z 23
G 3
G 2
ω
K 3
ν
K 2
O xyz
X 12
Y 23
K 1
G 1
Y 13

Рис.3.7

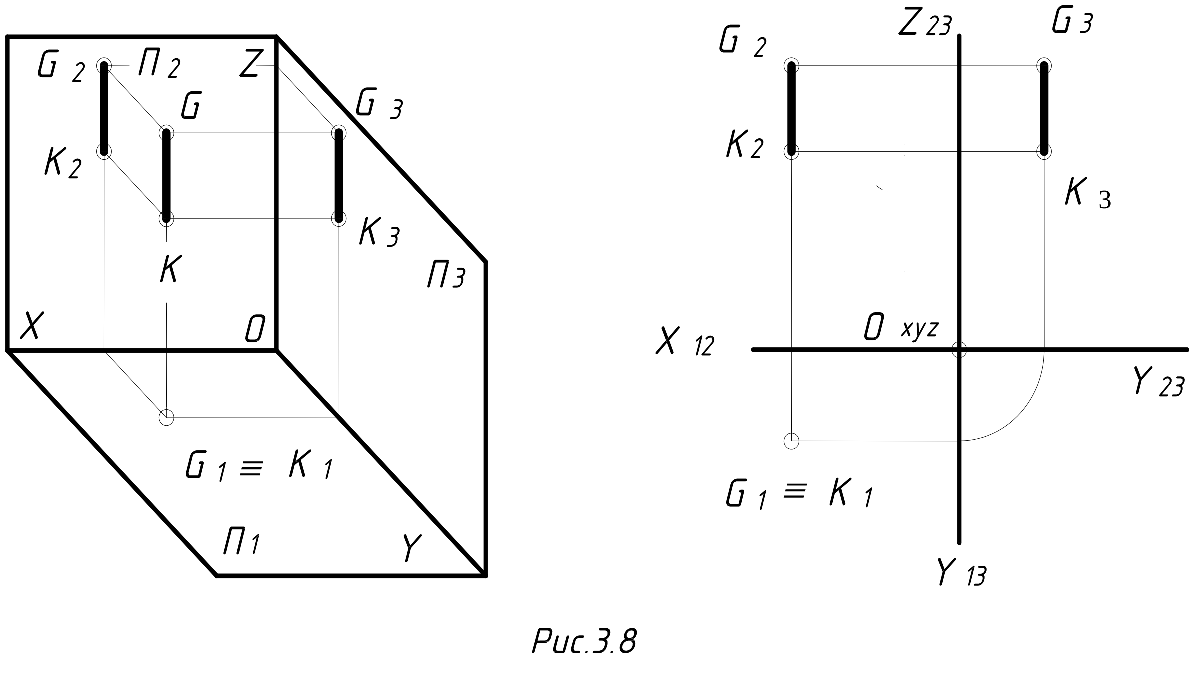

G 2
П 2
Z
G
G 3
K 2
K 3
K
П 3
X
O
G 1 ≡ K 1
П 1
Y
Z 23
G 3
G 2
K 2
K 3
O xyz
X 12
Y 23
G 1 ≡ K 1
Y 13

Рис.3.8

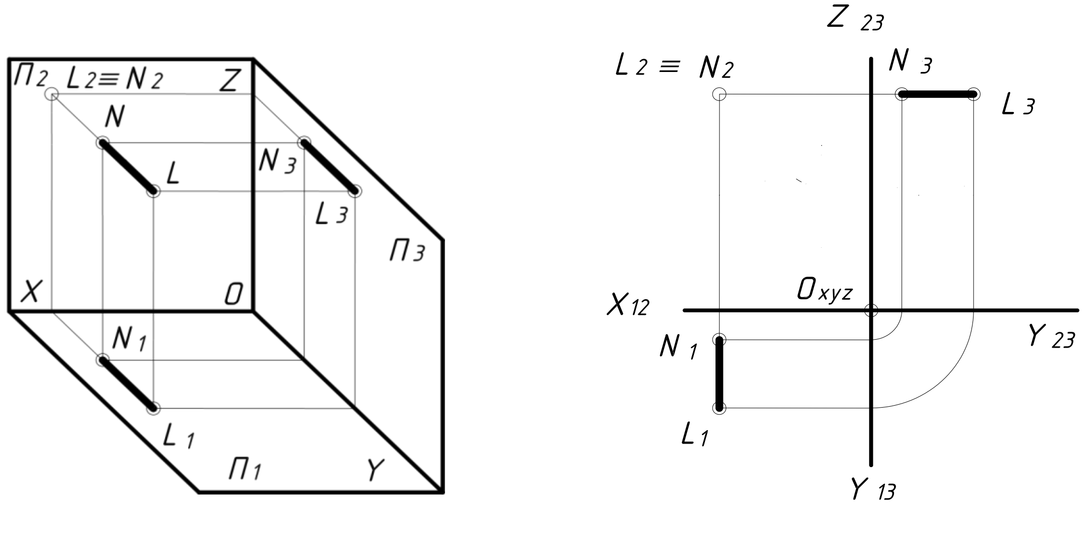


Рис.3.9

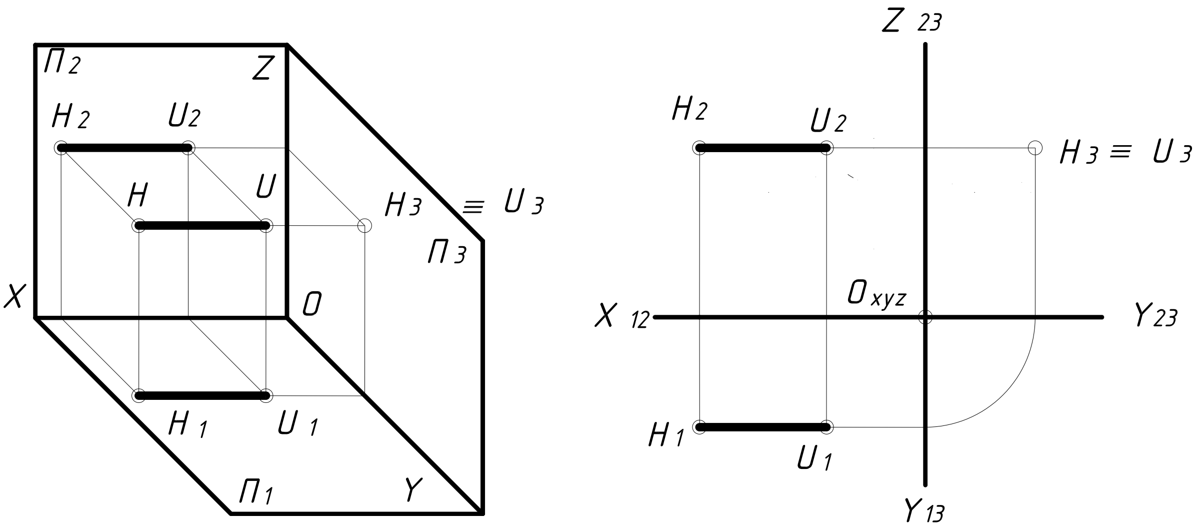


Рис.3.10

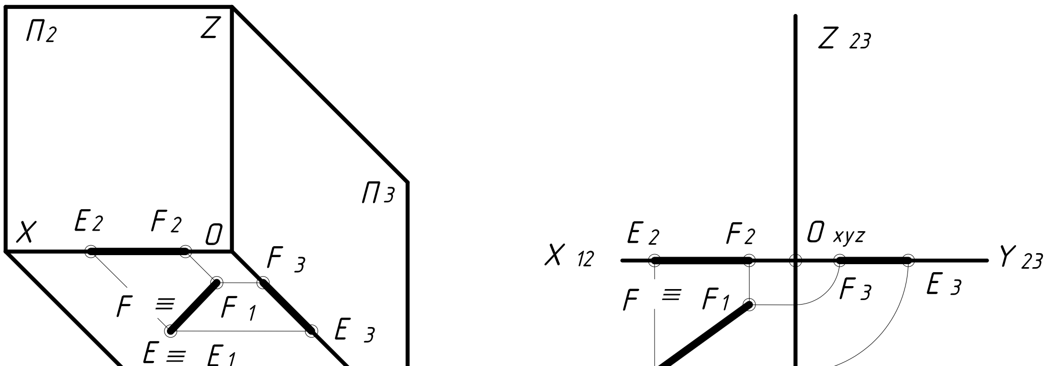


Рис.3.11

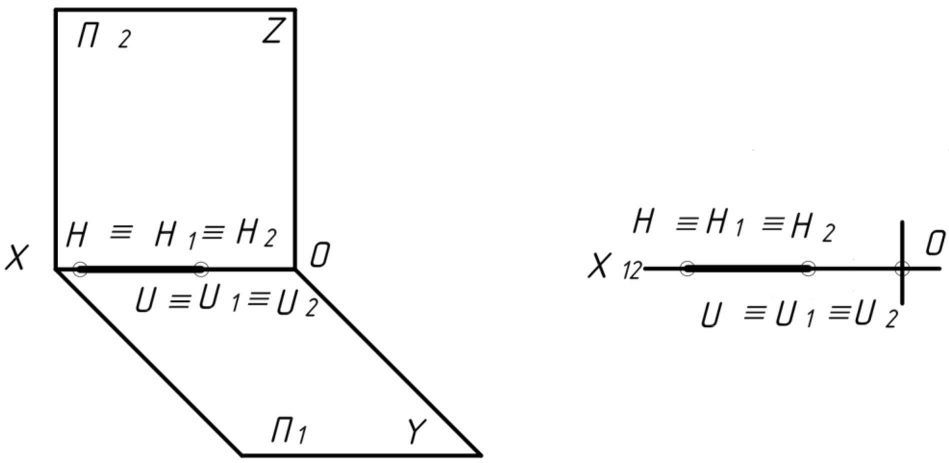


Рис.3.12

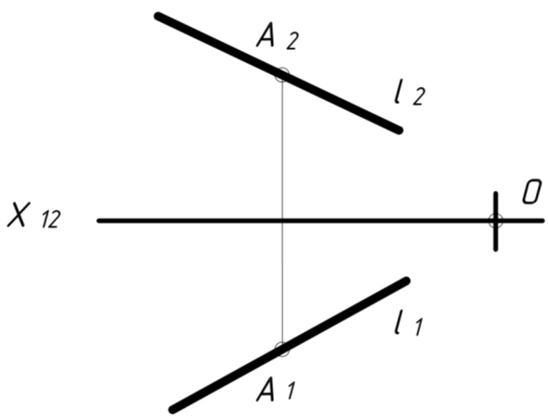


Рис.3.13

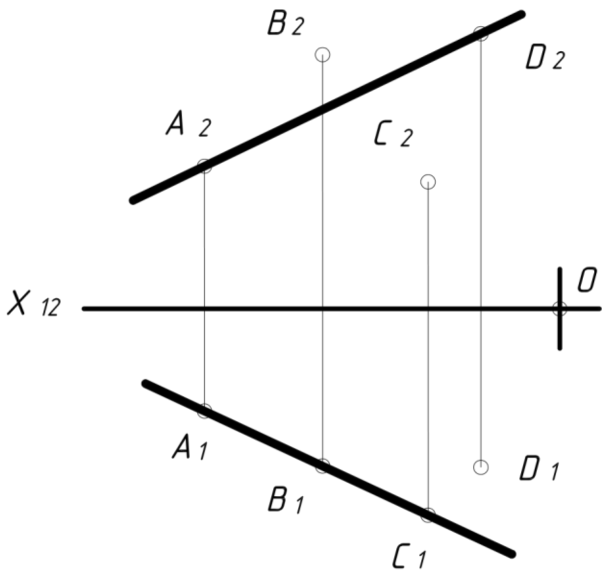


Рис.3.14

Розглянемо ознаки, за якими можна робити висновки про положення прямої у просторі за її проекціями.

Відрізок **AB** (рис. 3.4) – загального положення. Якщо через точку **A** провести пряму **AB_0**, паралельну до проекіїї **A_1B_1**, то кут α визначатиме нахил відрізка до площини **$П_1$**. У просторі утворюється прямокутний трикутник **ABB_0** з прямим кутом **B_0** при вершині, гіпотенузою **AB**, катетами **AB_0** і **BB_0**. Подібно до цього можна побудувати кути нахилу довільної прямої до площин **$П_2$** і **$П_3$**. Позначимо ці кути відповідно β і γ
(рис. 3.5).

Звідси можна зробити висновок, що проекції відрізка загального положення завжди менші, ніж відрізок у просторі і що жодна з проекцій не паралельна до осей проекцій і не перпендикулярна до них. Для прямих особливого положення характерним є те, що один або два будь-яких кути нахилу їх до площини дорівнюватимуть нулю.

Якщо кут $\alpha = 0^0$, то пряма займе горизонтальне положення і на площину **П1** вона проектується в дійсну величину. На цю ж площину проектуються без спотворення кути нахилу прямої до площини **П2** і **П3**. Фронтальна проекція даної прямої паралельна до осі **X**, профільна – до осі **Y**, бо всі точки прямої мають однакову координату **Z** (рис. 3.5).

Аналогічно фронтальна пряма проектується на площину **П2** у дійсну величину. Кут ψ нахилу прямої до площини **П1** і кут φ нахилу її до **П3** проектується на площину **П2** без спотворень. Звідси випливає, що координати усіх точок прямої однакові (рис. 3.6).

Фронтальна і горизонтальна проекції профільної прямої перпендикулярні до осі **X**. Це визначається рівністю координат **X** усіх точок прямої. Профільна пряма проектується на площину **П3** у дійсну величину, кути нахилу υ і ω проектуються на цю ж площину без спотворень (рис. 3.7)

Проектуючі прямі проектуються на перпендикулярні до них площини проекцій у точки, а на паралельні площини – у прямі, перпендикулярні до відповідних осей проекцій. Якщо, наприклад, пряма лежить на **П1**, то фронтальна її проекція збігається з віссю **X**. Якщо пряма належить площині **П2**, то горизонтальна її проекція збігається з віссю **X** (рис. 3.11).

3.3. Взаємне положення точки і прямої. Поділ відрізка прямої у заданому відношенні

Точка і пряма у просторі можуть займати різні положення між собою і відносно площин проекцій. Виходячи з того, що пряма лінія розглядається як сукупність нескінченного ряду точок, очевидно, що будьяка точка заданої прямої у просторі матиме свої проекції на відповідних проекціях прямої. Отже, якщо точка лежить на прямій, то на епюрі проекції точки лежать на однойменних проекціях цієї прямої. Правильне також обернене твердження: якщо на епюрі проекції прямої проходять через однойменні проекції точки, то в просторі ця пряма проходить через точку (рис. 3.13).

На рис. 3.14 зображено точку **A**, яка належить прямій l. Решта точок **B**, **C**, **D** не належать цій прямій. Спираючись на властивості паралельного проектування щодо співвідношення відрізків прямої та їх проекцій, виявляємо, що для поділу прямої в заданому пропорційному співвідношенні досить поділити у цьому співвідношенні одну із проекцій відрізка, а потім за допомогою ліній зв'язку перенести точки поділу на інші проекції відрізка.

Наприклад, поділ відрізка **AB** у співвідношенні 1:2 проходить за наступним алгоритмом (рис. 3.15).

Спочатку поділимо фронтальну проекцію відрізка **A_2B_2** у довільному співвідношенні. Для цього з точки **A_2** довільно проводимо пряму **t**, на якій відкладаємо три рівних відрізки довільної довжини. Візьмемо **A_2C_0**=1 і **C_0B_0**=2. Сполучаємо точку **B_0** з точкою **B_2**. З точки **C_0** проводимо пряму, паралельну до **B_0B_2**, яка в перетині з **A_2B_2** визначить точку **C_2**. Провівши з неї вертикальну лінію зв'язку, отримаємо горизонтальну проекцію **C_1**. Отже, точка **C** (**C_1**, **C_2**) поділить відрізок **AB** у співвідношенні 1:2.

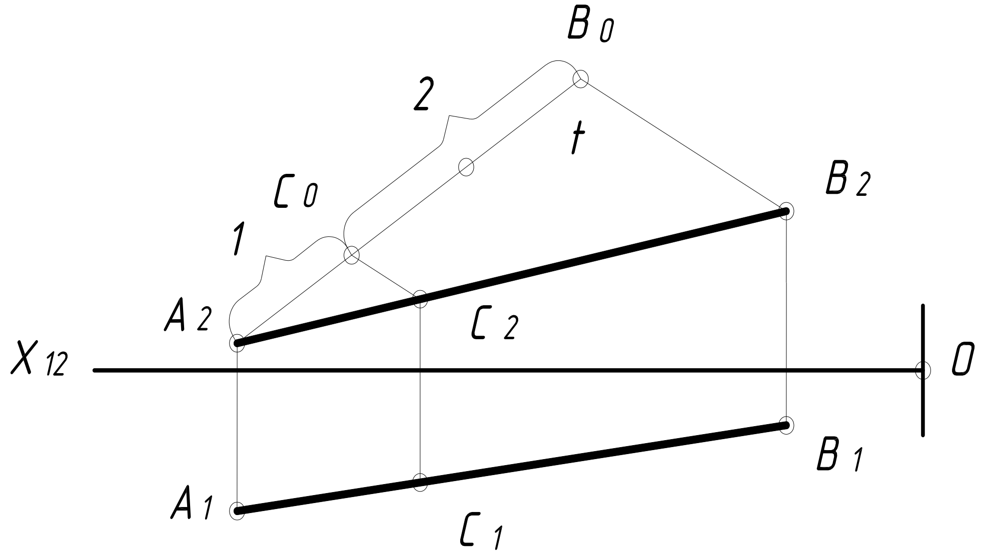


Рис.3.15

Зауважимо, що побудову в цій задачі можна починати з горизонтальної проекції.

3.4. Взаємне положення двох прямих

Прямі лінії у просторі можуть збігатися, перетинатися, бути паралельними і мимобіжними (рис. 3.16).

Легко бачити, що однойменні проекції двох прямих **a** і **b**, які збігаються, також збігаються.

Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то на епюрі їх однойменні проекції перетинаються у точках, які лежать на одній лінії проекційного зв'язку (рис. 3.17). Це випливає з того, що проекції точки **E**, спільної для прямих **c** і **d**, як точки їх перетину лежать одночасно на відповідних проекціях обох прямих. Тому горизонтальні проекції $\mathbf{c_1}$ і $\mathbf{d_1}$ перетинаються у точці $\mathbf{E_1}$, яка є горизонтальною проекцією точки перетину прямих у просторі. Аналогічно, при проектуванні прямих **c** і **d** на площини $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$ будуть такі самі наслідки.

3.5. Паралельні прямі

Якщо дві прямі у просторі паралельні між собою, то їх однойменні проекції також паралельні між собою (рис. 3.18). Справедливе й обернене твердження: якщо на епюрі однойменні проекції двох прямих паралельні між собою, то прямі у просторі паралельні між собою. Такий висновок можна зробити для двох паралельних прямих загального положення навіть за їх проекціями на дві площини проекцій.

Якщо задано проекції двох прямих, паралельних до будь-якої площини проекцій, то паралельність прямих можна визначити лише за наявності їх проекцій на тій площині проекцій, до якої прямі у просторі паралельні.

Наприклад, прямі **m** і **n** (рис. 3.19) паралельні до профільної площини проекцій ($\mathbf{П_3}$), тоді їх однойменні проекції на $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$ паралельні. Проте за цими ознаками робити висновок про їх паралельність у просторі не можна доти, доки не будуть побудовані їх профільні проекції. З рисунка бачимо, що прямі m і n не паралельні між собою.

3.6. Мимобіжні прямі

Дві прямі, які у просторі не паралельні й не перетинаються, називають *мимобіжними* (рис. 3.20). Для мимобіжних прямих характерно те, що їх однойменні проекції перетинаються у точках, які не лежать на одній лінії зв’язку, або одна пара проекцій перетинається, а друга може бути паралельними прямими (рис. 3.19).

Розглянемо мимобіжні прямі на рис. 3.21. Точки **A**, **B**, **C**, **D** є точками уявного перетину прямих **m** і **n**. Справді, якщо подивитися на ці прямі спереду, то здається, що вони перетинаються у точці **C ≡ D**, якщо згори – то у точці **A ≡ B**. Щоб переконатися, що прямі не перетинаються, треба побудувати горизонтальні проекції точок **C** і **D** або фронтальні проекції точок **A** і **B**.

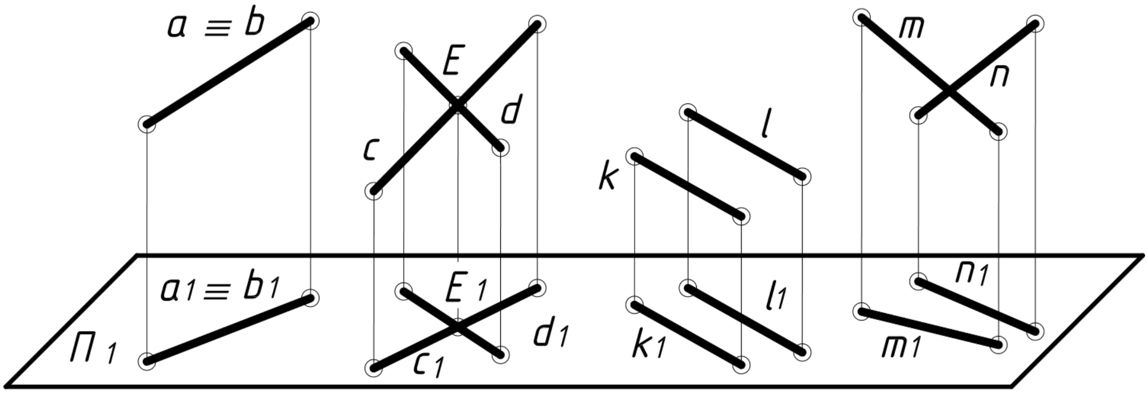


Рис.3.16

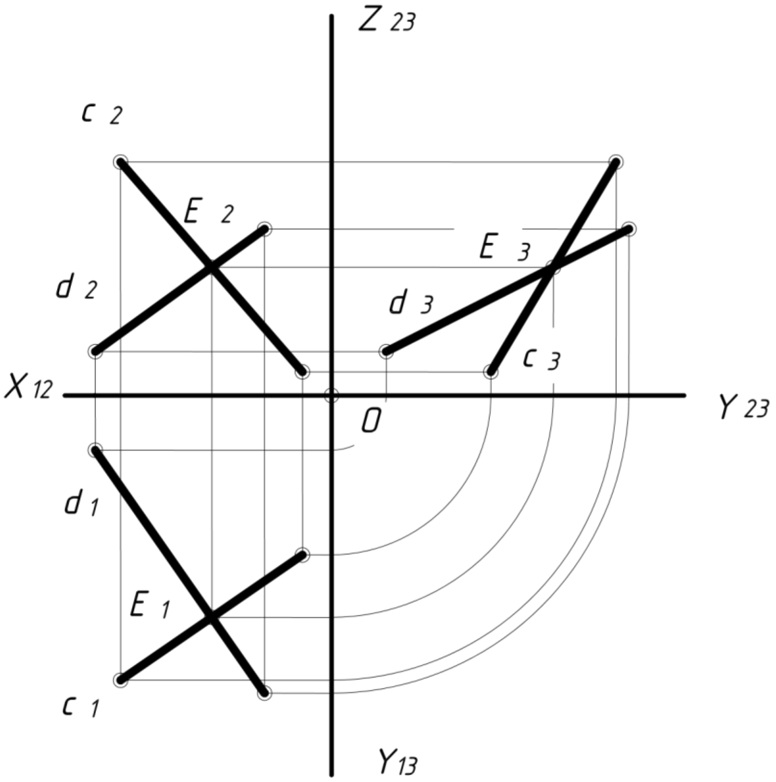


Рис.3.17

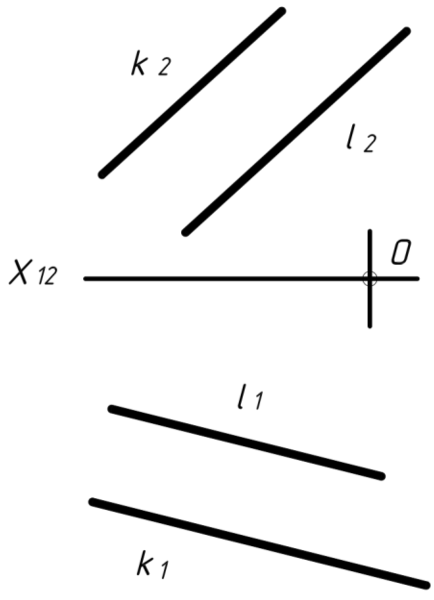


Рис.3.18

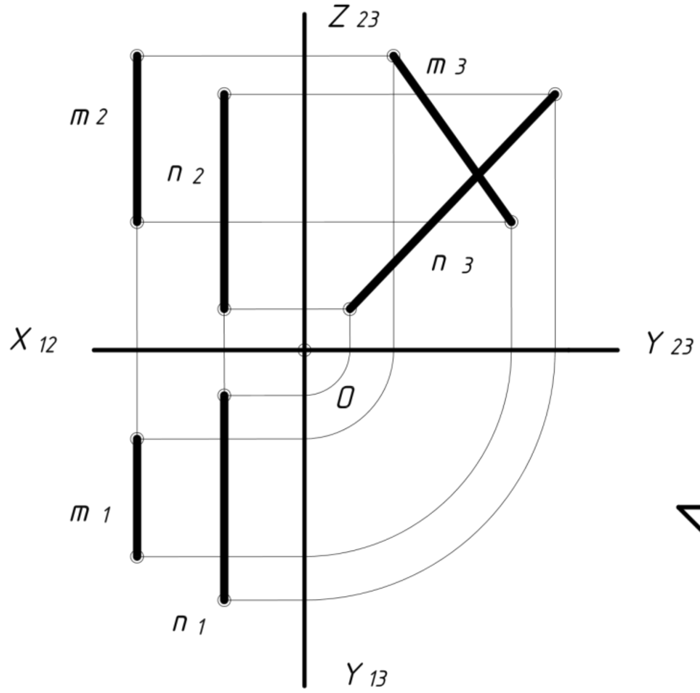


Рис.3.19

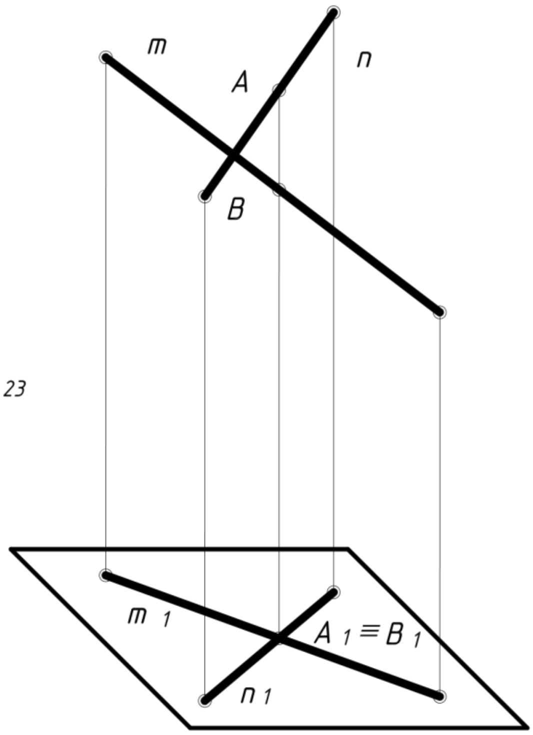


Рис.3.20

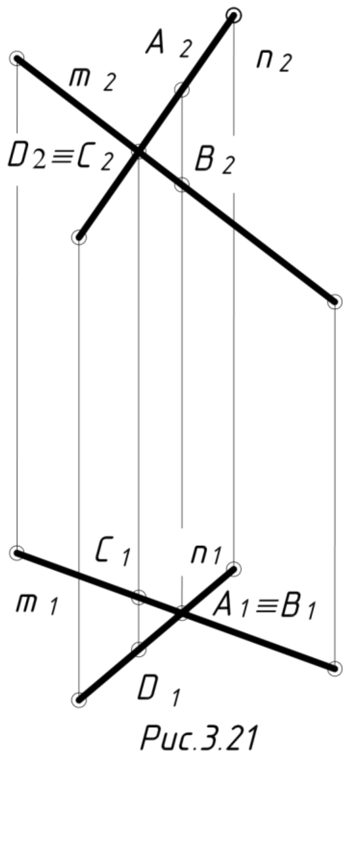


Рис.3.21

3.7. Сліди прямої

Точки перетину прямої лінії з площинами проекцій називають *слідами* прямої.

Оскільки пряма лінія може перетинати одну, дві або три площини проекцій, то відповідно пряма може мати один, два або три сліди.

Точку, в якій пряма перетинає горизонтальну площину проекцій, називають *горизонтальним слідом* (**H**). Точку, в якій пряма перетинає фронтальну площину проекцій називають *фронтальним слідом* і позначають точкою **F**. Аналогічно визначають *профільний слід* прямої, який позначають точкою **P**.

Розглянемо сліди прямої **k** на рис. 3.22. Ця пряма має два сліди: горизонтальний і фронтальний.

При побудові на епюрі слідів прямої та їх проекцій треба зважати, що сліди – це точки особливого положення. Знаючи це, зазначимо, що горизонтальна проекція H_1 горизонтального сліду прямої **k** збігається зі слідом точкою **H**, а фронтальна проекція сліду H_2 лежить на осі **OX**.

Фронтальна проекція F_2 фронтального сліду прямої збігається із точкою **F**, а горизонтальна проекція F_1 лежить на осі проекцій. Звідси дійдемо висновку, що для побудови горизонтального сліду прямої **k** необхідно продовжити її фронтальну проекцію k_2 до перетину з віссю проекцій **OX** і з точки H_2 провести перпендикуляр до перетину з продовженням горизонтальної проекції k_1.

Точка перетину H_1 – горизонтальна проекція горизонтального сліду; вона збігається з точкою **H** самим слідом. Аналогічно, як і в попередньому випадку, зазначимо, що фронтальний слід прямої **k** і його фронтальна проекція лежатимуть на перетині продовження **k** і перпендикуляра з точки F_1 до осі **OX**.

Виходячи з цих міркувань, будують профільний слід та його проекції. Цей слід на профільній площині проекцій збігається зі своєю проекцією, а горизонтальна і профільна проекції його лежать відповідно на осях **Y** і **Z**.

Зауважимо, що через положення слідів прямої на епюрі можна зробити висновок, через які чверті простору проходить пряма і яке положення у просторі вона займає. Пряма загального положення має в системі Π_1, Π_2, Π_3 три сліди.

3.8. Побудова дійсної величини відрізка прямої способом прямокутного трикутника

Відомо, що жодна проекція відрізка прямої загального положення не дорівнює дійсній його величині, тобто проекції такого відрізка будуть завжди менші, ніж відрізок у просторі. Проте в багатьох випадках виникає необхідність визначити дійсну величину відрізка загального положення, маючи на епюрі лише його проекції. Таку задачу можна розв'язати графічно побудовою на епюрі (рис. 3.23).

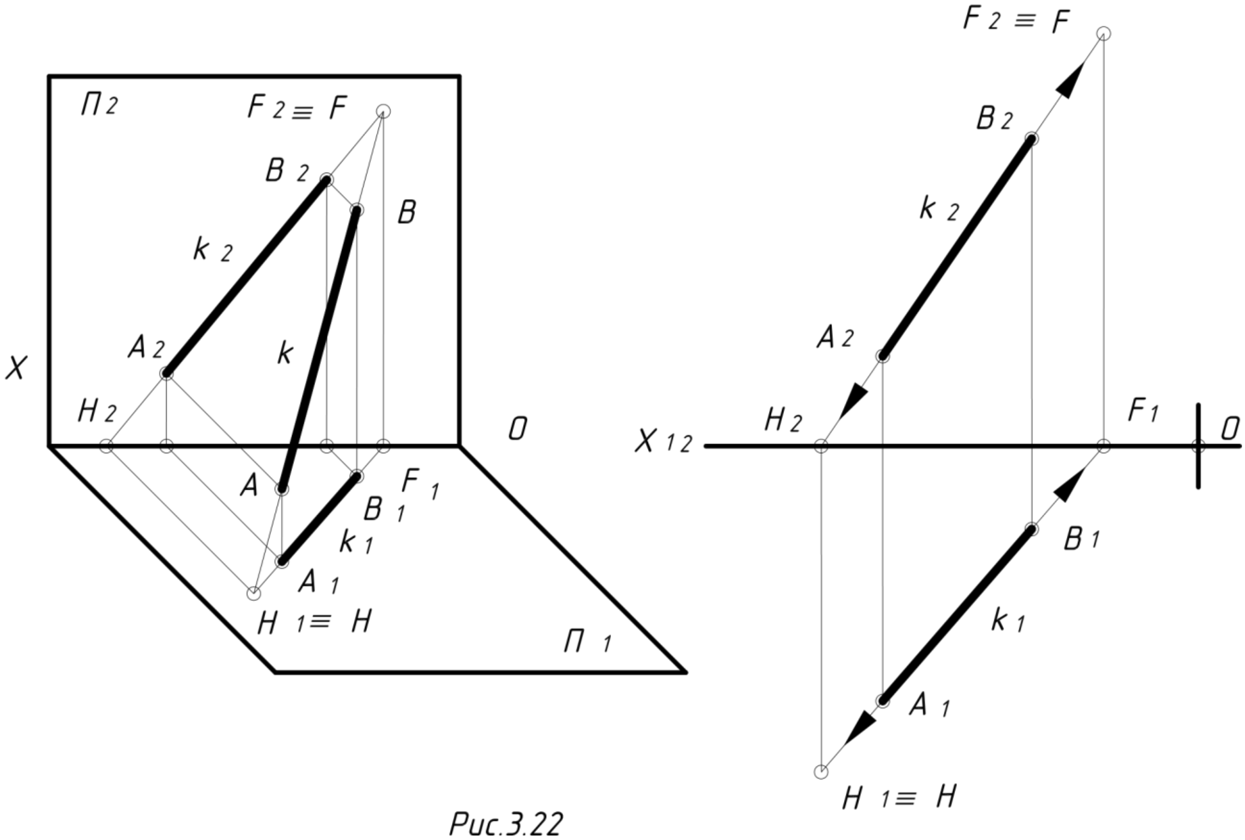


Рис.3.22

Маючи дві проекції відрізка, приймаємо його проекцію A_1B_1 за один катет прямокутного трикутника. З точки B_1 під прямим кутом до A_1B_1 проведемо пряму, на якій відкладаємо другий катет – відрізок B_2C_2, що беремо з фронтальної проекції як різницю B_2B_x – A_2A_x. Гіпотенуза A_2B_2=**AB**, кут α з вершиною в точці A_1 є кутом нахилу відрізка **AB** до площини $П_1$.

Аналогічно можна визначити дійсну величину відрізка і кут β і γ нахилу його до площин проекцій $П_2$ і $П_3$, побудувавши прямокутний трикутник на площинах $П_2$ і $П_3$.

При побудові на площині проекцій $П_2$ необхідно на другому катеті відкладати різницю координат по осі **Y** для точок **A** і **B**. Кут між дійсною величиною відрізка і проекцією його на $П_2$ буде кутом між відрізком і площиною $П_2$.

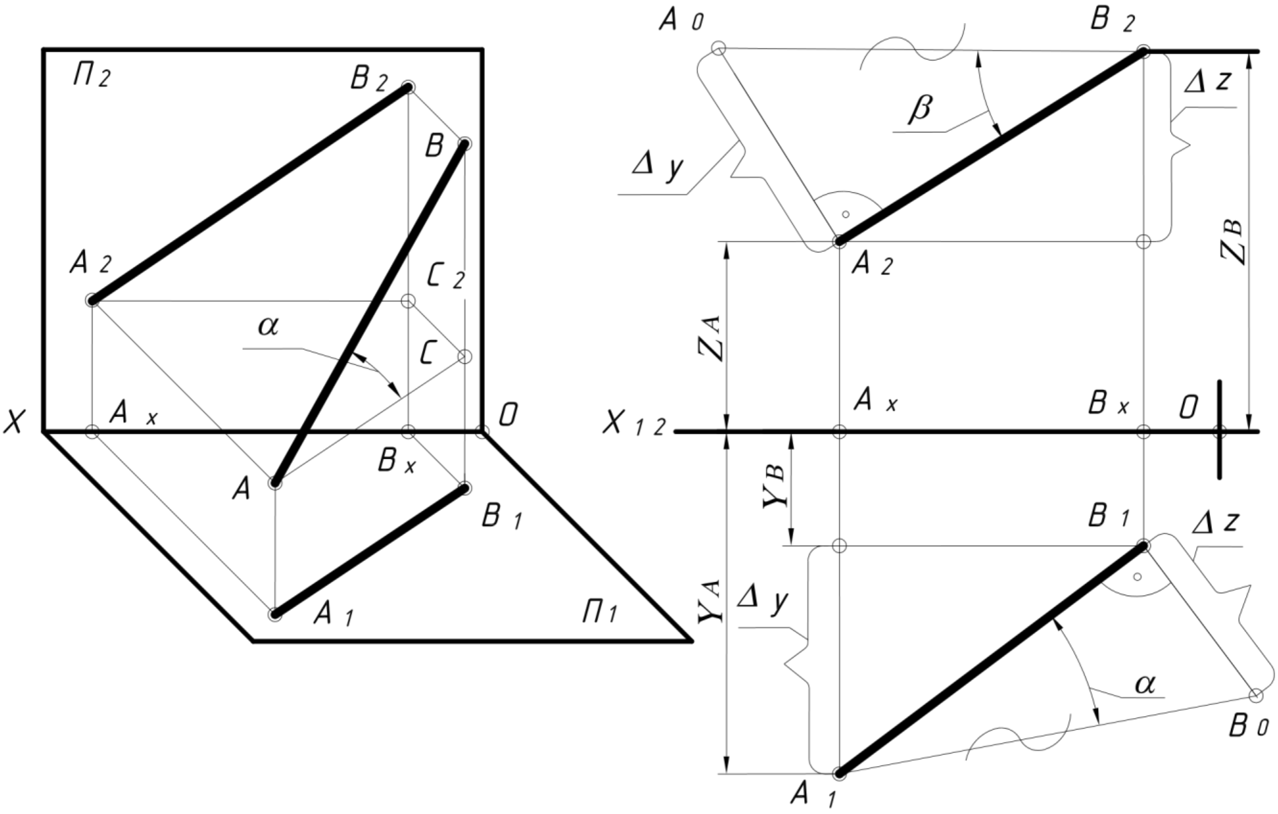


Рис.3.23

Запитання для самоперевірки

1. Як побудувати проекцію прямої лінії?

2. Що таке пряма загального положення? Які прямі називають прямими окремого положення?

3. Які ознаки на епюрі належності точки і прямої лінії?

4. Як зображуються на епюрі дві паралельні прямі та дві прямі, що перетинаються?

5. Як слід тлумачити точку перетину проекцій двох мимобіжних прямих?

6. Чи можна встановити паралельність двох профільних прямих за їх проекціями на площинах $П_1$ і $П_2$?

7. Що називають слідом прямої лінії?

8. Коли пряма має один, два і три сліди?

9. У чому суть побудови прямокутного трикутника для визначення дійсної величини відрізка прямої?

10. Як визначають кут нахилу прямої до площини проекцій?

4. ЗОБРАЖЕННЯ ПЛОЩИНИ

4.1. Способи задавання площин на кресленні

Площина у просторі може бути задана:

– трьома точками, що не лежать на одній прямій;

– прямою і точкою, що не лежить на цій прямій;

– двома паралельними прямими; – двома прямими, що перетинаються; – геометричною фігурою (рис. 4.1).

Крім того, площину можна задати на епюрі ще одним способом – її власними слідами (рис. 4.3).

Слідом площини називають пряму лінію, по якій площина перетинається з площиною проекцій.

Візьмемо у просторі довільну площину □, нахилену до площин проекцій під довільними кутами. Вона перетинається з кожною з площин проекцій по своїх слідах, а саме:

З площиною $\mathbf{П_1}$ – *по горизонтальному сліду* ($\mathbf{h_α}$).

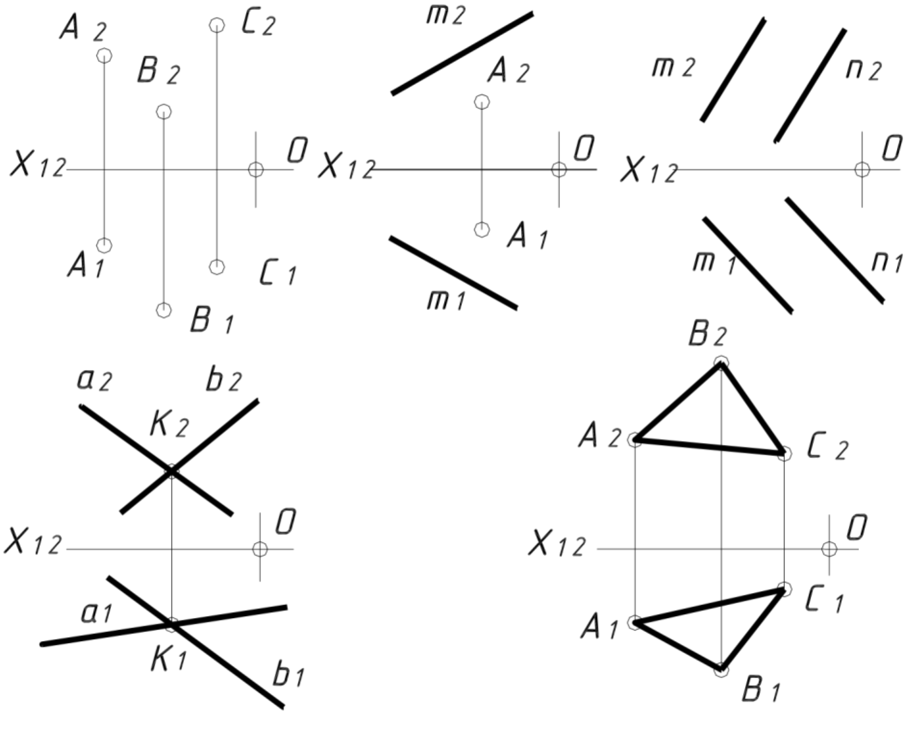


Рис.4.1

З фронтальною $\mathbf{П_2}$ – *по фронтальному сліду* ($\mathbf{f_α}$).

З профільною $\mathbf{П_3}$ – *по профільному сліду* ($\mathbf{p_α}$).

Площина α перетинає також усі три осі в точках **Xα**, **Yα**, **Zα**, які є точками перетину відповідних слідів площини або точками збігу слідів.

Оскільки ці точки лежать на осях проекцій, вони мають лише одну числову координату, а інші дві дорівнюють нулю. Саме її й необхідно знати для побудови рисунка площини в системі **$П_1$ $П_2$ $П_3$**.

Необхідно зазначити, що сліди площини є прямими особливого положення, оскільки вони лежать на площинах проекцій. Тому проекції слідів на епюрі займатимуть цілком визначене положення. Наприклад, горизонтальна проекція горизонтального сліду **h_α** збігається зі слідом, його фронтальна і профільна проекції лежать відповідно на осях **X**,**Y**.

4.2. Класифікація площин

Положення площини у просторі характеризується її розміщенням відносно площин проекцій. У зв'язку з цим розрізняють площини довільного й особливого положення.

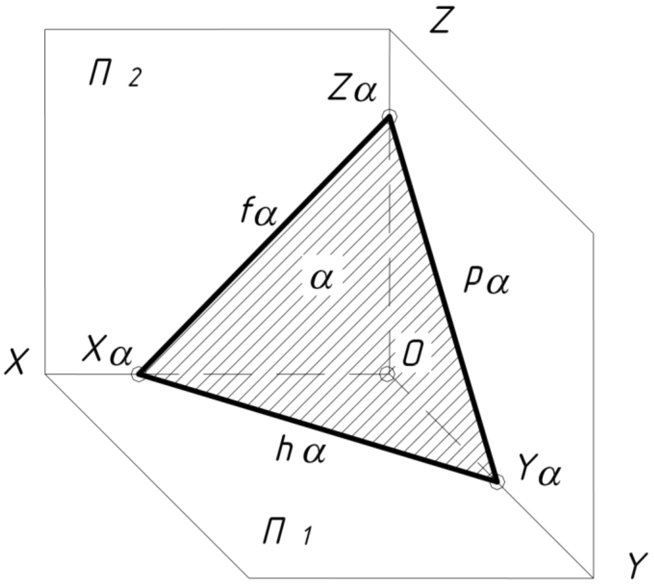


Рис.4.2

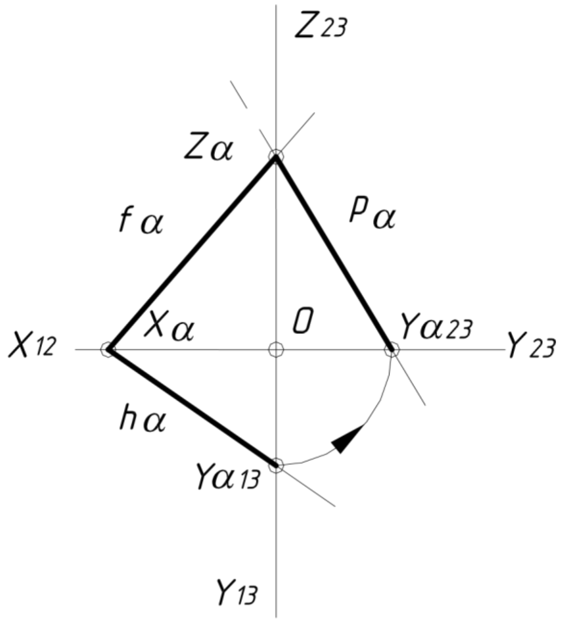


Рис.4.3

Площину, не перпендикулярну до жодної із площин проекцій, називають площиною *довільного* або *загального* положення. Зображення такої площини показано на рис. 4.2, епюр її слідів – на рис. 4.3. Характерною ознакою зображення довільної площини, заданої слідами, є те, що сліди такої площини ніколи не перпендикулярні до осей проекцій **X**, **Y**, **Z**.

Проте у багатьох випадках площину зручно задавати не слідами, а геометричними елементами – точками і прямими. Тоді на комплексному рисунку проекції цих елементів, як правило, займатимуть довільне положення (рис. 4.4).

Серед довільних площин виділимо рівнопохилу – похилу під довільним, але однаковим кутом до площини проекцій **$П_2$** і **$П_1$** у системі квадрантів. Епюр рівнопохилої площини **α** (рис. 4.5) характеризується тим, що горизонтальний **h_α**

і фронтальний $\mathbf{f}_\alpha$ сліди лежать на одній похилій прямій до осі **ОХ**, а профільний слід $\mathbf{p}_\alpha$ розміщений завжди під кутом 45° до осей **Y** і **Z**.

Площини, які паралельні або перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають площинами *особливого* положення. Серед них розрізняють *проектуючі* площини і площини *рівня*.

Площину, перпендикулярну до горизонтальної площини проекцій, називають *горизонтально-проектуючою* (рис. 4.6). Сліди цієї площини будуть мати такий вигляд (рис. 4.7): горизонтальний слід $\mathbf{h}_\alpha$ розташований під кутом β до осі **ОХ** (це й визначає кут нахилу площини α до фронтальної площини прекцій), а фронтальний і профільний сліди є перпендикулярні до $\mathbf{П}_1$ (осі **ОХ** і **ОY**).

Якщо горизонтально-проектуючу площину задати геометричною фігурою, а саме Δ**ABC** (рис. 4.8), то горизонтальна проекція цієї площини буде являти собою відрізок прямої лінії, кут β є кутом нахилу площини до $\mathbf{П}_2$, а проекція на фронтальну площину проекцій буде трикутником. Будьяку точку, що належить цій площині (на рис. 4.8 точка **D**), визначають так: горизонтальна її проекція лежить на горизонтальному сліді площини. Це стосується також прямої лінії, плоскої кривої чи фігури, які лежать у горизонтально-проектуючій площині.

Площину, перпендикулярну до фронтальної площини проекцій, називають *фронтально-проектуючою* (рис. 4.9). Як бачимо, фронтальний слід площини $\mathbf{f}_\alpha$ похилий до осі **ОХ** і **OZ**, а горизонтальний $\mathbf{h}_\alpha$ і профільний $\mathbf{p}_\alpha$ – перпендикулярні до тих самих осей. Фронтальний слід з віссю **ОХ** утворює кут β (кут нахилу площини α до $\mathbf{П}_1$) і кут γ з віссю **OZ** (кут нахилу площини α до $\mathbf{П}_3$).

Точка **А** розташована в площині α і має свою фронтальну проекцію, що збігається з фронтальним слідом.

Площину, перпендикулярну до профільної площини проекцій, називають *профільно-проектуючою* (рис. 4.10). Розглянемо профільнопроектуючу площину α. Профільний слід $\mathbf{p}_\alpha$ нахилений під кутом γ до осі **ОY** (до $\mathbf{П}_1$), під кутом β – до осі **OZ** (до $\mathbf{П}_2$).

Горизонтальний $\mathbf{h}_\alpha$ і фронтальний $\mathbf{f}_\alpha$ сліди, перпендикулярні до тих самих осей або паралельні до осі **ОХ**. Профільна проекція будь-якої точки або системи точок, що належать заданій площині (в даному випадку точка **А**) буде належати профільному сліду $\mathbf{p}_\alpha$.

Розглядаючи згадані вище побудови, бачимо, що всі проектуючі площини мають таку властивість: точки, прямі, плоскі криві чи фігури, які лежать у проектуючих площинах, проектуються на слід площини у тій площині проекцій, до якої задана площина є проектуючою.

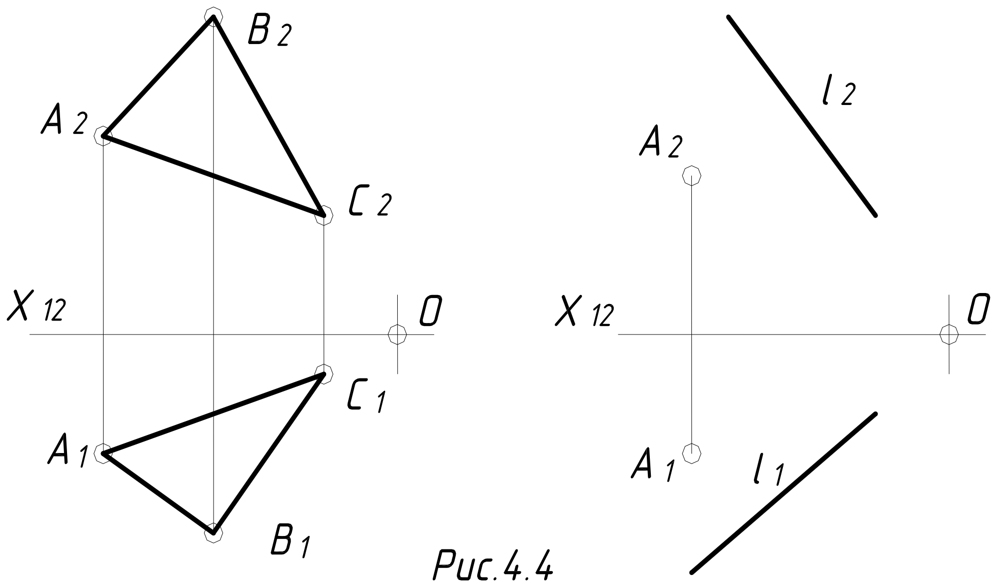

B 2
A 2
C 2
X 12
0
C 1
A 1
B 1
l 2
A 2
X 12
0
A 1
l 1

Рис.4.4

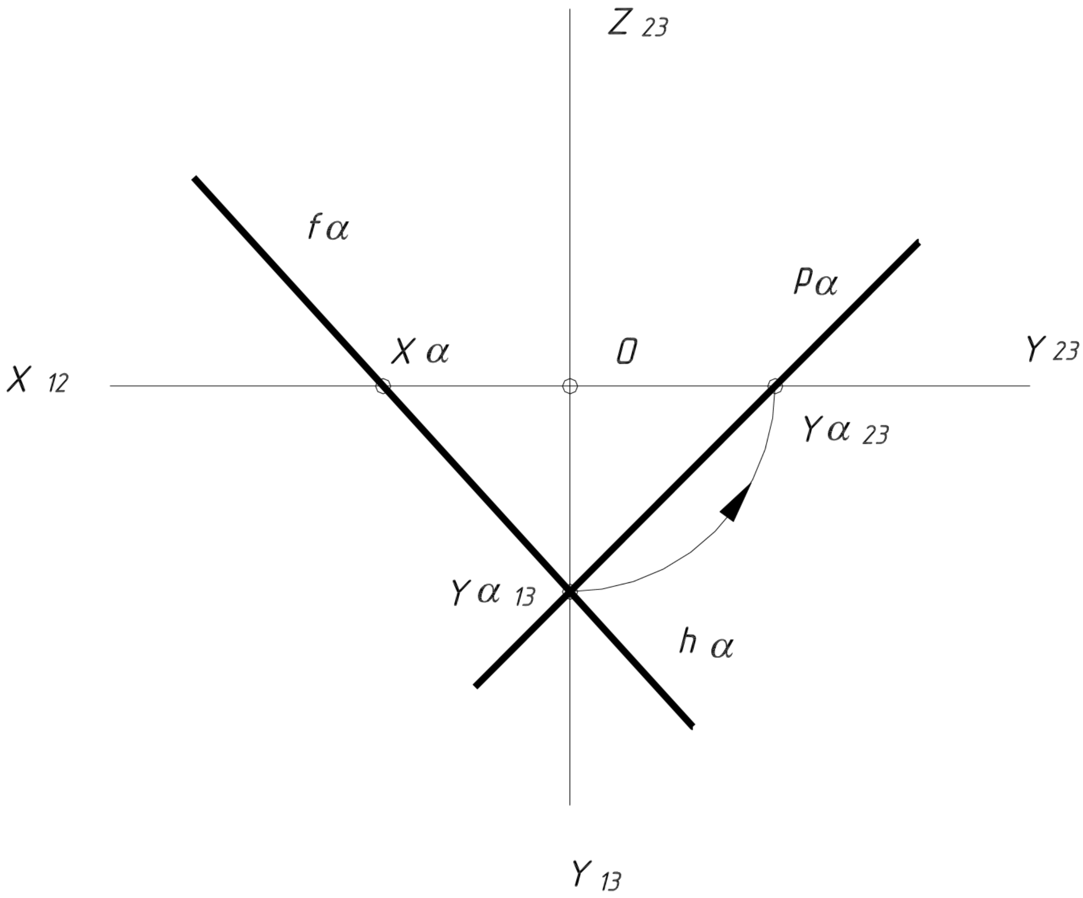

Z 23
fα
Pα
X α
0
Y 23
X 12
Yα 23
Yα 13
h α
Y 13

Рис.4.5

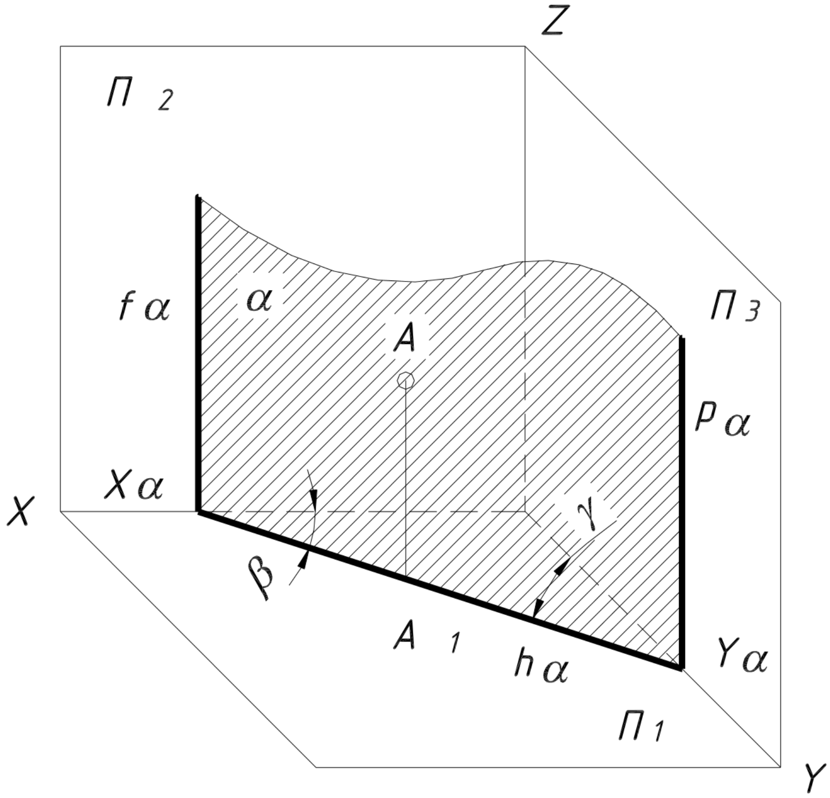


Рис.4.6

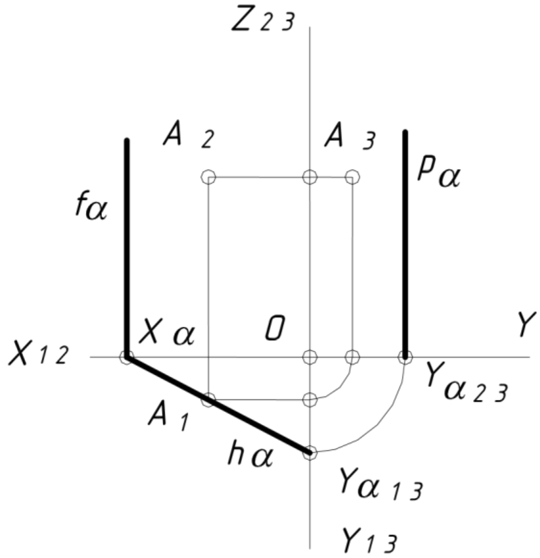


Рис.4.7

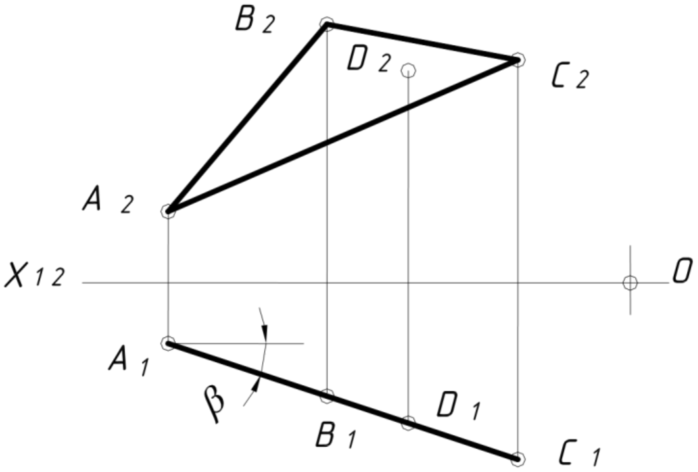


Рис.4.8

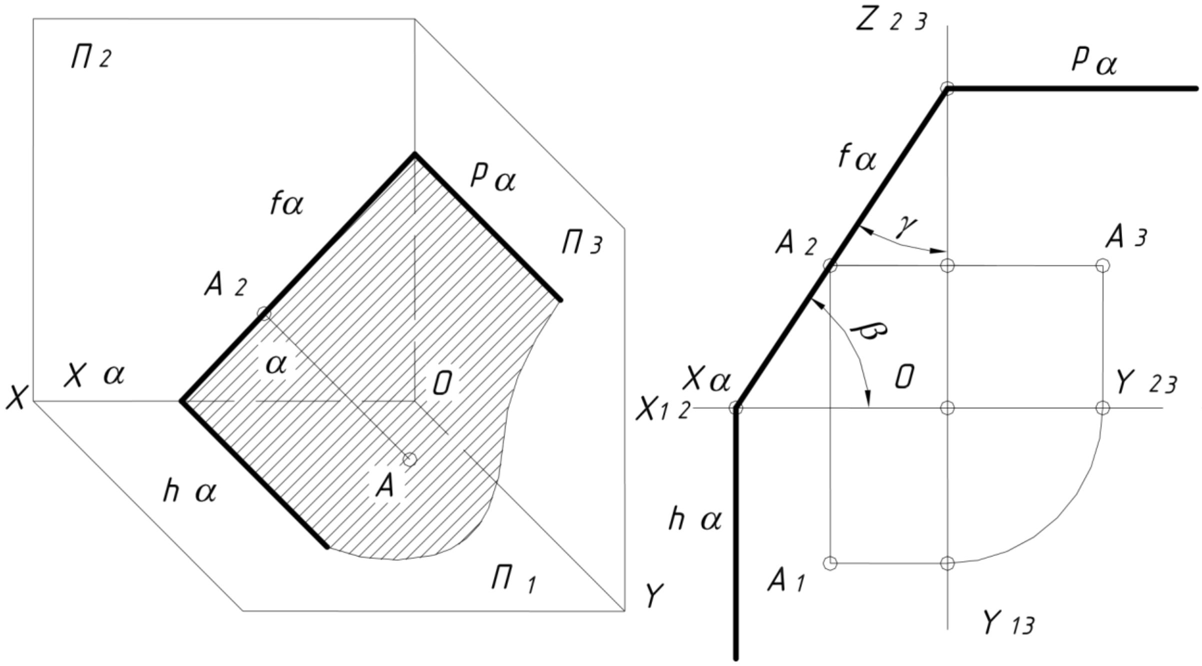


Рис.4.9

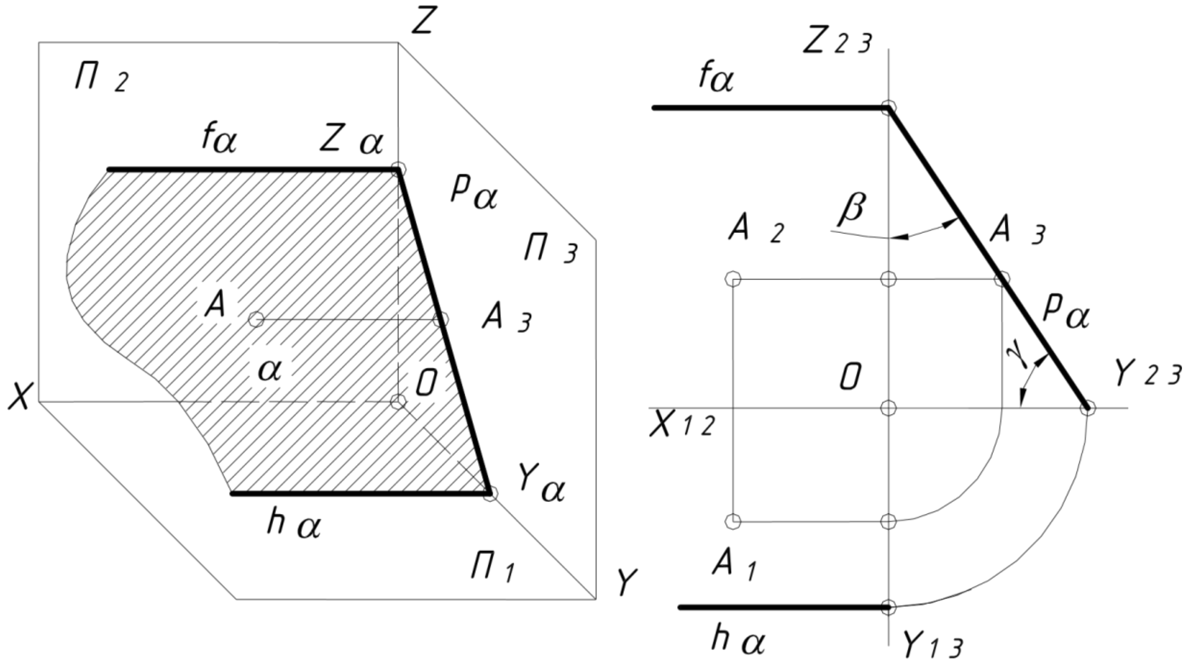


Рис.4.10

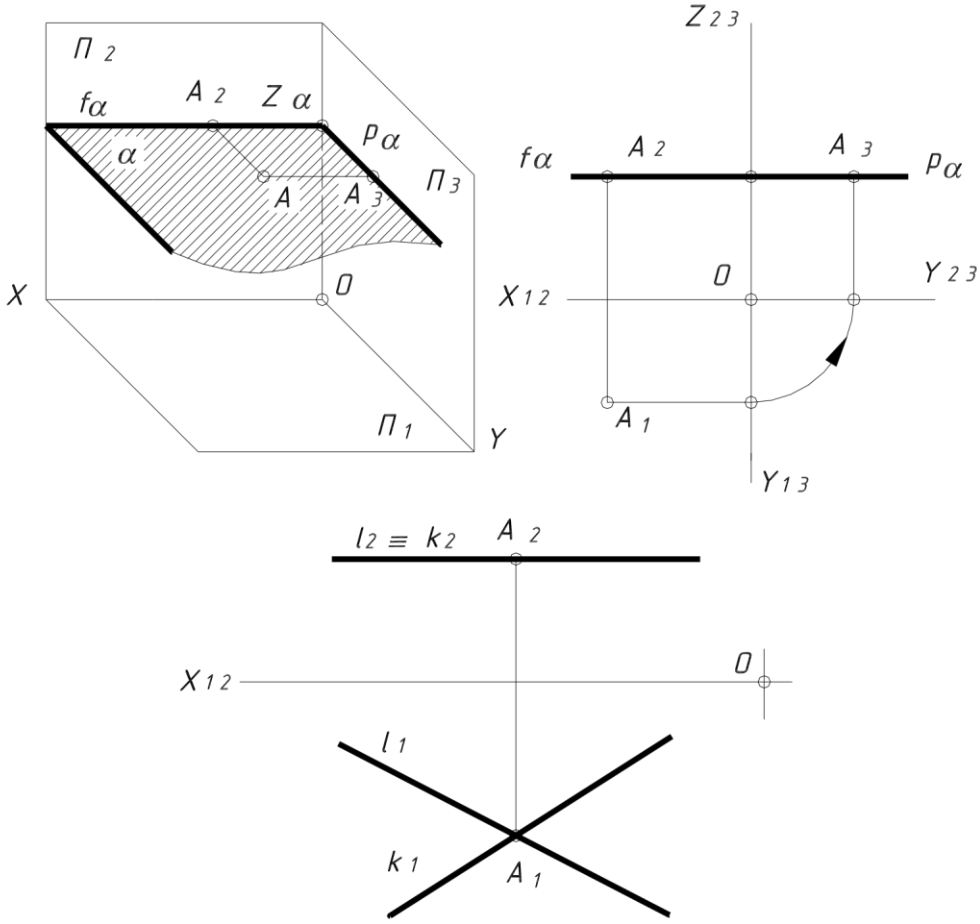


Рис.4.11

Розглянемо *площини рівня* або площини, паралельні до однієї з площин проекцій. Вони ж є перпендикулярні до двох інших площин проекцій.

Площину, паралельну до горизонтальної площини проекцій **П**$_1$, називають *горизонтальною* (рис. 4.11). Ця площина перпендикулярна до площин проекцій **П**$_2$ і **П**$_3$. Фронтальний і профільний сліди площини на епюрі утворюють пряму, паралельну до осі **ОХ** і **OY**. На горизонтальну площину проекцій **П**$_1$ задана площина проектується в дійсну величину.

Площину, паралельну до фронтальної площини проекцій **П**$_2$, називають *фронтальною площиною* (рис. 4.12).

Така площина є одночасно перпендикулярною до площин проекцій **П**$_2$ і **П**$_3$. Горизонтальний і профільний сліди даної площини паралельні до **ОХ** і **OZ**. На фронтальну площину проекцій така площина, задана геометричною фігурою, проектується в дійсну величину.

Площину, паралельну до профільної площини проекцій **П**$_3$, називають *профільною* (рис. 4.13). Така площина є одночасно горизонтально- і фронтально-проектуючою, оскільки її горизонтальний і фронтальний сліди перпендикулярні до **ОХ**. Слід зазначити, що основна властивість проектуючих площин зберігається і для площин рівня. На рис. 4.11 – 4.13 проекції точки **А** лежать на відповідних двох слідах цих площин.

Крім описаних площин, слід звернути увагу ще на осьові та бісекторні площини. Осьовою називають площину, що проходить через одну з осей проекцій **ОХ**, **OY**, **OZ**.

Бісекторною називають осьову площину, яка поділяє двогранний кут, утворений площинами проекцій навпіл. На рис. 4.14 зображено бісекторну площину α, яка розміщена в першому октанті й проходить через вісь проекцій **OX**.

4.3. Проекції плоских фігур

Плоскими називають такі фігури, в яких усі точки лежать в одній площині. Побудова проекцій плоскої фігури зводиться до побудови проекцій ряду її характерних точок, які утворюють контур фігури. Тому можна сказати, що проекції будь-якого многокутника можна побудувати, знаючи координати його вершин, оскільки побудова їх визначає проекції сторін, отже, й усієї фігури.

Вище описано зображення площин, що займають різні положення відносно площин проекцій.

Плоска фігура проектується в дійсну величину, якщо вона паралельна до будь-якої площини проекцій; у пряму лінію, – якщо перпендикулярна до площини проекцій. На рис. 4.15 побудовано проекції трикутника **ABC** за відомими координатами його вершин **A**, **B**, **C**. Сполучивши однойменні проекції вершин, визначаємо проекції сторін, тобто проекції трикутника. З рисунка випливає, що фронтальна проекція трикутника – пряма лінія, паралельна осі **OX**. Отже, трикутник **ABC** займає особливе положення відносно площин проекцій: паралельне до Π_1 і перпендикулярне до Π_2, тому на Π_1 він проектується в дійсну величину. Аналогічно будують проекції плоских фігур, перпендикулярних лише до однієї площини проекцій, з тією лише різницею, що жодна проекція не відповідає дійсній величині фігури (рис. 4.16).

Чотирикутник **ABCD** перпендикулярний лише до площини проекцій Π_1. На цю площину він проектується в пряму лінію, а на площину Π_2 – в чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$, який не дорівнює дійсній величині фігури **ABCD**.

Розглянемо побудову зображень плоских фігур, що нахилені до площини проекцій, тобто лежать у площинах загального положення. Зазначимо, що в цьому випадку проекції фігур є фігурами, подібними заданим: проекцією трикутника є трикутник, чотирикутника – чотирикутник, многокутника – многокутник.

Слід пам’ятати, що при проектуванні квадрата, прямокутника, ромба і паралелограма паралельність протилежних сторін зберігається. При побудові проекцій чотирикутника довільно можна задати лише одну його проекцію і проекцію трьох вершин на другій площині проекцій. Проекцію четвертої вершини, яка відсутня, необхідно побудувати. Шукану проекцію знаходять за допомогою діагоналей чотирикутника (рис. 4.17), використовуючи розглянуті раніше положення про точку і пряму. Подібний спосіб поділу фігури на трикутники використовують при побудові зображень інших многокутників.

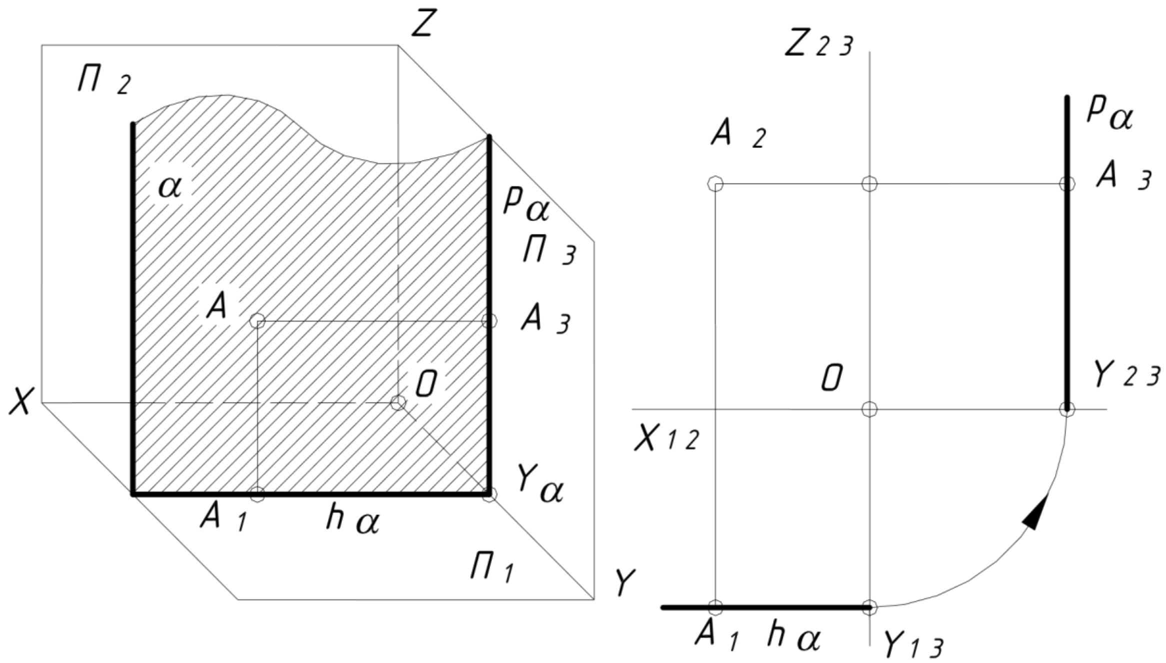


Рис.4.12

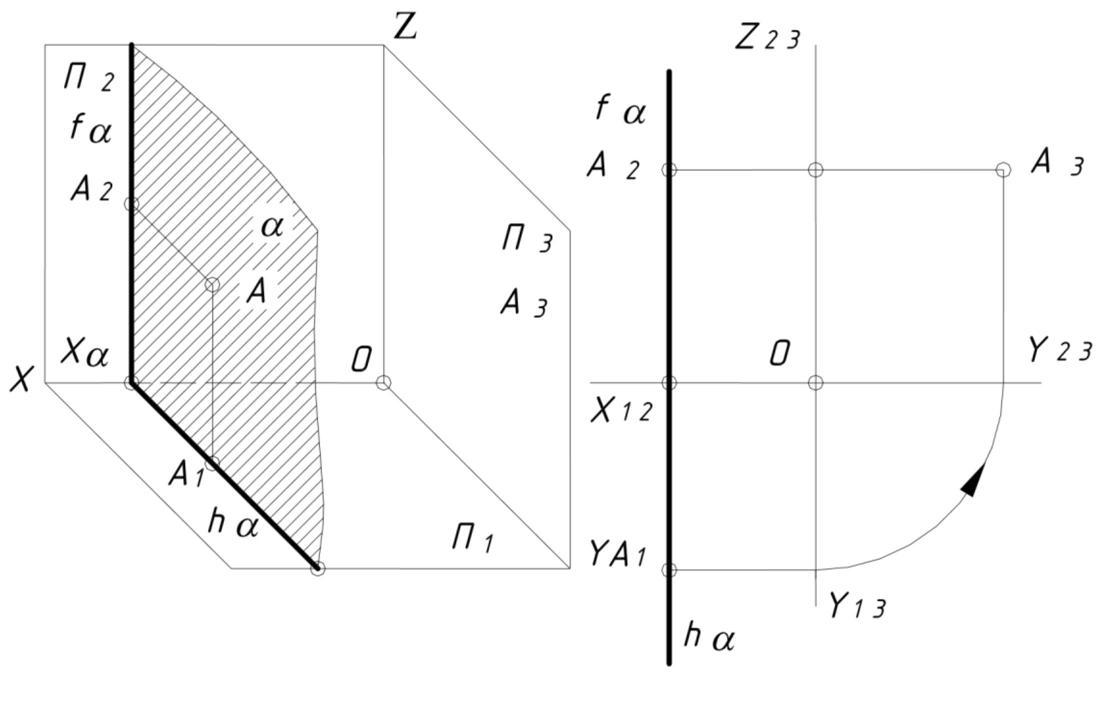


Рис.4.13

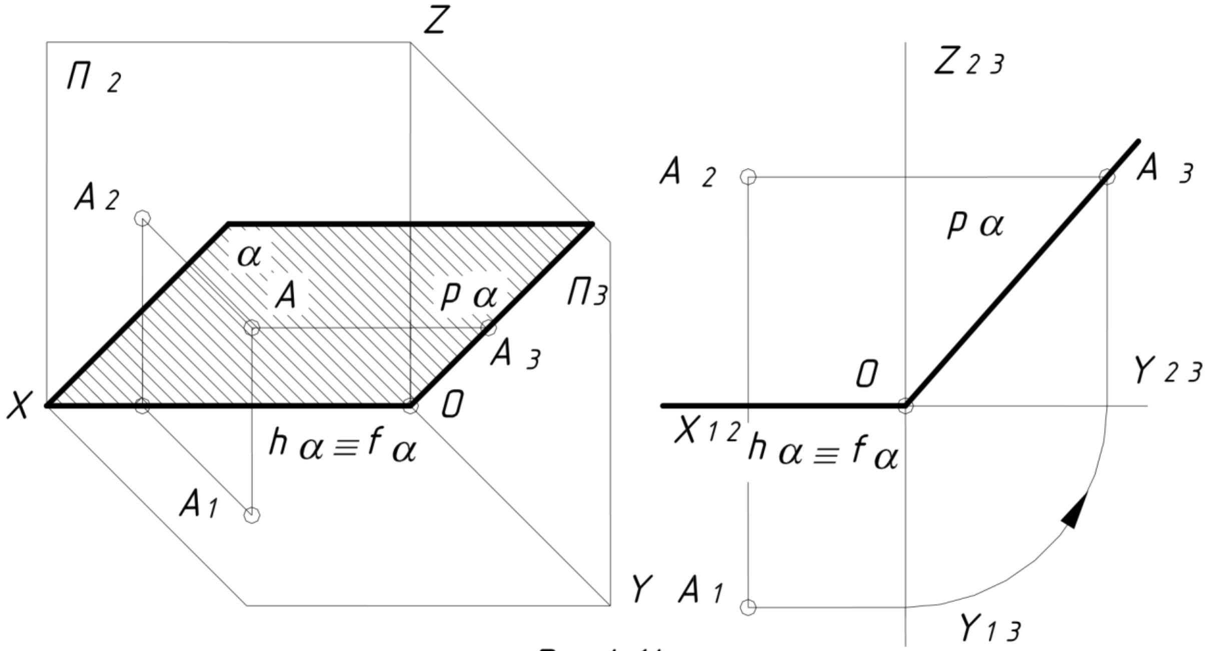


Рис.4.14

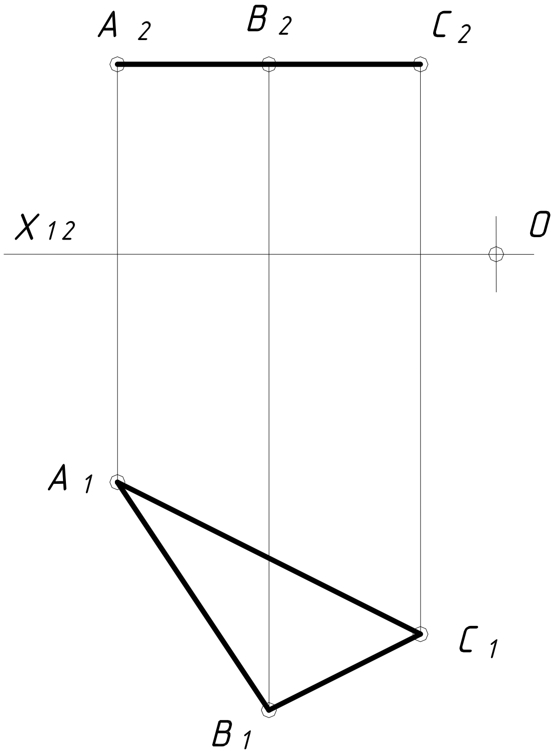


Рис.4.15

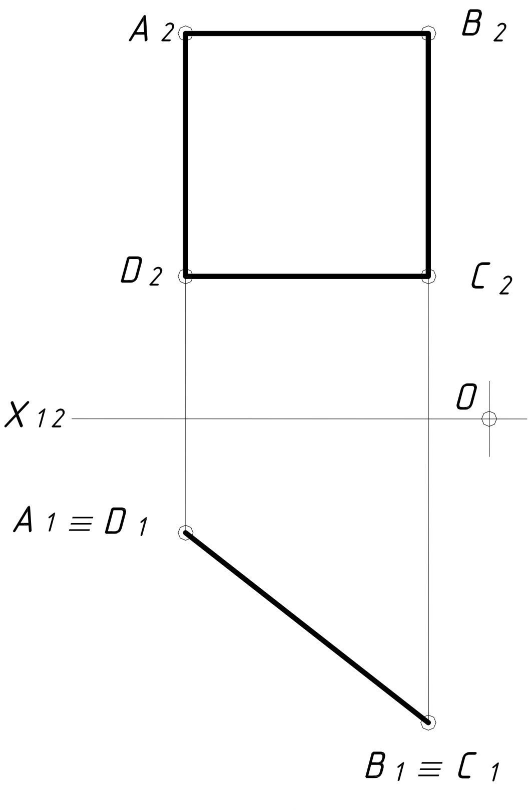


Рис.4.16

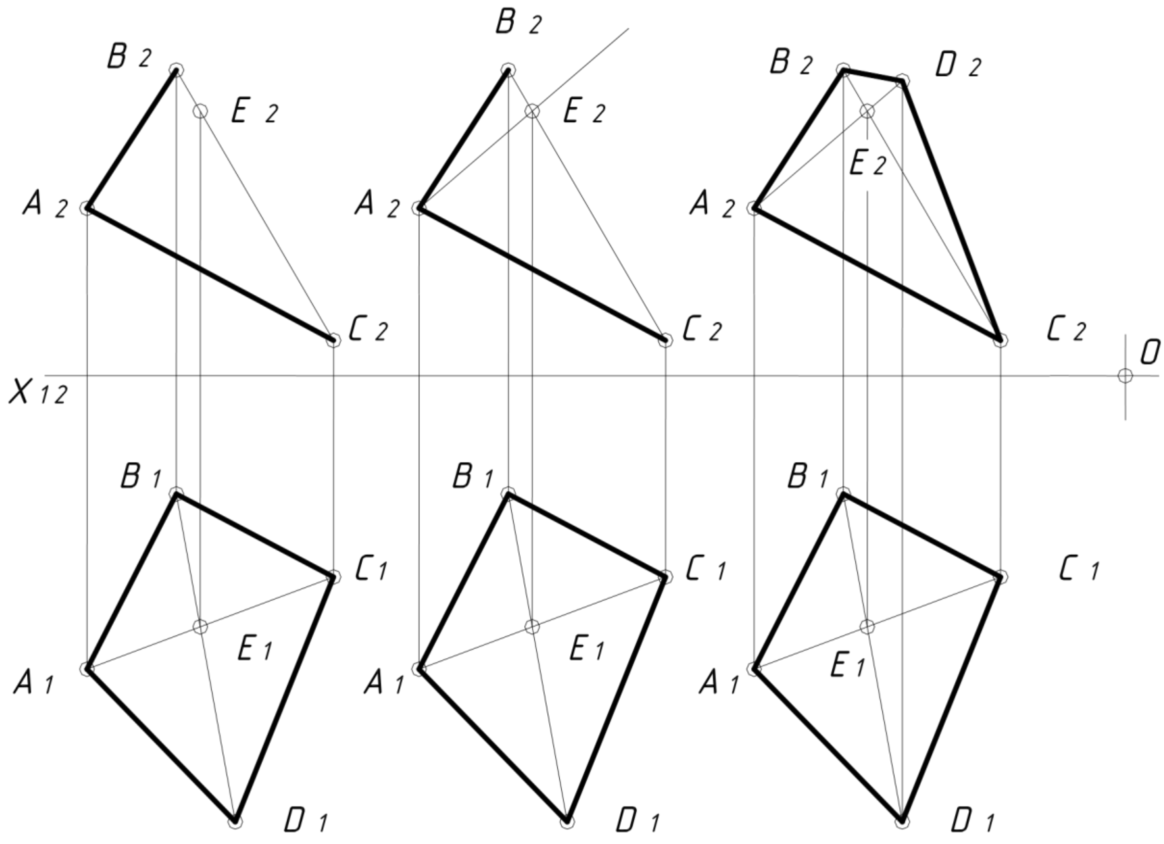


Рис.4.17

4.4. Належність прямої і точки площині

Пряма належить площині тоді, коли:

– має, принаймні, дві спільні точки з площиною;

– пряма проходить через точку, яка лежить у площині й паралельна будь-якій прямій, що розташована у цій площині.

Точка належить площині тоді, коли вона лежить на прямій, що належить площині. Спираючись на ці твердження, розглянемо особливості побудови на епюрі прямих і точок, що належать площині.

Нехай у площині α, що задана двома паралельними прямими ***l*** і **k** (рис. 4.18), необхідно провести довільну пряму **t**. Для цього на прямій ***l*** візьмемо точку **1** і на прямій **k** – точку **2**. Відомо, що проекції цих точок $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{1_2}$ і $\mathbf{2_1}$, $\mathbf{2_2}$ лежать на відповідних проекціях прямих ***l*** і **k**. Отже, прийняті точки **1** і **2** лежать у заданій площині α, тож пряма **t** ($\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$), проведена через ці точки, – шукана.

На цьому ж рисунку зображена точка **A** ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$), яка належить площині α, оскільки вона побудована на прямій ***l***, що лежить у заданій площині.

Площина α задана слідами в системі $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$. Щоб у такій площині провести довільну пряму ***l***, досить взяти у цій площині дві будь-які точки і сполучити їх прямою лінією. У заданому випадку вибираємо дві довільні точки на слідах площини α, які є слідами **H** і **F** шуканої прямої ***l***. Отже, сполучивши однойменні проекції точок **H** і **F**, отримаємо проекції l_1 і l_2 прямої ***l***, яка належить площині α. Звідси можна зробити висновок, що пряма лежить у площині тоді, коли сліди прямої лежать на однойменних слідах площини.

На рис. 4.19 зображено площину α, задану слідами і точки **A** і **B**. З рисунка можна зробити висновок, що точка **A** належить площині, оскільки вона лежить на прямій, що належить заданій площині, а точка **B** не належить площині, тому що вона не лежить на відповідній прямій (горизонтальна проекція точки $\mathbf{B_1}$ лежить на прямій, проте фронтальна $\mathbf{B_2}$ не належить прямій).

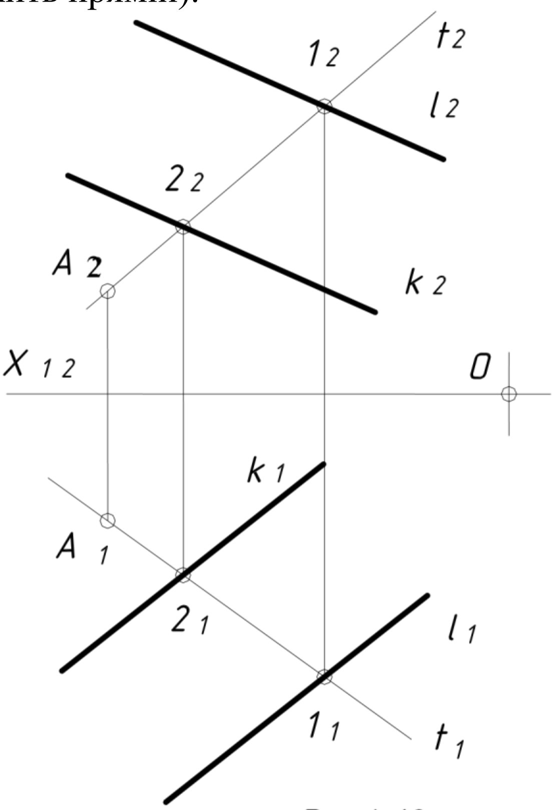


Рис.4.18

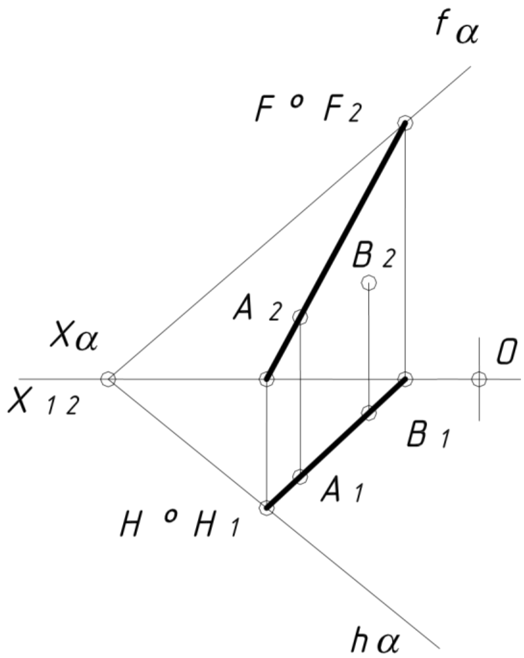


Рис.4.19

4.5. Головні прямі площини

Серед безлічі прямих, які можна провести в площині, виділяють паралельні до площини проекцій, тобто які займають особливе положення: *горизонталі, фронталі, профілі*. До особливих також належать і лінії нахилу, які визначають кут нахилу площини до тієї чи іншої площини проекцій.

Ці прямі ще називають головними лініями площини.

Горизонталлю площини називають пряму, яка лежить у цій площині й паралельна до горизонтальної площини проекцій.

Розглянемо побудову горизонталі в площині α, заданій слідами (рис. 4.20). Візьмемо у цій площині будь-яку точку **A** і проведемо через неї пряму **h** паралельно до горизонтального сліду $\mathbf{h_\alpha}$. Пряма **h** лежатиме в площині і буде паралельною до $\mathbf{П_1}$, оскільки є спільною для площини α і $\mathbf{П_1}$ (слід площини α). Отже, пряма **h** є горизонталлю площини α. Горизонтальна проекція горизонталі $\mathbf{h_1}$ паралельна до горизонтального сліду площини α. Це випливає з того, що пряма **h** паралельна до $\mathbf{h_\alpha}$ за побудовою і до $\mathbf{h_1}$ як горизонтальна пряма до своєї горизонтальної проекції. Фронтальна $\mathbf{h_2}$ і профільна $\mathbf{h_3}$ проекції горизонталі паралельні до осей **OX** і **OY** відповідно, оскільки **h** – паралельна до площини $\mathbf{П_1}$ (рис. 4.21).

У площинах, заданих на епюрі проекціями точок і прямих, головні лінії будують, виходячи з умови належності прямої площині та з урахуванням властивостей проекцій прямих особливого положення. Проведемо горизонталь у площині, заданій трикутником **ABC** (рис. 4.22). Виходячи з того, що горизонталь – пряма, паралельна до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$, фронтальну $\mathbf{h_2}$ цієї прямої отримаємо, провівши пряму, паралельну до осі **OX**. Проведемо цю пряму через точку $\mathbf{A_2}$ для спрощення побудови. На перетині сторони $\mathbf{B_2C_2}$ позначимо точку $\mathbf{1_2}$. Для побудови горизонтальної проекції горизонталі знайдемо точку $\mathbf{1_1}$, яка лежить на $\mathbf{B_1C_1}$, провівши лінію зв'язку. З'єднавши точки $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{1_1}$, отримаємо горизонтальну проекцію $\mathbf{h_1}$ горизонталі.

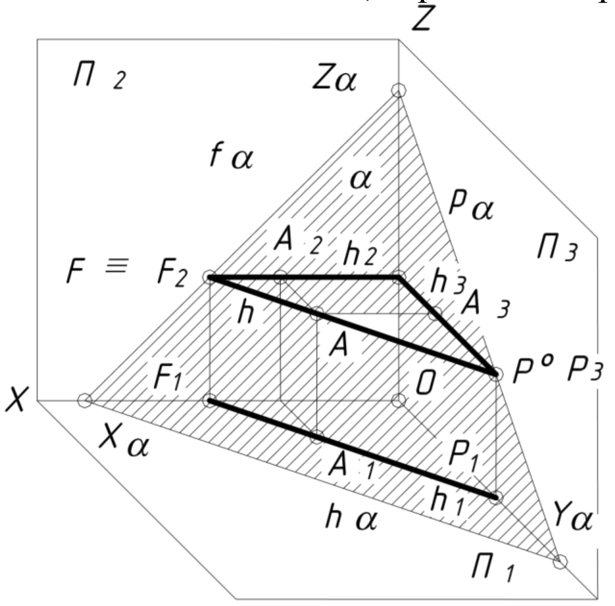


Рис.4.20

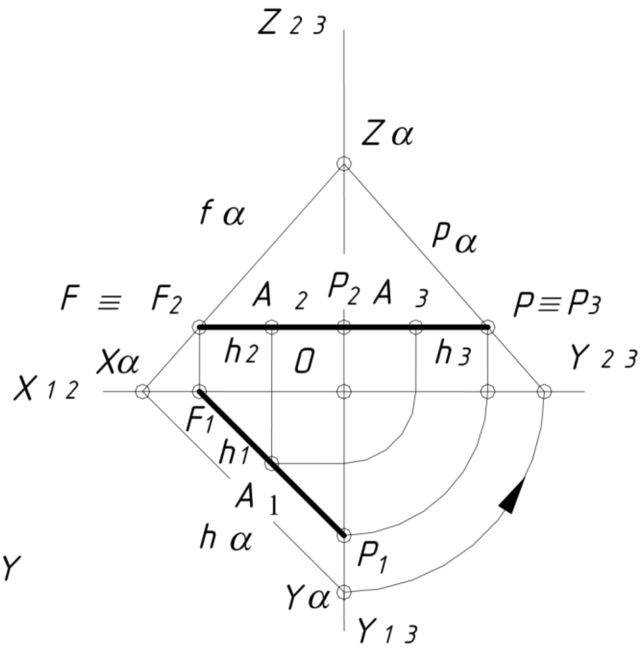


Рис.4.21

Фронталлю площини називають пряму, що лежить у площині й паралельна до фронтальної площини проекцій. Виходячи із побудови горизонталі, аналогічно будуємо фронталь (рис. 4.23).

На рис. 4.23 зображено фронталь **f** ($\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$) у площині, заданій двома паралельними прямими ***l*** і **k**.

Профіль площини – це пряма, яка лежить у площині й паралельна до профільної площини проекцій.

Побудову профілю площини зображено на рис. 4.24.

Лінією найбільшого нахилу площини до площини проекцій називають пряму, яка лежить у площині й перпендикулярна до одного зі слідів площини.

Розглянемо лінії найбільшого нахилу площини до площин проекцій. Ці лінії, будучи перпендикулярними до відповідних слідів площин, є одночасно перпендикулярами і до відповідних головних ліній площини. За допомогою лінії найбільшого нахилу визначають кут нахилу площини до будь-якої площини проекцій, тобто найбільший кут, який утворюється з даною площиною проекцій.

Лінію найбільшого нахилу площини до площини $\mathbf{\Pi_1}$ називають лінією схилу площини. На рис. 4.25 лінія схилу **AB** площини α перпендикулярна до $\mathbf{h_\alpha}$. Відповідно до правил проектування прямого кута горизонтальна проекція лінії схилу площини перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі цієї самої площини або до її горизонтального сліду. Отже, $\mathbf{A_1B_1}$ також перпендикулярна до $\mathbf{h_\alpha}$. Тому кут $\mathbf{ABA_1} = \beta$ є лінійним кутом двогранного, утвореного площинами α і $\mathbf{\Pi_1}$, тобто кутом нахилу площини α до горизонтальної площини проекцій.

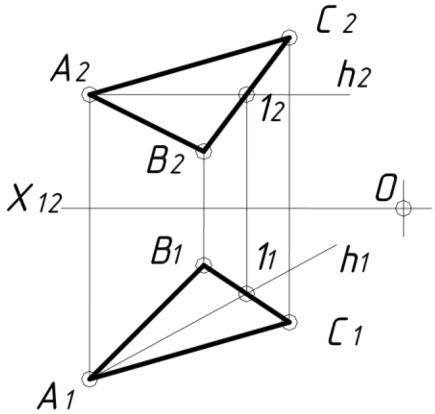


Рис. 4.22

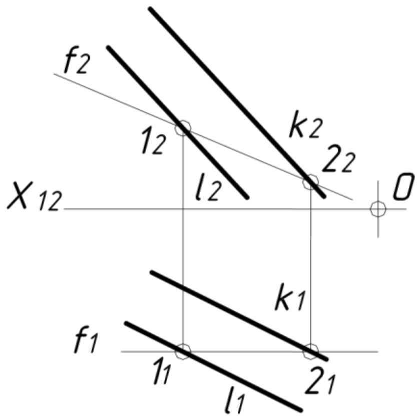


Рис. 4.23

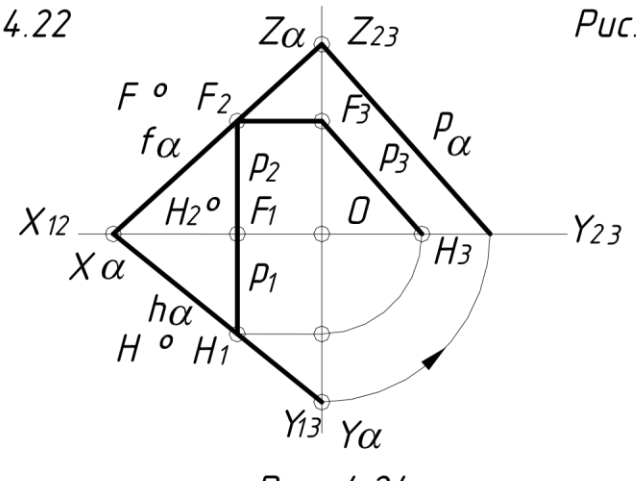


Рис. 4.24

На рис. 4.26 зображено лінію нахилу $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{l_2}$) у площині α, заданій слідами. Кут β нахилу площини α до площини $\mathbf{\Pi_1}$ виражений проекціями відрізка **HF**, а його величина визначена способом прямокутного трикутника. У площині, заданій трикутником (рис. 4.27), лінію схилу **k** ($\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$) будуємо за допомогою горизонталі **h** ($\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$) з урахуванням сказаного вище. Аналогічно будуємо лінії нахилу до площин проекцій $\mathbf{\Pi_2}$ і $\mathbf{\Pi_3}$.

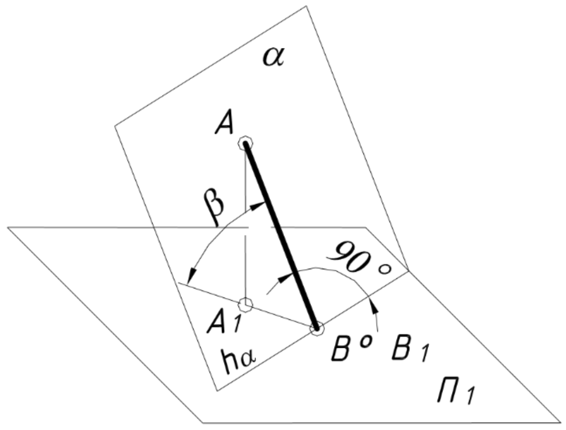


Рис. 4.25

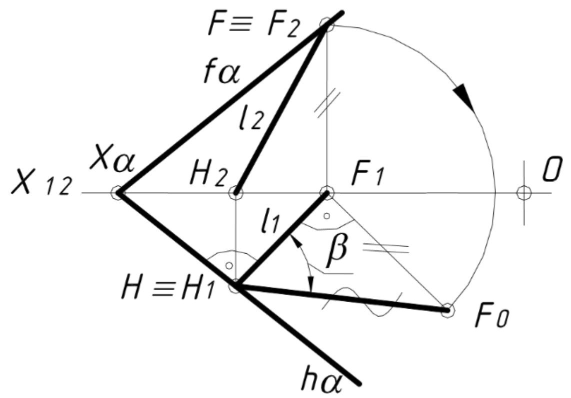


Рис. 4.26

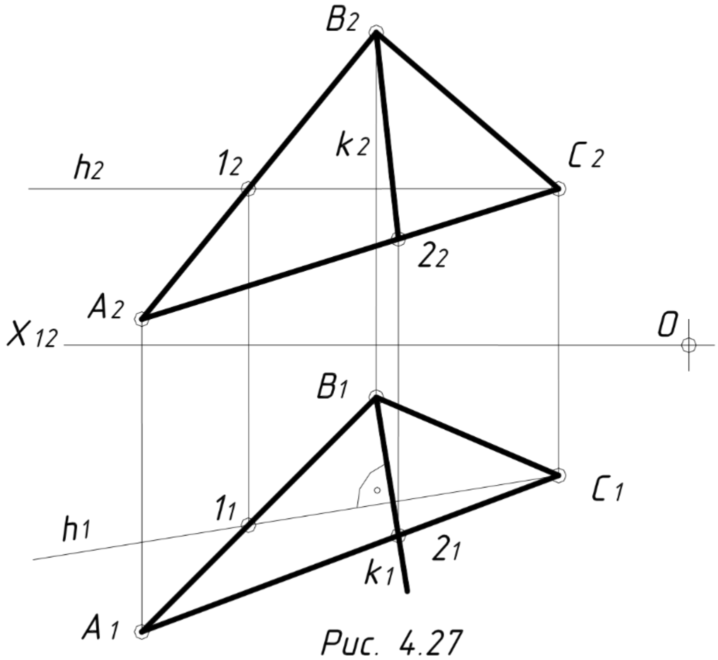


Рис. 4.27

Запитання для самоперевірки

1. Якими елементами простору можна задати площину?
2. Як задається площина на епюрі?
3. Що називається слідом площини?
4. Як може бути розміщена площина відносно площин проекцій?
5. Які площини називаються проектуючими?
6. Які площини називаються площинами рівня?
7. У чому суть побудови проекцій многокутників?
8. Назвіть ознаки належності прямої й площини; точки й площини.
9. Які лінії і чому називають лініями особливого положення у площині?
10. Назвіть положення площини, у якої горизонталь є одночасно профільною прямою.

5. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Дві площини у просторі можуть бути паралельними або перетинатися. У першому випадку вони не мають спільних точок, у другому – спільними точками цих площин є лінія їх взаємного перетину.

Розглянемо випадок паралельності площин. Дві площини паралельні тоді, коли дві прямі, що перетинаються, однієї площини взаємно паралельні до двох прямих, що перетинаються другої площини. Такими прямими можуть бути, наприклад, прямі **AB**, **BC**, $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{B_1C_1}$ у площинах α і β (рис. 5.1), де $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{BC} \parallel \mathbf{B_1C_1}$ або сліди $\mathbf{h_\alpha}$, $\mathbf{f_\alpha}$ і $\mathbf{h_\beta}$, $\mathbf{f_\beta}$ площин α і β на площинах проекцій $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$ (рис. 5.2), де $\mathbf{h_\alpha} \parallel \mathbf{h_\beta}$ і $\mathbf{f_\alpha} \parallel \mathbf{f_\beta}$. Отже, якщо дві площини паралельні, то їх однойменні сліди також паралельні. Справедливим буде й обернене твердження: якщо однойменні сліди двох площин паралельні, то такі площини паралельні у просторі.

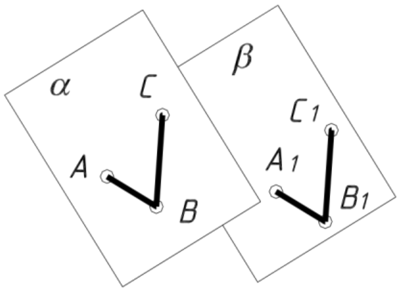


Рис. 5.1

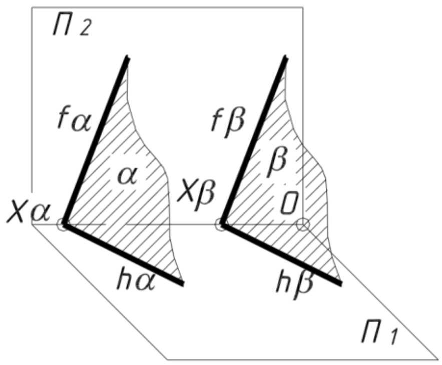


Рис. 5.2

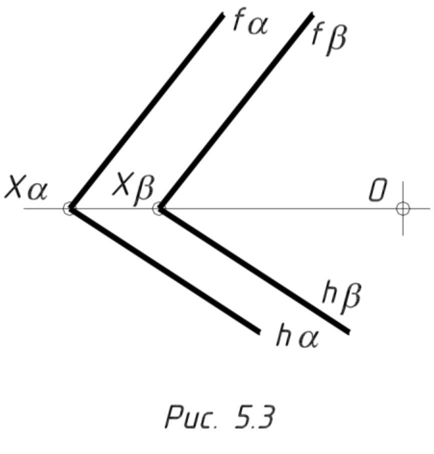


Рис. 5.3

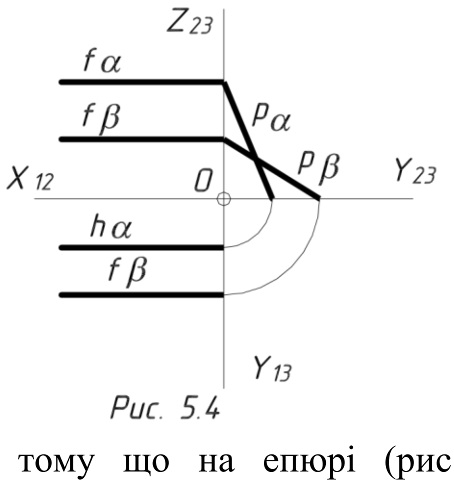


Рис. 5.4

Площини паралельні у просторі, тому що на епюрі (рис. 5.3) їх однойменні сліди паралельні: $\mathbf{h_\alpha} \parallel \mathbf{h_\beta}$ і $\mathbf{f_\alpha} \parallel \mathbf{f_\beta}$. Виходячи з того, що сліди площини є її нульовими горизонталями, фронталями і профілями, справедливе також твердження: у паралельних площин горизонталі, фронталі та профілі однієї площини паралельні до горизонталей, фронталей і профілів другої площини.

Якщо дві площини задати на епюрі двома парами слідів, паралельних не тільки один до одного, а й до однієї з осей проекцій, то висновок про паралельність таких площин може бути помилковим. У цьому випадку необхідно побудувати сліди площини на третій площині проекцій, до якої задані площини перпендикулярні. На рис. 5.4 задано дві площини α і β, однойменні сліди яких на площини проекцій Π_1 і Π_2 паралельні між собою і до осі **OX**. Проте про паралельність цих площин не можна сказати однозначно. Це підтверджується після побудов профільних слідів p_α і p_β, які перетинаються. Звідси робимо висновок, що коли хоч одна пара однойменних слідів двох площин перетинається, то такі площини не паралельні.

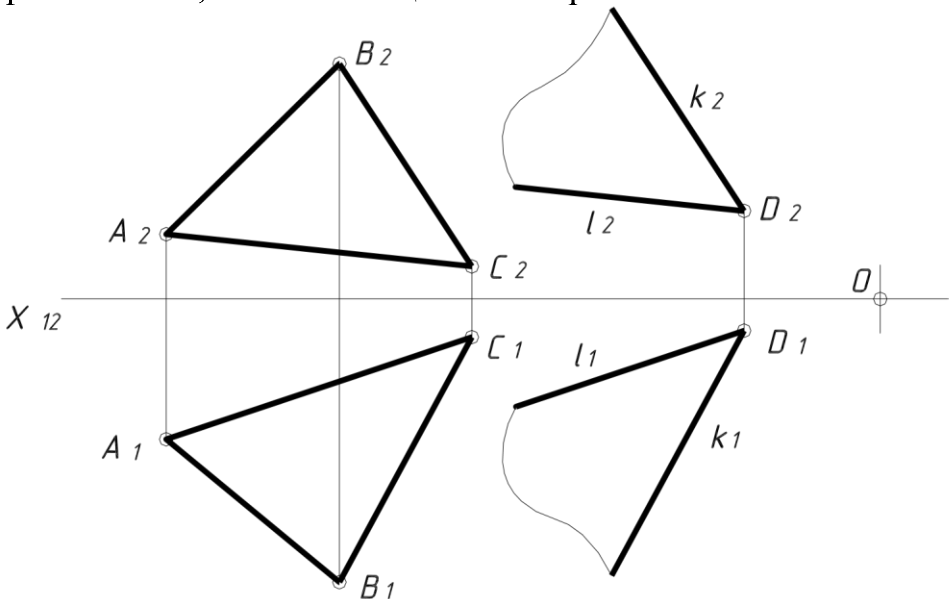


Рис. 5.5

Розглянемо ще один приклад побудови двох паралельних площин (рис. 5.5). Задано площину α трикутником **ABC**. Потрібно через точку **D** (**D_1**, **D_2**) провести площину β, паралельну до α. Побудова шуканої площини β зводиться до проведення через точку **D** двох прямих ***l*** і **k** відповідно паралельно до будь-яких двох сторін трикутника **ABC**, наприклад, ***l*** **||** **AC** і **k || BC**. Для цього на епюрі через горизонтальну проекцію **D_1** точки **D** проведемо прямі $l_1 \parallel A_1C_1$ і $k_1 \parallel B_1C_1$ (сторін трикутника **AC** і **BC**, що перетинаються). Через фронтальну проекцію **D_2** точки **D** проведемо прямі l_2 і k_2 відповідно паралельно до фронтальних проекцій A_2C_2 і B_2C_2 цих самих сторін. Отже, прямі ***l*** і **k** утворюють площину β, паралельну до α .

Тепер розглянемо площини, що перетинаються. Дві площини перетинаються по прямій лінії, для побудови якої досить визначити дві точки, що одночасно належать обом площинам, або одну таку точку і напрямок прямої перетину.

В окремому випадку, коли площини задані слідами, лінію перетину визначають точками перетину однойменних слідів площини.

На рис. 5.6 задано площини α і β, однойменні сліди яких перетинаються в точках **H** і **F**. Очевидно, що ці точки будуть спільними для обох площин, тобто пряма **HF** (***l***) буде лінією перетину заданих площин. Для побудови проекцій ліній перетину ***l*** визначаємо проекції точок **H** і **F** і сполучаємо їх однойменні проекції. Отже, пряма ***l*** (l_1, l_2) є лінією перетину площин α і β.

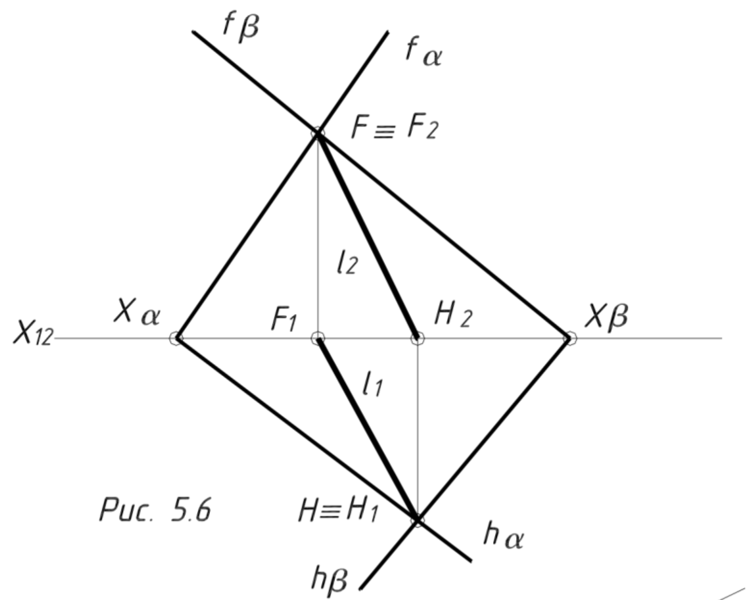


Рис. 5.6

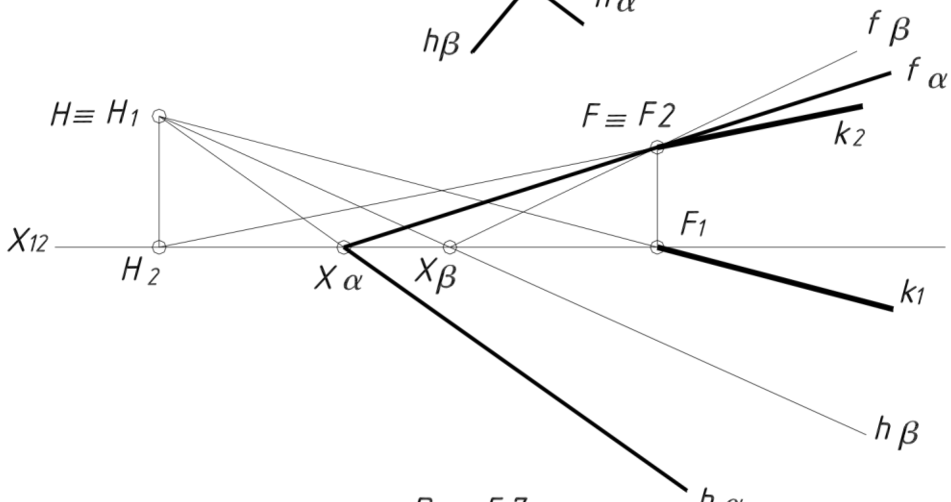


Рис. 5.7

Залежно від розміщення слідів площин, що перетинаються, можливі такі випадки побудови лінії їх перетину:

1) дві площини, однойменні сліди яких перетинаються в межах рисунка або точки перетину яких знаходяться без додаткових побудов (рис. 5.6);

2) дві площини, у яких тільки одна пара однойменних слідів перетинається в межах рисунка, друга не перетинається (сліди паралельні) або перетинаються поза межами рисунка (рис. 5.7). Наприклад, побудувати лінію перетину площин α і β (рис. 5.7), у яких фронтальні сліди перетинаються в межах рисунка, а перетин горизонтальних слідів можливий після їх продовження. У цьому випадку одна спільна для обох площин точка **F** визначається безпосередньо при перетині слідів $\mathbf{f_\alpha}$ і $\mathbf{f_\beta}$. Другу точку **H** знаходимо, продовжуючи до перетину горизонтальні сліди. У цьому разі продовження слідів можливе в межах рисунка. Зрозуміло, що точки **H** і **F**, будучи спільними для двох площин α і β, є слідами лінії їх перетину. Тому, відзначивши проекції точок **H** і **F**, сполучаємо їх однойменні проекції й отримаємо проекції $\mathbf{k_1}$ і $\mathbf{k_2}$ шуканої лінії перетину α і β;

3) однойменні сліди двох площин не перетинаються в межах рисунка (рис. 5.8).

На цьому рисунку визначаємо проекції лінії перетину площин □ і □, горизонтальні сліди яких перетинаються в межах рисунка, а фронтальні – паралельні між собою. У цьому випадку лінію перетину ***l*** будуємо за спільною для обох площин точкою **H** і напрямом лінії перетину, який визначаємо, виходячи з того, що паралельні прямі (сліди $\mathbf{f_\alpha}$ і $\mathbf{f_\beta}$) перетинаються в нескінченності. Отже, для побудови прямої ***l*** необхідно сполучити точку **H** з точкою **F**, яка перебуває в нескінченності. Побудова проекцій l_1 і l_2 прямої перетину двох площин зводиться до визначення проекцій $\mathbf{H_1}$ і $\mathbf{H_2}$ точки **H** і проведення прямої l_1 паралельно до осі **OX** і прямої l_2 паралельно до слідів $\mathbf{f_\alpha}$ і $\mathbf{f_\beta}$. Очевидним є те, що пряма ***l*** є фронталлю, спільною для площин α і β.

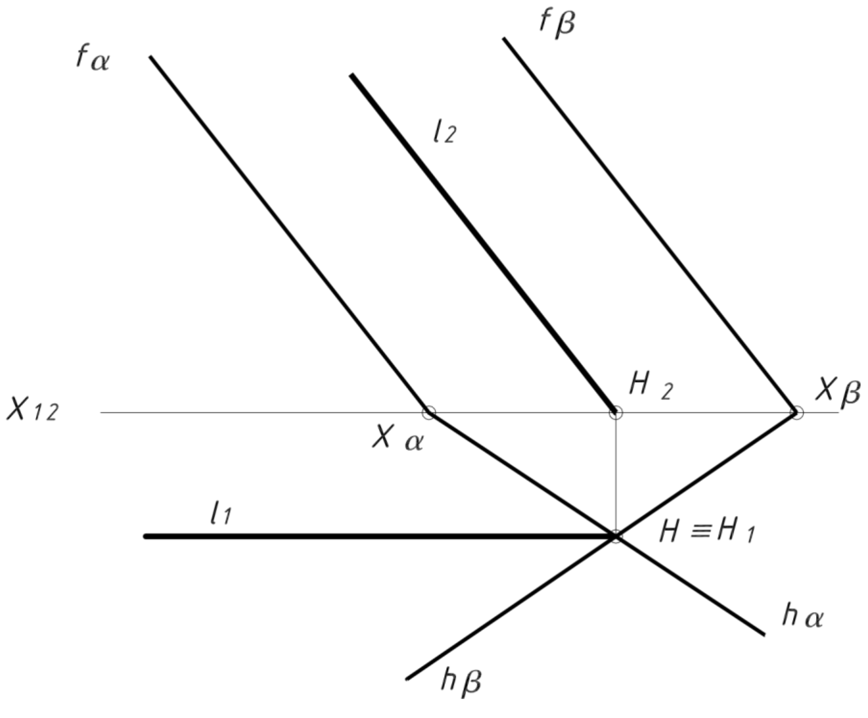


Рис. 5.8

Інший приклад, коли одна пара слідів перетинається в межах рисунка, а друга – поза ним. Як бачимо з рис. 5.9, горизонтальні сліди $\mathbf{h_\alpha}$ і $\mathbf{h_\beta}$ площин α і β перетинаються у точці $\mathbf{H \equiv H_1}$. Це одна точка шуканої лінії перетину **k**, а саме – її горизонтальний слід. Друга точка $\mathbf{F \equiv F_2}$ – фронтальний слід прямої, в якій перетинаються сліди $\mathbf{f_\alpha}$ і $\mathbf{f_\beta}$ – недоступна, оскільки ці сліди не перетинаються в межах рисунка. Тому замість точки **F** необхідно відшукати іншу – довільну точку прямої перетину, спільну для заданих площин.

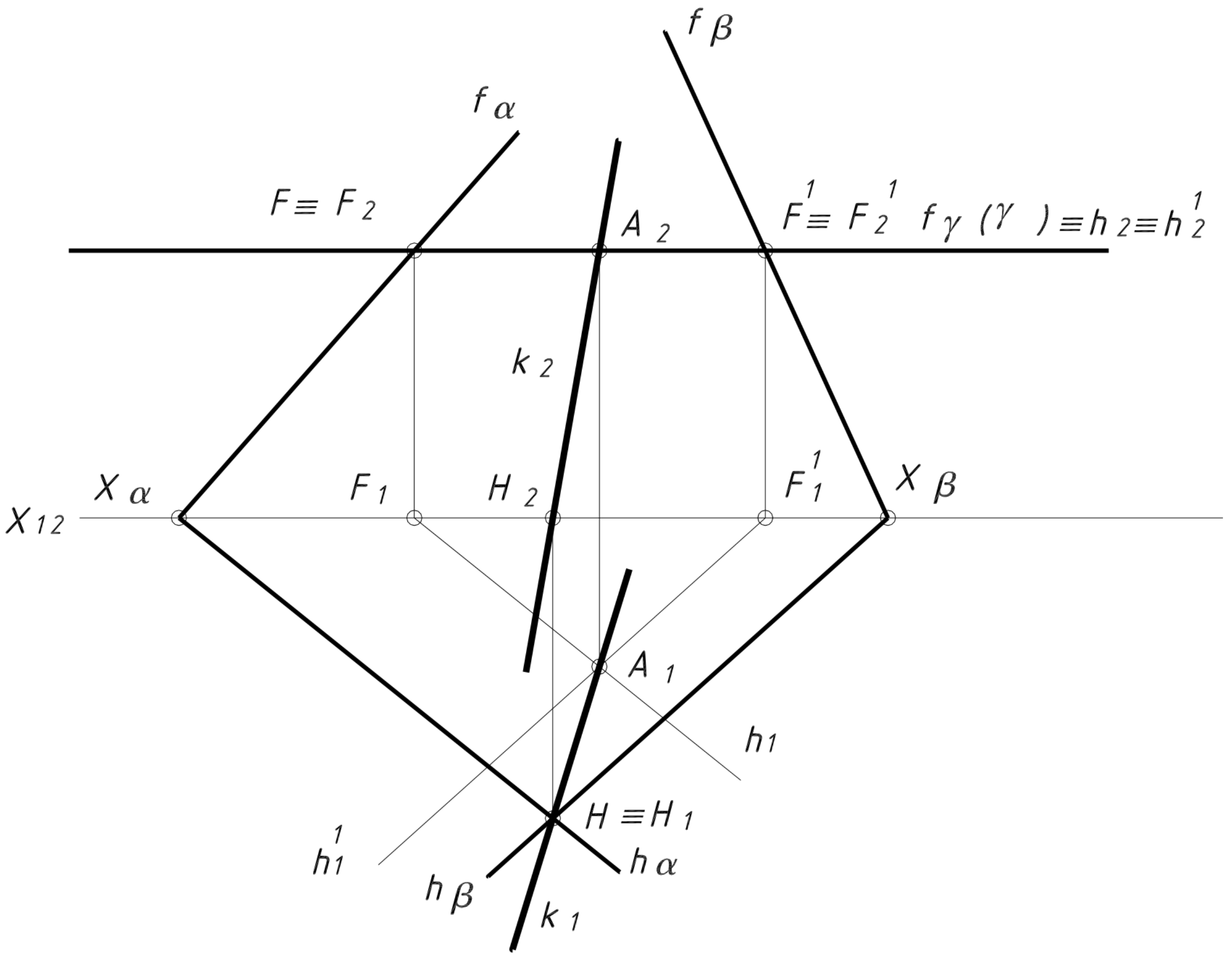


Рис. 5.9

Для цього користуємося допоміжними січними площинами посередниками, які проводять так, щоб вони перетинали обидві площини по лініях, які легко будувати. Оскільки посередниками здебільшого є дві проектуючі площини, то лінії перетину їх із заданими площинами – це горизонталі, фронталі або профілі. У даному випадку вибрана горизонтальна площина γ, яка перетинається із площинами α і β по горизонталях **h** і $\mathbf{h^1}$. На перетині цих горизонталей отримуємо спільну для заданих площин допоміжну точку **A** ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$), яку визначаємо, виходячи з того, що фронтальні проекції $\mathbf{h_2}$ і $\mathbf{h_2^1}$ горизонталей збігаються із фронтальним слідом $\mathbf{f_\gamma}$, а горизонтальні проекції $\mathbf{h_1}$ і $\mathbf{h_1^1}$ перетинаються в точці $\mathbf{A_1}$. Фронтальну проекцію $\mathbf{A_2}$ точки **A** позначаємо на перетині лінії зв'язку з фронтальним слідом $\mathbf{f_\gamma} \equiv \mathbf{h_2} \equiv \mathbf{h_2^1}$. Знайшовши другу точку – **A** ($\mathbf{A_2}$) прямої **k**, будуємо її проекції: горизонтальну $\mathbf{k_1}$ – через точки **H** $\equiv$ $\mathbf{H_1}$ і $\mathbf{A_1}$, фронтальну через – точки $\mathbf{H_2}$ і $\mathbf{A_2}$.

Якщо обидві пари слідів не перетинаються в межах рисунка або площини задані не слідами (рис. 5.10), то лінію перетину таких площин можна побудувати за допомогою кількох площин-посередників. Наприклад, візьмемо дві площини α і β. Площина α задана двома паралельними прямими **m** і **n**, а площина β – трикутником **ABC** (рис. 5.10).

Для побудови лінії перетину даних площин введемо допоміжну горизонтальну площину γ. Розглянемо окремо перетин площин α і γ та β і γ. Площина α перетинається з площиною γ по горизонталі, яку визначають точки **1** і **2** ($\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$). Побудувавши горизонтальні проекції даних точок $\mathbf{1_1}$ і $\mathbf{2_1}$, знайдемо горизонтальну проекцію лінії перетину. Площини β і γ перетинаються також по горизонталі, яку визначають точки **3** і **4** ($\mathbf{3_2}$, $\mathbf{4_2}$). Горизонтальні проекції точок **3** і **4**, як і саму горизонтальну проекцію лінії перетину, шукаємо, використовуючи вертикальний проекційний зв'язок.

При перетині горизонтальних проекцій ліній перетину α і γ та β і γ отримаємо першу точку **M** ($\mathbf{M_1}$), що визначає лінію перетину площин α і β. Друга проекція $\mathbf{M_2}$ знаходиться на $\mathbf{f_\gamma}$. Другу точку **N** лінії перетину шукаємо аналогічно, використавши площину-посередник – δ ($\mathbf{f_\delta}$) – горизонтальну площину рівня (рис. 5.10). Після побудови $\mathbf{N_2}$ і $\mathbf{N_1}$, з'єднуємо однойменні проекції точок **M** і **N**, а саме: $\mathbf{M_1N_1}$ та $\mathbf{M_2N_2}$, що визначають лінію перетину площин α і β. Цю задачу можна розв'язати й іншим способом.

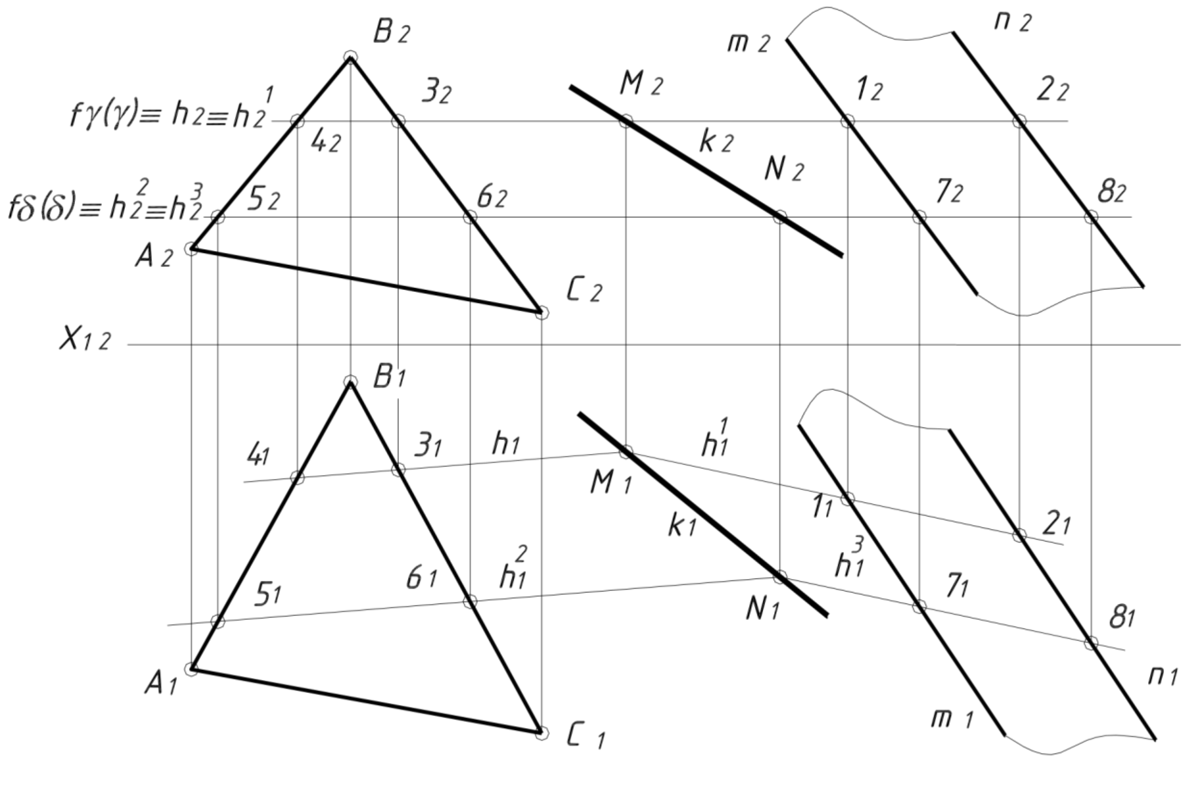


Рис. 5.10

Звідси можна зробити висновок, що для побудови лінії перетину двох площин у цьому випадку досить відшукати точки перетину двох прямих, які належать одній площині, з другою площиною. Отже, треба вміти будувати точку перетину прямої з площиною.

Запитання для самоперевірки

1. Яке взаємне положення можуть займати дві площини?
2. Чим визначається взаємна паралельність двох площин?
3. У чому суть загального способу побудови лінії перетину двох площин?
4. Які площини використовують при побудові лінії перетину двох площин?
5. Як можна знайти спільні точки двох площин?
6. Чи може лінія перетину двох площин знаходитися поза межами заданих площин?
7. Які площини доцільно використвувати при побудові лінії перетину двох площи, що задані слідами?

6. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Пряма та площина можуть займати одна відносно іншої такі положення:
1) пряма лежить у площині;
2) пряма перетинає площину;
3) пряма паралельна до площини.

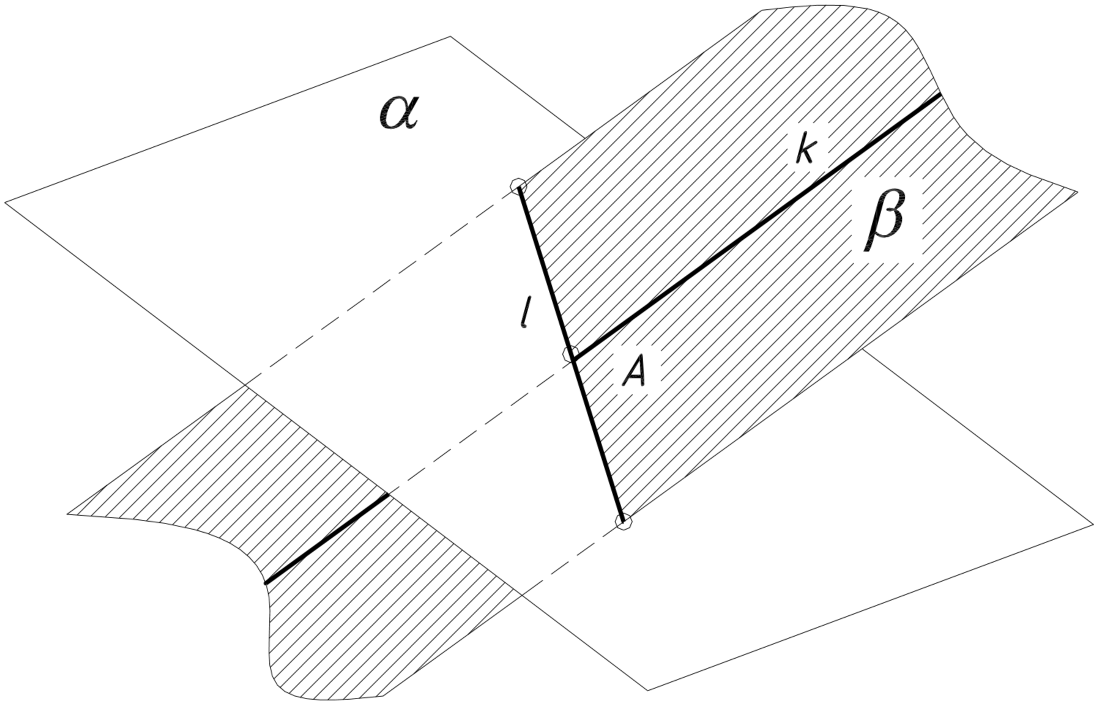


Рис. 6.1

Належність прямої та площини вже описана.

Для побудови точки перетину прямої з площиною довільного положення необхідно виконати такі побудови (рис. 6.1):

1) через задану пряму **k** провести деяку допоміжну площину β;

2) побудувати лінію перетину заданої площини α з допоміжною β;

3) зробити висновок про положення прямих **k** і ***l***.

У результаті аналізу можна зробити такі висновки:

а) прямі **k** і ***l*** не мають спільних точок – пряма **k** паралельна до площини α;

б) прямі **k** і ***l*** збігаються – пряма **k** лежить у площині α;

в) прямі **k** і ***l*** перетинаються – пряма **k** перетинає площину α.

Слід мати на увазі, що при перетині прямої лінії з проектуючою площиною точку перетину знайти значно простіше, оскільки, виходячи з основної властивості проектуючих площин, одна проекція точки перетину лежить на епюрі безпосередньо в місці перетину відповідної проекції прямої зі слідом площини на тій площині проекцій, до якої задана площина є проектуючою.

Нехай треба побудувати точку **К** перетину прямої ***l*** з фронтальнопроектуючою площиною α (рис. 6.2). На основі сказаного фронтальну проекцію **К**$_2$ шуканої точки **К** позначаємо на перетині ***l***$_2$ з **f**$_\alpha$, а горизонтальну проекцію **К**$_1$ – на перетині вертикальної лінії зв'язку, проведеної з точки **К**$_2$, з горизонтальною проекцією ***l***$_1$ заданої прямої ***l***. На горизонтальній площині проекцій штриховою лінією позначено невидиму частину прямої ***l***.

Розглянемо приклади, в яких для знаходження точки перетину прямої з довільною площиною треба виконати додаткові побудови. Наприклад, побудувати точку перетину **D** прямої ***l*** з площиною, заданою трикутником **ABC** (рис. 6.3).

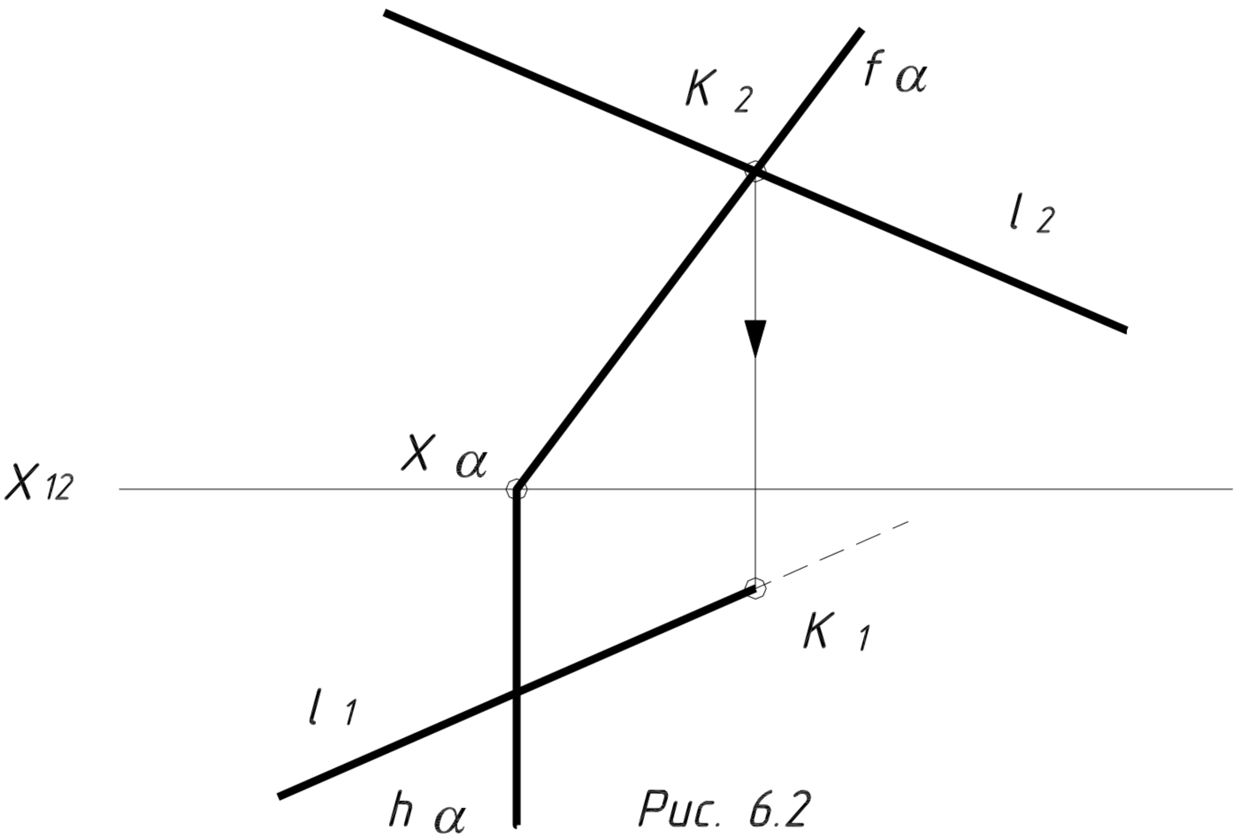


Рис. 6.2

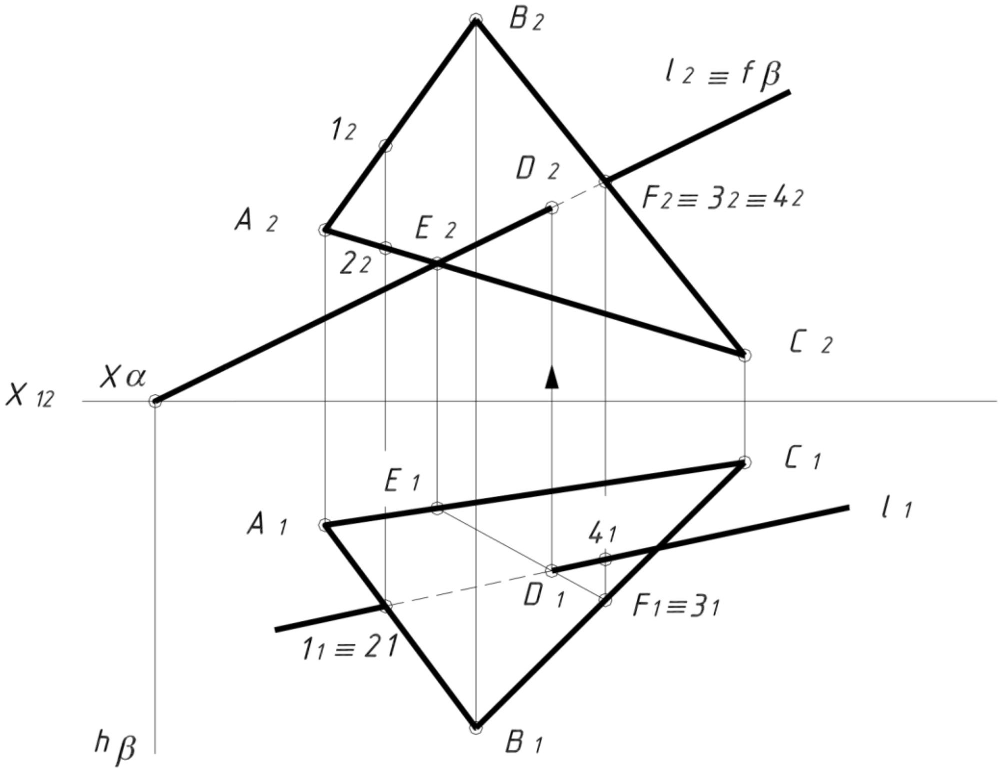


Рис. 6.3

Проведемо через пряму ***l*** допоміжну фронтально-проектуючу площину β. Сторони **АС** і **ВС** заданого трикутника перетинаються з площиною α у точках **Е** і **F** (див. рис. 6.3). Отже, ці точки є спільними для площини α і трикутника **АВС**, тобто пряма **EF** є лінією перетину цих площин. Далі робимо висновок про положення прямої ***l*** і трикутника **АВС**, за взаємним положенням прямих ***l*** і **EF**. Бачимо, що фронтальні проекції зазначених прямих збігаються, а горизонтальні – перетинаються у точці $\mathbf{D_1}$. Отже, прямі ***l*** і **EF** перетинаються у точці $\mathbf{D_1}$, спільній для прямої ***l*** і трикутника **АВС**, оскільки пряма **EF** лежить у площині трикутника.

Позначивши горизонтальну проекцію $\mathbf{D_1}$ шуканої точки **D**, знайдемо відомим способом її фронтальну проекцію $\mathbf{D_2}$, тобто будуємо проекції точки перетину **D** прямої ***l*** з площиною трикутника **АВС**. З допомогою конкуруючих точок **1** – **4** визначимо видимість прямої відносно площини трикутника.

Горизонтальний слід $\mathbf{h_\beta}$ допоміжної площини β не використовується в побудові, тому в подібних задачах обмежуються проведенням сліду допоміжної площини лише на тій площині проекцій, до якої допоміжна площина є проектуючою.

Розглянемо приклад побудови точки перетину прямої **k** з площиною α, заданою двома паралельними прямими ***l*** і **p** (рис. 6.4).

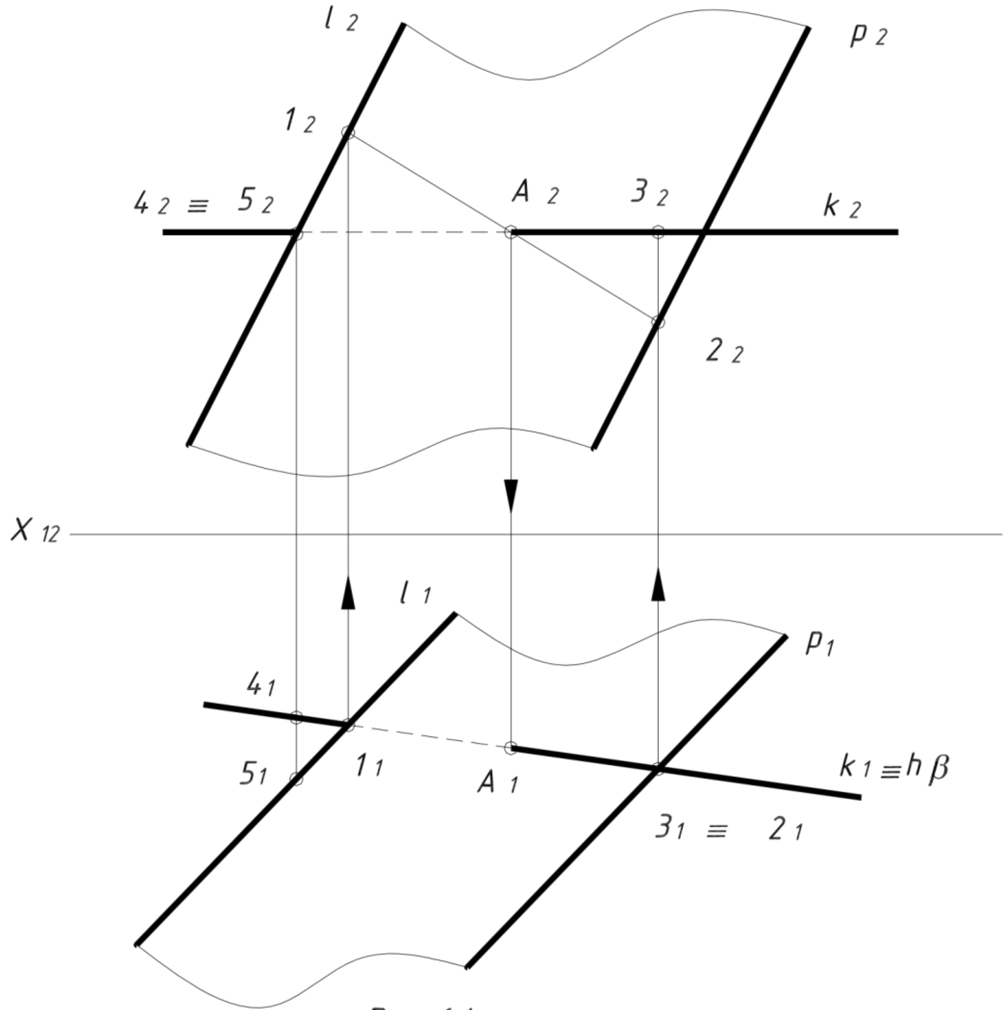


Рис. 6.4

Хід побудови не відрізняється від попередньої задачі, однак прийнята допоміжна горизонтально-проектуюча площина β подана лише одним слідом $\mathbf{h_\beta}$. Лінія перетину заданої площини α з допоміжною β побудована за точками **1** і **2**.

Видимість прямої **k** відносно α знаходять за допомогою конкуруючих точок **2**, **3**, **4**, **5**.

Розглянемо паралельність прямої та площини, яка грунтується на відомому з геометрії положенні про те, що пряма паралельна до площини тоді, коли вона паралельна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині. В загальному випадку розв'язування задач такого типу зводиться до побудови у заданій площині будь-якої прямої й проведенні паралельної до неї шуканої прямої.

Нехай через точку **A** (рис. 6.5) треба провести пряму ***l***, паралельну до площини α. У площині α задаємо будь-яку пряму **k** ($\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$), а потім через точку **A** ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$) проводимо пряму ***l*** (l_1, l_2), паралельну до прямої **k**. Оскільки задана в площині α пряма **k** є однією з безлічі, то зрозуміло, що через точку **A** можна провести безліч прямих, паралельних до площини.

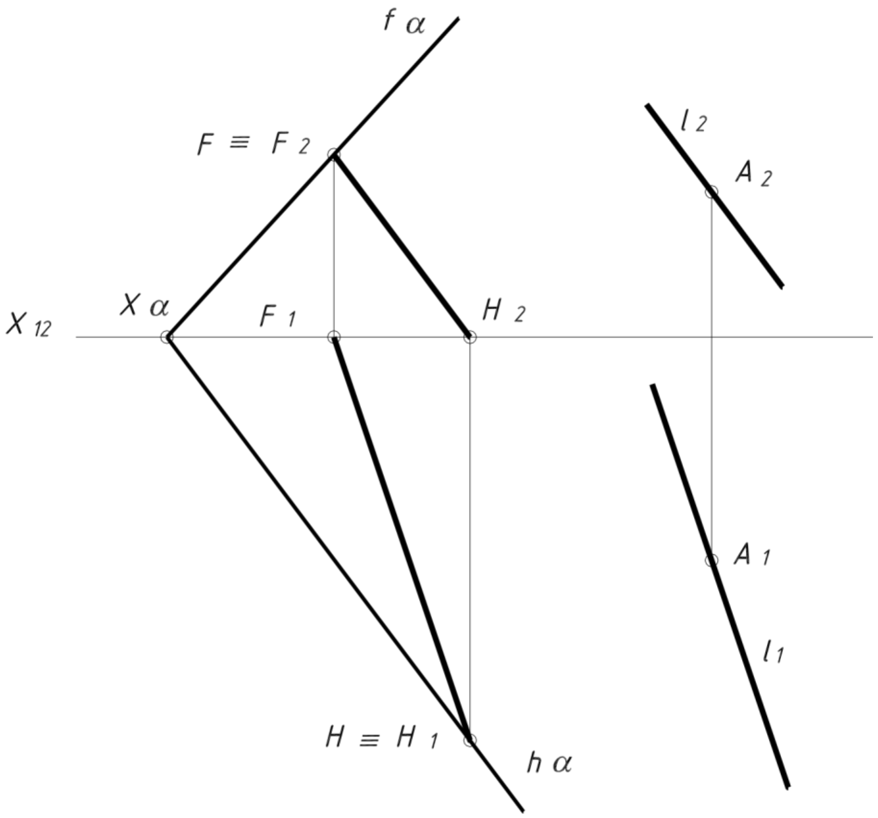


Рис. 6.5

Як розв'язати обернену задачу: через задану точку провести площину паралельно до заданої прямої.

Зрозуміло, що в цьому випадку через точку **A** можна провести пучок площин α, β, χ, ..., віссю яких є пряма **k**, що проходить через точку **A** паралельно до прямої l (рис. 6.6).

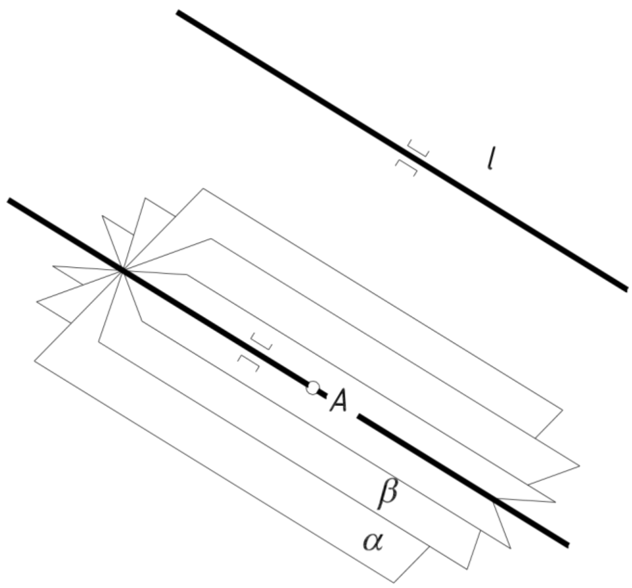


Рис. 6.6

Нехай задано точку **A** (**A**$_1$, **A**$_2$) і пряму ***l*** (***l***$_1$, ***l***$_2$). Через точку **A** провести площину α паралельно до прямої ***l*** (рис. 6.7).

Шукану площину зобразимо двома прямими, що перетинаються, а тому через точку **A** проведемо дві прямі, що перетинаються **k** і **p**, одну з яких, наприклад пряму **k**, будуємо паралельно до прямої ***l***, а пряму **p** – довільно. Шукана площина, виражена двома прямими, що перетинаються, проходить через задану точку паралельно до заданої прямої.

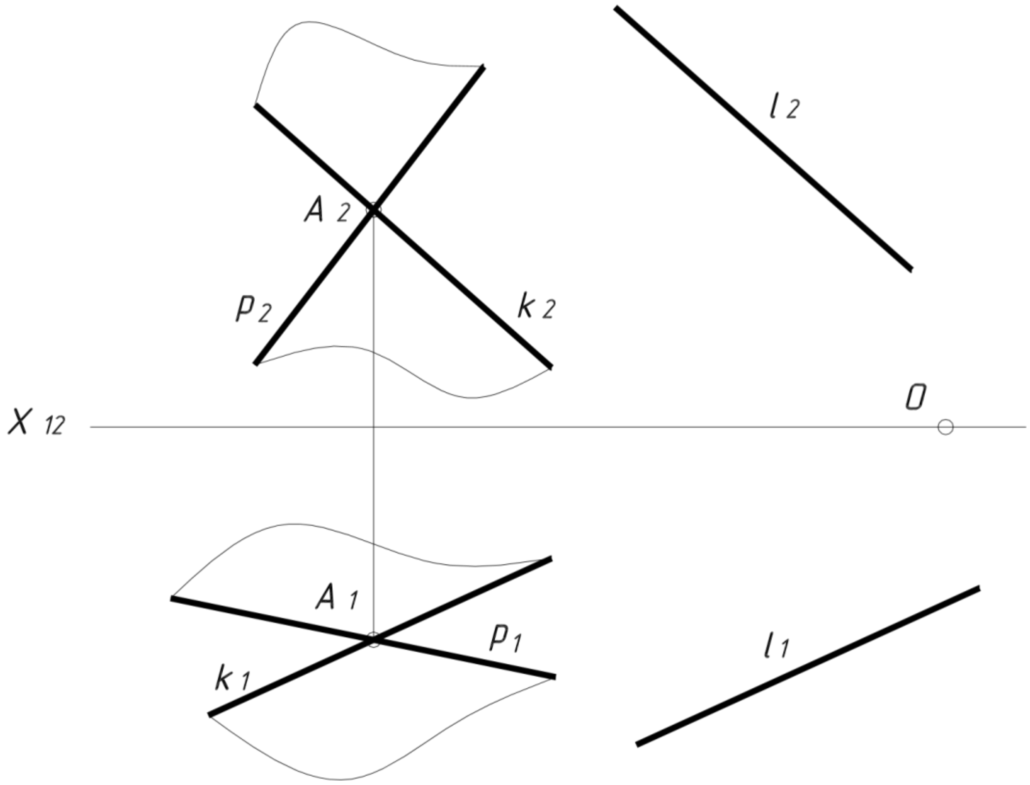


Рис. 6.7

Необхідно зазначити, що при побудові прямої ***l*** через задану точку **A** паралельно одночасно до площин α і β (рис. 6.8) неохідно насамперед визначити лінію перетину цих площин **k**, а потім провести пряму ***l*** паралельно до прямої **k**.

Розглянувши спосіб знаходження точки перетину прямої з площиною, можна перейти до побудови лінії перетину двох плоских фігур за точками перетину прямих ліній однієї площини з іншою. На рис. 6.9 зображено побудову лінії перетину двох трикутників – **ABC** і **DEF**. Пряма **MN** побудована по точках перетину **M** і **N** сторін **AC** і **BC** трикутника **ABC** з площиною трикутника **DEF** за допомогою посередників – фронтально-проектуючих площин α (**f**$_\alpha$) і β (**f**$_\beta$), проведених відповідно через прямі **AC** і **BC**.

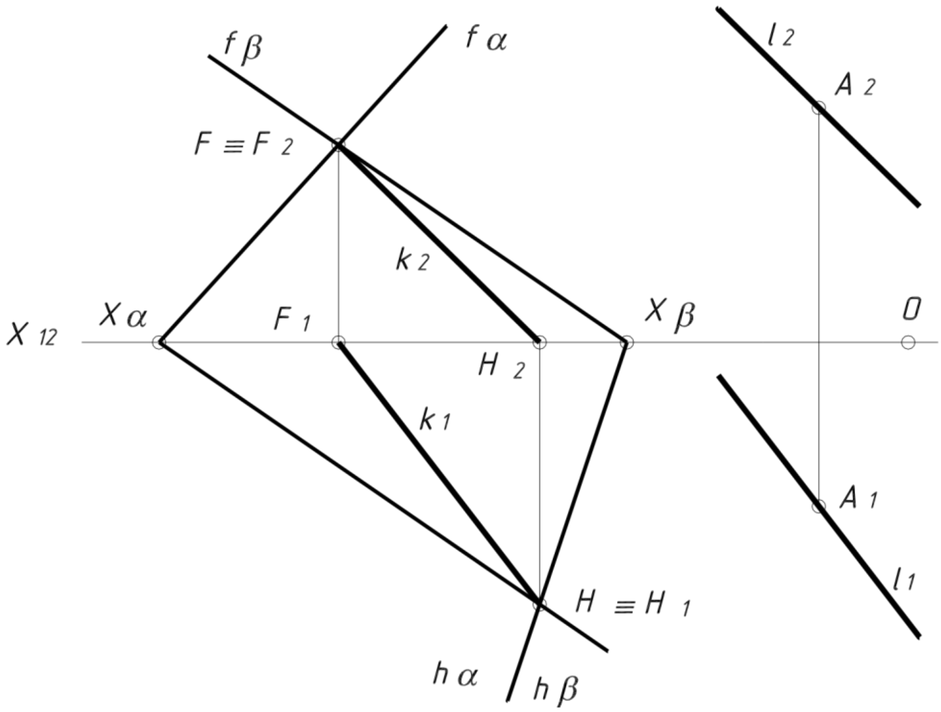


Рис. 6.8

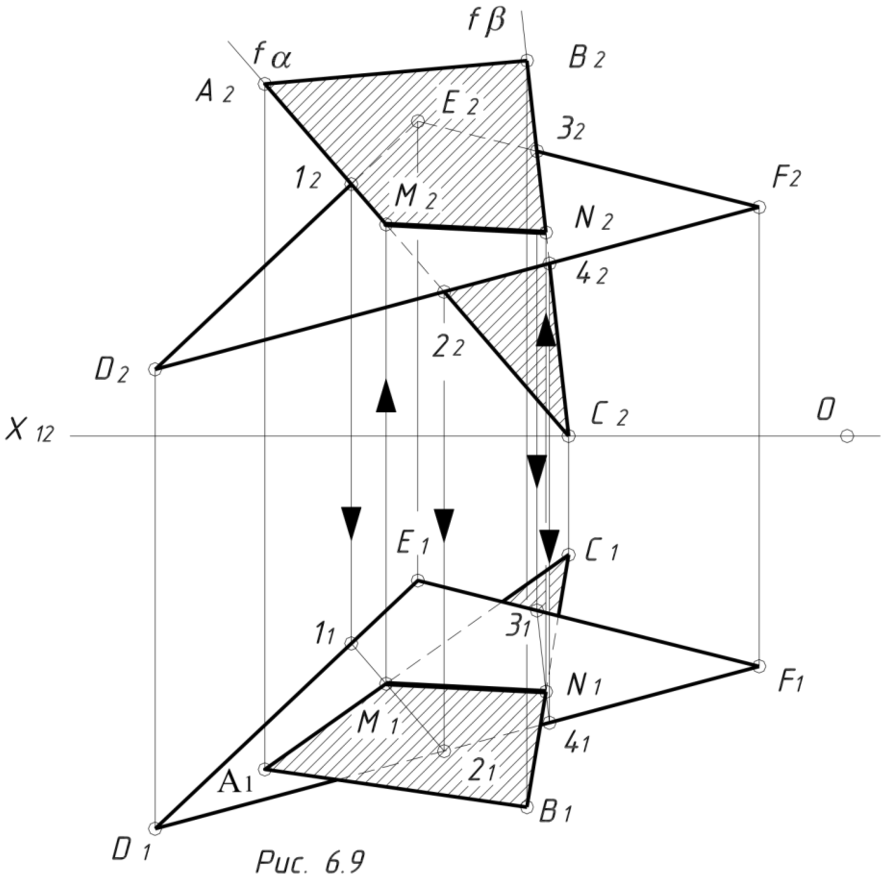


Рис. 6.9

Допоміжна площина **α** (**f**$_\alpha$) перетинає трикутник **DEF** по прямій **1** – **2**; на перетині горизонтальних прекцій прямих **AC** і **1** – **2** отримуємо горизонтальну проекцію **M**$_1$ точки **M** перетину прямої **AC** з трикутником **DEF**. Позначаємо точку $\mathbf{M_2}$. Аналогічно знаходимо точку $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$) за допогою площини $\boldsymbol{\beta}$ ($\mathbf{f_\beta}$). Сполучивши точки **M** і **N**, отримаємо шукану лінію перетину заданих трикутників і позначимо видимі й невидимі їх частини.

Побудова лінії перетину двох площин значно спрощується, якщо хоча б одна з них є проектуючою. Як бачимо з рис. 6.10, горизонтальні проекції точок $\mathbf{M_1}$ і $\mathbf{N_1}$ шуканої прямої **MN** знаходять, не проводячи допоміжних площин. Наступна побудова подібна до описаної на рис. 6.9.

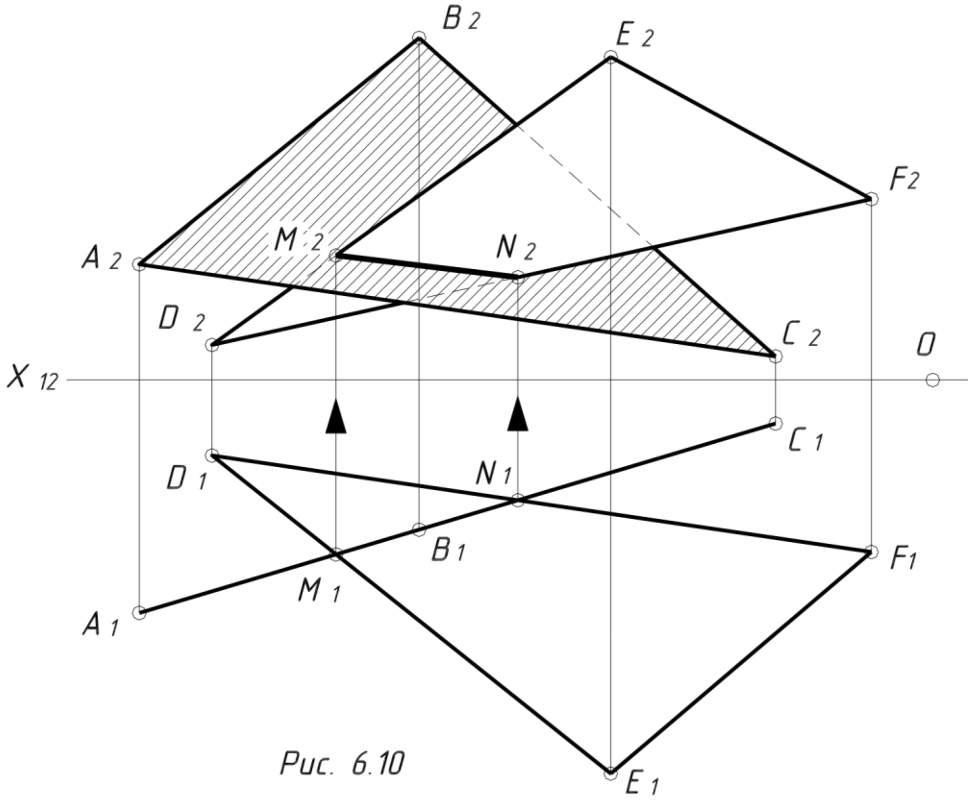


Рис. 6.10

Запитання для самоперевірки

1. Яке взаємне положення може займати пряма та площина?
2. Яка ознака паралельності прямої й площини?
3. Яка послідовність побудов для знаходження точки перетину прямої з площиною?
4. Як визначити видимість прямої при побудові точки перетину її з площиною?
5. Що таке площина посередник?
6. Які площини використовують як площини посередники?
7. Яка особливість побудови лінії перетину площин загального положення з площиною окремого положення?
8. Яка особливість при знаходженні точки перетину прямої окремого положення з площиною загального?

7. ПОБУДОВА ПРЯМОЇ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ ДО ПЛОЩИНИ. ПОБУДОВА ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПЛОЩИН І ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПРЯМИХ

Пряму, перпендикулярну до площини, слід розглядати як окремий випадок прямої, що перетинає площину під прямим кутом.

Побудова на епюрі перпендинкуляра до плошини, взаємно перепендикулярних площин і прямих грунтується на загальних способах, описаних раніше, однак має свої особливості. Розглянемо їх докладніше.

7.1. Проектування прямого кута

Будь-який кут проектується на площину проекцій в дійсну величину тільки тоді, коли сторони його паралельні до площини проекцій. На відміну від інших, прямий кут проектується в дійсну величину не лише в зазначеному випадку, але й тоді, коли хоча б одна його сторона паралельна до цієї площини проекцій. Розглянемо прямий кут **ABC** (рис. 7.1), у якого сторона **BC** розташована довільно, а сторона **AB** – паралельна площині **П**$_1$. Щоб довести, що при цьому кут **A**$_1$**B**$_1$**C**$_1$ залишається прямим, проведемо в площині **П**$_1$ відрізок **MD ≡ M**$_1$**D**$_1$ паралельно **A**$_1$**B**$_1$ (а також і **AB**). Тепер **MD** – перпендикуляр до **BC** і згідно з теоремою про три перпендикуляри кут **D ≡ D**$_1$**M ≡ M**$_1$**B**$_1$ – прямий. Але якщо **MD ≡ M**$_1$**D**$_1$ паралельна **A**$_1$**B**$_1$, то кут **A**$_1$**B**$_1$**C**$_1$ теж прямий.

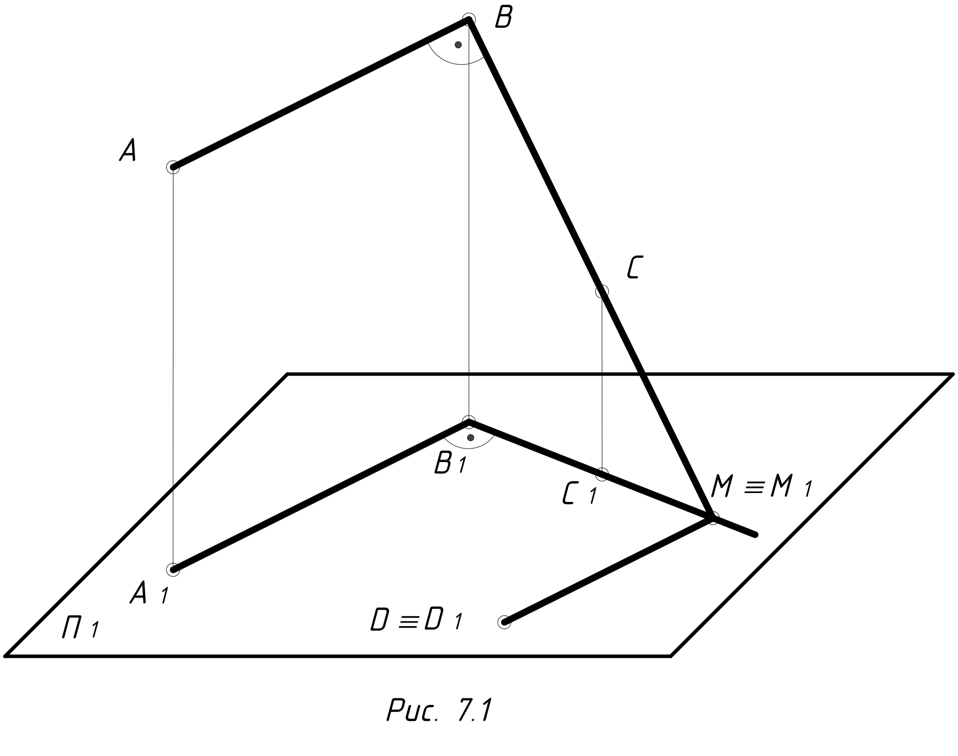


Рис. 7.1

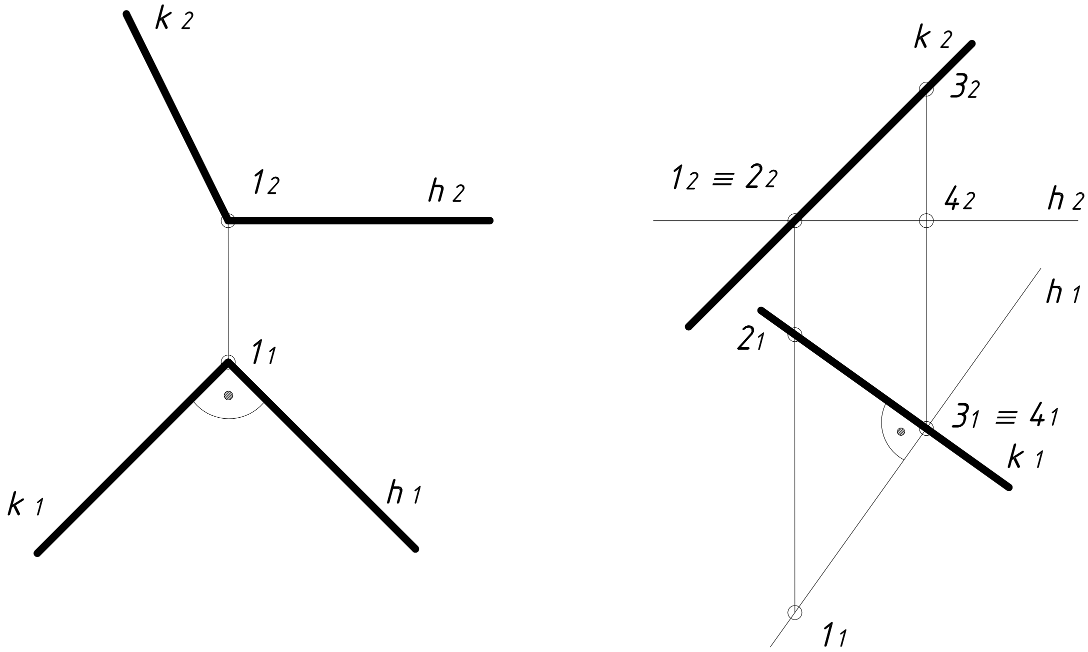


Рис. 7.2

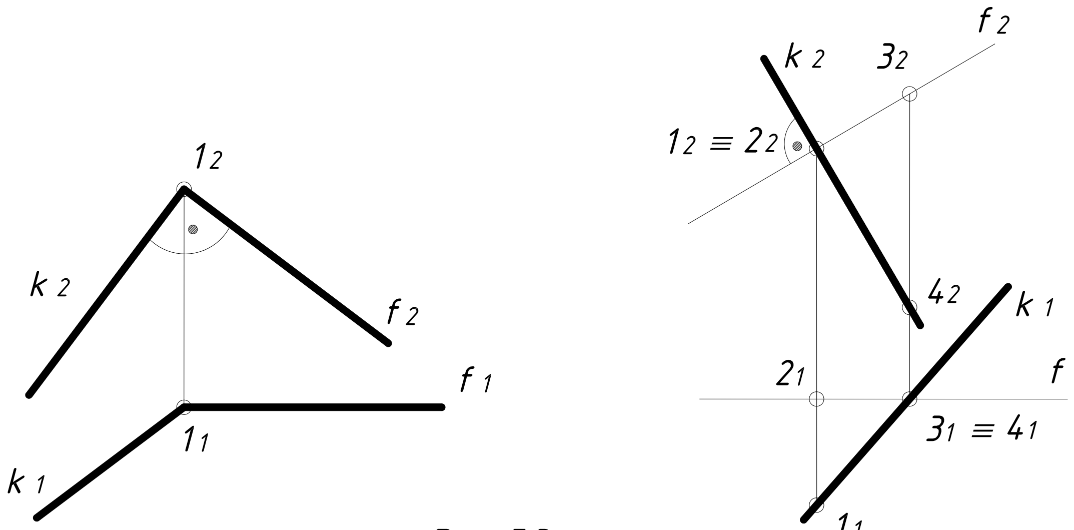


Рис. 7.3

Необхідно відзначити, що для гострого або тупого кута, в якого одна сторона паралельна площині проекцій, проекція кута на цю площину не дорівнює кутові, що проектується. При цьому проекція гострого й відповідно тупого кута відповідно менша і більша, ніж кут, що проектується.

Розглянувши теорему про проектування прямого кута, тобто проектування двох взаємно перпендикулярних прямих, що перетинаються, її можна поширити і на мимобіжні прямі, які розміщені в просторі під прямим кутом, а саме: дві взаємно перпендикулярні прямі (що перетинаються чи мимобіжні) тоді зберігають свою перпендикулярність в горизонтальній (рис. 7.2) або фронтальній (рис. 7.3) площині проекцій, коли, принаймні, одна з цих прямих відповідно є горизонталлю або фронталлю.

7.2. Перпендикулярність прямої та площини

Пряма та площина взаємно перпендикулярні, якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, які належать цій площині. А як спроектуються на площину проекцій два прямих лінійних кути, які утворені парою прямих, що перетинаються, і перпендикуляром до них? У випадку, коли сторони зазначених кутів є прямі загального положення, прямі кути спроектуються на площини проекцій не в дійсні величини. Якщо ж за сторони прямого кута в площині взяти дві прямі так, щоб одна з них була паралельна площині проекцій **П**$_1$, а друга – площині проекцій **П**$_2$ (рис. 7.4), то кути, утворені з кожною з узятих таким чином прямих і перпендикуляром до них, спроектуються на відповідні площини проекцій у прямі кути.

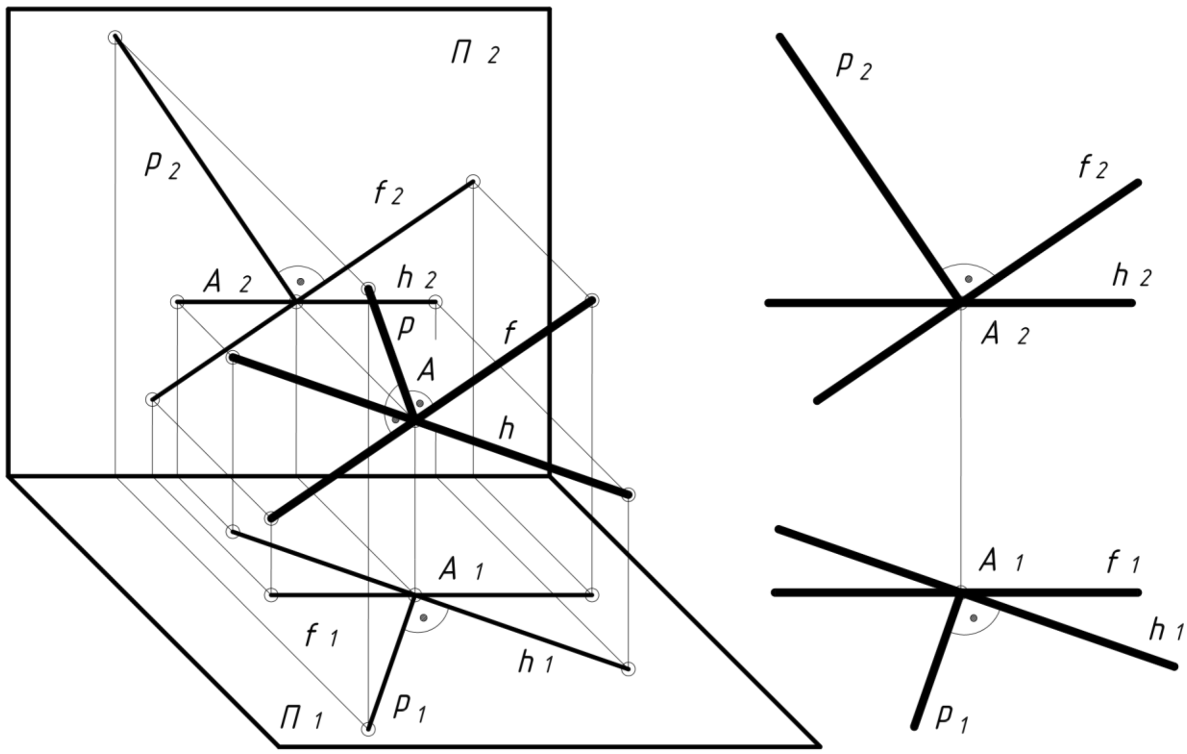


Рис. 7.4

Таким чином, якщо серед безлічі прямих у площині взяти її горизонталь і фронталь, тоді на епюрі **p**$_1$ перпендикуляра **p** з горизонтальною проекцією **h**$_1$ горизонталі і **p**$_2$ перпендикуляра **p** з фронтальною проекцією **f**$_2$ фронталі утворять прямі кути.

Отже, площина та пряма взаємно перпендикулярні, якщо горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі площини, а фронтальна проекція прямої перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі площини.

Розглянемо, яке положення займатимуть проекції перпендикуляра відносно слідів площини (рис. 7.5). Відомо, що горизонтальний слід площини α $\mathbf{h_\alpha}$ і фронтальний слід $\mathbf{f_\alpha}$ є відповідно нульовою горизонталлю та фронталлю цієї площини. Тому наведені міркування щодо взаємного розміщення відповідних проекцій перпендикуляра та горизонталі й фронталі площини справедливі також і щодо розміщення відповідних проекцій перпендикуляра та слідів цієї площини.

Отже, щоб пряма була перпендикулярна до площини, горизонтальна проекція прямої має бути перпендикулярною до горизонтального сліду площини, а фронтальна – до фронтального.

Справедливе й обернене твердження: якщо на епюрі горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтального сліду площини, а фронтальна – до фронтального, то пряма перпендикулярна до площини, якщо ця площина загального положення (рис. 7.5) або горизонтально – чи фронтально-проектуюча (рис. 7.6).

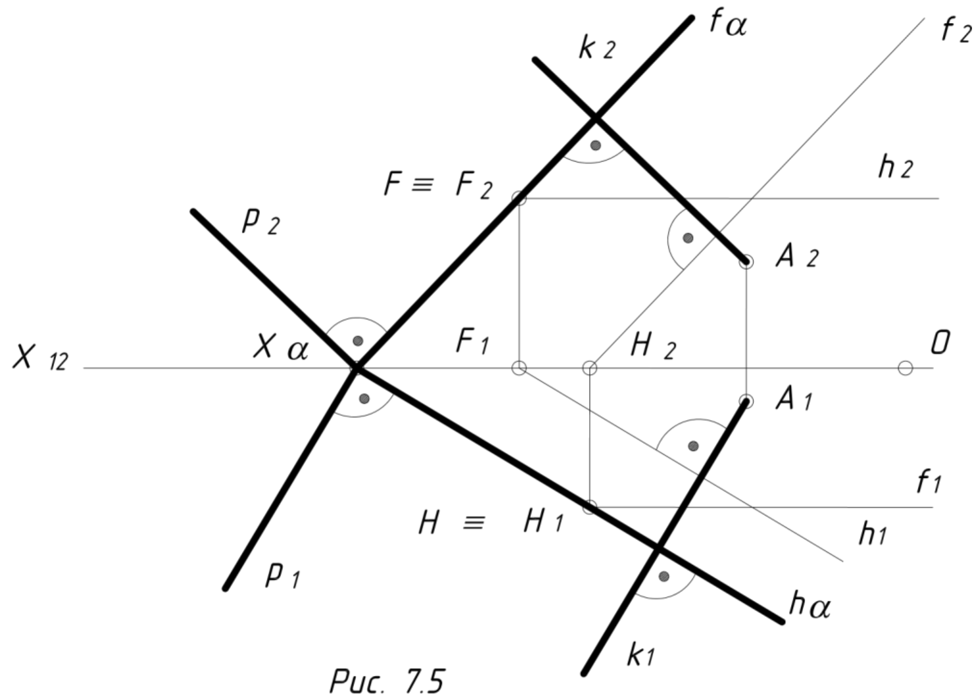


Рис. 7.5

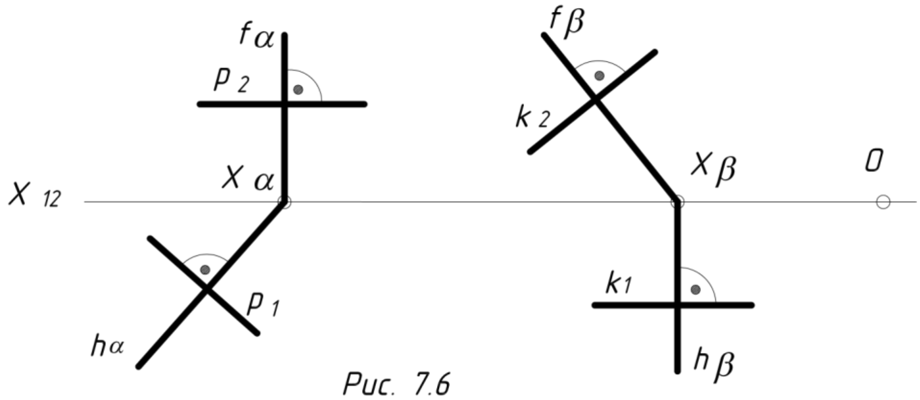


Рис. 7.6

Розглянемо кілька типових прикладів.

Нехай з точки **D** необхідно опустити перпендикуляр **p** на площину □, задану трикутником **ABC** (рис. 7.7) У заданому трикутнику проводимо насамперед горизонталь **h** через вершину **C** і фронталь **f** через вершину **A**. Потім з проекцій точки **D** ($\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$) будуємо проекції перпендикуляра: $\mathbf{p_1}$ з точки $\mathbf{D_1}$ перпендикулярно до $\mathbf{h_1}$ і $\mathbf{p_2}$, з точки $\mathbf{D_2}$ перпендикулярно до $\mathbf{f_2}$. Отже, пряма **p** є шуканим перпендикуляром з точки **D** до трикутника **ABC**.

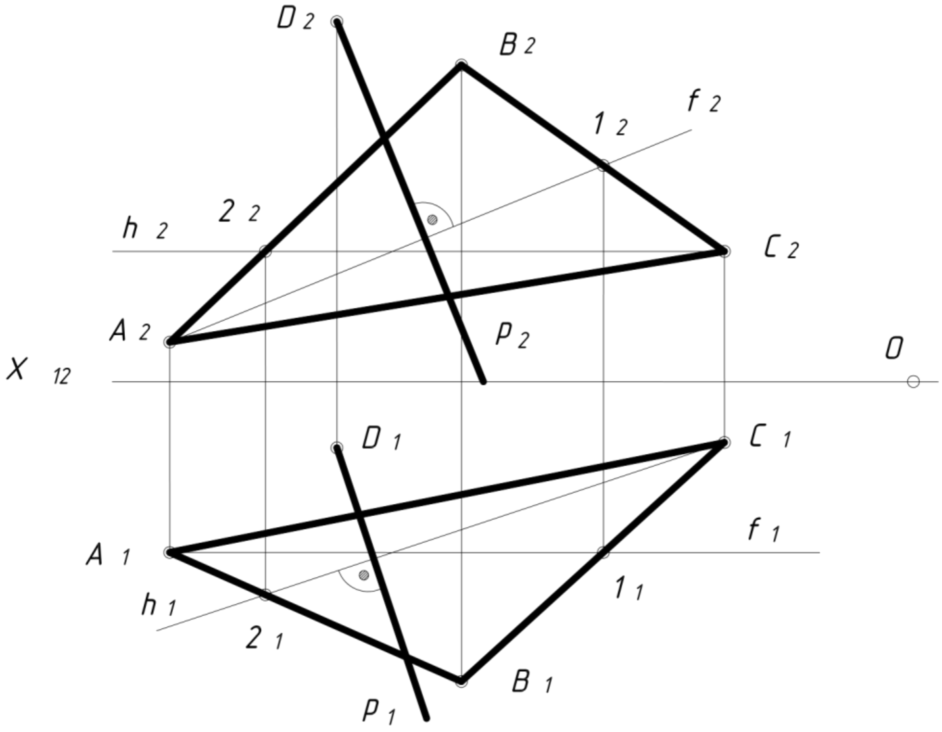


Рис. 7.7

Розглянемо інший приклад.

Задано площину **β** і точку **A**. Визначити відстань від точки до площини (рис. 7.8).

Відомо, що відстань від точки до площини вимірюється відрізком перпендикуляра від заданої точки до основи перпендикуляра. Для цього з точки **A** проведемо перпендикуляр до площини і знайде його основу (точку **B**), тобто точку перетину перпендикуляра з площиною, використовуючи допоміжну площину **γ**. Маючи проекції $\mathbf{A_1B_1}$ і $\mathbf{A_2B_2}$ перпендикуляра, дійсну величину його знаходимо методом прямокутного трикутника. Отже, відрізок **AB** є відстанню від точки **A** до площини **β**.

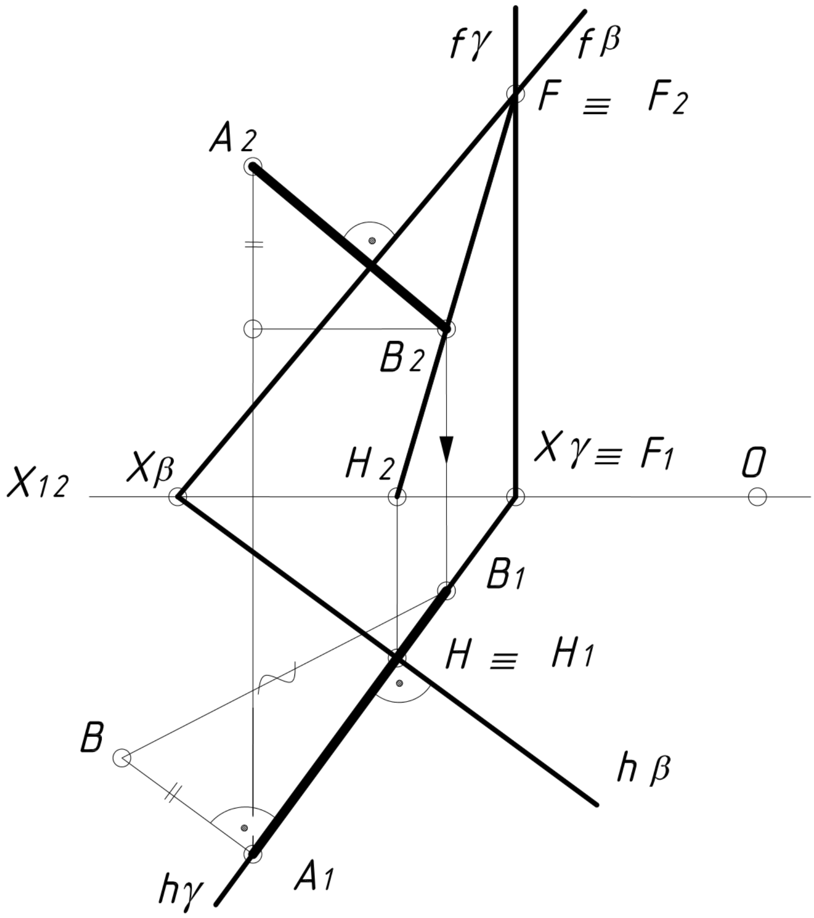


Рис. 7.8

Розглянемо ще один приклад.

Задано площину **α** та точку **A** в цій площині горизонтальною проекцією **A_1**. Провести з точки **A** перпендикуляр до площини довжиною 40 мм (рис. 7.9).

Для розв'язання цієї задачі знаходимо спочатку фронтальну проекцію точки **A** (**A_2**) за допомогою фронталі **f**. З точок **A_1** і **A_2** проводимо проекції перпендикуляра до відповідних слідів площини й обмежуємо цей перпендикуляр довільною точкою **1** (**1_1**, **1_2**). Методом прямокутного трикутника визначаємо дійсну величину частини перпендикуляра **A1**, на якій від точки **A_2** відкладаємо 40 мм до точки **B_0**. Позначаємо точки **B_2** і **B_1**, що видно з побудови. Отже, знаходимо проекції перпендикуляра заданої довжини.

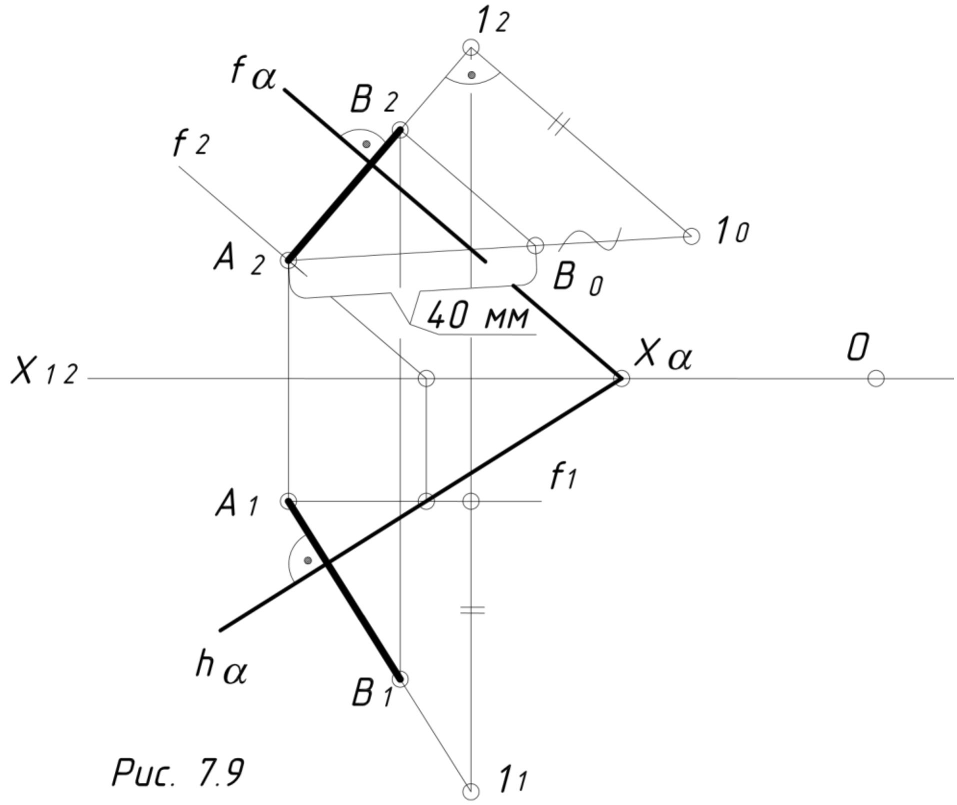


Рис. 7.9

7.3. Перпендикулярність двох площин

Взаємно перпендикулярні площини – це окремий випадок двох площин, що перетинаються під прямим кутом.

Для побудови зображення таких площин на епюрі використаємо положеня про те, що дві площини взаємно перпендикулярні тоді, коли:

1) одна проведена через перпендикуляр до іншої;
2) одна перпендикулярна до будь-якої прямої, яка лежить у другій площині.

Отже, побудова площини, перпендикулярної до заданої, зводиться до проведення спочатку перпендикуляра до однієї з цих площин, а потім – до побудови площини через цей перпендикуляр або проведення в одній із площин прямої лінії й побудови другої площини, перпендикулярної до цієї прямої.

Нехай слідами задано площину α загального положення. Побудувати площину β, перпендикулярну до заданої площини α (рис. 7.10).

Для розв’язання цієї задачі будуємо перпендикуляр l до площини α. Тому проводимо $l_1 \perp \mathbf{h}_\alpha$ і $l_2 \perp \mathbf{f}_\alpha$. Через перпендикуляр l проводимо площину β (у даному випадку горизонтально-проектуючу). Оскільки через перпендикуляр l можна провести безліч площин, то шукана площина β є однією з них.

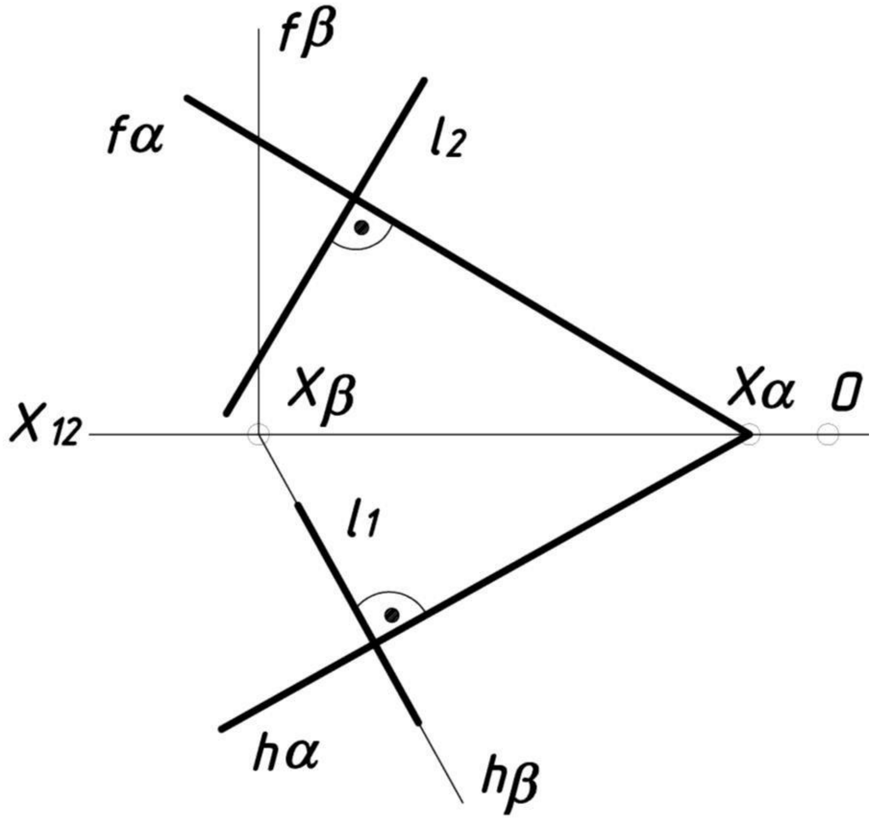


Рис. 7.10

Цю саму задачу можна розв’язати ще й так (рис. 7.11).

У заданій площині α будуємо довільну пряму ***l***, перпендикулярно до якої проводимо площину β – одну із безлічі можливих. Площини α і β взаємно перпендикулярні.

Наведені приклади підтверджують положення, що в обох випадках задачі мають безліч розв’язків. Тому, щоб отримати єдиний розв’язок, потрібні додаткові умови.

Наприклад: через задану точку **D** провести горизонтальнопроектуючу площину α перпендикулярно до площини трикутника **ABC** (рис. 7.12). Додатковою умовою в цій задачі є перпендикулярність шуканої площини до площини трикутника **ABC** і горизонтальної площини проекцій.

Тому спочатку у заданій площині проводимо горизонталь **h** (h_1, h_2), до якої будуємо перпендикулярну площину α: $h_\alpha \perp h_1$ і, очевидно, $f_\alpha \perp h_2$.

Таким чином, площина α перпендикулярна до заданої, бо вона перпендикулярна до однієї з її горизонталей.

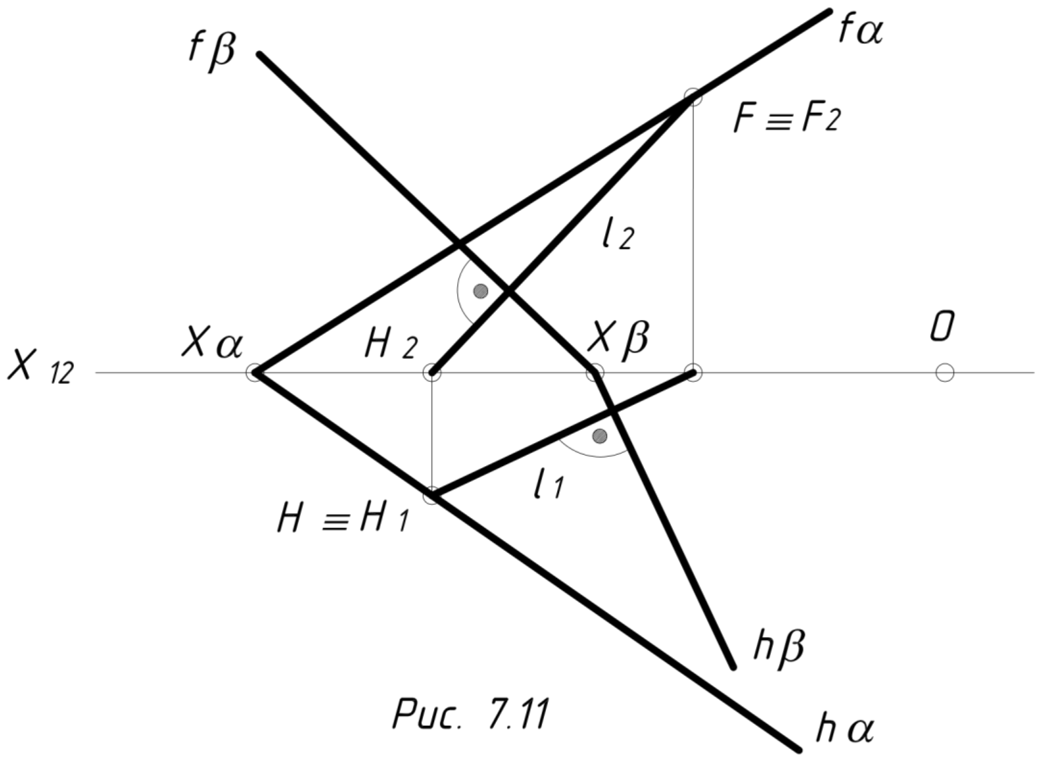


Рис. 7.11

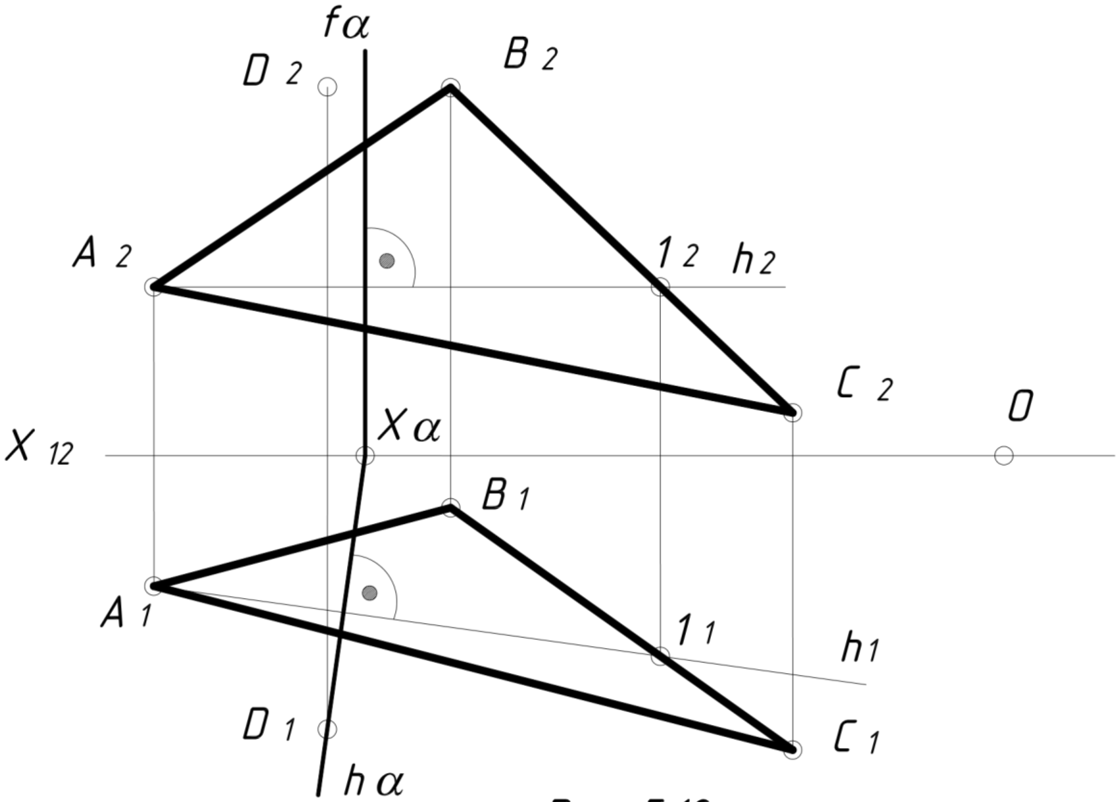


Рис. 7.12

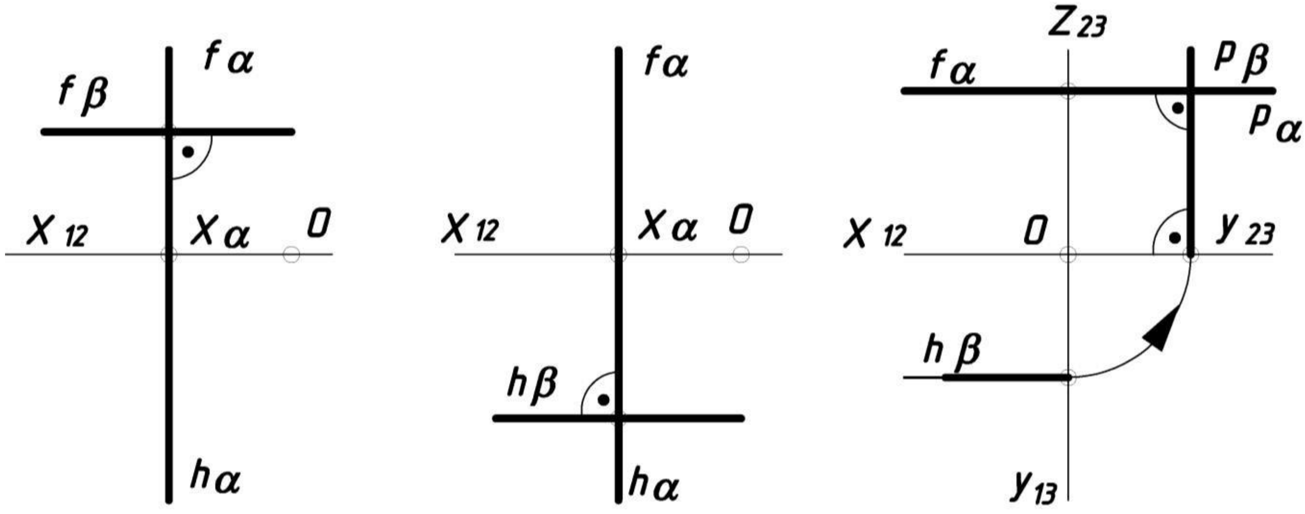


Рис. 7.13

Якщо йдеться про зображення на епюрі двох взаємно перпендикулярних площин, слід мати на увазі, що:

1) однойменні сліди площин рівня взаємно перпендикулярні на тій площині проекцій, до якої обидві задані площини перпендикулярні (рис. 7.13);

2) однойменні сліди проектуючих площин взаємно перпендикулярні лише на тій площині проекцій, до якої обидві задані площини перпендикулярні, інші сліди – ні (рис. 7.14).

3)

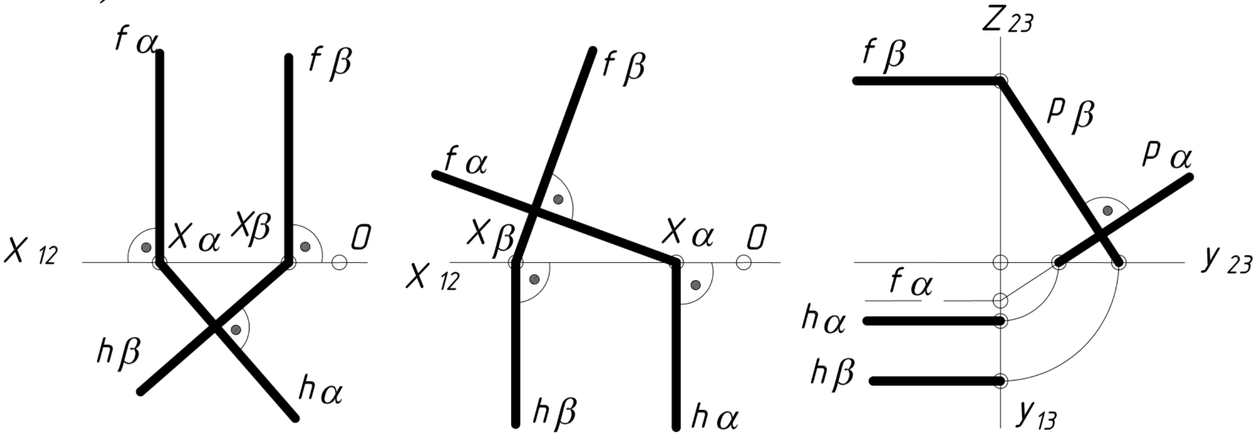


Рис. 7.14

Взаємна перпендикулярність на епюрі однойменних слідів двох площин загального положення не є ознакою перпендикулярності цих площин між собою у просторі. Нехай однойменні сліди двох заданих площин α і β взаємно перпендикулярні (рис. 7.15).

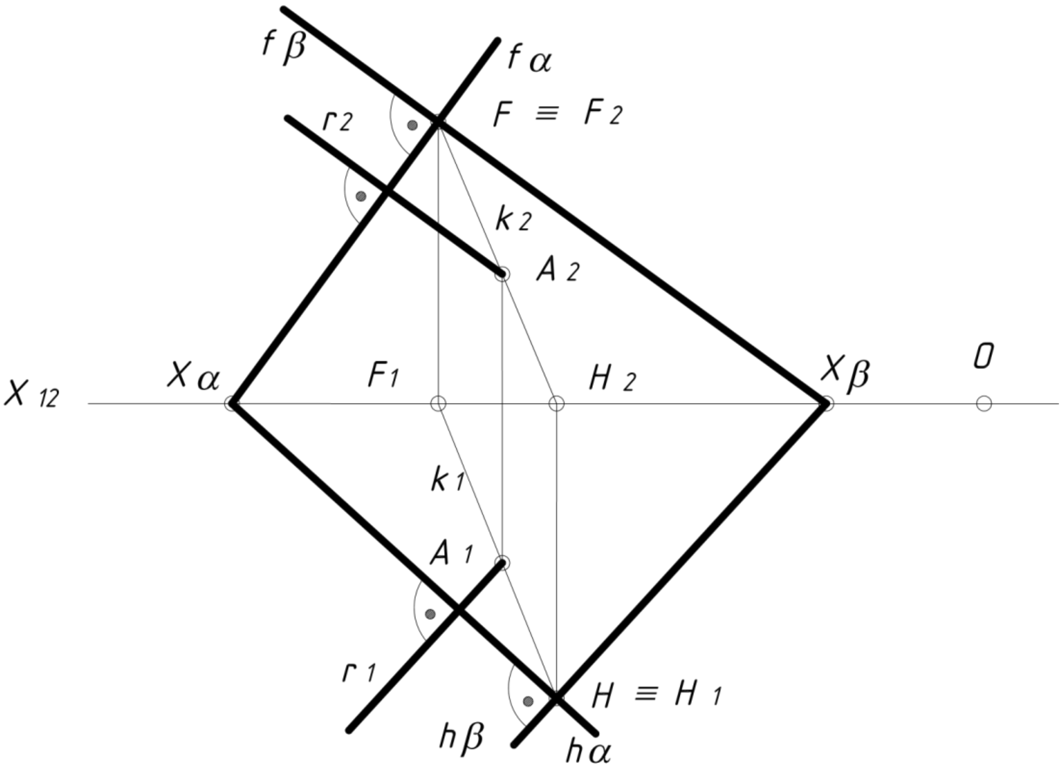


Рис. 7.15

На перший погляд може здаватися, що і площини між собою перпендикулярні. Проте це не так. У цьому можна переконатися, побудувавши лінію **k** (**k**$_1$, **k**$_2$) перетину цих площин і провівши з довільної точки **A** (**A**$_1$, **A**$_2$) лінії перетину перпендикуляр **r** (**r**$_1$, **r**$_2$) до будь-якої із заданих площин, наприклад, до площини α. Цілком зрозуміло, що тоді перпендикуляр **r** повинен належати площині β і, отже, сліди його мають лежати на однойменних слідах площини β. Проте цього немає, бо проекції перпендикуляра паралельні до однайменних слідів площини β. Отже, площини β і α не перпендикулярні одна до одної.

Аналогічні міркування стосуються також двох довільних площин, одна пара слідів яких перетинається під прямим кутом, а друга – ні

7.4. Перпендикулярність двох прямих

Розглянемо питання про побудову зображення двох перпендикулярних прямих. Для цього користуються відомим положенням про те, що дві прямі перпендикулярні одна до одної тільки тоді, коли через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до іншої. Тому, щоб побудувати пряму **k**, перпендикулярну до заданої прямої ***l*** (рис. 7.16), треба взяти довільну точку **A** поза прямою ***l*** і через цю точку провести допоміжну площину β, перпендикулярну до прямої ***l***. Потім слід побудувати точку **B** перетину прямої ***l*** з площиною β за допомогою лінії перетину **t** площини β і другої допоміжної площини α. Сполучивши точки **B** і **A**, отримаємо шукану пряму **k**, перпендикулярну до заданої прямої ***l***.

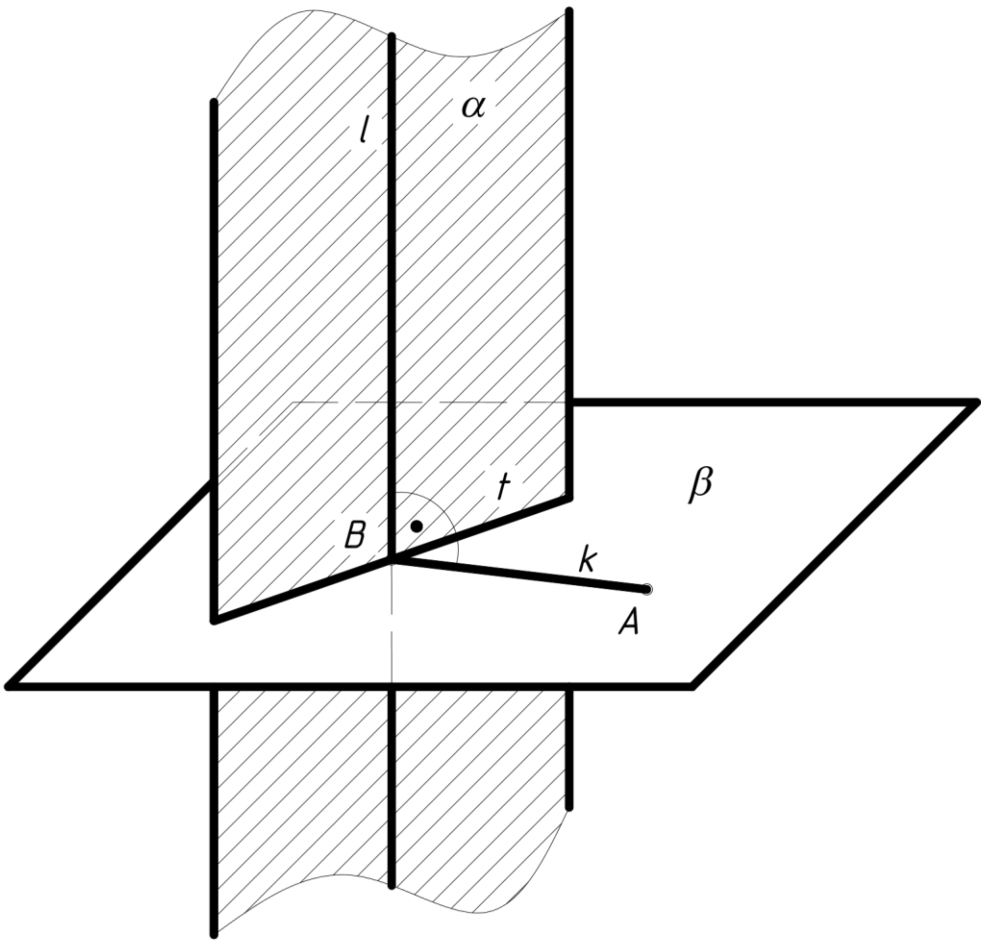


Рис. 7.16

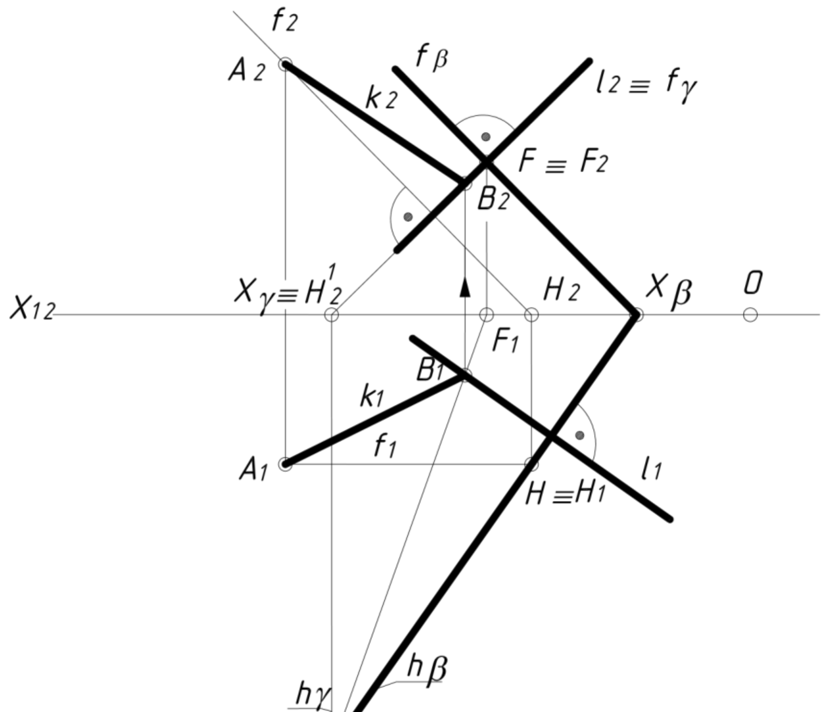


Рис. 7.17

Наприклад: побудувати пряму **k**, перпендикулярну до заданої прямої ***l*** через задану точку **А** (рис. 7.17).

Для цього через точку **А** за допомогою фронатлі **f** будуємо площину β, перпендикулярну до прямої ***l***. Спочатку проводимо $f_2 \perp l_2$ і $f_1 \parallel OX$, визначаємо горизонтальний слід **Н** (H_1, H_2) фронаталі **f**, через який проводимо $h_\beta \perp l_1$ до перетину з віссю **ОХ**, й отримаємо точку X_β. Слід f_β проходить з цієї точки перпендикулярно до l_2. Далі визначаємо точку **В** (B_1, B_2) перетину прямої ***l*** з площиною β, користуючись допоміжною площиною γ, проведеною через пряму ***l***. Площина γ – фронтальнопроектуюча. Нарешті, сполучаємо точку **А** з точкою **В** й отримаємо шукану пряму **k** (k_1, k_2), яка буде перпендикулярною до прямої ***l***.

Розглянемо ще одну типову задачу. Необхідно визначити відстань від точки **А** до заданої прямої ***l*** (рис. 7.18).

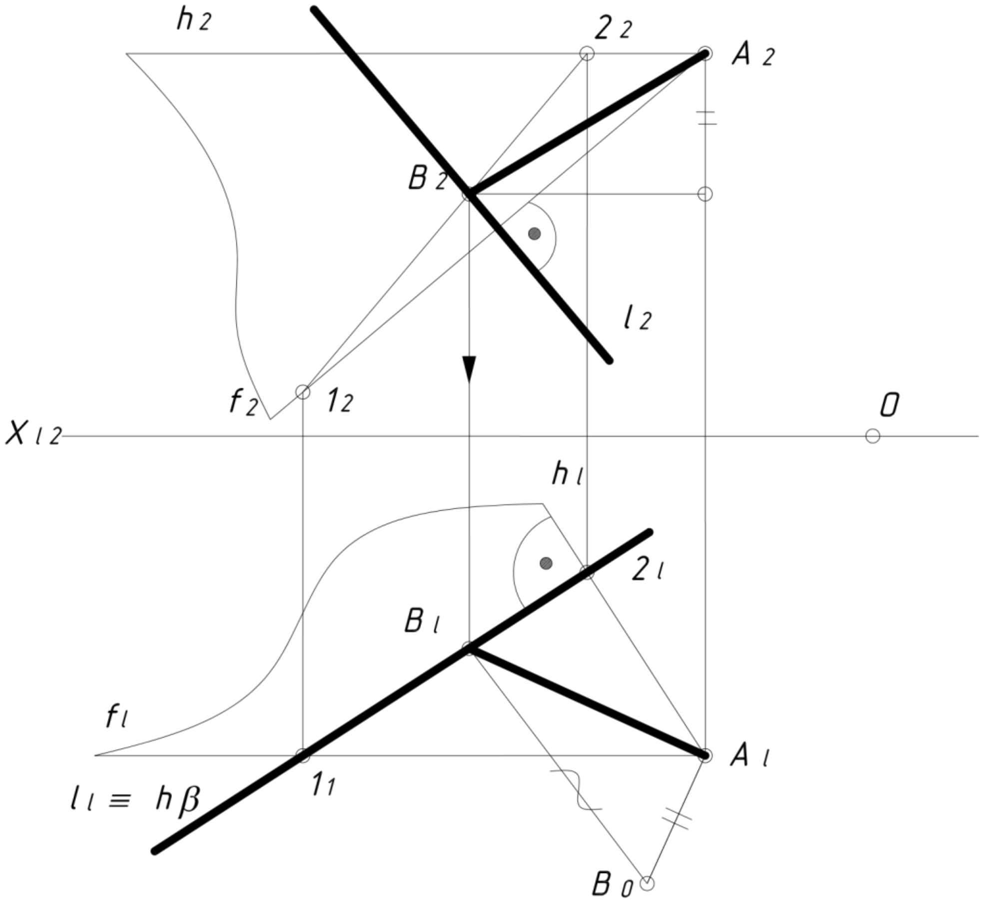


Рис. 7.18

Відстань від точки до прямої вимірюється відрізком перпендикуляра, опущеного з точки до прямої. Для побудови через точку **А** проведемо горизонталь **h** (h_1, h_2) і фронталь **f** (f_1, f_2) допоміжної площини α, перпендикулярної до прямої ***l***. Горизонтальна проекція горизонталі h_1 повинна бути перпендикулярною до горизонтальної проекції прямої l_1 ($h_1 \perp l_1$), а фронтальна проекція фронталі $\mathbf{f_2}$ – до фронтальної проекції прямої l_2 ($\mathbf{f_2} \perp l_2$). Отже, площина α ($\mathbf{h} \cap \mathbf{f}$) буде перпендикулярною до l. Точку **B** (**B_1**, **B_2**) перетину прямої l з площиною α визначаємо так само, як і в попередній задачі.

Відрізок **AB** – шукана відстань. Дійсну величину цієї відстані **A_1B_0** знайдемо за правилом прямокутного трикутника.

Запитання для самоперевірки

1. Як проектується прямий кут на площини проекцій?

2. Яка ознака перпендикулярності прямої й площини?

3. Як на епюрі розміщаються проекції перпендикуляра до заданої площини?

4 Які дії треба виконати для знаходження відстані відстані від точки до площини?

5. На чому грунтується побудова двох взаємно перпендикулярних площин і які графічні операції треба виконати для цього?

6. Як будують на епюрі дві взаємно перпендикулярні прямі загального положення?

7. Що називають кутом між прямою і площиною?

8. Що називають кутом між двома площинами?

9. Які дії треба виконати для побудови на епюрі проекції кутів між прямою і площиною та між двома площинами?

10. Які дії треба виконати для знаходження відстані відстані від точки до прямої?

8. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

Метричні й позиційні задачі на епюрі розв’язуються значно легше, якщо задані геометричні фігури займають певне положення відносно площин проекцій. Справа в тому, що геометричні фігури, які задані на епюрі в загальному положенні, частіше всього бувають спотворені. Тому про натуральні розміри відрізків, кутів, плоских фігур та відстаней можна судити лише тоді, коли вони розташовані паралельно площині проекцій. Для приведення геометричних фігур в таке положення необхідно піддати задані епюри перетворенням.

Перетворення здійснюється переміщенням системи площин проекцій відносно непорушного геометричного об’єкта або переміщенням чи обертанням геометричного об’єкта при непорушній системі площин проекцій.

8.1. Спосіб заміни площин проекцій

Суть цього способу полягає в тому, що початкову систему площин проекцій $\mathbf{П_1/П_2}$, у якій заданий геометричний об’єкт займає загальне положення, замінюють іншою, новою сиситемою площин проекцій так, щоб геометричний об’єкт зайняв певне положення, що спростить розв’язування задачі. Положення самого об’єкта залишається незмінним. При цьому нова система площин проекцій (як і початкова) буде системою двох взаємно перпендикулярних площин проекцій.

Замінювати можна одну або обидві площини проекцій. При кожній такій заміні нова система двох площин проекцій має в своєму складі одну площину проекцій з попередньої системи.

На рис. 8.1 показано заміну горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$ на $\mathbf{П_3}$, перпендикулярну до площини $\mathbf{П_2}$. Площина $\mathbf{П_3}$ є фронтальнопроектуючою, що перетинається з площиною $\mathbf{П_2}$ по прямій $\mathbf{X_{23}}$, яка утворює вісь проекцій у новій системі $\mathbf{П_2/П_3}$ площин проекцій.

При заміні фронтальної площини проекції $\mathbf{П_2}$ на $\mathbf{П_4}$, перпендикулярну до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$, утворюється нова система $\mathbf{П_1/П_4}$ (рис. 8.2). Площина $\mathbf{П_4}$ є горизонтально-проектуючою. Віссю проекцій тут буде пряма $\mathbf{X_{14}}$, по якій площина $\mathbf{П_4}$ перетинає площину $\mathbf{П_1}$.

На рис. 8.3 зображено заміну спочатку горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$ на площину $\mathbf{П_3}$, перпендикулярну до $\mathbf{П_2}$. У системі площин проекцій $\mathbf{П_2/П_3}$ віссю проекцій $\mathbf{X_{23}}$ є лінія перетину площин $\mathbf{П_3}$ і $\mathbf{П_2}$. Потім робимо другу заміну: площину $\mathbf{П_2}$ замінюємо на $\mathbf{П_4}$, перпендикулярну до площини $\mathbf{П_3}$. У результаті цього утворилася зовсім нова сиситема площин проекцій $\mathbf{П_3/П_4}$, в якій віссю проекцій $\mathbf{X_{34}}$ є лінія перетину площини $\mathbf{П_3}$ з площиною $\mathbf{П_4}$. Епюр системи $\mathbf{П_3/П_4}$ показано на рис. 8.3.

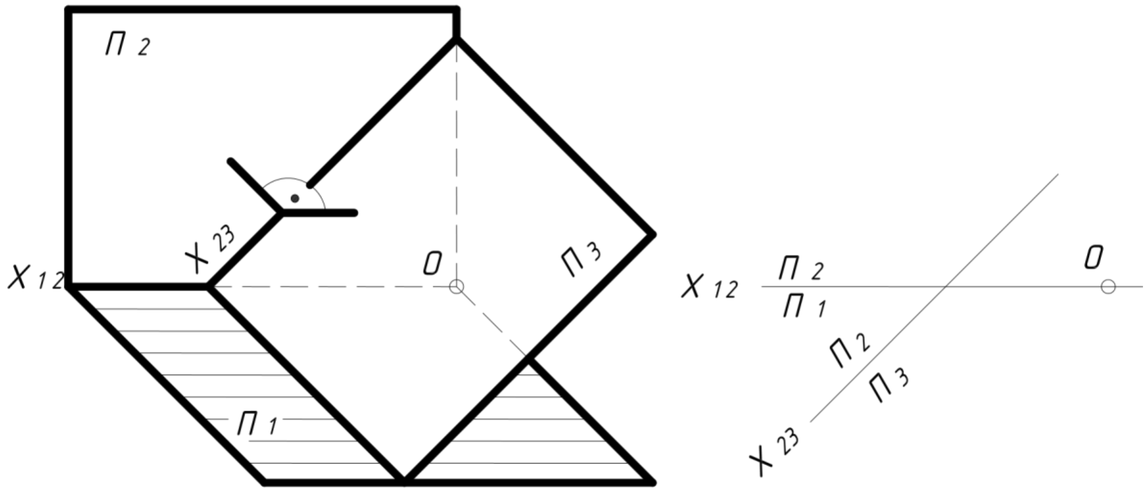


Рис. 8.1

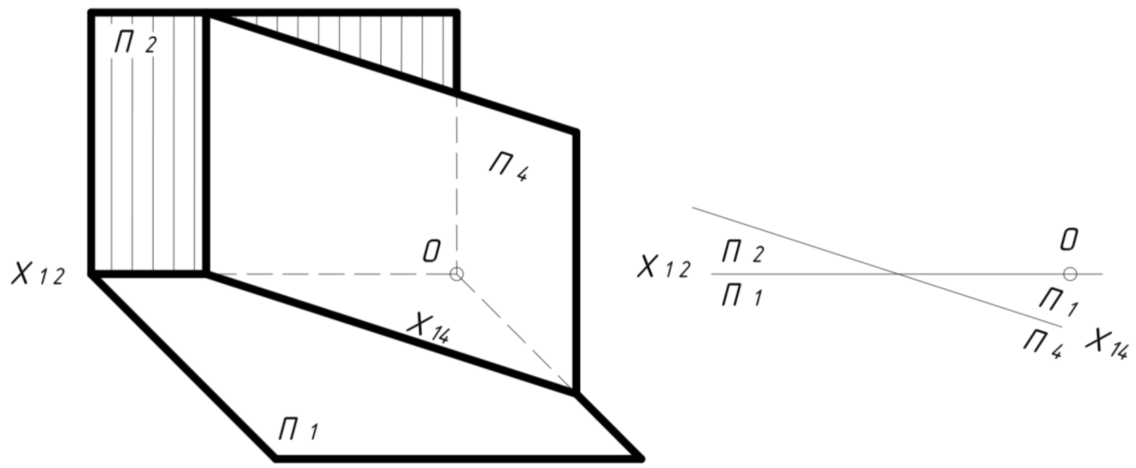


Рис. 8.2

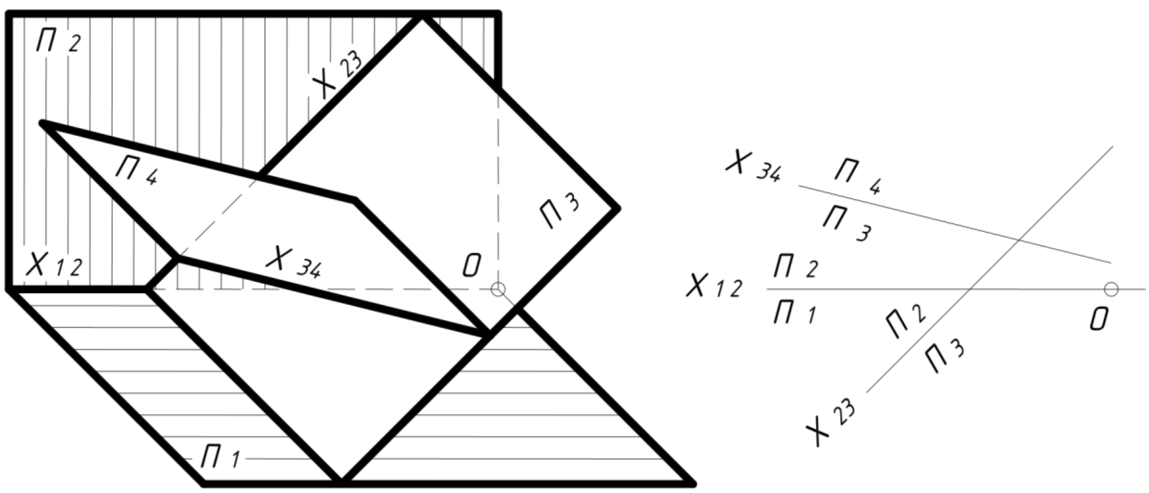


Рис. 8.3

8.2. Заміна однієї площини проекцій

Способом заміни однієї площини проекцій розв'язують наступні дві основні задачі:

1. Привести пряму загального положення до положення прямої рівня, тобто визначити дійсну величину відрізка прямої та кутів нахилу його до площин проекцій.
2. Привести площину загального положення до положення проектуючої. Таку задачу виконують при визначенні відстані від точки до площини, кута нахилу площини до площини проекцій та ін.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Визначити дійсну величину відрізка **AB** та кут його нахилу до горизонтальної площини проекції $\mathbf{П_1}$.

Для цього горизонтальну площину проекції $\mathbf{П_1}$ і відрізок **AB** залишимо на місці, а фронтальну площину $\mathbf{П_2}$ перемістимо до положення, паралельного даному відрізкові **AB** і перпендикулярного до площини $\mathbf{П_1}$. Унаслідок цього отримаємо нову систему площин проекцій $\mathbf{П_1 \perp П_4}$, в якій даний відрізок на нову фронтальну площину проекцій $\mathbf{П_4}$ спроектується в дійсну величину $\mathbf{A_4B_4 = AB}$ (рис. 8.4). Відстань від нових проекцій $\mathbf{A_4}$ і $\mathbf{B_4}$ до горизонтальної площини проекцій під час переміщення не змінилася, тобто $\mathbf{A_{4x}A_4 = A_xA_2}$ і $\mathbf{B_{4x}B_4 = B_xB_2}$, а відстань між точками $\mathbf{A_{4x}}$ і $\mathbf{B_{4x}}$ стала рівною горизонтальній проекції відрізка **AB** ($\mathbf{A_1B_1}$), так як новий напрям проектування є перпендикулярним до проекції, яка залишилася на місці. Кут $\boldsymbol{\varphi_1}$ буде кутом нахилу відрізка **AB** до площини $\mathbf{П_1}$ (рис. 8.4).

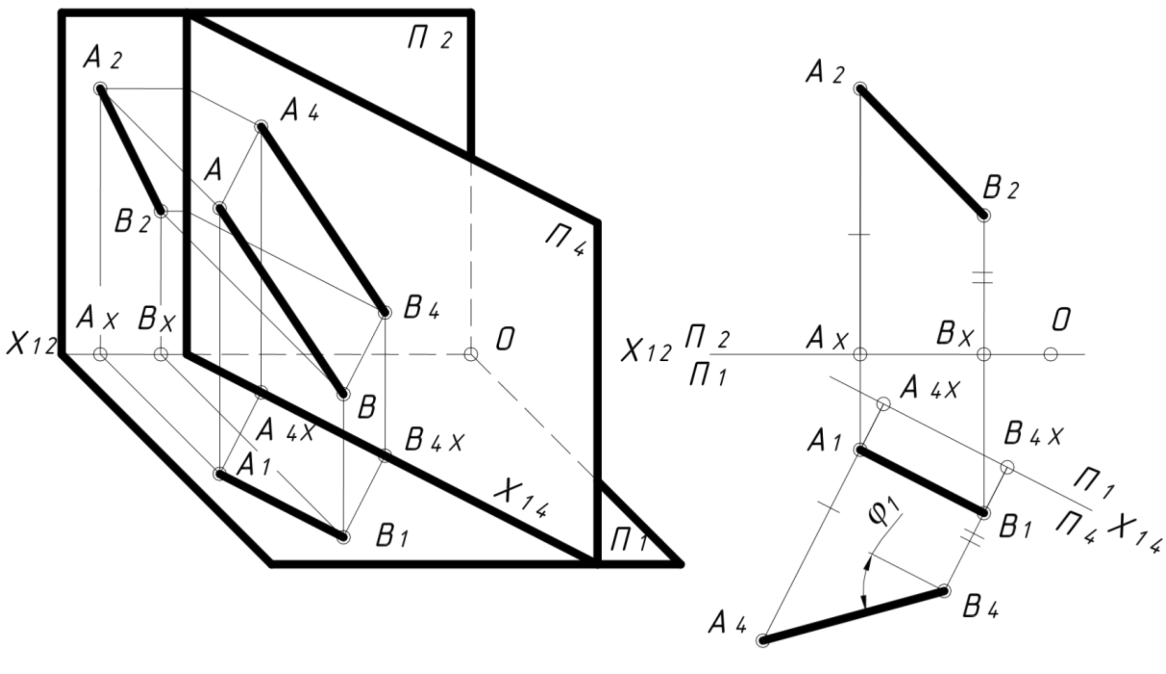


Рис. 8.4

Приклад 2. Визначити дійсну величину відрізка **AB** та кут його нахилу до фронтальної площини проекції **$П_2$**.

У цьому випадку дійсну величину відрізка **AB** і кут його нахилу **φ_2** до фронтальної площини проекції **$П_2$** знайдемо переміщенням горизонтальної площини проекцій **$П_1$** до положення, паралельного відрізкові **AB** і перпендикулярного до площини **$П_2$** (рис. 8.5). Цим створена нова система площин проекцій **$П_2 \perp П_3$**, в якій відрізок **AB** на нову горизонтальну площину проекцій **$П_3$** спроектується в дійсну величину

$A_3B_3 = AB$. Решта побудов виконані аналогічно до побудов, які наведені вище в прkладі 1.

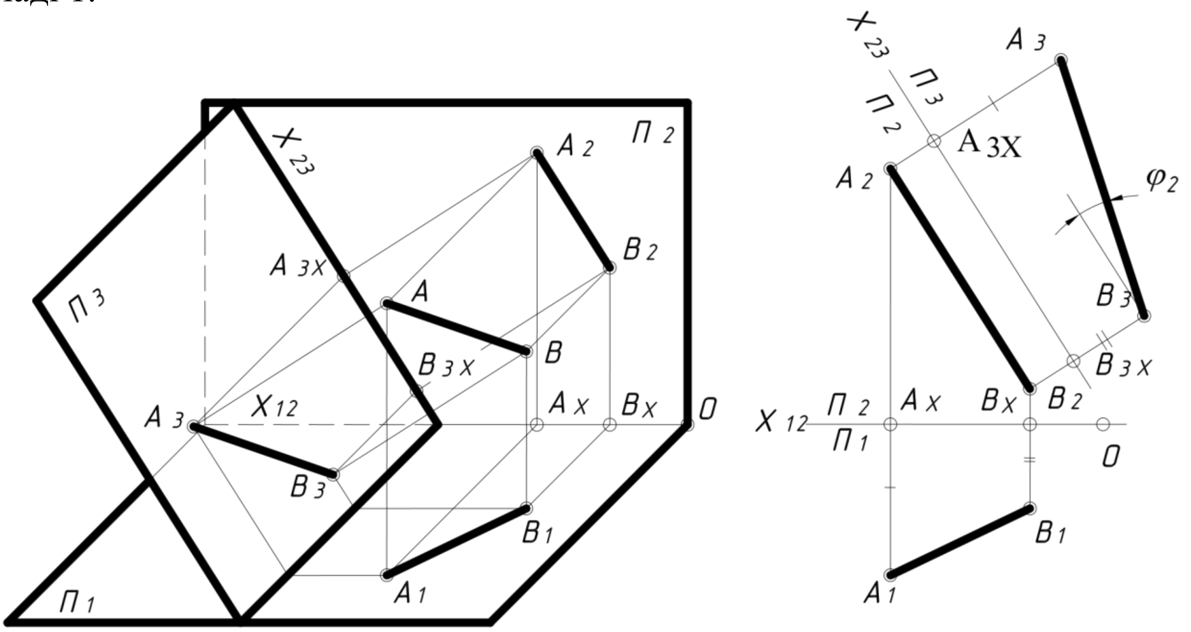


Рис. 8.5

Розглянуті на рис. 8.4 і рис. 8.5 приклади відповідають першій основній метричній задачі.

Приклад 3. Побудувати нові проекції відрізка **AB** так, щоб він став горизонтально-проектуючим.

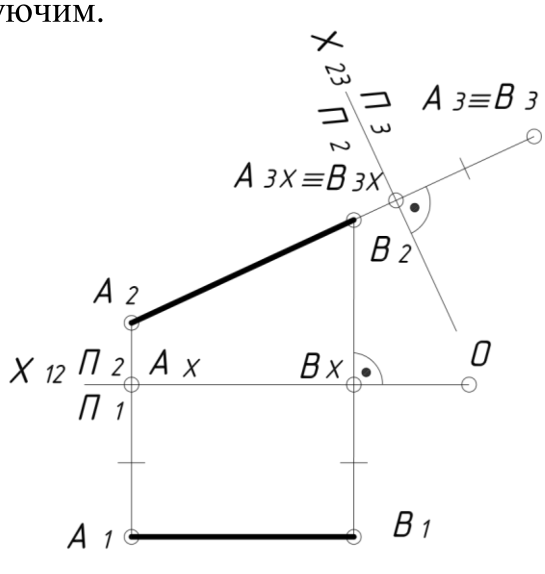


Рис. 8.6

Відрізок **AB** у системі площин проекцій Π_1/Π_2 займає положення фронтальної прямої (рис. 8.6). Тому для розв'язання задачі достатньо зробити заміну площини проекцій Π_1 на Π_3 так, щоб нова вісь проекцій X_{23} стала перпендикулярною до фронтальної проекції A_2B_2 відрізка **AB**.

Утворилася нова система площин проекцій $\Pi_2 \perp \Pi_3$, в якій побудована нова проекція відрізка **AB** (відстані A_xA_1, B_xB_1 і $A_{3x} \equiv B_{3x}\,A_3 \equiv B_3$ рівні між собою) є точкою на площині Π_3 ($A_3 \equiv B_3$).

Приклад 4. Визначити дійсну величину трикутника ABC.

Заданий трикутник займає положення горизонтально-проектуючої площини (рис. 8.7). Для визначення його дійсної величини необхідно ввести нову площину проекцій Π_4 замість Π_2 паралельно до площини трикутника **ABC**.

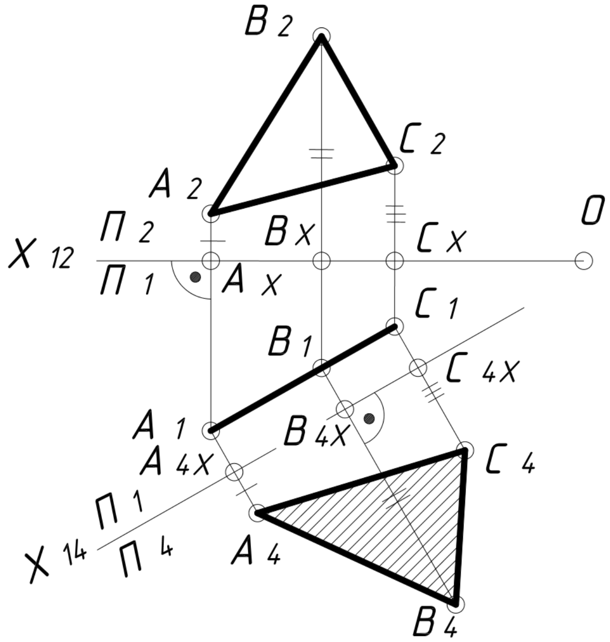


Рис. 8.7

Проводимо нову вісь проекцій X_{14} паралельно до горизонтальної проекції трикутника $A_1B_1C_1$ і, побудувавши в системі Π_1/Π_4 проекції A_4, B_4, C_4 ($A_xA_2 = A_{4x}A_4$, $B_xB_2 = B_{4x}B_4$, $C_xC_2 = C_{4x}C_4$) вершин трикутника, знаходимо нову проекцію трикутника $A_4B_4C_4$, яка і є його дійсною величиною.

Приклад 5. Площині загального положення $\alpha(h_\alpha \cap f_\alpha = X_{\square})$ надати положення фронтально-проектуючої (рис. 8.8).

Для того, щоб площина α стала фронтально-проектуючою, необхідно замінити фронтальну площину проекцій Π_2 на Π_4 так, щоб вона була перпендикулярною не тільки до площини Π_1, а й до площини α. У зв'язку з цим площина Π_4 повинна бути перпендикулярною до лінії перетину площин Π_1 і α, тобто до горизонтального сліду h_α. Тому нова вісь проекцій X_{14} буде перпендикулярною до h_α і точка $X_{\alpha 4}$ є новою точкою збігу слідів у системі Π_1/Π_4. Для побудови фронтального сліду $f_{\alpha 4}$ проводимо в площині α

горизонталь **h** (**h**$_1$, **h**$_2$). Горизонтальна проекція **h**$_1$ не змінює свого положення і в перетині з віссю **X**$_{14}$ утворює точку **F**$_{4x}$ – горизонтальну проекцію фронтального сліду горизонталі. Далі визначаємо точку **F**$_4$ – фронтальну проекцію фронтального сліду горизонталі, для чого

на перпендикулярі з точки **F**$_{4x}$ до осі **X**$_{14}$ відкладаємо відрізок **F**$_{4x}$**F**$_4$ = **F**$_4$ **F**$_2$, враховуючи, що відстань горизонталі **h** від площини **П**$_1$ залишається незмінною. Для побудови шуканого сліду **f**$_{\alpha4}$ сполучаємо точки **X**$_{\alpha4}$ і **F**$_4$ Площина α в системі **П**$_1$/**П**$_4$ є фронтально-проектуючою.

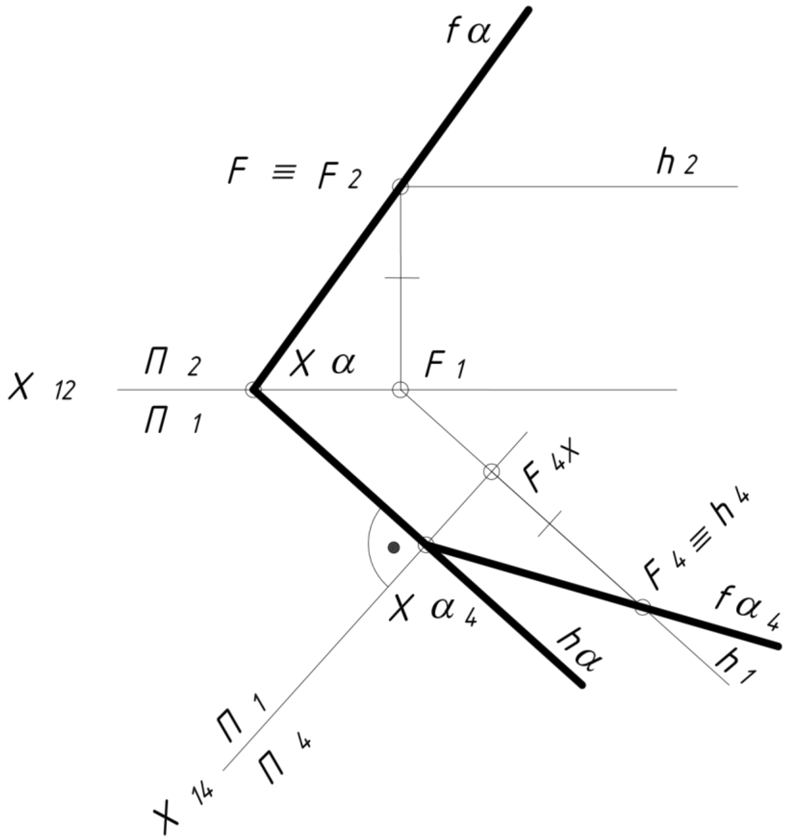


Рис. 8.8

Приклад 6. Визначити відстань від точки **A** до площини α(**h**$_\alpha$ ∩ **f**$_\alpha$ = **X**$_\alpha$) (рис. 8.9).

Якщо площина α у новій системі площин проекцій буде проектуючою, то відстань від точки **A** до цієї площини можна визначити на епюрі без додаткової побудови. Тому замінюємо площину **П**$_2$ на **П**$_4$ так, щоб площина α стала фронтально-проектуючою (див. приклад 5). Одночасно знаходимо нову проекцію **A**$_4$ точки **A** в системі **П**$_1$/**П**$_4$. Зрозуміло, що перпендикуляр, опущений з точки **A**$_4$ до сліду **f**$_{\alpha4}$, визначає відстань від точки **A** до площини α. Побудова наведена на рис. 8.9.

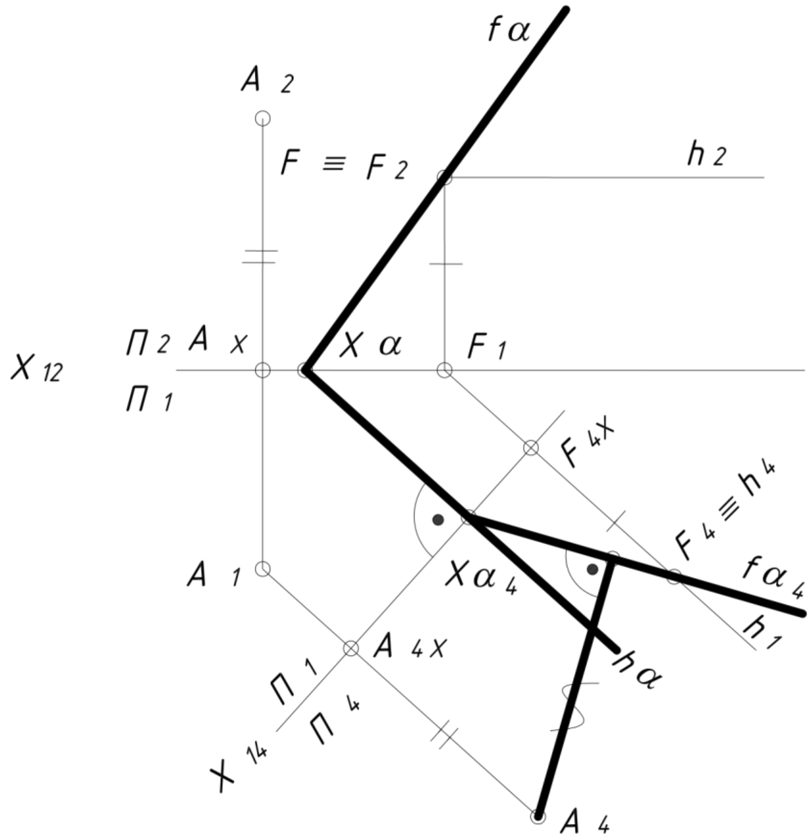


Рис. 8.9

8.3. Заміна двох площин проекцій

Простежимо заміну двох площин проекцій на прикладі точки **А**, що розташована в сиситемі **$П_1/П_2$**, проекції якої треба побудувати у новій системі **$П_3/П_4$**. На рис. 8.10 наочно зображено точку **А** в заданій і новій системах площин проекцій.

Спочатку замінимо площину **$П_1$** на **$П_3$**, перпендикулярну до **$П_2$**. Отримаємо нову систему площин проекцій **$П_2/П_3$** з віссю проекцій **X_{23}**. Проекціями точки **А** в новій системі будуть фронтальна **A_2** і горизонтальна **A_3**, які є вершинами прямокутника **$AA_3A_{3x}A_2$**, перпендикулярного до площини проекцій **$П_3$**. Відстань від точки **A_3** до осі **X_{23}** дорівнює відстані точки **А** від площини проекцій **$П_2$**, що є незмінною. Отже, **$A_3A_{3x} = AA_2$**. Замінюємо другу площину проекцій виходячи з того, що перша заміна не дала розв’язку задачі. Отже, замінюємо площину **$П_2$** на **$П_4$**, перпендикулярну до **$П_3$**. Віссю проекцій у новій системі **$П_3/П_4$** є **X_{34}** – лінія перетину площин **$П_3$** і **$П_4$**. У цій системі горизонтальна проекція **A_3** точки **А** не змінить свого положення. Тому, будуючи нову фронтальну проекцію **A_4**, відкладаємо на перпендикулярі з точки **A_{4x}** до осі **X_{34}** відстань **$A_{4x}A_4 = A_{3x}A_2$**. Зазначимо, що проекції **A_3** і **A_4** точки **А** в системі **$П_3/П_4$** є вершинами прямокутника **$AA_3A_{4x}A_4$**, перпендикулярного до площини проекцій **$П_4$**. Розглядаючи епюр (рис. 8.11) описаної просторової системи площин проекцій **$П_1/П_2$** і **$П_3/П_4$**, слід зазначити, що при першій заміні площини **$П_1$** на **$П_3$** утворюється система **$П_2/П_3$** площин проекцій з віссю **X_{23}**. Фронтальна проекція **A_2** при цьому не змінює свого положення, тому з цієї точки опускаємо перпендикуляр на вісь **X_{23}** і відкладаємо на ньому відрізок **$A_{3x}A_3 = A_xA_1$**. Точка **A_3** є нова горизонтальна проекція точки **А** в системі **$П_2/П_3$**.

При другій заміні площина **$П_2$** замінена площиною **$П_4$**, унаслідок чого утворилася система **$П_3/П_4$** з віссю **X_{34}**. У цій системі точка **A_3** не змінює свого положення, тому, опустивши перпендикуляр з точки **A_3** до осі **X_{34}**, відкладаємо на ньому відрізок **$A_{4x}A_4 = A_xA_2$**. Точка **A_4** є нова фронтальна проекція точки **А**. Таким чином, побудовані проекції **A_3** і **A_4** точки **А** в системі **$П_3/П_4$** задовольняють умову задачі.

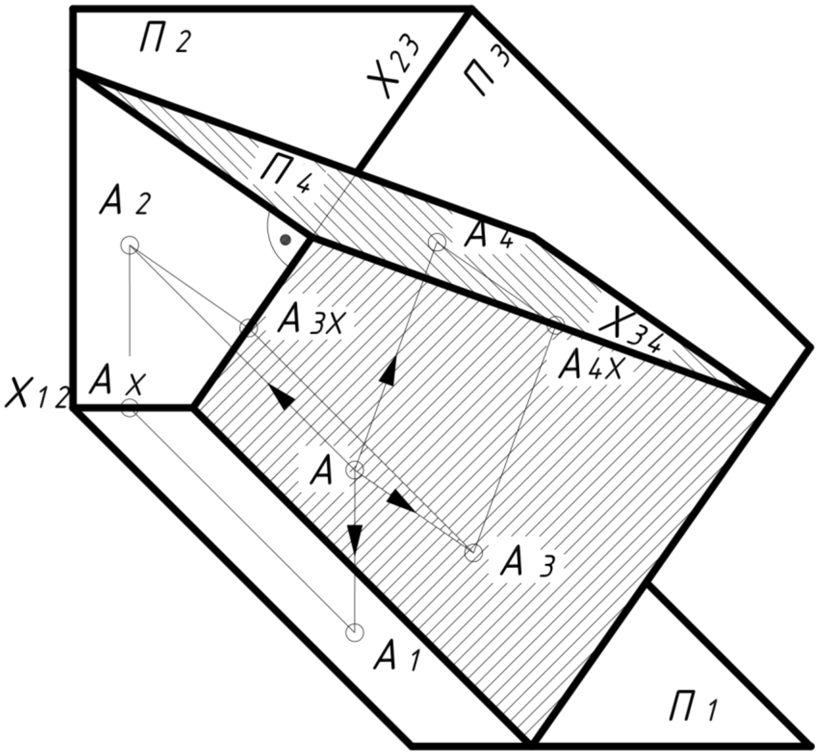


Рис. 8.10

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Побудувати нові проекції відрізка **АВ** так, щоб він став фронтально-проектуючим (рис. 8.12).

Відрізок **АВ** займе шукане положення тоді, коли він спроектується у точку. Цього можна досягти лише заміною двох площин проекцій, оскільки в початковій системі відрізок займає загальне положення. Отже, після першої заміни надаємо відрізку положення, паралельне до горизонтальної площини проекцій. Для цього вводимо площину **$П_3$** замість **$П_1$** так, щоб нова вісь **X_{23}** була паралельною до фронтальної проекції **A_2B_2** відрізка **АВ**. Після цього відомим способом будуємо нову горизонтальну проекцію **A_3B_3** відрізка в системі **$П_2/П_3$**. Далі робимо другу заміну площин проекцій, вводячи площину **$П_4$** замість **$П_2$**. При цьому нова вісь **X_{34}** має бути перпендикулярною до **A_3B_3**. Тоді нова фронтальна проекція відрізка в системі **$П_3/П_4$** буде точкою **$A_4 \equiv B_4$**, тобто відрізок **АВ** стане перпендикулярним до площини проекцій **$П_4$**.

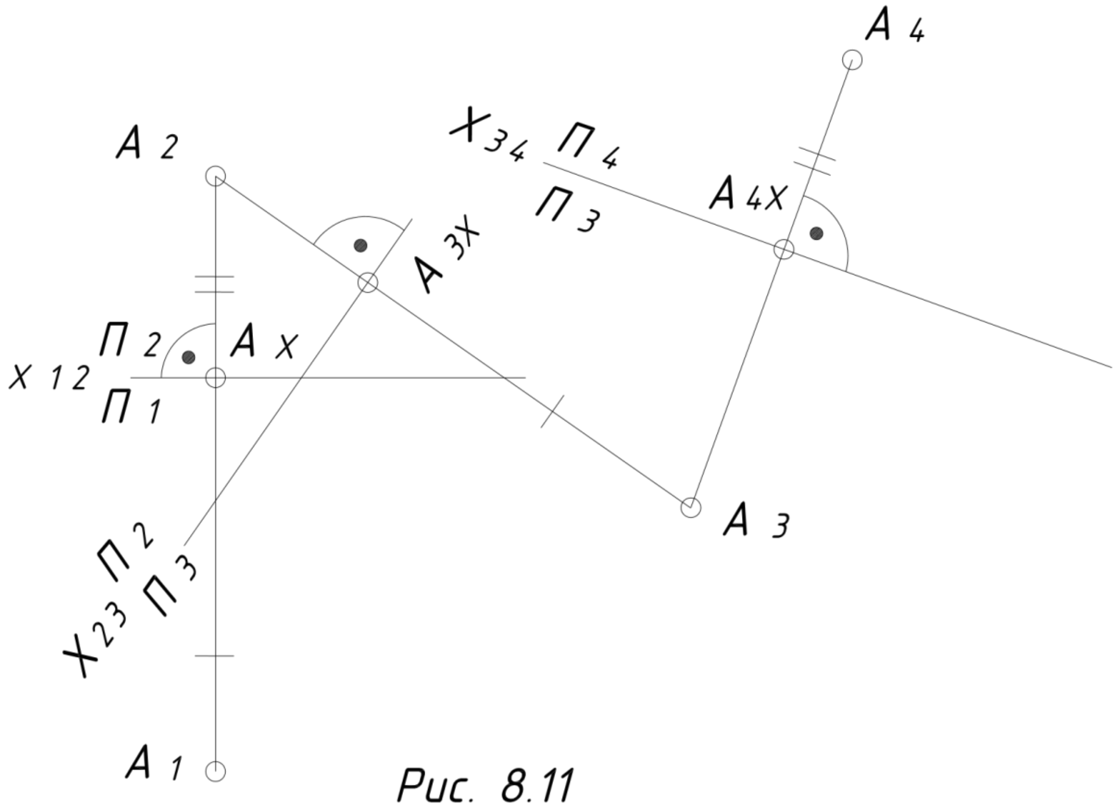


Рис. 8.11

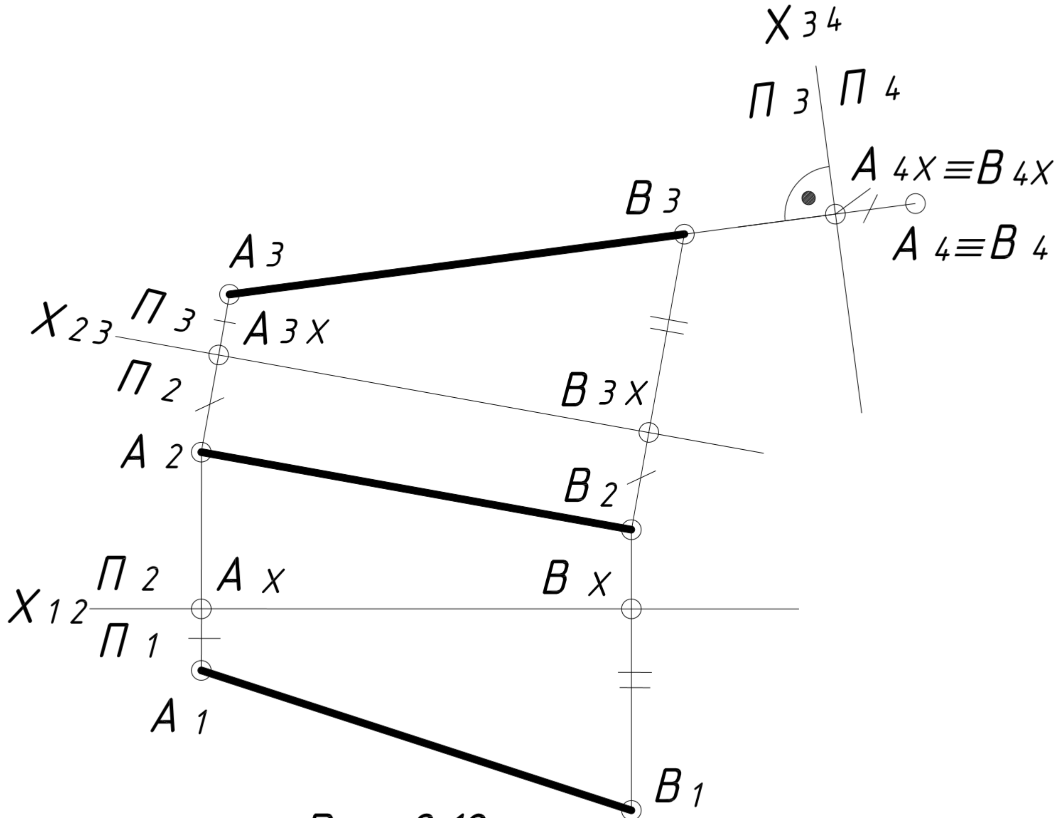


Рис. 8.12

Приклад 2. Визначити дійсну величину трикутника **ABC**, який у системі площин проекцій **П1/П2** займає загальне положення (рис. 8.13).

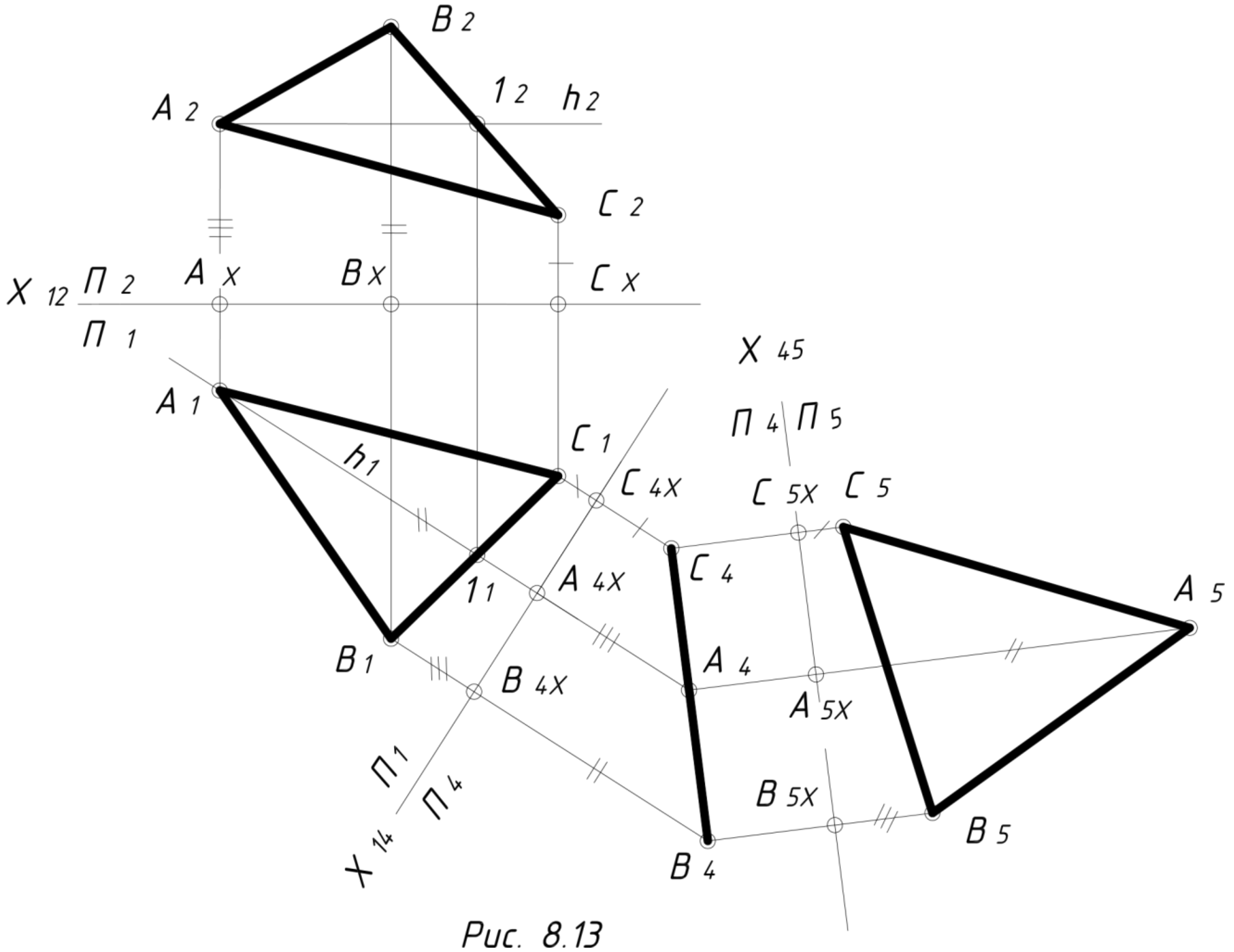


Рис. 8.13

Розв'язати цю задачу заміною лише однієї площини проекцій неможливо, бо якщо нову площину проекцій ввести паралельно до площини трикутника **ABC**, вона буде також загального положення, тобто вона не буде перпендикулярною до другої площини проекцій і, отже, не утвориться система двох взаємно перпендикулярних площин проекцій. Тому спочатку вводимо таку площину проекцій, до якої трикутник став би перпендикулярним, тобто спроектувався б у пряму. Потім проводимо заміну другої площини проекцій паралельно до площини трикутника **ABC**. Щоб трикутник став перпендикулярним до нової площини проекцій, використаємо одну з прямих особливого положення в трикутнику **ABC** – горизонталь **h** (**h_1**, **h_2**). Спершу замінимо площину **$П_2$** на **$П_4$**, перпендикулярну до **$П_1$** так, щоб нова вісь проекцій **X_{14}** стала перпендикулярною до горизонтальної проекції **h_1** горизонталі **h**. Побудувавши фронтальну проецію **$A_4B_4C_4$** трикутника в системі **$П_1/П_4$**, бачимо, що трикутник став фронтально-проектуючим. Потім виконаємо другу заміну площин проекцій заміною площини **$П_1$** на **$П_5$**, перпендикулярну до площини **$П_4$** так, щоб вона була паралельна до площини трикутника **ABC**. У цьому випадку вісь проекцій **X_{45}** у системі **$П_4/П_5$** буде паралельною до фронтальної проекції трикутника **$A_4B_4C_4$**. Нарешті, будуємо в системі **$П_4/П_5$** горизонтальну проекцію **$A_5B_5C_5$** трикутника **ABC**, яка є його дійсною величиною.

8.4. Спосіб обертання

Спосіб обертання – це один зі способів перетворення проекцій. Суть його – переміщення об'єкта навколо осі за допомогою обертання при непорушній системі площин проекцій. При цьому кожна точка об'єкта обертається в площині, перпендикулярній до осі обертання, по сталій траєкторії – колу, центром якого є точка перетину площини обертання з віссю обертання, а радіусом – відстань від точки обертання до центра обертання.

В обертанні є п'ять постійних елементів:

1) об'єкт обертання (вибрана точка на об'єкті);
2) вісь обертання (задається або вибирається);
3) площина обертання, що завжди проходить через точку обертання, перпендикулярно до осі обертання;
4) центр обертання (отримується внаслідок перетину осі обертання з площиною обертання, а тому завжди лежить на осі обертання);
5) радіус обертання – відстань від точки обертання до центра обертання, завжди лежить у площині обертання.

Крім вказаних елементів обертання, ще є кут і напрям обертання, які залежать від поставленої задачі.

8.5. Обертання точки, прямої та площини навколо осі, перпендикулярної до площини проекцій

У цьому випадку за вісь обертання використовують проектуючу пряму. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Повернути точку **A** навколо осі **Y**, перпендикулярної до фронтальної площини проекцій Π_2, на кут φ проти руху годинникової стрілки (рис. 8.14).

Оскільки вісь обертання **Y** перпендикулярна до фронтальної площини проекцій Π_2, то площина β, в якій обертається точка **A**, буде паралельна до площини Π_2 Тому траєкторія руху точки **A** буде проектуватися на фронтальну площину проекцій Π_2 у вигляді кола, а на горизонтальну площину проекцій Π_1 – у вигляді відрізка прямої $A_1A_1^{\cup}$, перпендикулярної до вертикальних ліній зв'язку (рис. 8.14).

Аналогічно відбувається обертання точки навколо осі **Z**, перпендикулярної до горизонтальної площини проекцій Π_1, де площина обертання β буде паралельною до горизонтальної площини проекцій Π_1 і траєкторія обертання (коло) на Π_1 проектується в дійсну величину, а на Π_2 – у вигляді прямої, перпендикулярної до вертикальних ліній зв'язку.

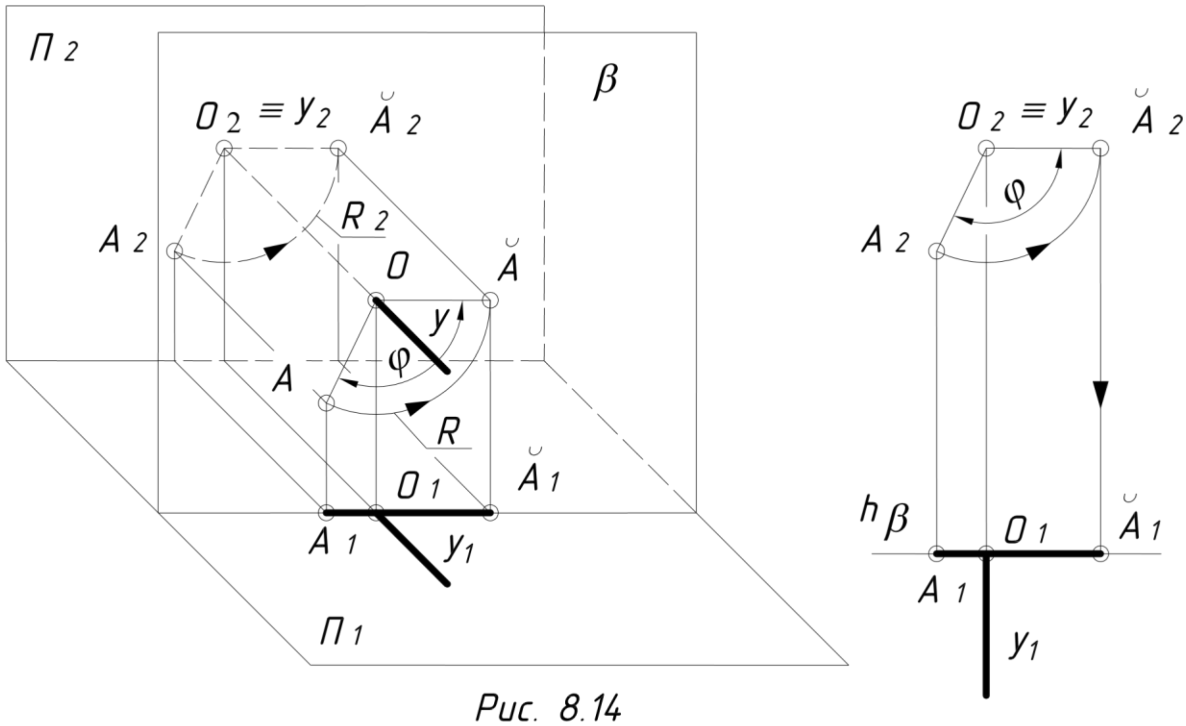


Рис. 8.14

Приклад 2. Способом обертання визначити дійсну величину відрізка **AB** та кут нахилу його до горизонтальної площини проекцій **П**$_1$ (рис. 8.15).

За умовою задачі, крім дійсної величини відрізка **AB**, необхідно визначити і кут φ_2 його нахилу до горизонтальної площини проекцій **П**$_1$, а тому вісь обертання **Z** повинна бути перпендикулярною до площини проекцій **П**$_1$. Отже, відрізок **AB** треба повернути до положення фронтальної прямої, тобто до положення паралельного до фронтальної площини проекцій **П**$_2$ (рис. 8.15). Для спрощення розв'язання вісь **Z**(**Z**$_1$, **Z**$_2$) проводимо через точку **A**, яка при обртанні буде нерухомою, а обертати будемо точку **B**. Для цього через точку **B** проводимо площину обертання β ($f_\beta \perp z_2$), чим визначаємо центр обертання **O** (**O**$_1$, **O**$_2$) і радіус обертання **R** (***R***$_1$, ***R***$_2$).

Радіус обертання **R** проектується на горизонтальну площину проекцій **П**$_1$ у дійсну величину, а тому $R \equiv R_1 \equiv A_1B_1$. Навколо точки **O**$_1$, як центра обертання, радіусом $R \equiv R_1 \equiv A_1B_1$ обертаємо точку **B**$_1$ до положення $B_1^{\cup}$. Прямим проектуванням знаходимо точку $B_2^{\cup}$ і, з'єднавши її з точкою **A**$_2$, отримаємо шукану величину відрізка ($A_2\,B_2^{\cup} = AB$).

Одночасно знайдемо і кут φ_2 нахилу відрізка **AB** до горизонтальної площини проекцій **П**$_1$.

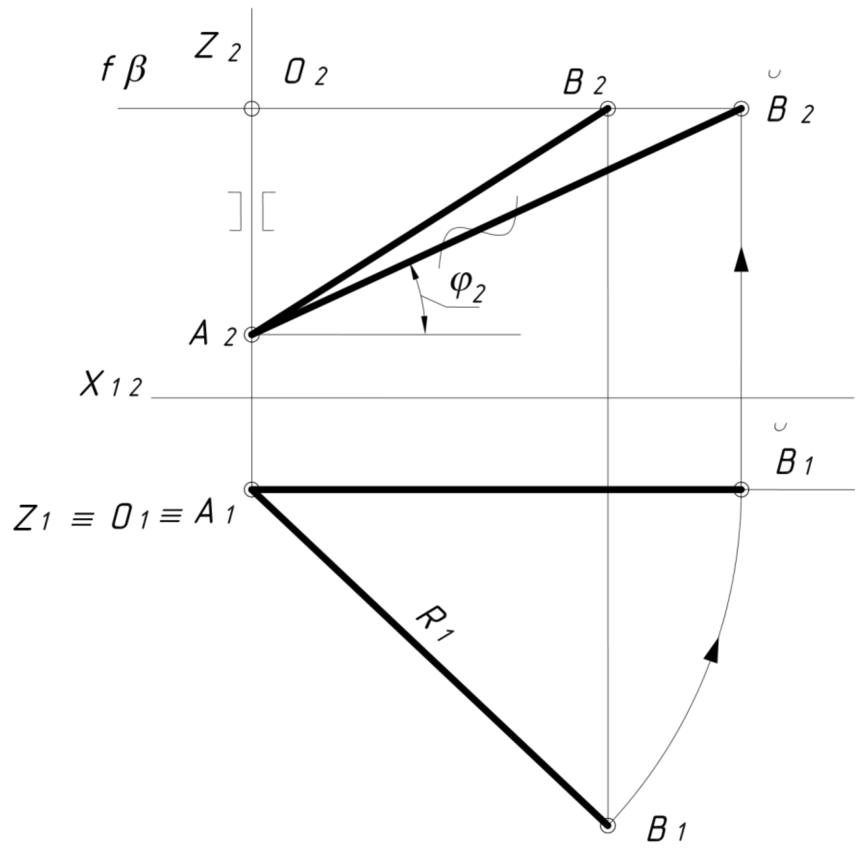


Рис. 8.15

Приклад 3. Способом обертання визначити дійсну величину фронтально-проектуючої площини, що задана трикутником **ABC**.

Для цього, враховуючи, що вершина трикутника – точка **C** лежить у площині **П**$_1$, проводимо вісь обертання **Y** через точку **C**, перпендикулярну до площини **П**$_2$ (рис. 8.16). Тоді при обертанні трикутника **ABC** точка **C** залишиться на місці, а точки **A** і **B**, обертаючись у площинах h_α і h_β, перпендикулярних до осі **Y**, займуть нове положення $A_1^\cup$ і $B_1^\cup$, тобто сумістяться з площиною **П**$_1$. Таким чином, після обертання всі три точки **A**, **B**, **C** – вершини трикутника будуть лежати у площині **П**$_1$.

Отже, нове положення $A_1^\cup B_1^\cup C_1$ трикутника **ABC** є його дійсна величина. Щоб цього досягти, переміщаємо на фронтальній площині проекцій точки A_2 і B_2 по дугах радіусами C_2A_2 і C_2B_2 до положення $A_2^\cup$ і $B_2^\cup$ на осі X_{12}. Горизонтальні проекції A_1 і B_1 точок **A** і **B** переміщаються по прямих, перпендикулярних до **Y**, тобто по горизонтальних слідах площин обертання для точок **A** і **B**. Знаходимо нові положення $A_1^\cup$ і $B_1^\cup$ горизонтальних проекцій точок **A** і **B**. Фігура $A_1^\cup B_1^\cup C_1$ – дійсна величина трикутника **ABC**.

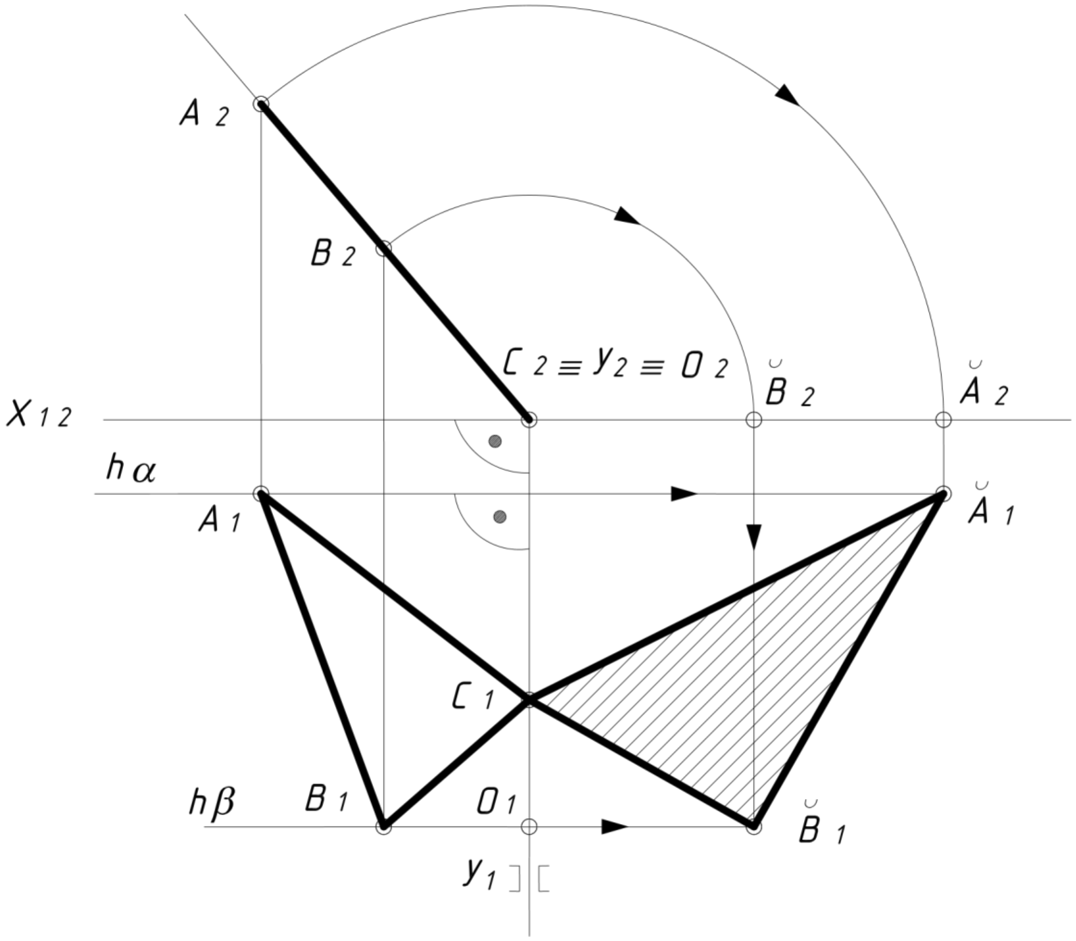


Рис. 8.16

Приклад 4. Повернути площину α загального положення до положення фронтально-проектуючої площини (рис. 8.17).

Щоб досягти такого положення цієї площини, вибираємо вісь обертання ***l*** так, щоб вона була перпендикулярною до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$ і належала фронтальній площині проекцій $\mathbf{П_2}$. З цією метою проведемо через довільно вибрану точку $\mathbf{A \equiv A_2}$ на сліді $\mathbf{f_\alpha}$ пряму l_2, перпендикулярну до осі $\mathbf{X_{12}}$, і визначимо горизонтальну проекцію ***l*** осі ***l***, яка збігається з точкою $\mathbf{A_1}$. З точки $l_1 \equiv \mathbf{A_1}$ опустимо перпендикуляр на горизонтальний слід $\mathbf{h_\alpha}$ і обернемо його основу $\mathbf{B \equiv B_1}$ по дузі радіуса **R** до положення $\mathbf{B_1}^{\cup}$ на осі $\mathbf{X_{12}}$. Дотична до дуги $\mathbf{B_1B_1}^{\cup}$ є новим положенням $\mathbf{h_\alpha}^{\cup}$ сліду $\mathbf{h_\alpha}$, який перпендикулярний до осі $\mathbf{X_{12}}$. Точка $\mathbf{X_\alpha}^{\cup} \equiv \mathbf{B_1}^{\cup}$ є новою точкою сходу слідів площини у новому положенні. Через цю точку пройде слід $\mathbf{f_\alpha}^{\cup}$. Другою точкою нового фронтального сліду $\mathbf{f_\alpha}^{\cup}$ є нерухома точка $\mathbf{A \equiv A_2}$, що лежить на перетині фронтального сліду $\mathbf{f_\alpha}$ і осі $l \equiv l_2$. Отже, площина α прийняла положення фронтально-проектуючої площини.

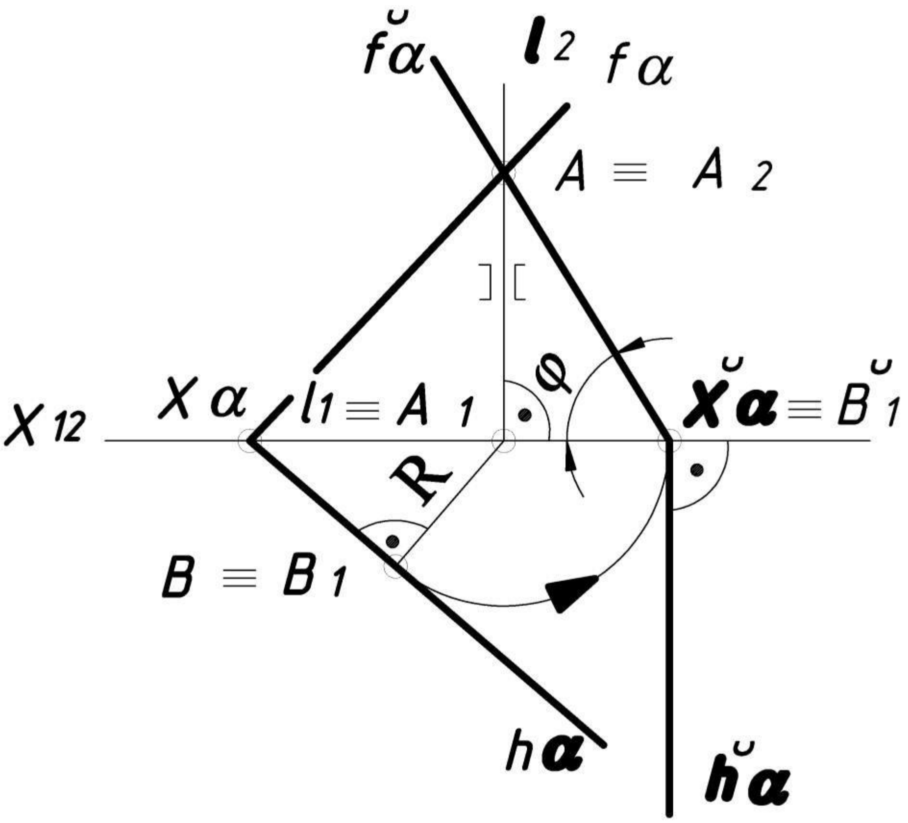


Рис. 8.17

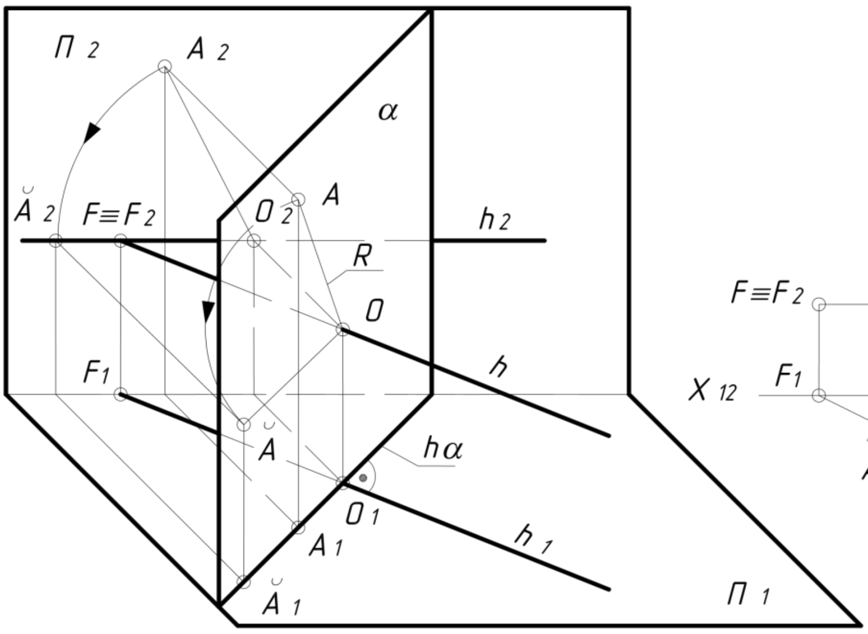
8.6. Обертання навколо прямої рівня (горизонталі, фронталі)

Слід зазначити, що при обертанні навколо тієї чи іншої прямої рівня жодна з проекцій траєкторії руху точки заданої фігури не проектується без спотворення.

Розглянемо обертання точки і площини навколо таких осей.

Приклад 1. Нехай потрібно повернути точку **A** навколо горизонталі **h** так, щоб у новому положенні точка мала однакову висоту з горизонталлю.

З наочного зображення (рис. 8.18) бачимо, що точка **A** буде переміщуватися в площині α, перпендикулярній до осі обертання – горизонталі **h**. Тому площина α є горизонтально-проектуючою і її слід $\mathbf{h_\alpha}$ перпендикулярний до $\mathbf{h_1}$. Центр обертання – точку **O** отримаємо в перетині осі обертання **h** із площиною обертання α. Радіусом обертання **R** буде відрізок **OA**. Цим радіусом точка **A** й опише дугу $\mathbf{AA^{\cup}}$ до заданого положення **h**. Проекціями нового положення точки $\mathbf{A^{\cup}}$ є точки $\mathbf{A_1^{\cup}}$ і $\mathbf{A_2^{\cup}}$.



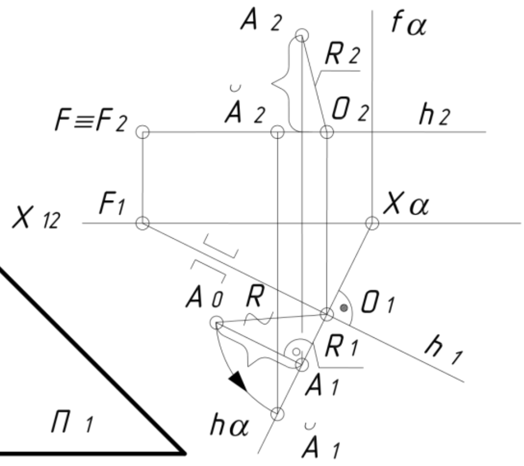


Рис. 8.18 Рис. 8.19

Щоб перейти до побудови обертання точки **A** на епюрі (рис. 8.19), необхідно виходити з міркувань, що незалежно від шляху, який робить точка **A** в площині α, радіус обертання **OA** повинен зайняти положення, паралельне до площини $\mathbf{П_1}$. Тоді його горизонтальна проекція стане дійсною величиною, яку й треба відкласти на горизонтальному сліді $\mathbf{h_\alpha}$ площини обертання, щоб отримати горизонтальну проекцію $\mathbf{A_1}$ нового положення точки $\mathbf{A_1}^{\cup}$. Радіус обертання **R** можна побудувати за його двома проекціями $\mathbf{R_1}$ і $\mathbf{R_2}$ способом прямокутного трикутника. Отже, порядок побудови знаходження проекцій точки **A** після обертання зводиться до того, що через точку $\mathbf{A_1}$ проводимо площину обертання $\mathbf{h_\alpha}$, перпендикулярну до $\mathbf{h_1}$, і позначаємо точку $\mathbf{O_1}$ – горизонтальну проекцію центра обертання. Точка $\mathbf{O_2}$ знаходиться в перетині лінії зв'язку з фронтальною проекцією $\mathbf{h_2}$ осі обертання. Сполучивши відповідні проекції точок **A** і **O**, знаходимо проекції радіуса обертання, дійсну величину якого будуємо способом прямокутного трикутника. Відкладаємо величину **R** на сліді $\mathbf{h_\alpha}$ від точки $\mathbf{O_1}$ і знаходимо горизонтальну проекцію $\mathbf{A_1}^{\cup}$ шуканого положення точки $\mathbf{A}^{\cup}$. Фронтальну проекцію $\mathbf{A_2}^{\cup}$ позначаємо на перетині лінії зв'язку з фронтальною проекцією $\mathbf{h_2}$ осі обертання **h**.

Приклад 2. Обертанням навколо горизонталі визначити дійсну величину трикутника **ABC**.

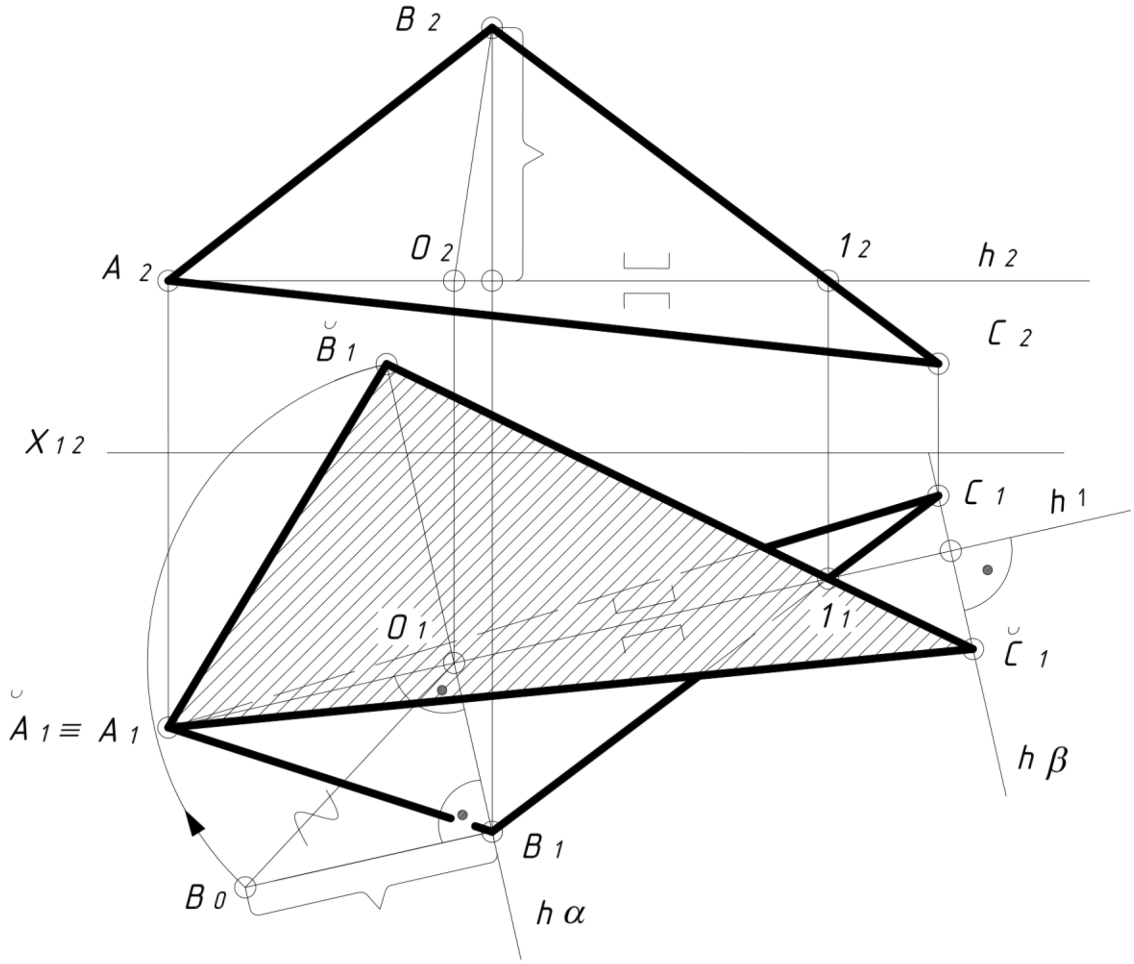


Рис. 8.20

У площині трикутника через його вершину **A** проводимо горизонталь **h**. Обираючи цю горизонталь за вісь обертання, досягаємо спрощення в побудові, оскільки вершина **A** при обертанні нерухома (рис. 8.20). Тому $\mathbf{A_1} \equiv \mathbf{A_1^{\cup}}$. Визначаємо проекцію $\mathbf{B_1^{\cup}}$ суміщенням вершини **B** з площиною рівня, яка проведена через горизонталь **h**. Для цього через проекцію $\mathbf{B_1}$ вершини **B** проводимо горизонтальний слід $\mathbf{h_{\alpha}}$ площини обертання α перпендикулярно до $\mathbf{h_1}$ і відкладаємо на цьому сліді від точки $\mathbf{O_1}$ дійсну величину радіуса обертання **R**, визначеного за його проекціями $\mathbf{R_1}$ і $\mathbf{R_2}$ способом прямокутного трикутника. Позначаємо проекцію $\mathbf{C_1^{\cup}}$ суміщення вершини **C**, використавши для цього нерухому точку **1** на прямій **BC**. Проекцію $\mathbf{C_1^{\cup}}$ знайдемо в місці перетину прямої $\mathbf{B_1^{\cup}1_1}$ із горизонтальним слідом $\mathbf{h_{\beta}}$ площини β, в якій здійснюється обертання точки **C**. Як бачимо, цей спосіб побудови точки $\mathbf{C_1^{\cup}}$ позбавляє необхідності визначати дійсну величину радіуса обертання точки **C**.

Таким чином, площина трикутника **ABC** суміщена з горизонтальною площиною, яка проходить через його горизонталь, а його проекція $\mathbf{A_1^{\cup}B_1^{\cup}C_1^{\cup}}$ відображає справжню форму і розміри трикутника **ABC**.

8.7. Обертання навколо слідів площини (спосіб суміщення)

Обертання площини можна здійснити також навколо нульової горизонталі або фронталі, тобто навколо одного з її слідів, до суміщення з будь-якою із площин проекцій. Таке обертання називають способом суміщення. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Повернути задану площину α навколо її горизонтального сліду $\mathbf{h_\alpha}$ до суміщення з горизонтальною площиною проекцій $\mathbf{П_1}$ (рис. 8.21).

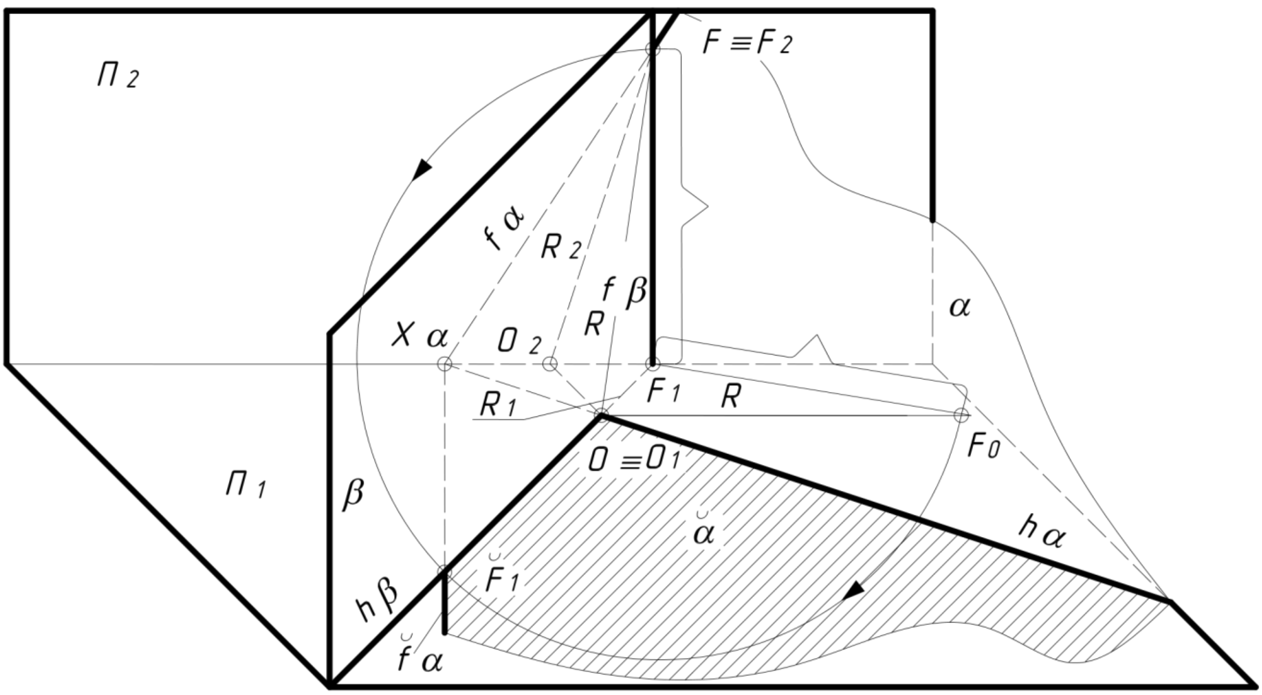


Рис. 8.21

Оскільки вісь обертання – горизонтальний слід $\mathbf{h_\alpha}$ – лежить у горизонтальній площині проекцій, то залишається сумістити з площиною $\mathbf{П_1}$ лише фронтальний слід $\mathbf{f_\alpha}$**.** Одна точка, а саме $\mathbf{X_\alpha}$, лежить на осі обертання і сліду $\mathbf{f_\alpha}$. Отже, досить взяти на сліді $\mathbf{f_\alpha}$ довільну точку **F**, обернути її навколо осі $\mathbf{h_\alpha}$ до суміщення з площиною $\mathbf{П_1}$ у точці $\mathbf{F_1}^{\cup}$ і, сполучивши точки $\mathbf{X_\alpha}$ і $\mathbf{F_1}^{\cup}$, отримати суміщений з площиною $\mathbf{П_1}$ фронтальний слід – пряму $\mathbf{f_\alpha}^{\cup}$. Отже, площина $\alpha^{\cup}$, обмежена двома прямими (слідами) $\mathbf{h_\alpha}$ і $\mathbf{f_\alpha}^{\cup}$, які лежать у площині $П_1$ і перетинаються у точці точці $\mathbf{X_\alpha}$**,** – шукана.

Точка **F** буде обертатися у площині обертання β, перпендикулярній до осі обертання $\mathbf{h_\alpha}$. Центр обертання точки **F** – точку **O** – позначаємо на перетині слідів $\mathbf{h_\alpha}$ і $\mathbf{h_\beta}$, а радіусом обертання **R** буде пряма **OF**. Цим радіусом точка **F** опише дугу у площині β з центром **O** і суміститься з площиною $\mathbf{П_1}$ у точці $\mathbf{F_1}^{\cup}$ на сліду $\mathbf{h_\beta}$**.**

Точку $\mathbf{F_1^{\cup}}$ можна побудувати також, виходячи з рівностей відрізків $\mathbf{X_{\alpha}F}$ і $\mathbf{X_{\alpha}F_1^{\cup}}$. Для цього у площині $\mathbf{П_1}$ потрібно описати дугу радіуса $\mathbf{X_{\alpha}F}$ до перетину зі слідом $\mathbf{h_{\beta}}$.

Побудову на епюрі (рис. 8.22) виконуємо в такій послідовності.

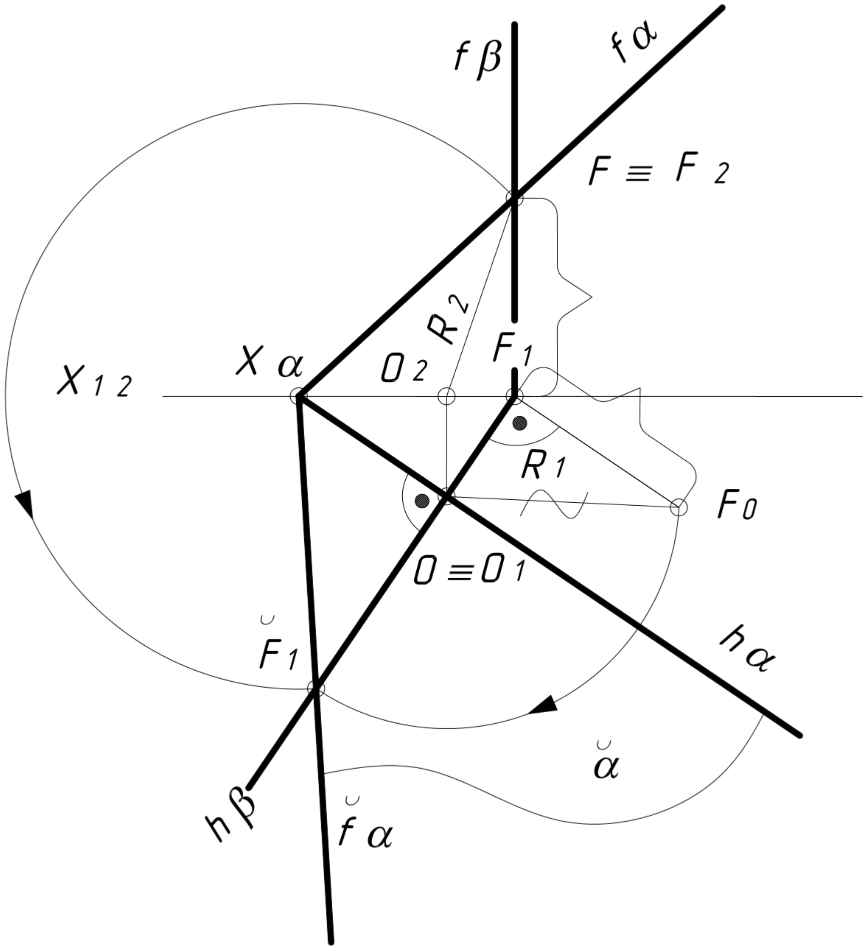


Рис. 8.22

Вибираємо на сліду $\mathbf{f_{\alpha}}$ довільну точку $\mathbf{F \equiv F_2}$ і через її горизонтальну проекцію $\mathbf{F_1}$ проводимо пряму $\mathbf{h_{\beta}}$, перпендикулярну до сліду $\mathbf{h_{\alpha}}$ – осі обертання. На прямій $\mathbf{h_{\beta}}$, сліду площини обертання точки $\mathbf{F}$, повинна лежати точка $\mathbf{F_1^{\cup}}$ після суміщення на відстані $\mathbf{R}$ від точки $\mathbf{O}$ або на відстані $\mathbf{X_{\alpha}F_2}$ від точки $\mathbf{X_{\alpha}}$. З центра $\mathbf{O \equiv O_1}$ радіусом $\mathbf{R_1}$ описуємо дугу до перетину з $\mathbf{h_{\beta}}$ й отримаємо суміщене положення точки $\mathbf{F}$ – точку $\mathbf{F_1^{\cup}}$, яку також можна побудувати, провівши з центра $\mathbf{X_{\alpha}}$ радіусом $\mathbf{X_{\alpha}F_2}$ дугу до перетину з тим самим слідом $\mathbf{h_{\beta}}$. Сполучивши точки $\mathbf{X_{\alpha}}$ і $\mathbf{F_1^{\cup}}$, отримаємо суміщене положення сліду $\mathbf{f_{\alpha}}$ – пряму $\mathbf{f_{\alpha}^{\cup}}$ і, отже, суміщене положення площини α – площину α_0.

Приклад 2. Способом суміщення площини α з площиною $\mathbf{П_1}$ визначити дійсну величину трикутника **ABC**, що лежить у площині α (рис. 8.23).

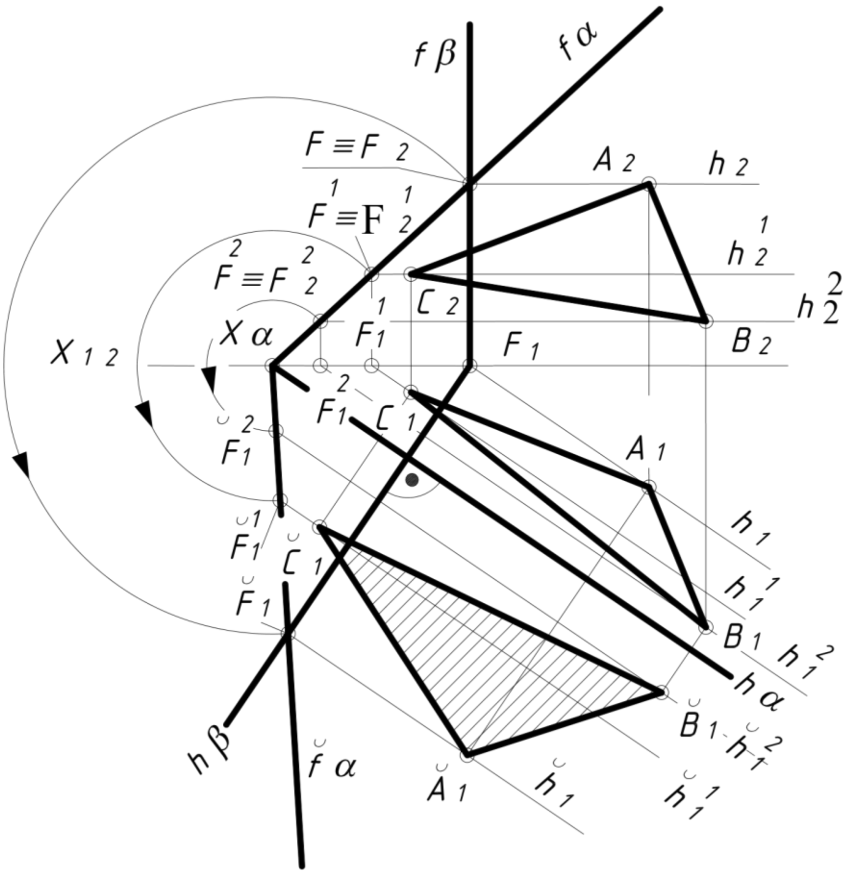


Рис. 8.23

Через вершини трикутника проведемо горизонталі **h**, **h**^{1}, **h**^{2}. Описаним вище способом суміщаємо площину α з площиною **П**$_1$, знайшовши спочатку суміщене положення точки **F** – точку $\mathbf{F_1}^{\cup}$, а потім – слід $\mathbf{f_\alpha}^{\cup}$. Позначимо на $\mathbf{f_\alpha}^{\cup}$ точки $\mathbf{F_1}^{1\cup}$ і $\mathbf{F_1}^{2\cup}$ – суміщені фронтальні сліди горизонталей, з яких проведемо прямі паралельно до сліду $\mathbf{h_\alpha}$. Точки **A**, **B**, **C** займуть суміщене положення $\mathbf{A_1}^{\cup}$, $\mathbf{B_1}^{\cup}$, $\mathbf{C_1}^{\cup}$ на суміщених горизонталях у перетині останніх з відповідними перпендикулярами до сліду $\mathbf{h_\alpha}$, проведеними з точок $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$. Наприклад, суміщена точка $\mathbf{B_1}^{\cup}$ лежатиме на суміщеній горизонталі $\mathbf{h_1}^{2\cup}$ у перетині з перпендикуляром $\mathbf{B_1B_1}^{\cup}$ до сліду $\mathbf{h_\alpha}$. Сполучивши побудовані таким чином точки $\mathbf{A_1}^{\cup}$, $\mathbf{B_1}^{\cup}$, $\mathbf{C_1}^{\cup}$, отримаємо дійсну величину трикутника **ABC**.

8.8. Спосіб плоскопаралельного переміщення

Плоскопаралельне переміщення є способом обертання навколо осей – проектуючих прямих, але без визначення на епюрі осей обертання. Здійснюючи плоскопаралельне переміщення геометричної фігури відносно площин проекцій, виходимо з того, що всі точки фігури, змінюючи своє положення у просторі, переміщуються у площинах, паралельних між собою і паралельних до однієї з площин проекцій. Пояснимо це на прикладах.

Приклад 1. Визначимо дійсну величину відрізка АВ плоскопаралельним переміщенням.

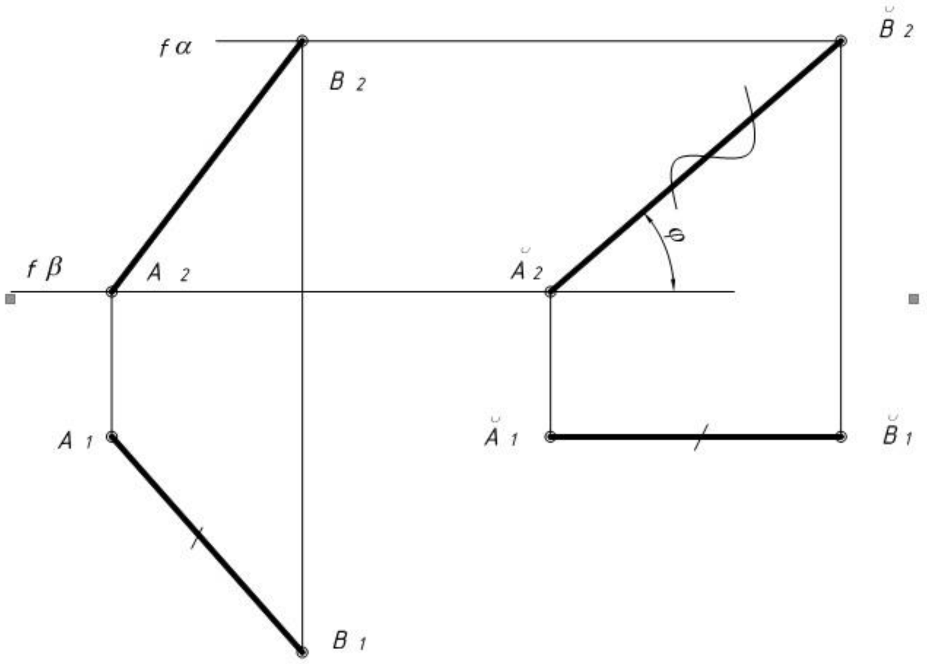


Рис. 8.24

Відомо, що у відрізка, паралельного до площини **П2**, горизонтальна проекція перпендикулярна до вертикальних ліній зв'язку, а сам відрізок на площину **П2** проектується в дійсну величину. Тому беремо горизонтальну проекцію **A1B1** відрізка **AB** і розміщуємо її на вільному місці аркуша паперу (рис. 8.24). У даному випадку має місце плоскопаралельне переміщення відносно площини **П1**, тому фронтальні проекції **A2** і **B2** кінцевих точок відрізка **AB** не можуть переміщуватися довільно, так як вони повинні рухатися відповідно в площинах α і β, паралельних до **П1**, і розміщуватись у проекційному зв'язку з переміщеною проекцією **A1**$^{\cup}$**B1**$^{\cup}$ відрізка **AB**. Тобто, точка **A2** переміщується по сліду $\mathbf{f_\beta}$ до перетину з вертикальною лінією зв'язку в точці **A2**$^{\cup}$, точка **B2** – по сліду $\mathbf{f_\alpha}$ до положення **B2**$^{\cup}$. Таким чином, ми визначили дійсну величину відрізка **AB** – **A2**$^{\cup}$**B2**$^{\cup}$ й одночасно кут нахилу φ відрізка **AB** до площини проекцій **П1**.

Приклад 2. За допомогою плоскопаралельного переміщення визначити дійсну величину площини трикутника **ABC** (рис. 8.25).

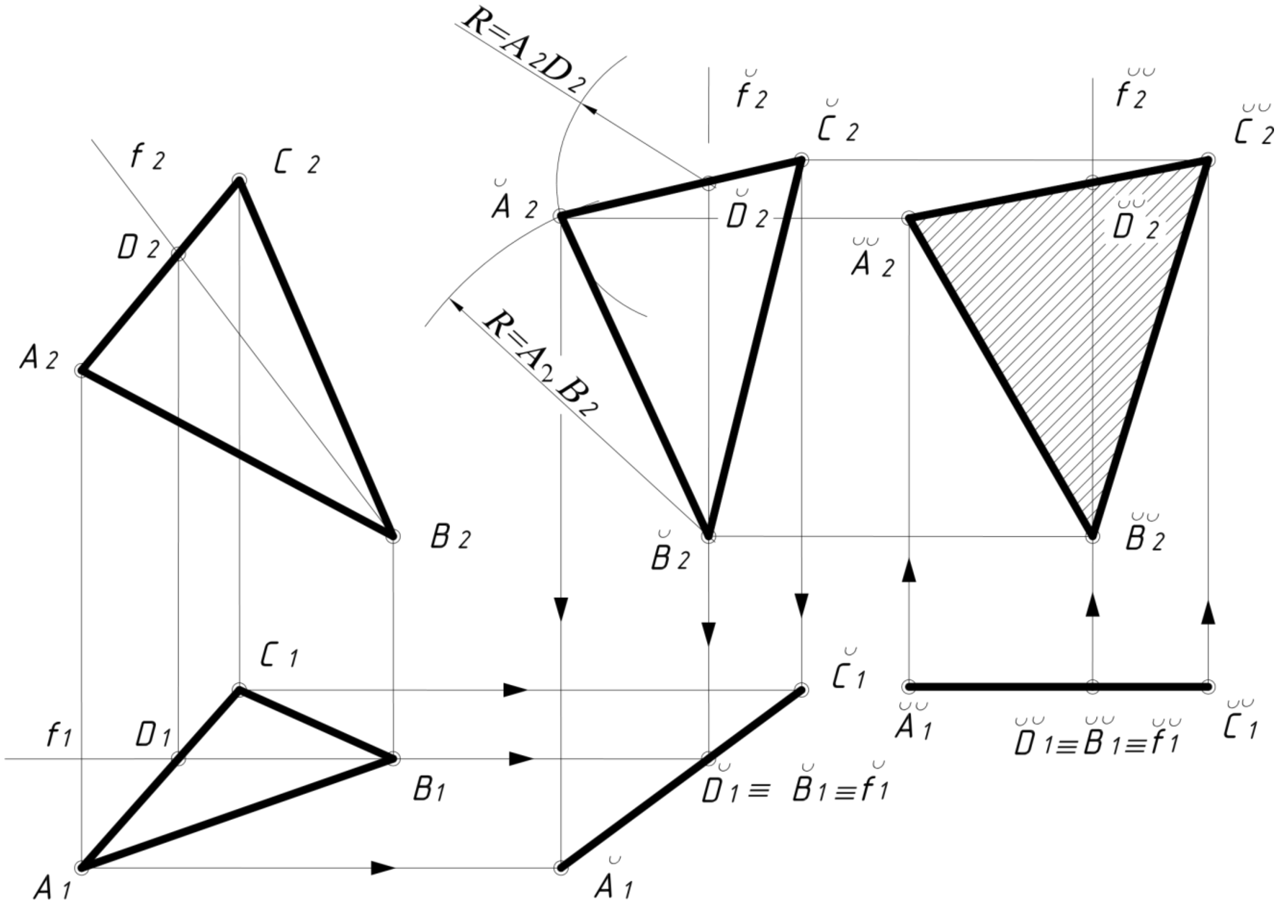


Рис. 8.25

Для визначення дійсної величини трикутника **ABC** необхідно його поперемінно переміщувати відносно двох площин проекцій. Першим переміщенням трикутник слід зробити проектуючим, а за другим – площиною рівня. Для цього в трикутнику проводимо одну із головних ліній (наприклад, фронталь **f**) і при першому переміщенні фронтальну проекцію фронталі розміщуємо на вільному місці поля креслення перпендикулярно до площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$ ($\mathbf{f_2^{\cup} \perp \Pi_1}$; $\mathbf{B_2^{\cup}D_2^{\cup}} = \mathbf{B_2D_2}$). Горизонтальну проекцію переміщеної фронталі отримуємо внаслідок перетину горизонтальної і фронтальної ліній зв'язку ($\mathbf{D_1^{\cup}} \equiv \mathbf{B_1^{\cup}} \equiv \mathbf{f_1^{\cup}}$). Точку $\mathbf{A_2^{\cup}}$ знаходимо методом засічок, що бачимо на кресленні. Проекція $\mathbf{A_2^{\cup}C_2^{\cup}}$ проведена через точку $\mathbf{D_2^{\cup}}$ і співпадає з $\mathbf{A_2C_2}$. Побудова проекції $\mathbf{A_1^{\cup}B_1^{\cup}C_1^{\cup}}$ зрозуміла з креслення. При другому переміщенні (паралельно до $\mathbf{\Pi_1}$) на вільному місці поля креслення будуємо горизонтальну проекцію $\mathbf{A_1^{\cup\cup}B_1^{\cup\cup}C_1^{\cup\cup}}$ перпендикулярно до вертикальних ліній зв'язку і рівну проекції $\mathbf{A_1^{\cup}B_1^{\cup}C_1^{\cup}}$, яку отримали при першому переміщенні. Побудова дійсної величини трикутника на фронтальній площині проекцій зрозуміла з креслення ($\mathbf{A_2^{\cup\cup}B_2^{\cup\cup}C_2^{\cup\cup}} = \mathbf{ABC}$).

При такому переміщенні немає перекриття проекцій і спрощується побудова, але креслення вимагає більшої площі. Отже, плоскопаралельне переміщення застосовується для переміщення геометричного елемента в тих випадках, коли складні епюри мають дуже багато ліній і їх потрібно розділити.

Запитання для самоперевірки

1. Чим зумовлюється необхідність перетворення проекцій?
2. Назвіть способи перетворення проекцій та їх суть?
3. Які основні задачі можна ров'язати за допомогою перетворення проекцій?
4. Чому при заміні площин проекцій зберігається взаємна перпендикулярність проекцій нової і старої системи?
5. Яке положення повинна займати плоска фігура, щоб визначити її дійсну величину заміною однією площини проекцій? Двох площин проекцій?
6. Назвіть елементи обертання та їх призначення.
7. Якого положення може бути вісь обертання і як це позначається на складності розв'язку задач?
8. У чому суть способу суміщення?
9. Які переваги і чому має спосіб плоско-паралельного переміщення?

9. Визначення кутів між геометричними елементами

При розв'язуванні задач часто небхідно визначати дійсні величини кутів між геометричними елементами, а саме: між мимобіжними прямими, між прямою та площиною і між двома площинами.

9.1. Визначення дійсної величини кута між двома мимобіжними прямими

Кут між мимобіжними прямими вимірють величиною плоского кута, утвореного прямими, що перетинаються, відповідно паралельними до даних мимобіжних прямих. Нехай потрібно визначити дійсну величину кута **φ** між мимобіжними прямими **AB** і **SC** (рис. 9.1).

Для спрощення побудови через точку **B** проводимо пряму $\mathbf{d} \parallel \mathbf{SC}$ ($\mathbf{d_1} \parallel \mathbf{S_1}$; $\mathbf{d_2} \parallel \mathbf{S_2 C_2}$). Кут між **AB** і **SC** вимірюємо величиною плоского кута між **AB** і **d**.

Дійсну величину плоского кута **AB1** визначаємо способом обертання навколо горизонталі **h** (див. розділ 8), проведеної у площині шуканого плоского кута **AB1**.

Кут $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A_1 B_1 {}^{\cup} 1_1}$ є шуканим. Якщо знайдений кут виявиться тупим, то $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{180^\circ}$ мінус знайдений кут $\mathbf{A_1 B_1 {}^{\cup} 1_1}$.

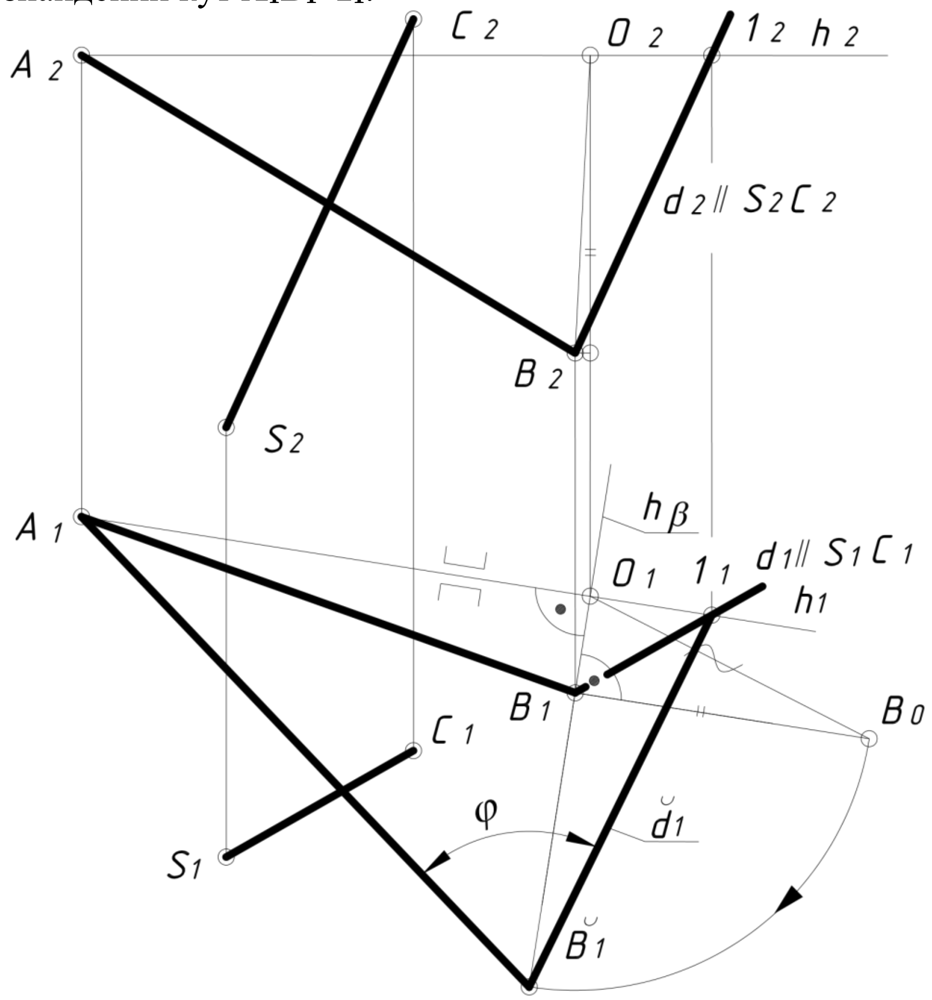


Рис. 9.1

9.2. Визначення дійсної величини кута між прямою та площиною

Кут між прямою та площиною вимірюють кутом між прямою та її проекцією на дану площину. Одну сторону цього кута у вигляді заданої прямої маємо при постановці задачі. Другу його сторону можемо мати лише після ряду допоміжних побудов. Щоб уникнути цих побудов і таким чином спростити розв'язок, зручніше замість кута **φ** між прямою і площиною визначити кут **θ** між прямою і перпендикляром до площини (рис. 9.2). Потім, виходячи з того, що **φ + θ = 90°**, елементарною побудовою визначаємо кут (рис. 9.3).

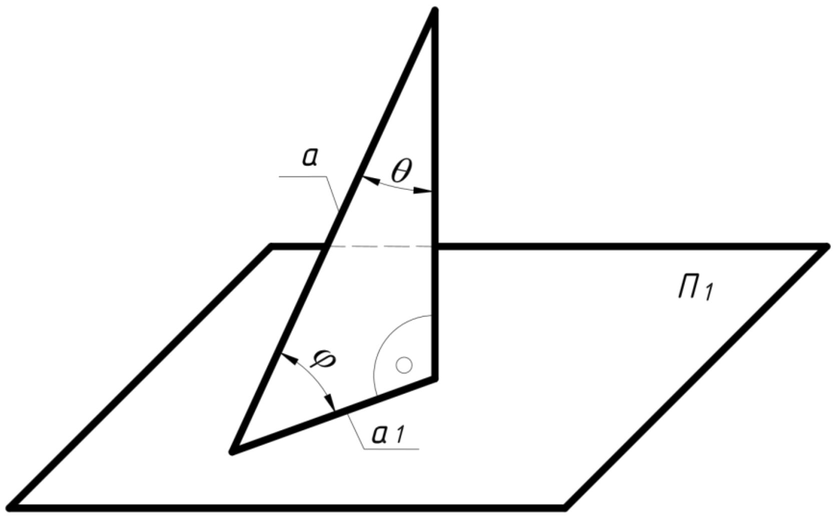


Рис. 9.2

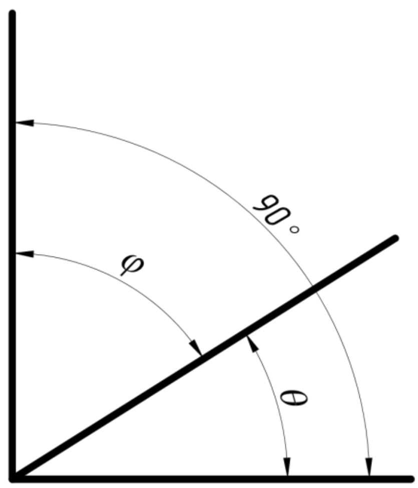


Рис. 9.3

Нехай задана площина трикутником **ABC** та пряма **k** (рис. 9.4).

Визначити дійсну величину кута **φ** між прямою **k** та площиною трикутника **ABC**.

Оскільки дана задача вимагає визначення тільки дійсної величини кута між прямою та площиною без зображення його проекцій, визначають доповнювальний до **90°** кут **θ**, а шуканий кут буде становити різницю **φ =**
90° - θ.

Для розв'язання задачі (рис. 9.4) з довільно вибраної на прямій **k** точки **S** опускаємо перпендикуляр **p** на площину трикутника **ABC** ($p_1 \perp h_1$; $p_2 \perp f_2$). Кут між прямою **k** і перпендикуляром **p** буде доповнювальним до шуканого. Дійсну величину цього кута визначаємо обертанням навколо горизонталі h^1, проведеної у площині цього кута. Дійсна величина доповнювального кута **θ** буде $3_1S_1^{\cup}4_1$. З точки $S_1^{\cup}$ ставимо перпендикуляр **m** до $S_1^{\cup}3_1$. Кут **φ** є шуканим **(**$\varphi = mS_1^{\cup}4_1$).

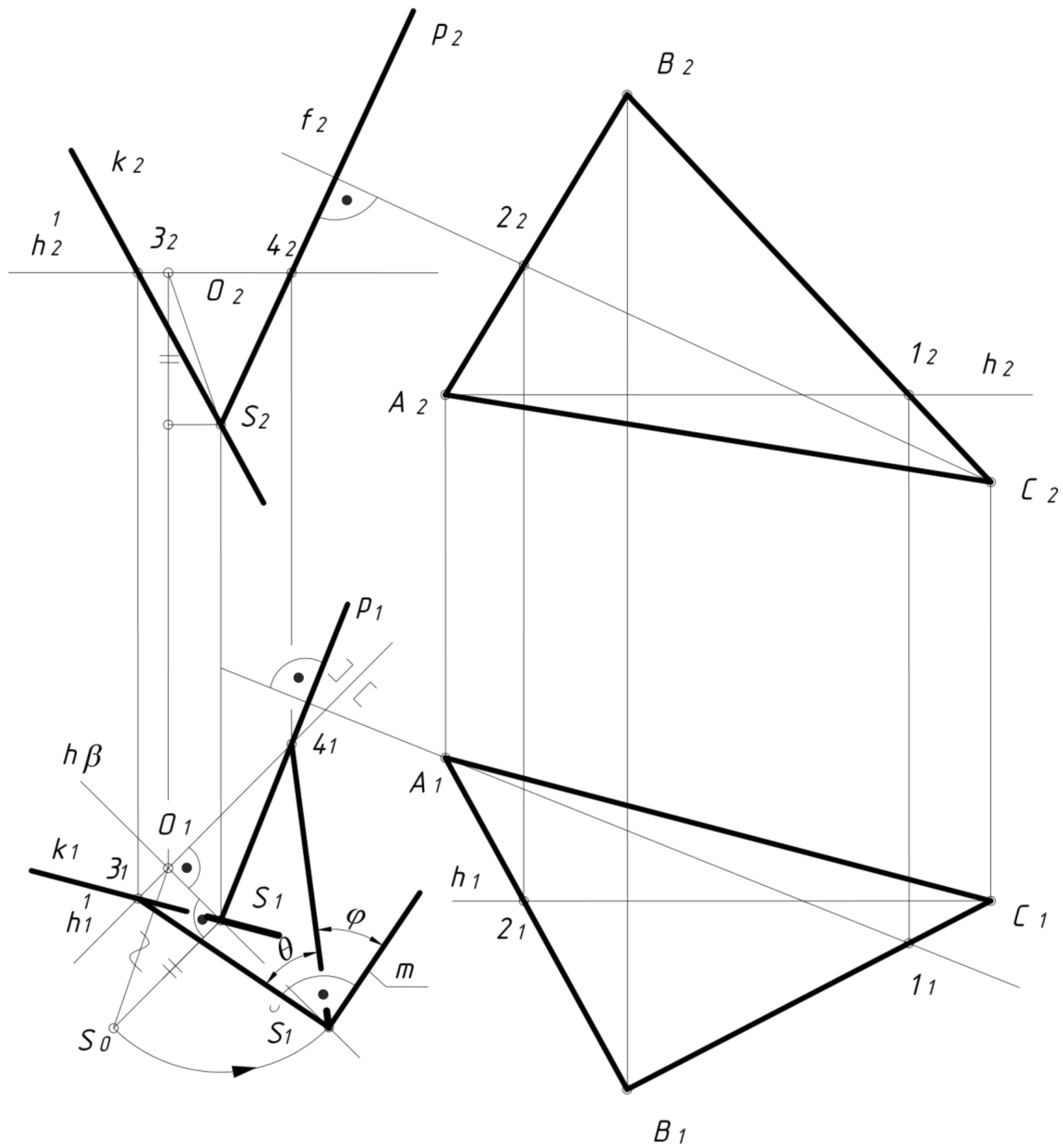


Рис. 9.4

9.3. Визначення дійсної величини кута між двома площинами

Кут між двома площинами визначають лінійним кутом, який утворює переріз двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра (рис. 9.5). Отримання на кресленні лінійного кута за допомогою позначеного перерізу потребує трудомістких допоміжних побудов, уникнути яких можна, якщо побудувати перпендикуляри до заданих площин через довільно вибрану точку простору.

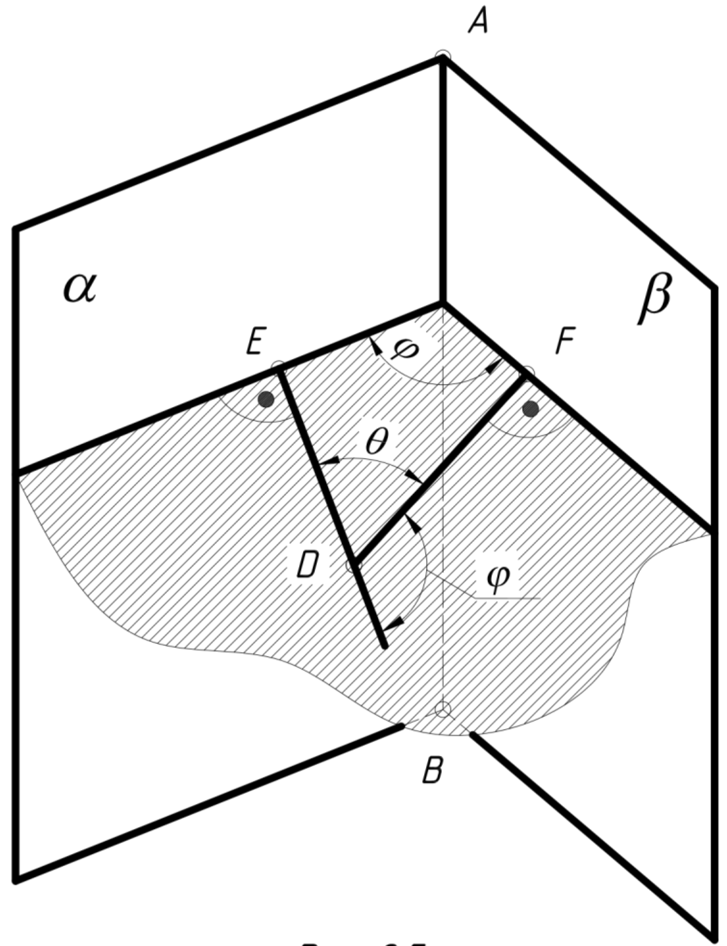


Рис. 9.5

Як бачимо з просторового зображення, кут θ між перпендикулярами **DE** та **DF** до площин α та β є доповнюючим до 180° кута φ між площинами. Необхідно зазначити, що визначення кута між площинами за допомогою доповнюючого до 180° кута особливо раціональне у випадках, коли площини задані слідами.

Нехай площини α і β задані слідами. Потрібно визначити кут між ними (рис. 9.6). На кресленні з довільно вибраної точки простору **D** (**D_1**, **D_2**) проведено два перпендикуляри: **p** – до площини α (**$p_1 \perp h_\alpha$**; **$p_2 \perp f_\alpha$**) і **k** – до площини β (**$k_1 \perp h_\beta$**; **$k_2 \perp f_\beta$**). Однойменні проекції перпендикулярів утворюють на кресленні проекції θ_1 і θ_2 кута θ. Визначаємо дійсну величину кута θ (θ_0) обертанням навколо горизонталі **h** (**h_1**, **h_2**), проведеною в площині цього кута. Шуканий кут між площинами α і β φ дорівнює знайденому θ_0, якщо θ_0 гострий. Якщо ж знайдений кут θ_0 тупий, то шуканий кут між площинами α і β φ дорівнює різниці між кутом 180° і кутом θ_0.

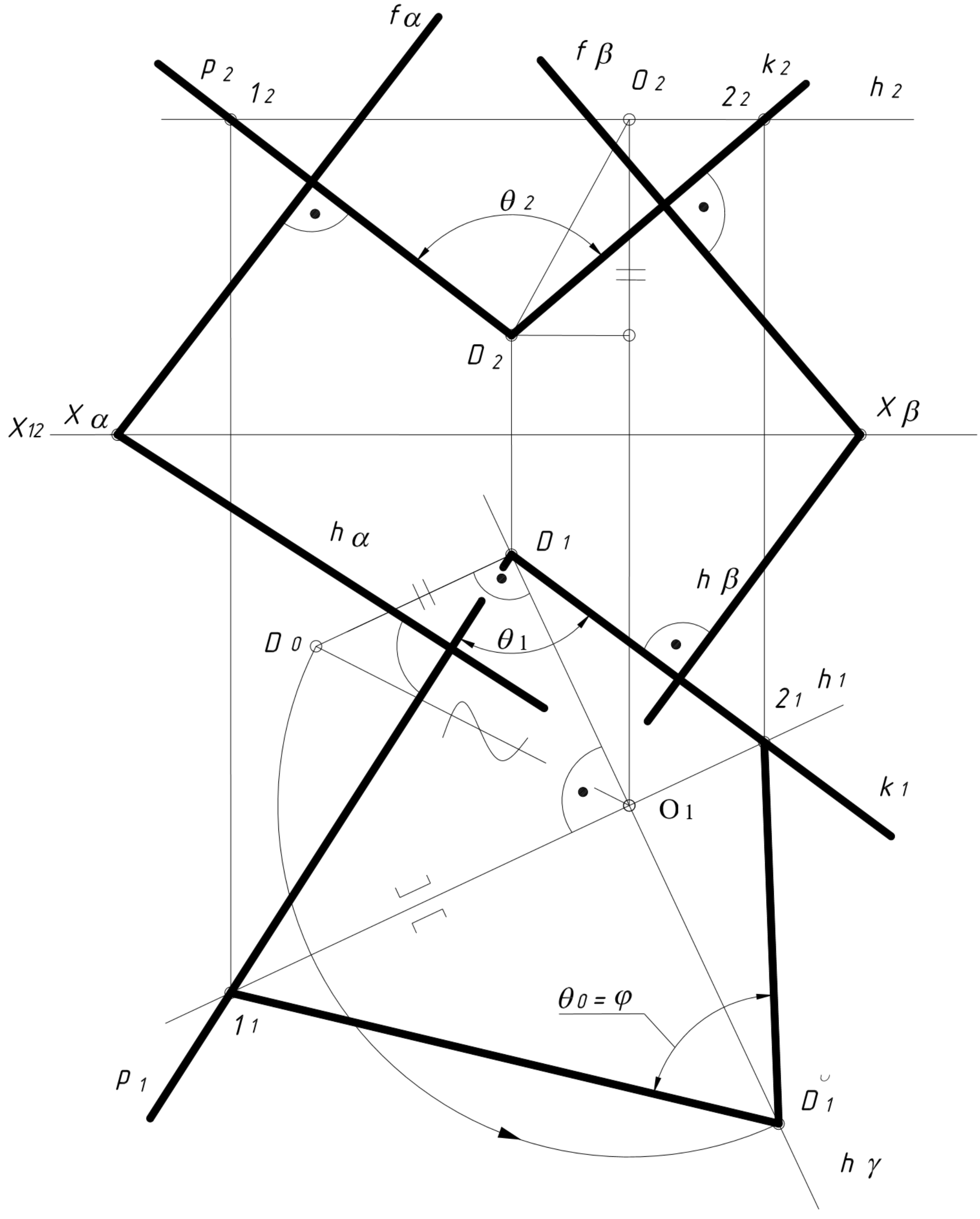


Рис. 9.6

Коли площини задані плоскими фігурами, що мають на кресленні спільну пряму (ребро двогранного кута), кут між площинами зручно визначати способом заміни площин проекцій (рис. 9.7). Плоскі фігури подвійною заміною переводять у проектуюче положення, для чого спочатку заміняють площину $\mathbf{П_2}$ на $\mathbf{П_4}$ ($\mathbf{X_{14} \parallel A_1B_1}$), а потім – $\mathbf{П_4}$ на $\mathbf{П_5}$ ($\mathbf{X_{45} \perp A_4B_4}$). Після другої заміни ребро спроектується в точку $\mathbf{A_5 \equiv B_5}$ – вершину кута $\boldsymbol{\varphi}$, а площини (плоскі фігури) – у відрізки – сторони кута $\boldsymbol{\varphi}$.

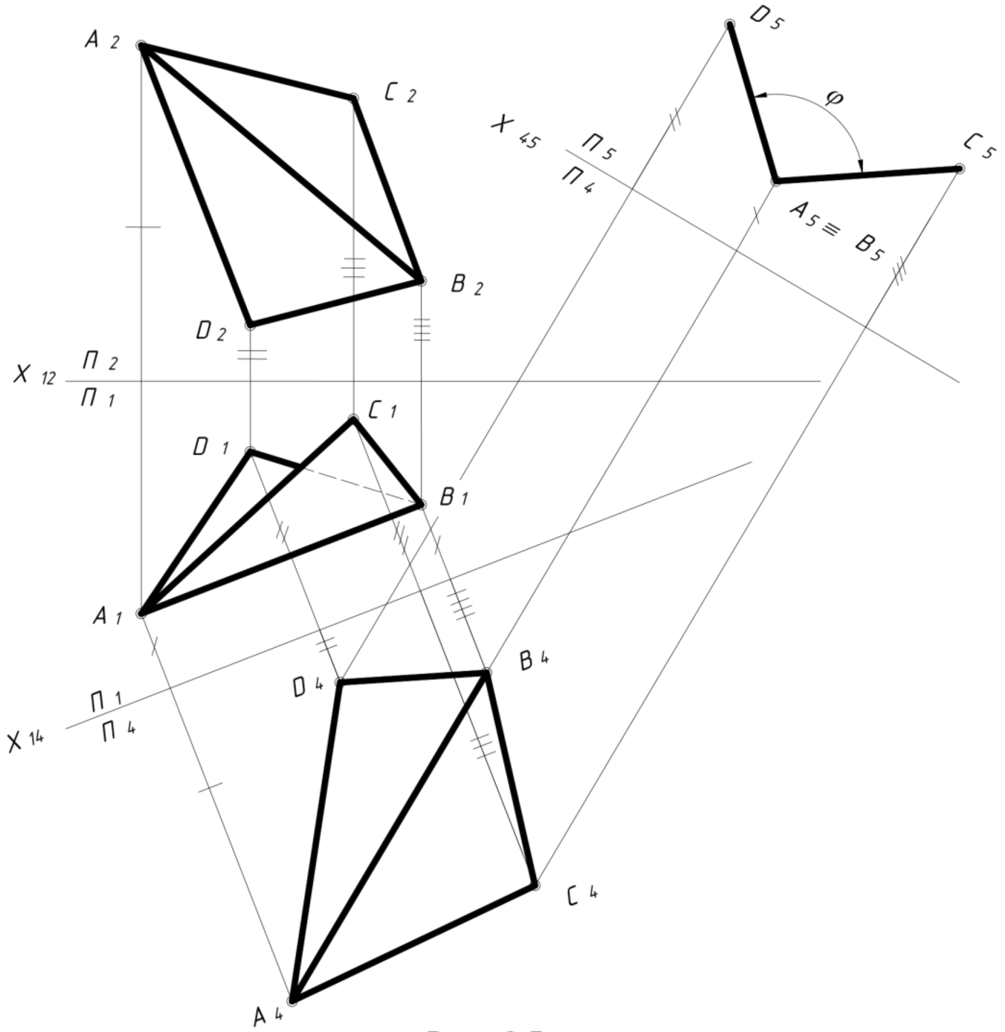


Рис. 9.7

Запитання для самоперевірки

1. У чому суть визначення дійсної величини кута між двома мимобіжними прямими?

2. У чому суть визначення дійсної величини кута між прямою та площиною?

3. Чому шуканий кут між прямою та площиною є доповнювальним кутом до 90°?

4. У яких випадках задачу на знаходження дійсної величини кута між прямою та площиною розв’язують за допомогою допоннювального кута?

5. У чому суть визначення дійсної величини кута між двома площинами?

6. Чому зручніше спочатку шукати кут між перпендикулярами до площини?

7. При розв’язуванні яких задач зручніше спочатку шукати кут між двома перепендикулярами опущеними з довільної точки простору на дві площини, а дійсну величину кута між двома площинами визначати за допомою доповнювального кута?

8. Яким способом доцільно розв’язувти задачі на знаходження дійсної величини двохгранного кута ?

10. ЛІНІЇ, ПОВЕРХНІ, ТІЛА

З позиції геометрії багато об'єктів, які нас оточують – це лінії, поверхні, тіла. Для них характерна величезна різноманітність форм.

Математичні визначення лінії, поверхні, тіла є складними і подаються за допомогою топології однієї з галузей сучасної математики.

10.1. Криві лінії

Кривою називають лінію, кривизна якої не дорівнює нулю. Кривизною називають ступінь скривлення лінії або ступінь віддаленості точок прямої від свого початкового положення при згинанні цієї прямої в криву (рис. 10.1). Мірою кривизни лінії в будь-якій точці **A** є відношення $\mathbf{k=\alpha/s}$ при $\mathbf{s\rightarrow 0}$ (рис. 10.2). Чим більша величина **k** біля даної точки, тим більше скривлена лінія і тим менший радіус кривизни лінії біля даної точки, тобто $\mathbf{k=1/R}$.

Криві лінії бувають плоскими або просторовими. Важливим характеристичним елементом будь-якої кривої є дотична в кожній її точці. Усі дотичні плоскої кривої перетинаються між собою. Дотичні до просторової кривої в загальному випадку не перетинаються. Будь-яку криву лінію можна уявити і задати на кресленні рядом точок, кількість яких залежить від потрібної точності. Зображення кривої лінії на кресленні зводиться до зображення на ньому ряду точок. На кожній кривій лінії можна відзначити окремі точки, в яких крива змінює свій характер, тобто точки, які характеризують форму даної кривої.

Назвемо деякі з цих точок (рис. 10.3): точка перелому **A**, у якій крива лінія поділяється на дві гілки, що мають різні дотичні; точка повороту (загострення), у якій крива змінює свій напрям, має вістря і до обох гілок кривої можна провести лише одну дотичну (**B** – точка повороту першого роду і **C** – точка повороту другого роду); подвійна точка **D** (або вузлова чи самодотику), в якій крива перетинає сама себе і має дві дотичні; точка самодотику **E**, в якій обидві гілки кривої дотикаються одна до одної і мають спільну дотичну; точка перетину **F**, в якій крива змінює напрям кривизни і перетинає дотичну; вершина кривої **G**, для якої нормаль буде віссю симетричної частини кривої.

На рис. 10.4 наочно побудовано проекції просторової кривої **m** і на рис. 10.5 – епюр кривої в системі $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$, де проекції окремих точок кривої побудовані способом прямокутного проектування.

Як бачимо з рис. 10.4 і 10.5, окремі частини кривої, переплітаючись, можуть розміщуватися на одних і тих самих проекційних прямих. При зображенні просторової кривої необхідно позначати окремі її точки, щоб уникнути неясності при читанні рисунка.

З просторових кривих, які мають широке застосування при конструюванні предметів, машин тощо, слід відзначити гвинтові лінії як елементи різьб, пружин і т. ін.

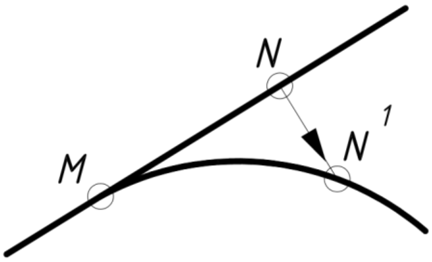


Рис. 10.1

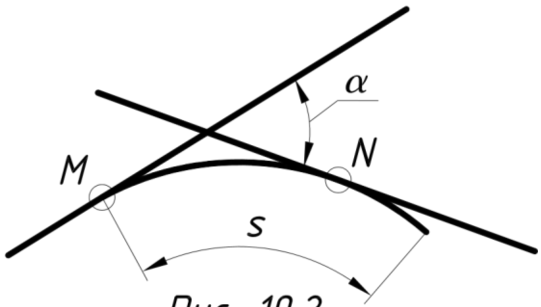


Рис. 10.2

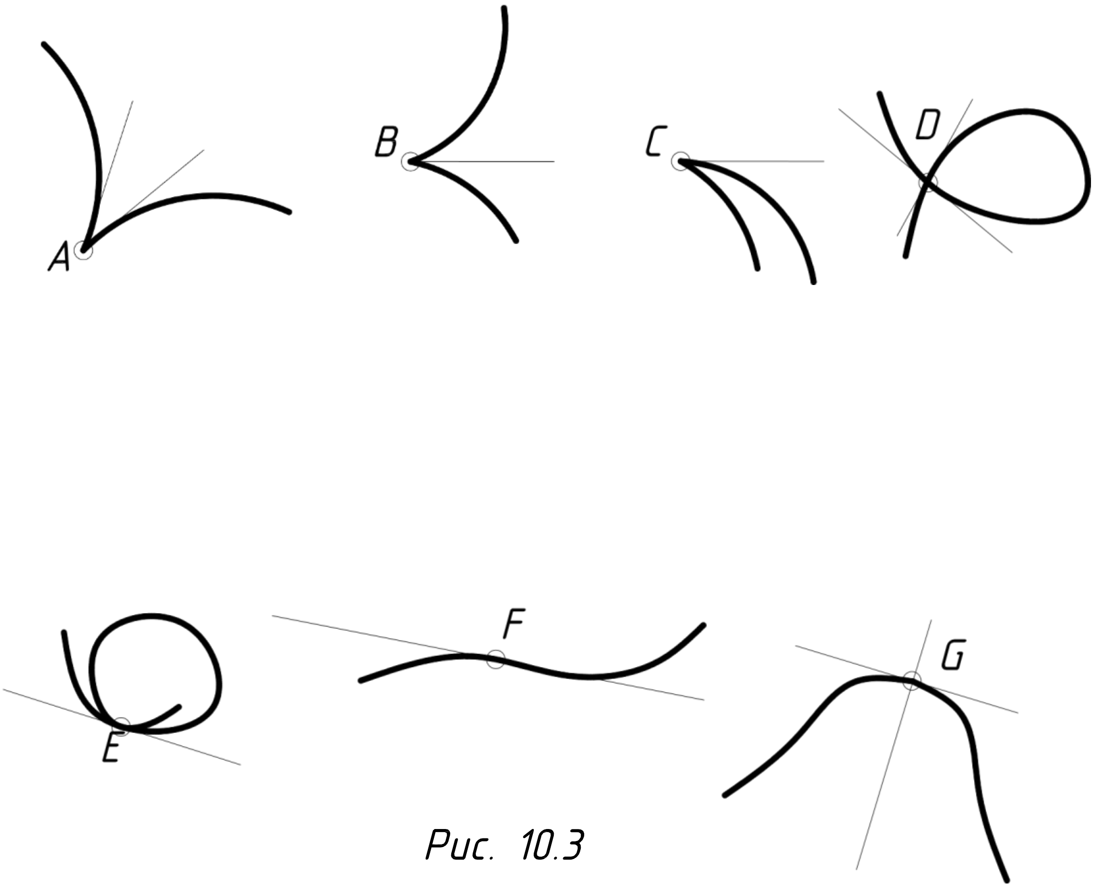


Рис. 10.3

Гвинтові лінії розподіляють на *циліндричні* та *конічні. Циліндрична гвинтова лінія* утворюється рівномірним рухом точки по твірній циліндра за умови, що твірна рівномірно обертається навколо циліндра в один або другий бік.

На рис. 10.6 зображено круговий циліндр діаметра **D**. Уявимо, що твірна **t** разом з точкою **A** на ній має рівномірно-обертальний рух навколо осі ***l*** циліндра, перпендикулярної до горизонтальної площини проекцій. За один оберт твірної точка **A** опише на поверхні циліндра коло діаметром **D**.

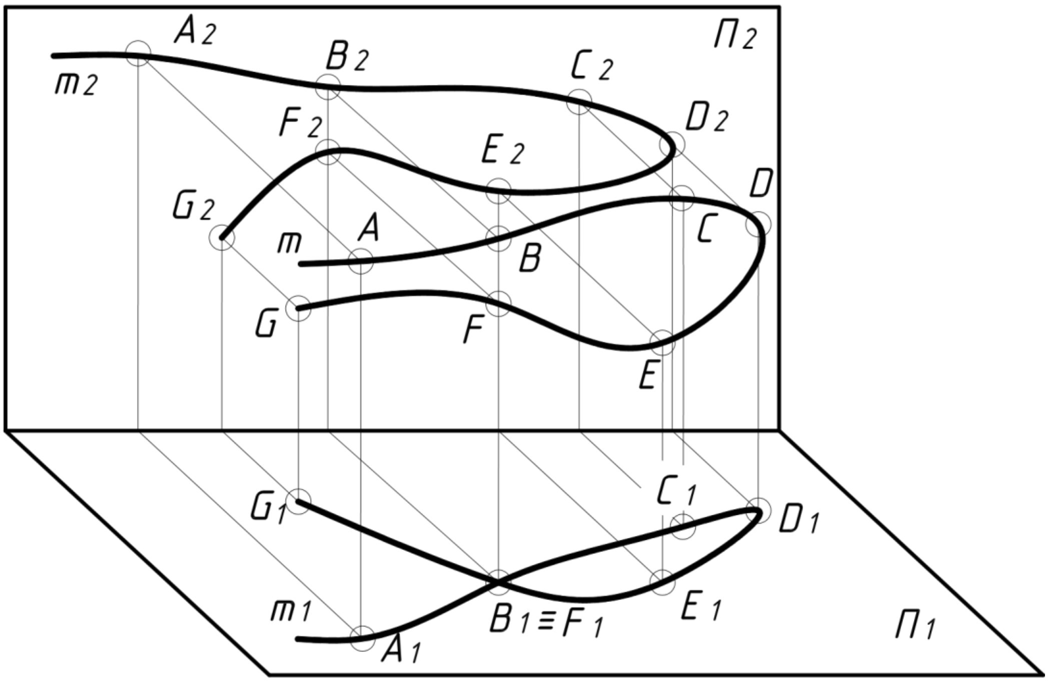


Рис. 10.4

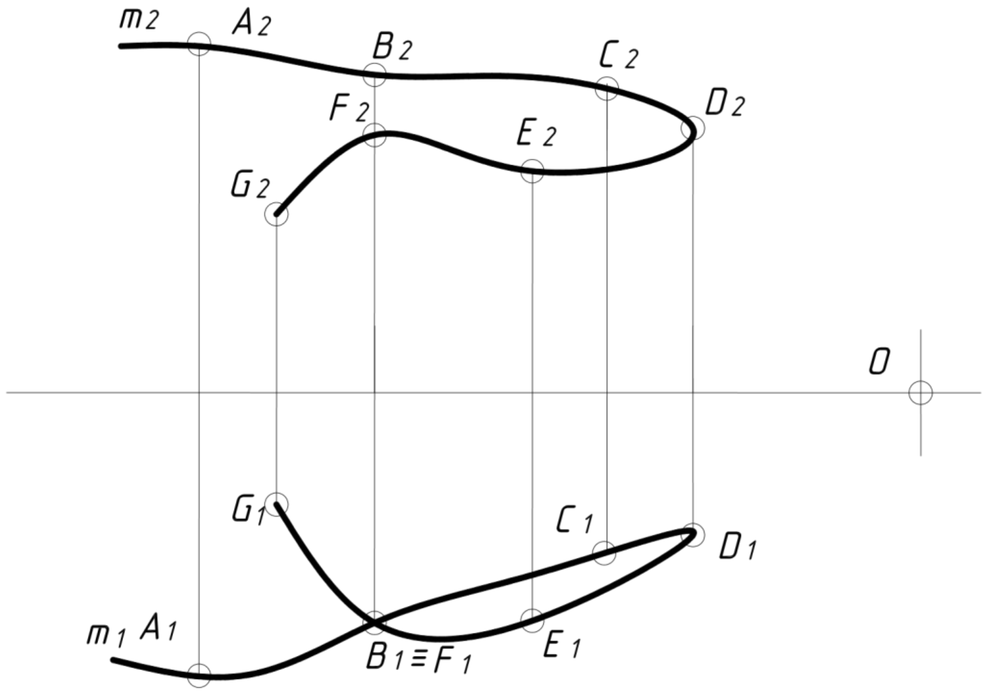


Рис. 10.5

Якщо під час оберту твірної **t** точці **A** надати рівномірнопоступальний рух уздовж твірної, тоді точка опише на поверхні циліндра просторову криву – циліндричну гвинтову лінію.

За один оберт навколо циліндра точка **A** підніметься по твірній на величину **H**, яку називають ходом. Отже, *хід гвинтової лінії* – це відстань між двома найближчими точками по одній і тій же твірній циліндра, в яких гвинтова лінія перетинає цю твірну.

Для побудови проекцій гвинтової лінії ділять горизонтальну проекцію циліндра (коло) декілька рівних частин; на стільки ж частин поділяють і хід гвинтової лінії **H**. На рис. 10.6 поділ зроблено на вісім частин.

У точках поділу горизонтальної проекції циліндра позначаємо горизонтальні проекції точки **A**, яка опише гвинтову лінію на поверхні циліндра. Горизонтальна проекція гвинтової лінії збігається з колом діаметра **D**.

Фронтальну проекцію гвинтової лінії будують, виходячи з таких міркувань. Коли точка **A** разом з твірною перейде з положення A^0 у положення A^1, то фронтальна проекція точки **A** підніметься по твірній на 1/8 ходу у положення A_2^1; далі, у положенні A_2 точка підніметься на дві поділки ходу у положення A_2^2 і т.д. Отже, фронтальні проекції A_2^1, A_2^2, ..., A_2^8 визначаться в точках перетину фронтальних проекцій відповідних твірних з прямими, паралельними до осі **OX**, проведеними з точок поділу на рівні частини ходу гвинтової лінії. Сполучивши плавною кривою точки A_2^0, A_2^1, ..., A_2^8, отримаємо фронтальну проекцію гвинтової лінії.

Частина гвинтової лінії, що утворилася за один оберт точки **A**, має назву *оберту* або *витка гвинтової лінії*.

Якщо видима частина гвинтової лінії піднімається праворуч вгору, то гвинтову лінію називають *правою*, а якщо навпаки – *лівою*.

На рис. 10.6 зображено гвинтову лінію з правим ходом і вертикально розміщеною віссю. Вона характеризується підйомом видимої частини витка вправо, а невидимої – вліво.

На рис. 10.7 показана розгортка правої циліндричної гвинтової лінії. Оскільки коло основи циліндра поділене на рівне число частин і крок гвинтової лінії поділений на таке ж число частин, розгортка гвинтової лінії у межах її кроку є геометричним місцем точок, для кожної з яких ордината пропорційна абсцисі, тобто **y=kx**, що є рівнянням прямої лінії. Побудова зрозуміла з рисунка. Кут **α** називають *кутом підйому гвинтової лінії*.

Конічна гвинтова лінія (рис. 10.8) – це лінія, яку описує точка, що переміщається рівномірно по твірній прямого кругового конуса, якщо ця твірна обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі конуса. Горизонтальна проекція конічної гвинтової лінії являє собою спіраль Архімеда, фронтальна – синусоїду з амплітудою, що зменшується від основи до вершини конуса. На рис. 10.9 показана розгортка конічної гвинтової лінії, побудова якої зрозуміла з рисунка.

Зазначимо, що гвинтова лінія може бути побудована також на інших поверхнях обертання.

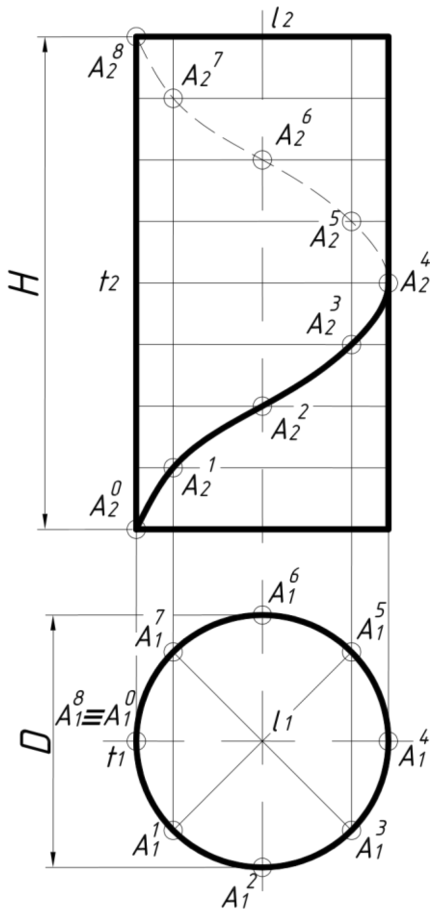


Рис. 10.6

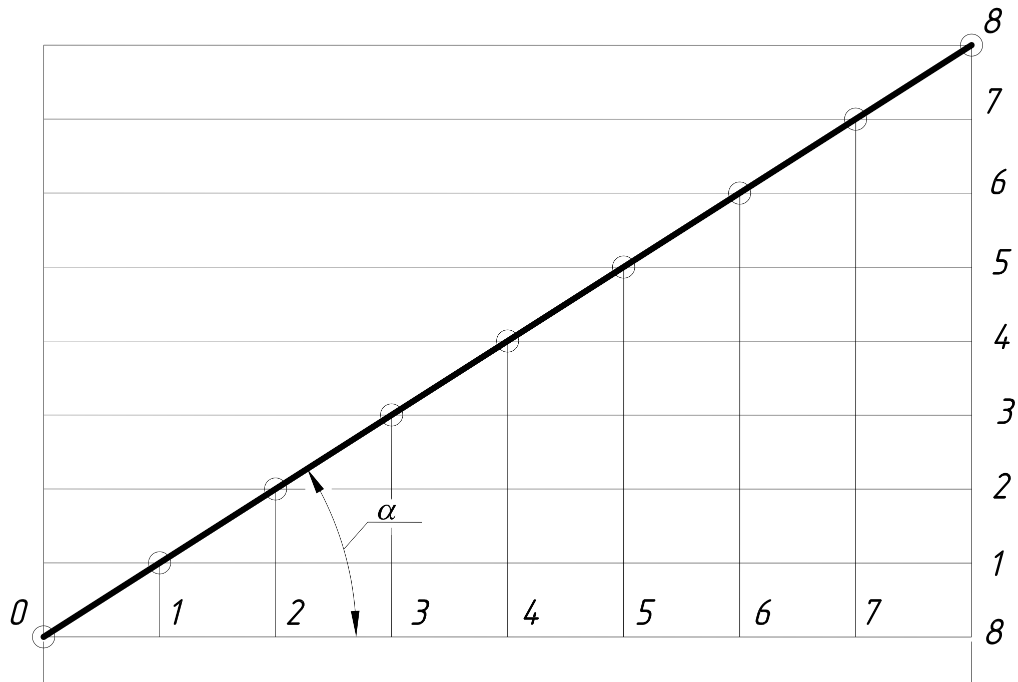


Рис. 10.7

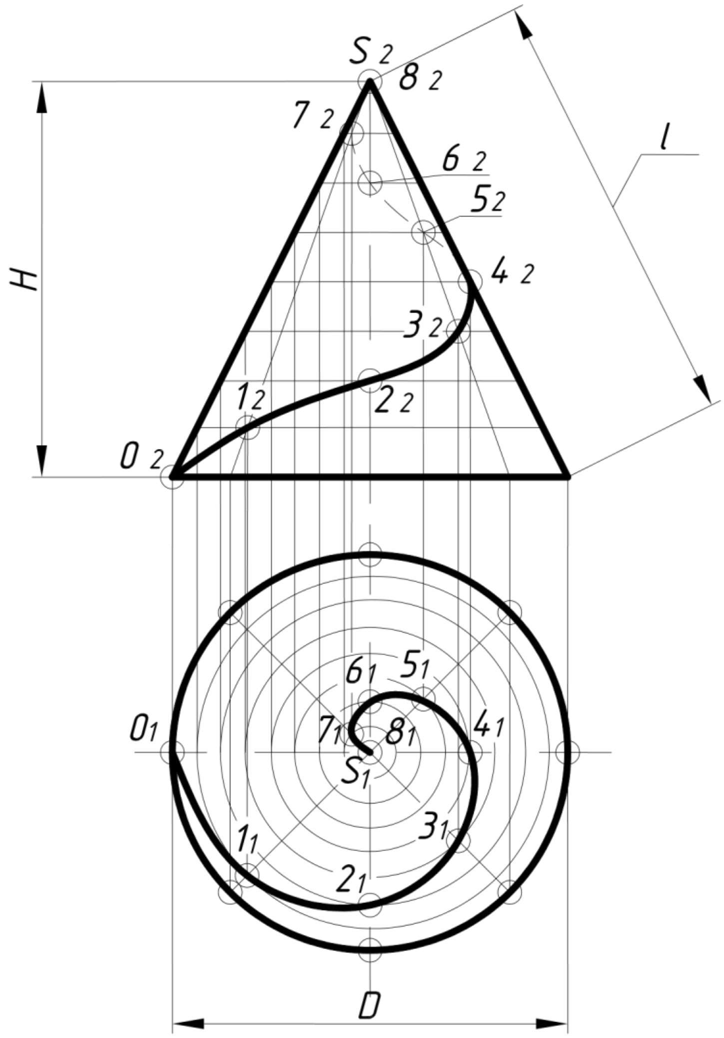


Рис. 10.8

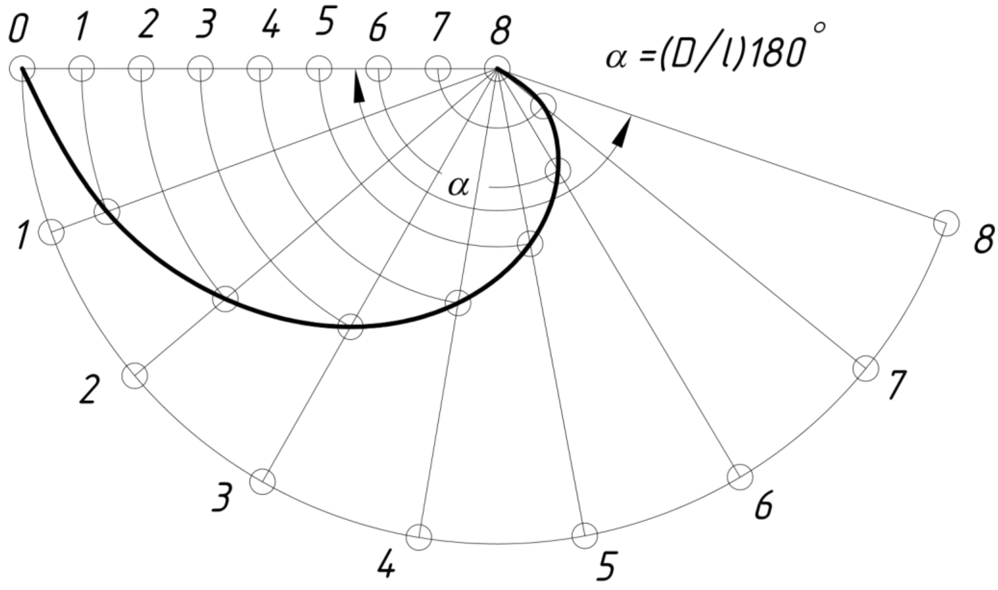


Рис. 10.9

10.2. Криві поверхні

Будь-яку поверхню можна уявити як геометричне місце безмежно близьких, послідовних положень лінії, що переміщується. Лінію, яка, переміщуючись творить поверхню, називають твірною, а елементи, що визначають характер переміщення, – напрямними. На рис. 10.10 показана конічна поверхня, у якої твірною є пряма лінія ***l***, а напрямними елементами – точка **S** та крива лінія **d**.

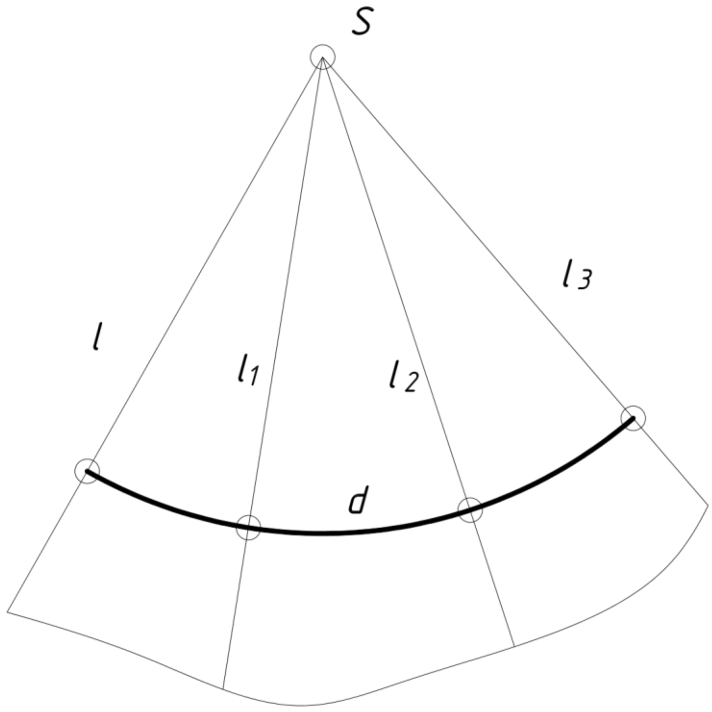


Рис. 10.10

Сукупність положень твірної ***l***, ... ***l₃*** утворить конічну відкриту поверхню з вершиною у точці **S**. Отже, для зображення даної поверхні досить провести твірну через вершину і деякі точки, вибрані на напрямній **d**.

Закрита конічна поверхня утвориться за тим же законом за умови, що напрямна крива лінія буде замкненою.

Усі поверхні можуть бути класифіковані за трьома ознаками залежно від: 1) виду твірної; 2) закону переміщення твірної; 3) здатності розгортатися, тобто збігатися усіма своїми точками з площиною без розривів і зморшок.

Залежно від виду твірної поверхні поділяють на лінійчасті й нелінійчасті. Лінійчастими називають поверхні, які можуть бути утворені прямою лінією, наприклад, циліндричні, конічні. Нелінійчастими називають такі поверхні, утворити які прямою лінією не можна, наприклад, сфера і багато інших. Залежно від закону переміщення твірної поверхні поділяють на багато різновидів, найголовнішими серед яких є поверхні обертання, гвинтові поверхні та поверхні з площиною паралелізму. Залежно від здатності розгортатися поверхні поділяють на розгортувані та нерозгортувані. Розгорнути нерозгортувані поверхні можна лише наближено. До розгортуваних поверхонь належать лише так звані торси, до нерозгортуваних – усі інші, які називають косими.

Торсом називають поверхню, утворену неперервним рухом прямолінійної твірної, яка в усіх своїх положеннях є дотичною до деякої просторової кривої напрямної. Криву напрямну, що визначає задавання торса, називають *ребром повороту*. Воно поділяє поверхню торса на дві порожнини. Якщо *ребро повороту* – плоска крива, торс перетворюється у площину. На рис. 10.11 зображена така поверхня, у якої твірні **t**, **t**$_1$, **t**$_2$, ... – дотичні до просторової кривої **m**.

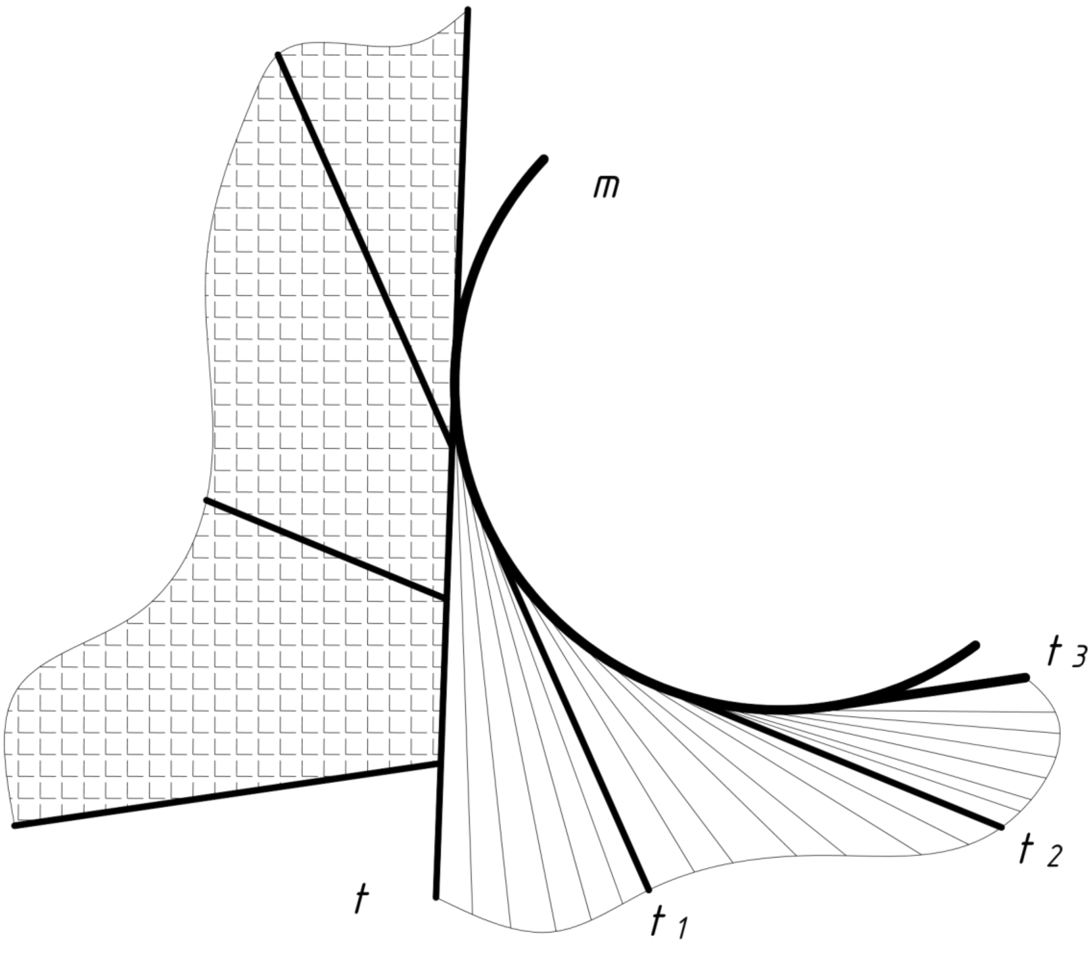


Рис. 10.11

Особливим випадком стосовно ребра повороту є конічна та циліндрична поверхні. Вони являють собою торси, ребро повороту яких вироджується в першому випадку у точку реальну, а в другому – у безмежно віддалену (рис. 10.12). Серед торсів, що мають велике розповсюдження в техніці, заслуговує на увагу гвинтовий, або розгортуваний гелісоїд, ребром повороту якого є гвинтова лінія. Поверхні з площиною паралелізму включають в себе циліндроїд, коноїд та гіперболічний параболоїд (коса площина). Ці поверхні утворюються переміщенням по двох напрямних лініях прямолінійної твірної так, що вона в кожен момент переміщення паралельна якійсь площині, яку називають площиною паралелізму. Три згадані поверхні з площиною паралелізму відрізняються складом двох напрямних ліній. Для циліндроїда – це дві криві, коноїда – крива та пряма, косої площини – дві прямі.

На рис. 10.13, 10.14 показано наочне зображення та епюр циліндроїда, утвореного переміщенням твірної **t** по напрямних **AC** і **DF** паралельно до площини паралелізму – горизонтально-проектуючої площини **α**. Для побудови проекцій циліндроїда насамперед проводимо паралельно до горизонтального сліду $\mathbf{h_\alpha}$ площини паралелізму **α** ряд прямих, які будуть горизонтальними проекціями твірної **t**, що рухається послідовно по напрямних **AC** і **DF** через відповідні точки. Фронтальні проекції положень твірної визначаємо на перетині ліній зв'язку з точок $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{E_1}$ з фронтальними проекціями $\mathbf{A_2C_2}$ і $\mathbf{D_2F_2}$ напрямних.

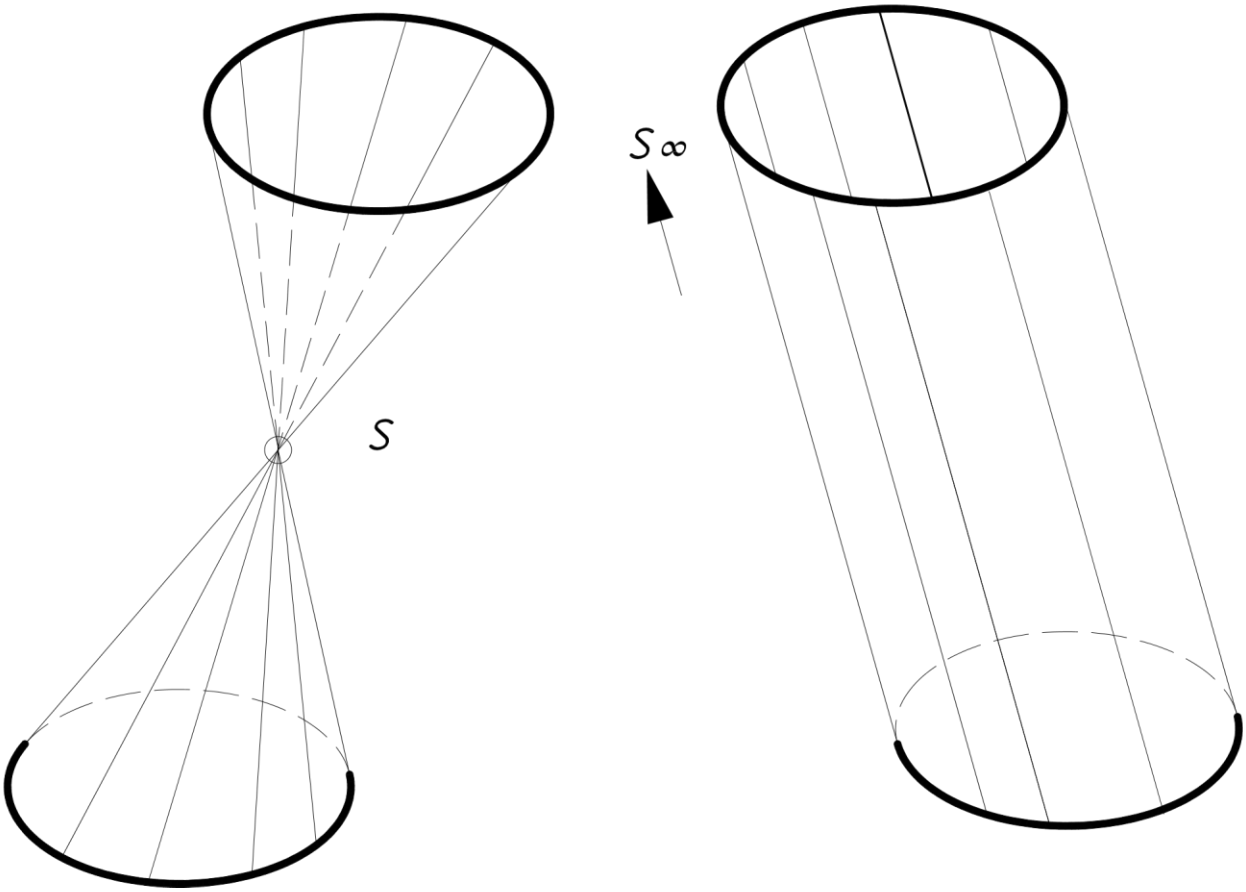


Рис. 10.12

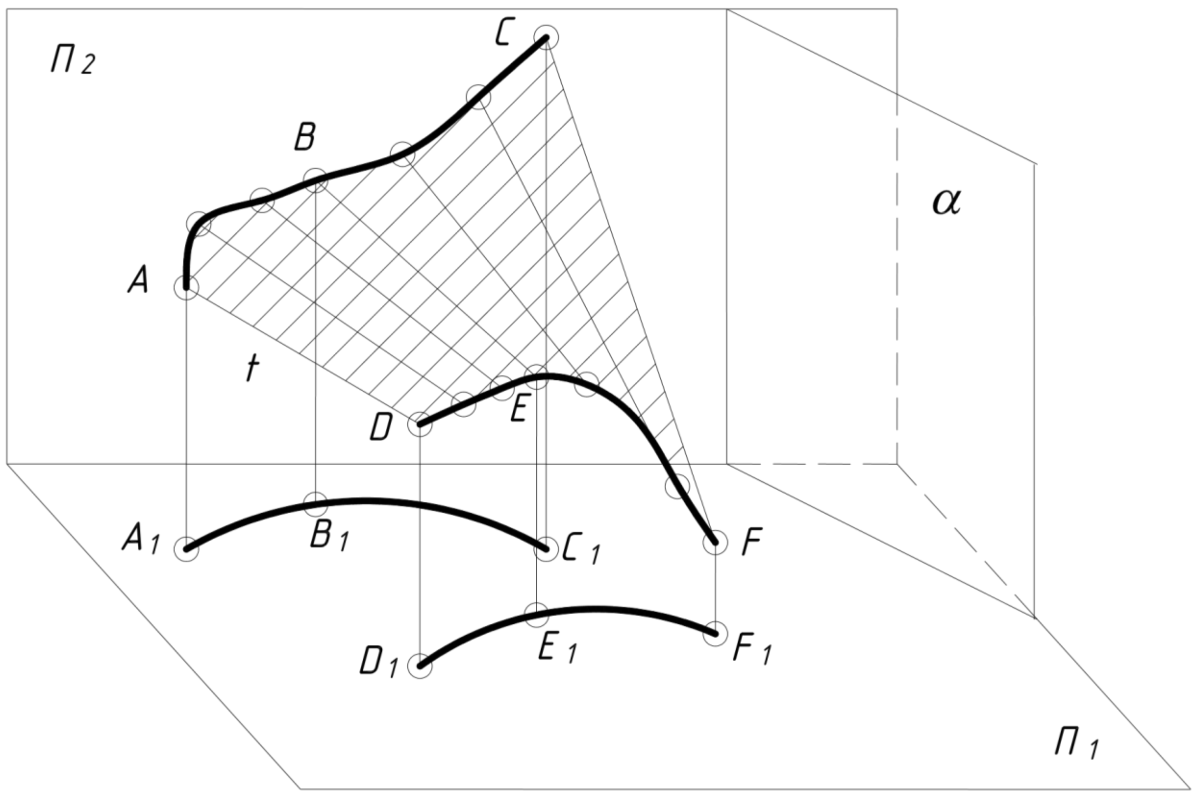


Рис. 10.13

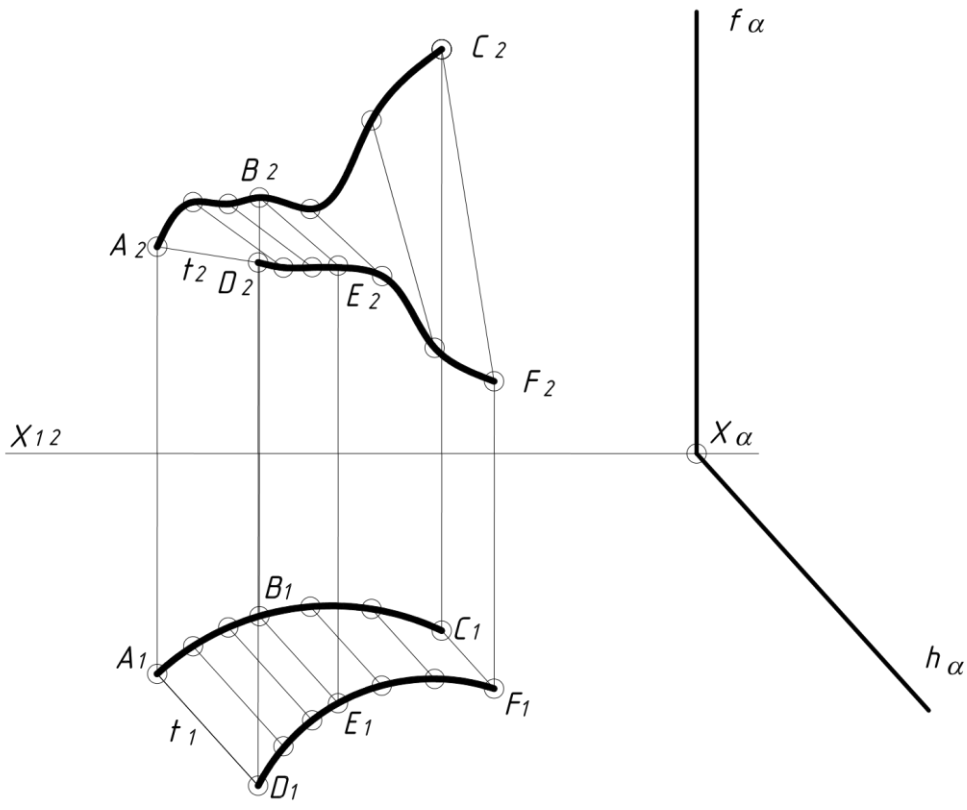


Рис. 10.14

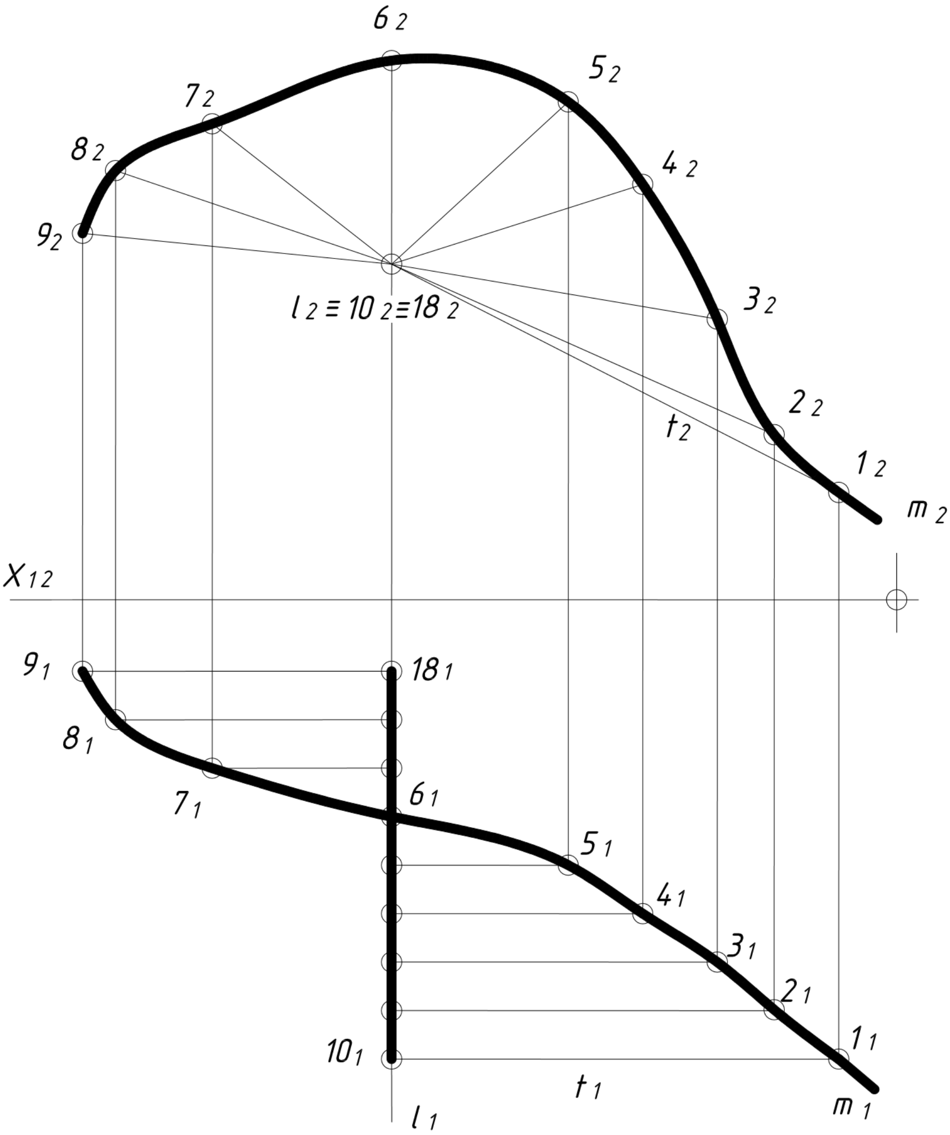


Рис. 10.15

На рис. 10.15 показано епюр коноїда, утвореного рухом твірної **t** по двох напрямних – кривій **m** і прямій ***l*** паралельно до площини проекцій **П2**. Тут площиною паралелізму служить фронтальна площина проекцій **П2**, а пряму ***l*** для зручності побудови вибрано перпендикулярно до площини проекцій **П2**. Проекції коноїда будуються аналогічно побудові проекцій циліндроїда.

Коса площина утворюється неперервним рухом прямої, яка перетинає під час руху дві мимобіжні прямі, залишаючись паралельно до площини паралелізму. Напрямні тут не паралельні до площини паралелізму. Косу площину називають також гіперболічним, або лінійчастим параболоїдом.

На рис. 10.16 показано епюр косої площини, утворення якої слід розглядати як результат переміщення прямолінійної твірної **t** по двох мимобіжних прямих **AB** і **CD** паралельно до площини паралелізму, якою є тут горизонтальна площина проекцій **П1**.

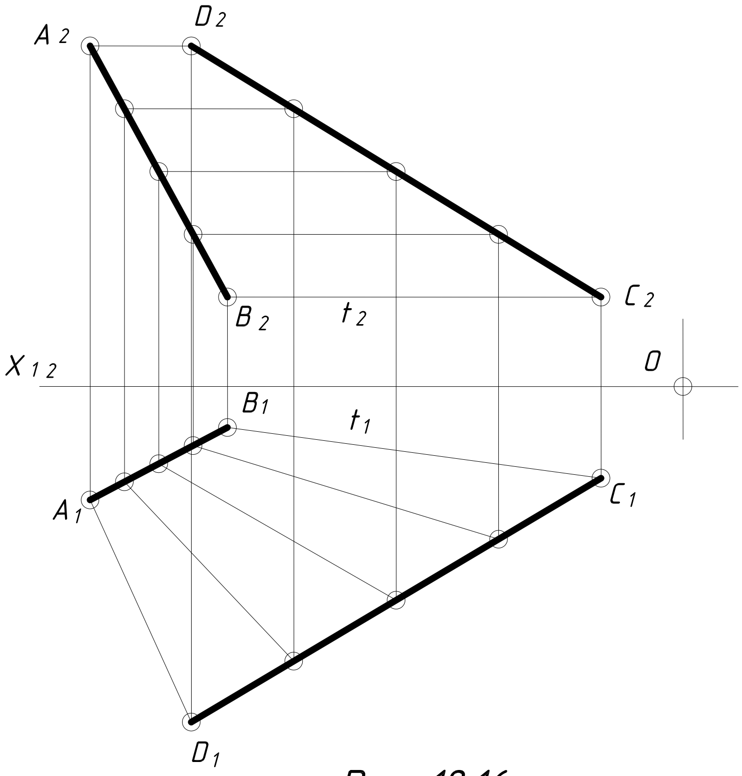


Рис. 10.16

Поверхні обертання утворюються обертальним рухом твірної навколо якоїсь осі. Залежно від виду твірної вони можуть бути лінійчастими і нелінійчастими. Головна властивість будь-якої поверхні обертання випливає із сутності обертального руху і полягає в тому, що усі лінії поверхні, які розташовані у площині, перпендикулярній до осі, являють собою кола (рис. 10.17).

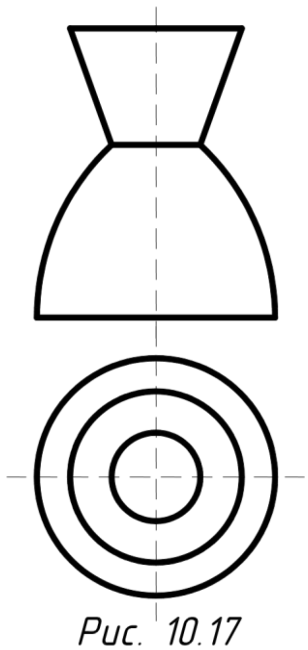


Рис. 10.17

Широке застосування у техніці мають циліндрична, конічна, сферична, торова поверхні обертання (рис. 10.18).

Поверхня тору утворюється обертанням навколо осі кола, розташованого в одній площині з віссю, яка не проходить через центр кола.

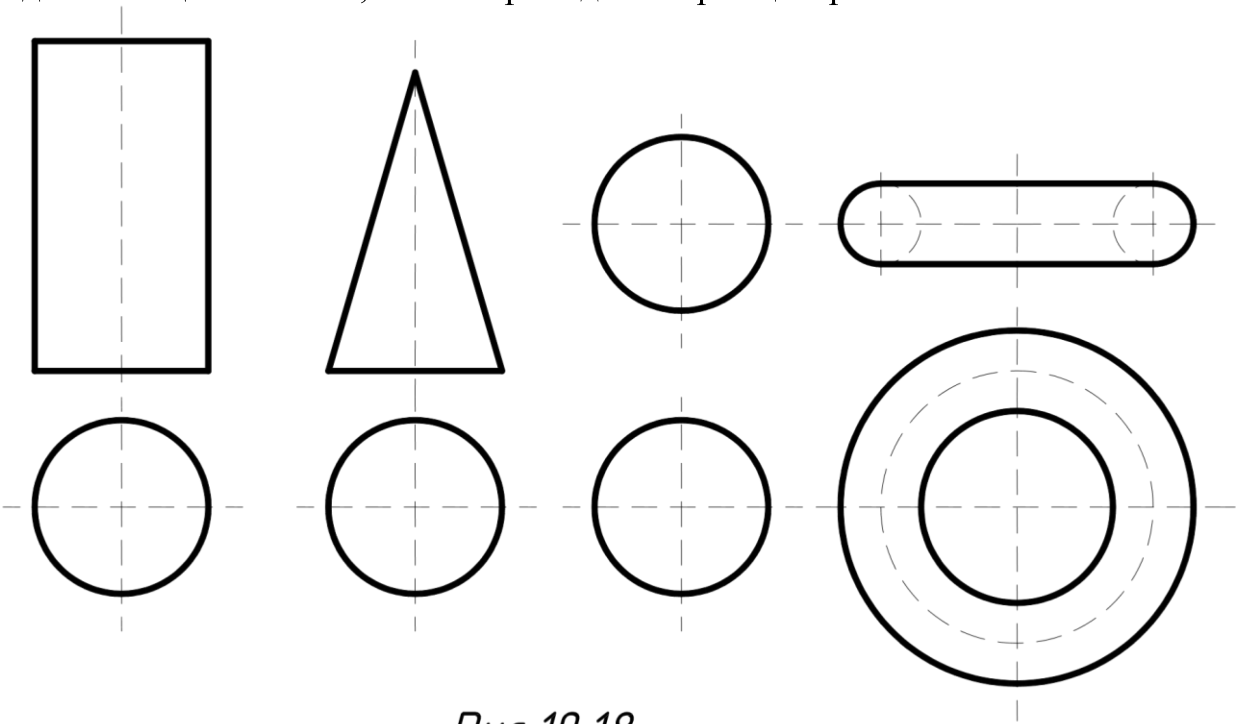


Рис. 10.18

Група поверхонь, що утворені обертанням кривих другого порядку, складається з різних еліпсоїдів, параболоїдів, гіперболоїдів. Останні можуть бути двополими при обертанні навколо дійсної осі гіперболи та однополими при обертанні наколо її уявної осі. Характерною особливістю однополого гіперболоїда є те, що він лінійчастий, тобто може утворюватись обертанням прямолінійної твірної. Однополий лінійчастий гіперболоїд як поверхня обертання споріднений з конічною та циліндричною поверхнями і відмінний від них лише тим, що твірна не перетинається з віссю обертання (рис. 10.19).

На рис. 10.19 точки **A** і **B** – кінці відрізка **AB** ковзають по двох заданих паралелях, обертаючись за певним законом навколо заданої осі ***l***.

Гвинтові поверхні, або так звані *гелікоїди*, утворюються гвинтовим переміщенням твірної. Залежно від напрямку переміщення твірної їх поділяють на праві й ліві. Дуже розповсюджені у техніці лінійчасті гелікоїди. До них належать *прямий гелікоїд, косий гелікоїд* і *торсовий гелікоїд*. Прямим гелікоїдом називають такий, у якого твірна при переміщенні залишається перепендикулярною до осі обертання (рис. 10.20). Косим гелікоїдом називають такий, у якого твірна розташована до осі під кутом, що не дорівнює 90° (рис. 10.21). У торсового гелікоїда напрямним елементом для твірної є гвинтова лінія (рис. 10.22).

Лінії каркаса поверхні прямого гелікоїда (рис. 10.20) паралельні до горизонтальної площини проекцій і перетинають гвинтову лінію і вісь гвинтової лінії.

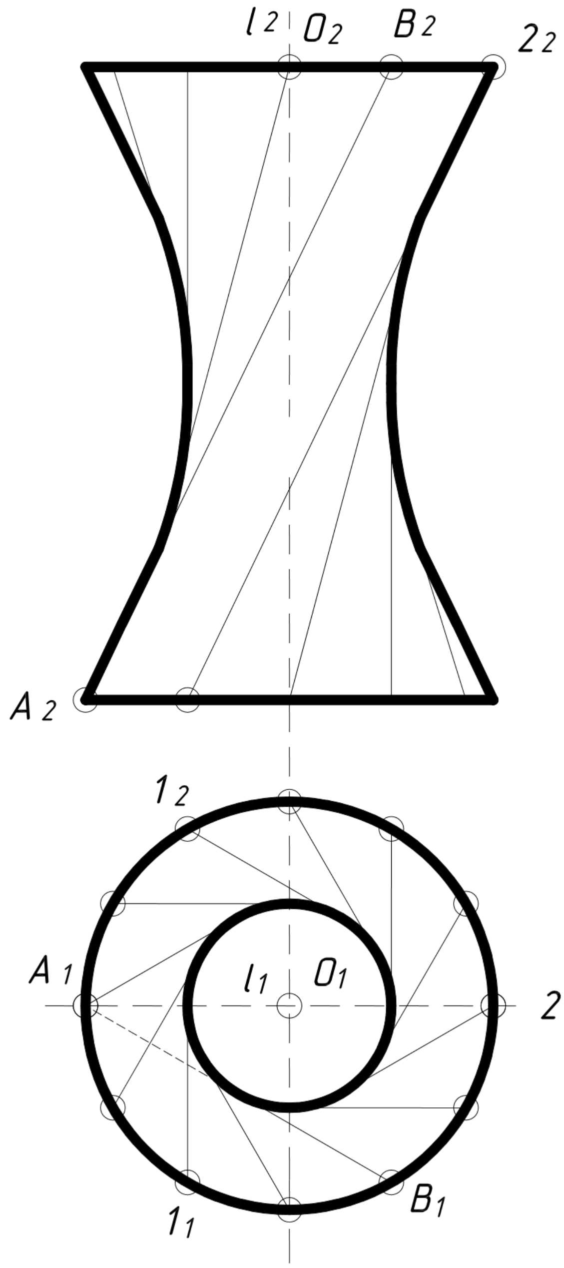


Рис. 10.19

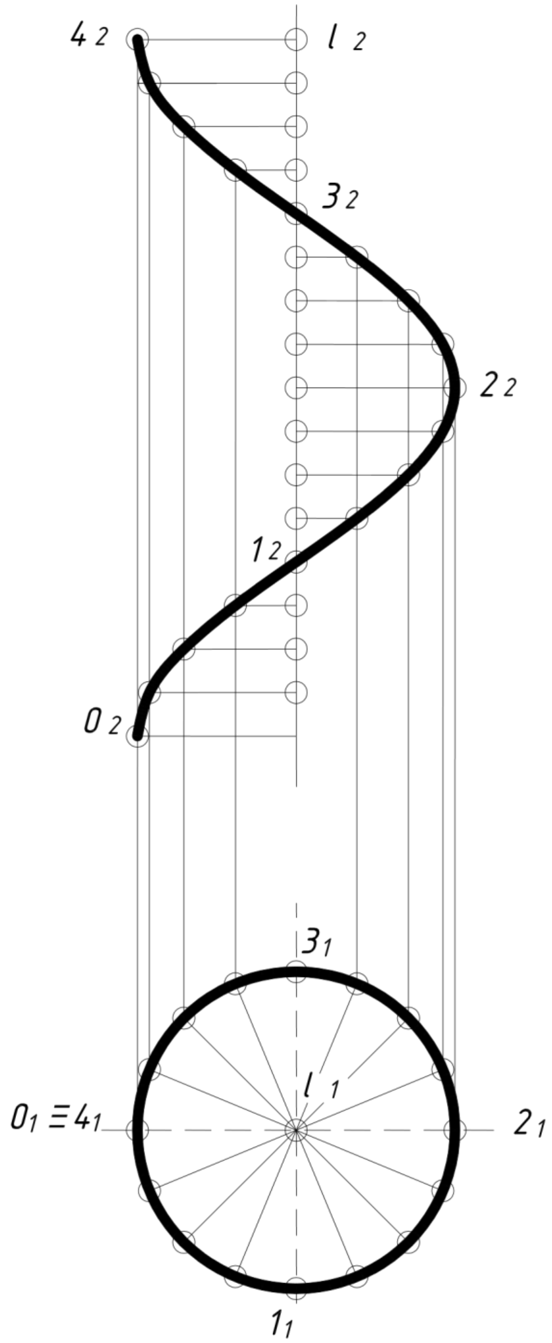


Рис. 10.20

Зображений на рис. 10.21 косий гелікоїд називають ще поверхнею з напрямним конусом, оскільки нескінченно віддалена напрямна замінюється напрямним конусом. Прямі лінії каркаса гелікоїда перетинають власні напрямні й паралельні відповідним твірним напрямного конуса. Для побудови довільної лінії каркаса, яка, наприклад, проходить через точку **A** гвинтової лінії, спочатку визначають твірну **BS** конуса, горизонтальна проекція якої збігається з проекцією лінії каркаса гелікоїда. Фронтальну проекцію лінії каркаса проводять через точку **A** паралельно твірній **BS** конуса.

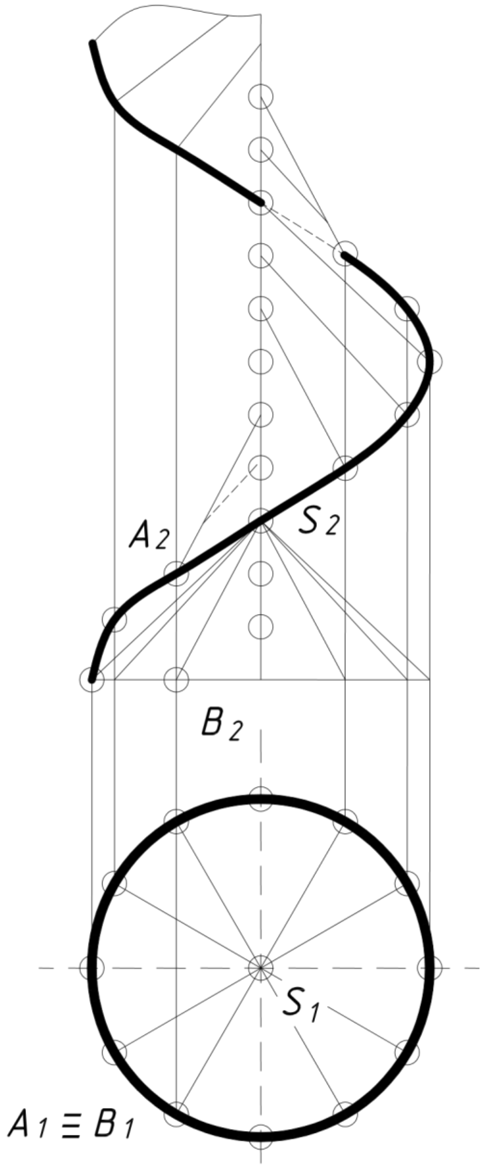


Рис. 10.21

Торсовий гелікоїд називають ще розгортним. Ребром звороту цієї поверхні є циліндрична гвинтова лінія (рис. 10.22). Поверхня розгортного гелікоїда перетинається з горизонтальною площиною по плоскій кривій – *евольвенті кола*. Таку властивість розгортного гелікоїда використовують для побудови його лінійчастого каркаса. Для цього спочатку будують евольвенту, яка відсікає на дотичних до кола відрізки, що дорівнюють довжині дуги кола між точкою дотику і початковою точкою **О**. Відрізки дотичних між точкою дотику і точкою евольвенти є горизонтальними проекціями каркаса поверхні. Фронтальну проекцію каркаса будують за вертикальною відповідністю.

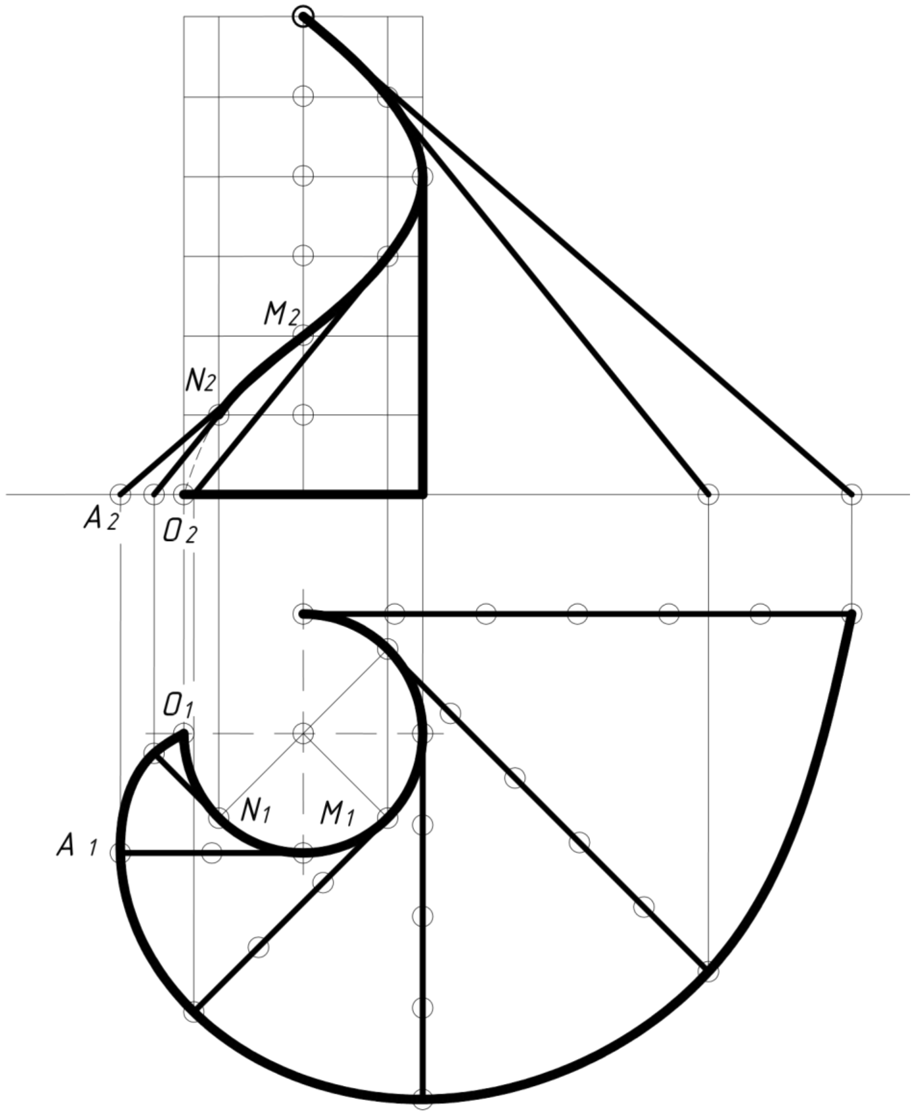


Рис. 10.22

Криві поверхні мають широке застосування в техніці, інженерних спорудах і конструкціях, архітектурі, дизайні, декоративно-прикладному мистецтві тощо. Наприклад, каркасні поверхні використовують при проектуванні корпусів кораблів, літаків, автомобілів та інших рухомих апаратів.

Зображення будь-якої поверхні на кресленні повинно нести у собі набір точок і ліній, що вичерпно визначають або ж графічно задають цю поверхню на кресленні. Існують три основні види такого задавання: визначником, каркасом та обрисом.

Визначником називають сукупність умов, що одночасно задають поверхню. Наприклад, для конічної поверхні визначник складається з точки і напрямної кривої. Для циліндричної – із прямолінійної твірної і напрямної кривої. Якщо конічну поверхню позначити через **Λ**, а циліндричну через **Ω**, то записати ці поверхні треба так: **Λ**(**S, n**), **Ω(*l*, m**). Визначник складається з двох частин, одну з яких називають *геометричною частиною визначника*, іншу – *алгоритмічною частиною визначника*. Геометрична частина визначника – це сукупність геометричних елементів, що визначають поверхню. Ця сукупність може включати в себе елементи, розташовані на поверхні, та елементи, розташовані поза нею. Алгоритмічна частина визначника – це, як правило, закон утворення поверхні. Він часто повністю окреслений її назвою. Наприклад, повний визначник сфери складається з прямої, що лежить у площині кола і проходить через його центр, та напису «Сфера». Пряма і коло – геометрична частина визначника, а напис – його алгоритмічна частина (рис. 10.23).

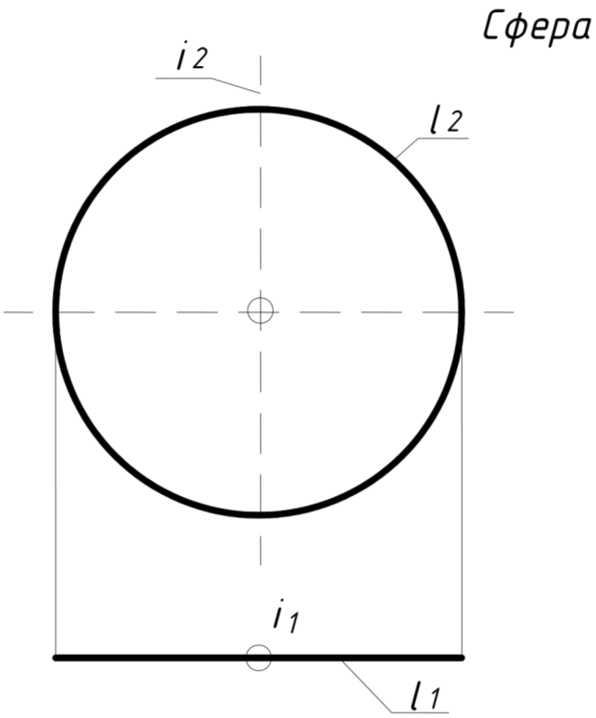


Рис. 10.23

Каркасом називають сукупність точок та ліній, вибраних на поверхні так, щоб існувала можливість точного уявлення про форму поверхні (рис. 10.24). Каркаси можуть бути точковими і лінійними. Їх застосовують переважно для зображення на кресленні незакономірних поверхонь.

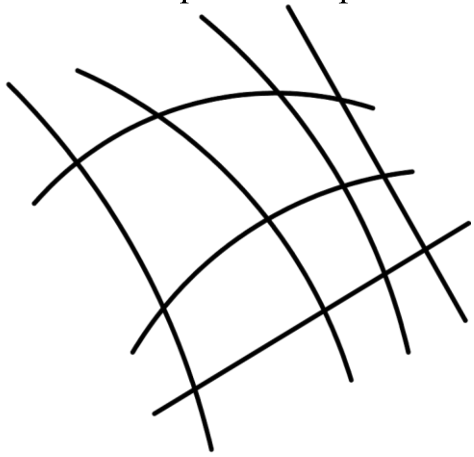


Рис. 10.24

Обрисом є лінія на полі проекцій, отримана перетином цього поля з поверхнею (циліндричною або призматичною) проектуючих променів, що обгортають об’єкт, який проектується (рис. 10.25). Зазначена проектуюча променева поверхня створює на поверхні об’єкта, який проектують, лінію дотику, яку називають *контуром*. Отже, *обрис* є проекцією контуру.

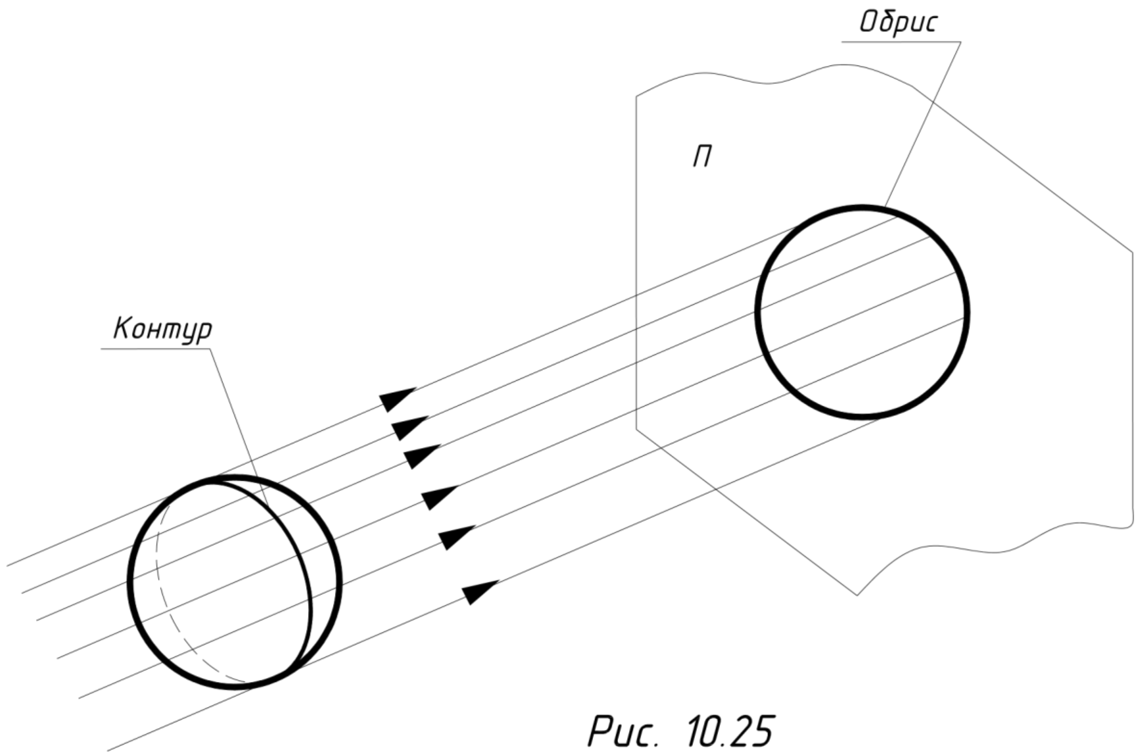


Рис. 10.25

На кресленнях задані поверхні:

- визначником – коса площина (рис. 10.26);

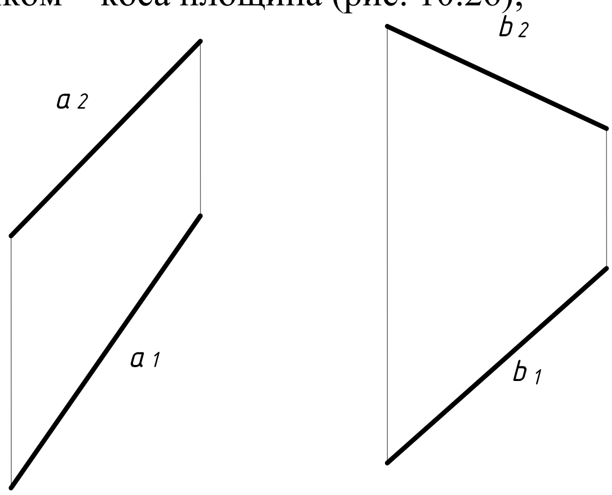


Рис. 10.26

- каркасом – циліндр (рис. 10.27);

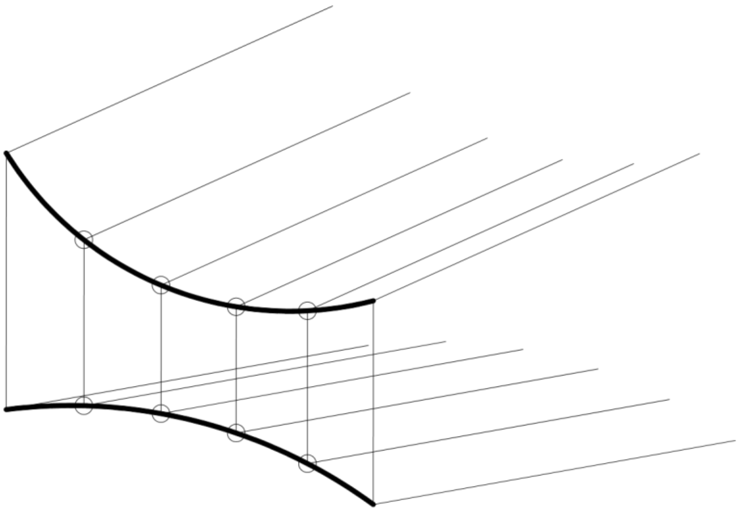


Рис. 10.27

- обрисом – сфера (рис. 10.28).

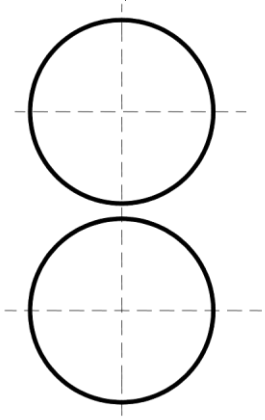


Рис. 10.28

Необхідно зазначити, що при зображенні поверхонь необхідно дотримуватися умов інцидентності поверхні з точкою і лінією. Задані умови інцидентності (належності) реалізуються тут аналогічно до уже відомих умов інцидентності точки і прямої з площиною. Вони можуть бути сформульовані так:

- точка належить поверхні, якщо вона належить лінії, розташованій на поверхні;
- лінія належить поверхні, якщо вона проходить через ряд точок, що знаходяться на поверхні.

10.3. Геометричні тіла

Тілом називають частину простору, обмеженого замкненою поверхнею. Дуже часто поверхня, що обмежує тіло, складається з набору поверхонь різних видів. У цьому випадку тіла є комбінованими. Тіла, у яких поверхня обмежена і складається лише з плоских елементів (граней), називають многогранниками. Побудова проекцій тіл на кресленні – це побудова проекцій контурних ліній цих тіл при заданому напрямку проектування.

Найчастіше доводиться виконувати проекції (вигляди) головних геометричних тіл, до яких належать: конус, циліндр, піраміда, призма, куля, тор. Усі елементи тіл на кресленні координують відносно площин, паралельних площинам проекцій і безпосередньо зв’язаних з даним тілом. Дотримуються не зовнішньої, а внутрішньої координації.

Для циліндра (рис. 10.29) система **X, Y, Z** є координатною системою площин прекцій і є системою зовнішньої координації тіла. Осі внутрішньої координації зображують штрихпунктирними (осьовими) лініями. Їх на кресленні літерами не позначають (рис. 10.30).

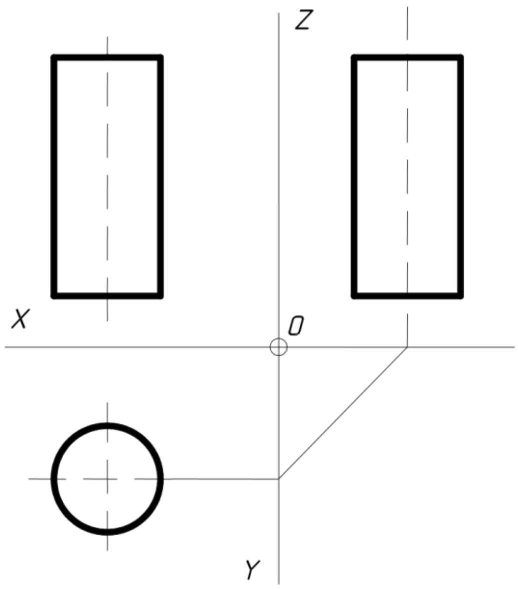


Рис. 10.29

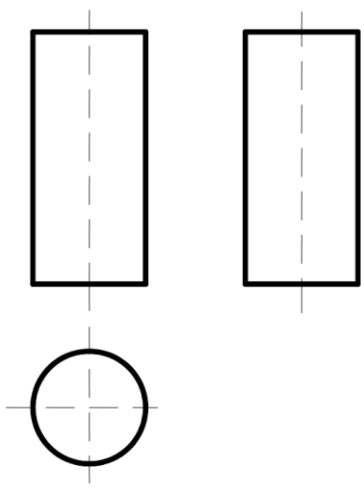


Рис. 10.30

Для симетричних тіл площини внутрішньої координації є площинами їх симетрії. Для тіл, у яких симетрія неповна або відсутня, площини координації (осі) «прив’язують» до якогось елемента тіла (точки, ребра, грані) (рис. 10.31). Внутрішня координація є зручною не лише при побудові проекцій, але й при виготовленні деталей.

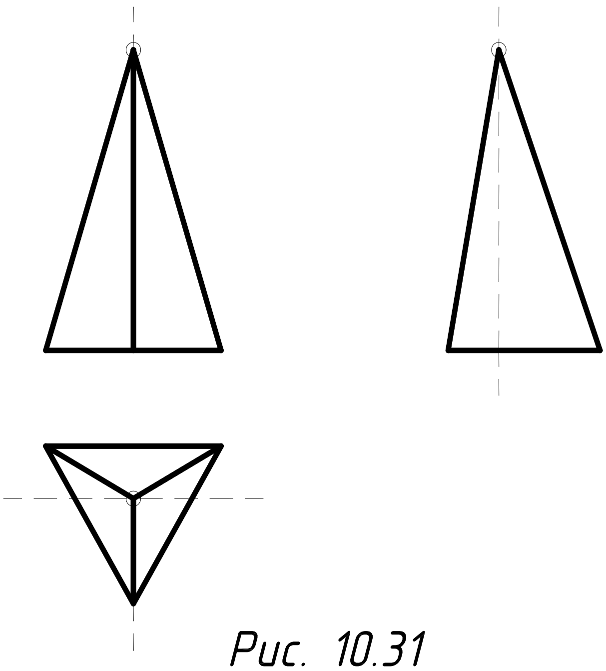


Рис. 10.31

10.4. Належність точок і ліній поверхням геометричних тіл

При побудові проекцій тіл необхідно вміти будувати три проекції якої завгодно точки або лінії, розташованих на поверхні тіла. На заданому конусі (рис. 10.32) треба побудувати проекції якоїсь точки **A** на його поверхні. Цю задачу вирішують за допомогою прямої **s1**(**s**$_1$**1**$_1$**, s**$_2$**1**$_2$), яку проводять на поверхні конуса. Довільну точку **A** позначають на цій прямій. Таке ж рішення, але для іншої точки **B**(**B**$_1$, **B**$_2$) подано за допомогою лінії **a**(**a**$_1$, **a**$_2$), проведеної на поверхні конуса паралельно до його основи.

Аналогічно вирішується задача відносно піраміди (рис. 10.33) з тією різницею, що можливостей для проведення простішої лінії на поверхні тут більше. Усі проекції ліній на поверхні піраміди є прямими. Їх зручно вибирати за допоміжні лінії. У прямого циліндра та прямої призми обмежуючі поверхні проектуються у лінії і це зручно для відшукування проекцій точок та ліній.

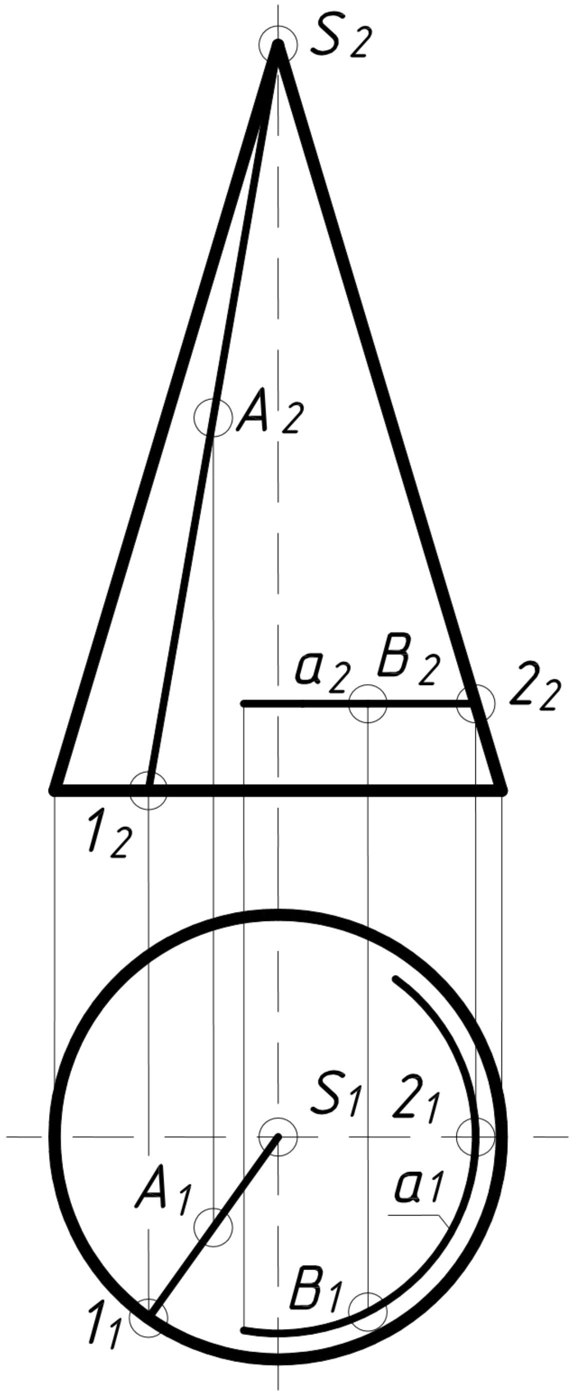


Рис. 10.32

На рис. 10.34 за фронтальною **A**$_2$ проекцією точки **A**, що розташована на поверхні кулі, побудована за допомогою кола **a**(**a**$_1$, **a**$_2$) горизонтальна **A**$_1$ проекція, проведеного через **A**(**A**$_2$). На рис. 10.35 за фронтальною проекцією **B**$_2$ точки **B** і горизонтальною проекцією **C**$_1$ точки **C**, що лежать на поверхні конуса, відшукані горизонтальна **B**$_1$ та фронтальна **C**$_2$ проекції за допомогою твірної конуса **s1** та кола радіуса **s**$_1$**2**$_1$.

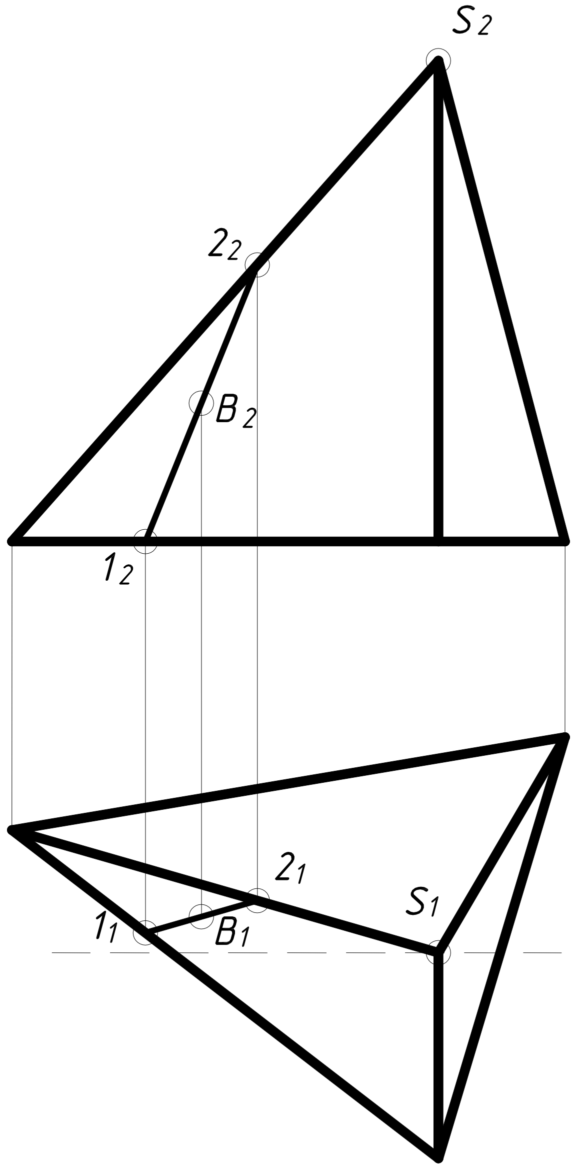


Рис. 10.33

В особливих випадках, коли точка розташована на обрисній лінії або на лінії, що збігається із віссю симетрії, одна, а інколи і дві проекції точки визначають без допоміжних ліній (рис. 10.36). Горизонтальна $\mathbf{A_1}$ та профільна $\mathbf{A_3}$ проекції точки **A** відшукані без допоміжних побудов. Усі три проекції твірної **s1** конуса є на кресленні. На тій же підставі відшукують недостаючі проекції $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$ точки **B** (рис. 10.36), а також визначають проекційний зв'язок між трьома проекціями точок **C**, **D**, **E** (рис. 10.37).

Точка **C** лежить на головному фронтальному меридіані, який на горизонтальній проекції збігається з горизонтальною віссю. Точка **D** лежить на екваторі, а точка **E** – на головному профільному меридіані.

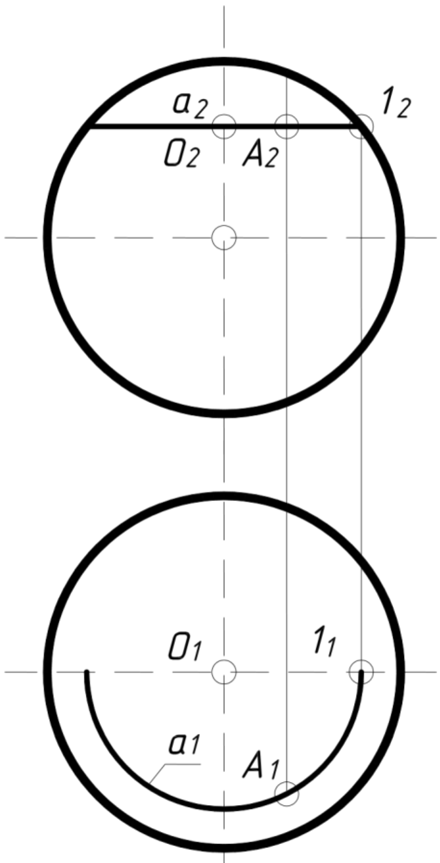


Рис. 10.34

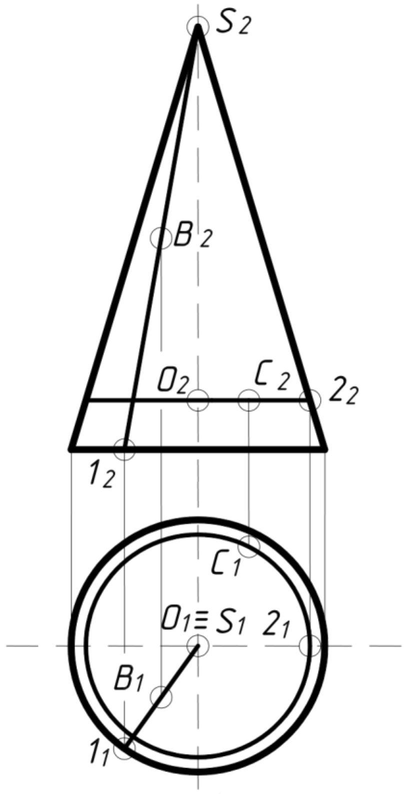


Рис. 10.35

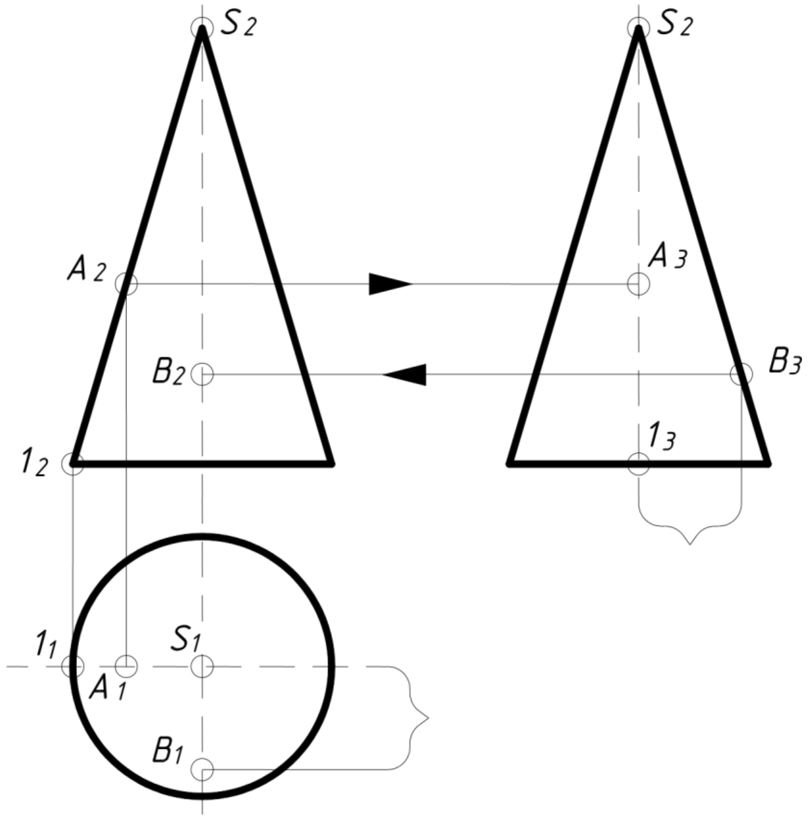


Рис. 10.36

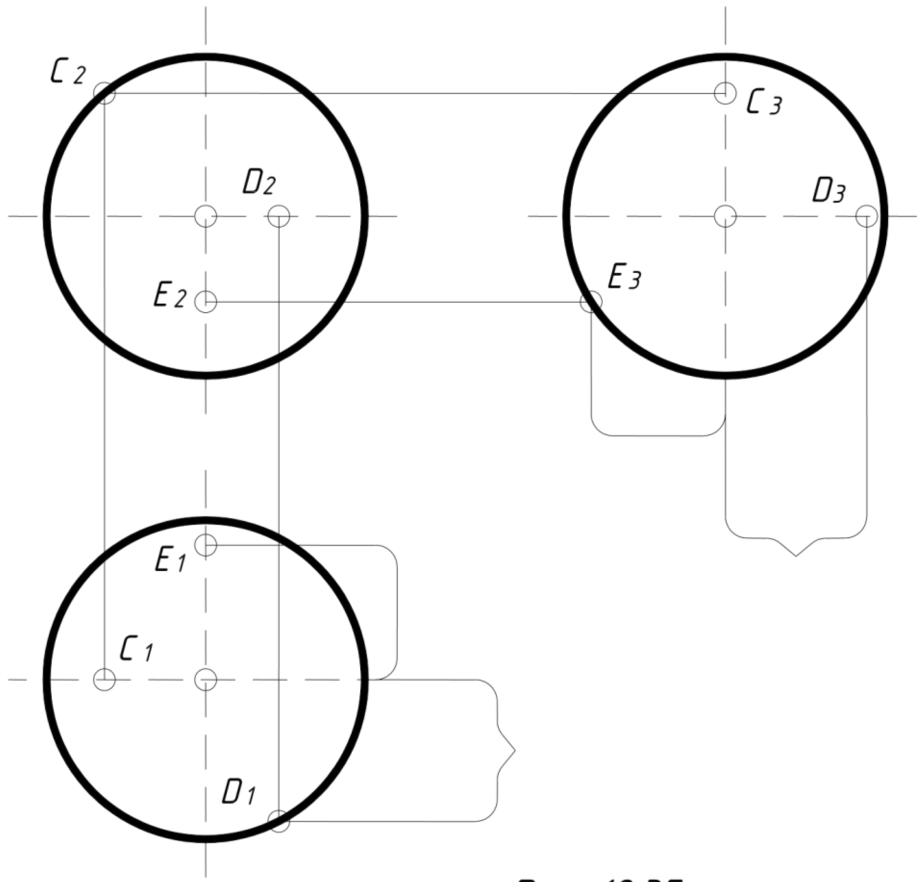


Рис. 10.37

Необхідно мати на увазі, що проекції деяких ділянок заданих ліній визначають також без допоміжних побудов, якщо вони розташовані особливим способом відносно площин проекцій. На рис. 10.38 лінія **a**(**a**1, **a**2, **a**3) розташована на поверхні сфери паралельно горизонтальній площині проекцій і зображена на ній у вигляді кола концентричного з обрисом, а на фронтальній та профільній проекціях – паралельними до відповідних осей прямими. Лінія **b**(**b**1, **b**2, **b**3) паралельна фронтальній площині проекцій, бо її фронтальна проекція – дуга кола концентричного з обрисом сфери. Лінія **a**(**a**1, **a**2, **a**3**)** на рис. 10.39 знаходиться на поверхні конуса і проектується на горизонтальну площину проекцій **П**1 у коло, а на дві інші площини проекцій – у прямі.

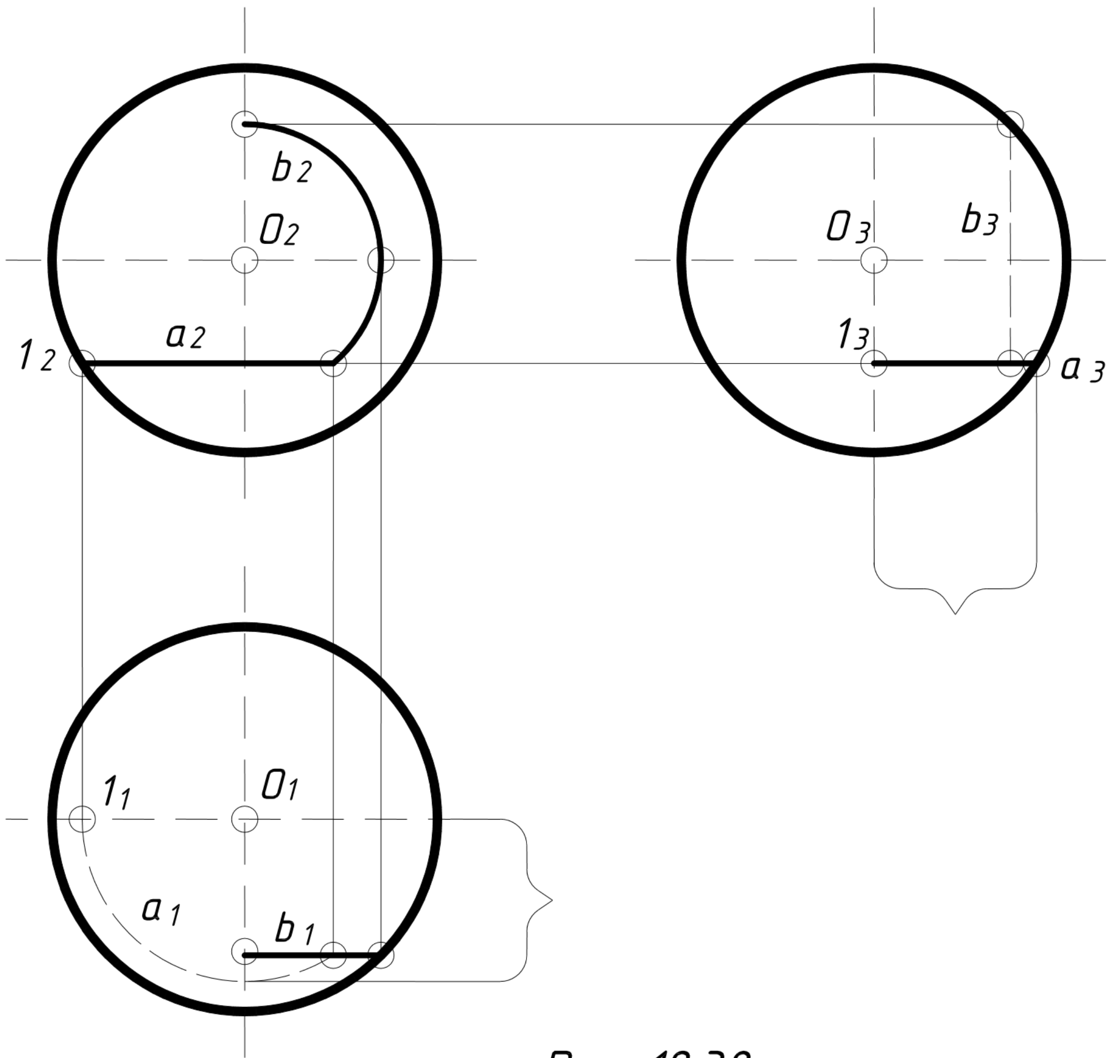


Рис. 10.38

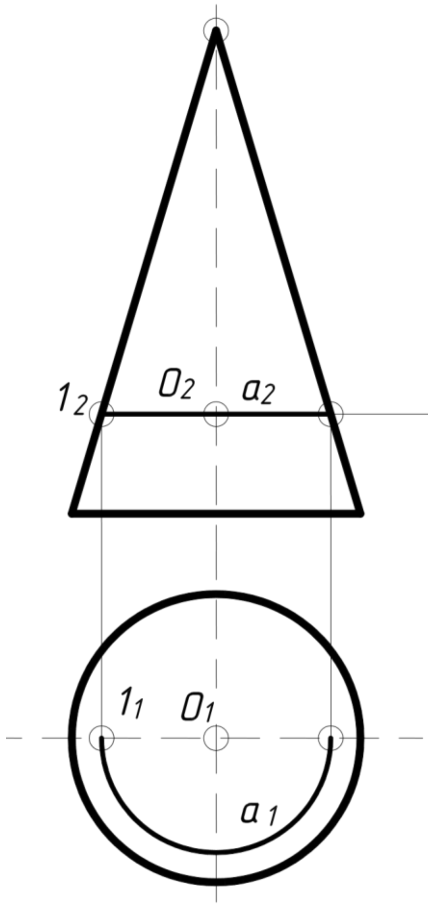


Рис. 10.39

Запитання для самоперевірки

1. У чому суть побудови проекцій кривих ліній?
2. Які точки на кривій лінії називаються характерними?
3. Чим різняться між собою плоскі та просторові криві лінії?
4. Як утворюються циліндрична і конічна гвинтові лінії?
5. Як слід тлумачити поняття поверхні у нарисній геометрії?
6. Що таке напрямна і твірна поверхні?
7. Що означає «задати поверхню на епюрі»?
8. Що називається визначником поверхні?
9. Які поверхні називають лінійчастими і які нелінійчастими?
10. Назвіть розгорні лінійчасті поверхні і дайте їм визначення?
11. Які поверхні називають нерозгортними?
12. Як утворюються на епюрі гранні поверхні та поверхні многогранника?
13. Що називається геометричним тілом?
14. Як визначають точки і прямі на поверхні геометричного тіла?

11. ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНОЮ

При перерізі поверхонь будь-якою площиною утворюється плоска фігура, яку називають *перерізом*. При перерізі многогранника фігурою перерізу є многокутник, який лежить у січній площині. Вершинами многокутника – фігури перерізу – є точки перетину ребер многогранника з січною площиною, а сторонами – лінії перетину цієї площини з гранями многогранника. Виходячи з цього, переріз многогранника можна побудувати за двома способами:

а) «способом ребер», який полягає у знаходженні вершини многокутника;

б) «способом граней», суть якого зводиться до побудови сторін многокутника.

У першому випадку визначають точки перетину кожного ребра многогранника з січною площиною, що відповідає відомій позиційній задачі знаходження точки перетину прямої з площиною.

У другому випадку знаходять лінію перетину кожної грані многогранника з січною площиною, що означає побудову лінії перетину двох площин.
Розглянемо побудову перерізів гранних та кривих поверхонь.

11.1. Переріз призми площиною загального положення

На рис. 11.1 тригранна призма перетинається площиною **α(ΔABC)**.

Очевидно, що лінією перетину є трикутник. Його побудову зручно звести до визначення його вершин як точок перетину ребер з площиною **α(ΔABC)**. Для побудови точок перетину через бокові ребра **a**, **b**, **c** проводять допоміжні фронтально-проектуючі площини **β**, **γ**, **δ** (їх слідипроекції f_β, f_γ, f_δ), будують прямі перетину **KL**, **DF**, **EM** допоміжних площин із площиною **α(ΔABC)** і зафіксовують точки **1**(1_1, 1_2), **2**(2_1, 2_2), **3**(3_1, 3_2) перетину ребер із січною площиною **α(ΔABC).** Ці точки з'єднують між собою за умови дотримання видимості. Побудову лінії **KL**(K_1L_1, K_2L_2) здійснюють продовженням A_2B_2 та A_2C_2 до перетину у точках K_2 та L_2 зі слідом-проекцією f_β. Потім у проекційному зв'язку знаходять K_1 на A_1C_1 **та** L_1 на A_1B_1 (на продовженні). Тепер $1_1 = K_1L_1 \cap a_1$ та 1_2 належить a_2 – горизонтальна і фронтальна проекції вершини **1** фігури перетину. Вершини **2** і **3** знаходять аналогічно за допомогою площин **γ**(f_γ), **δ**(f_δ).

Таким загальним прийомом визначають лінії перетину площиною поверхні піраміди, конуса та циліндра. При цьому, як і в розглянутому прикладі, визначають точки зустрічі ребер піраміди, твірних конуса та циліндра із січною площиною.

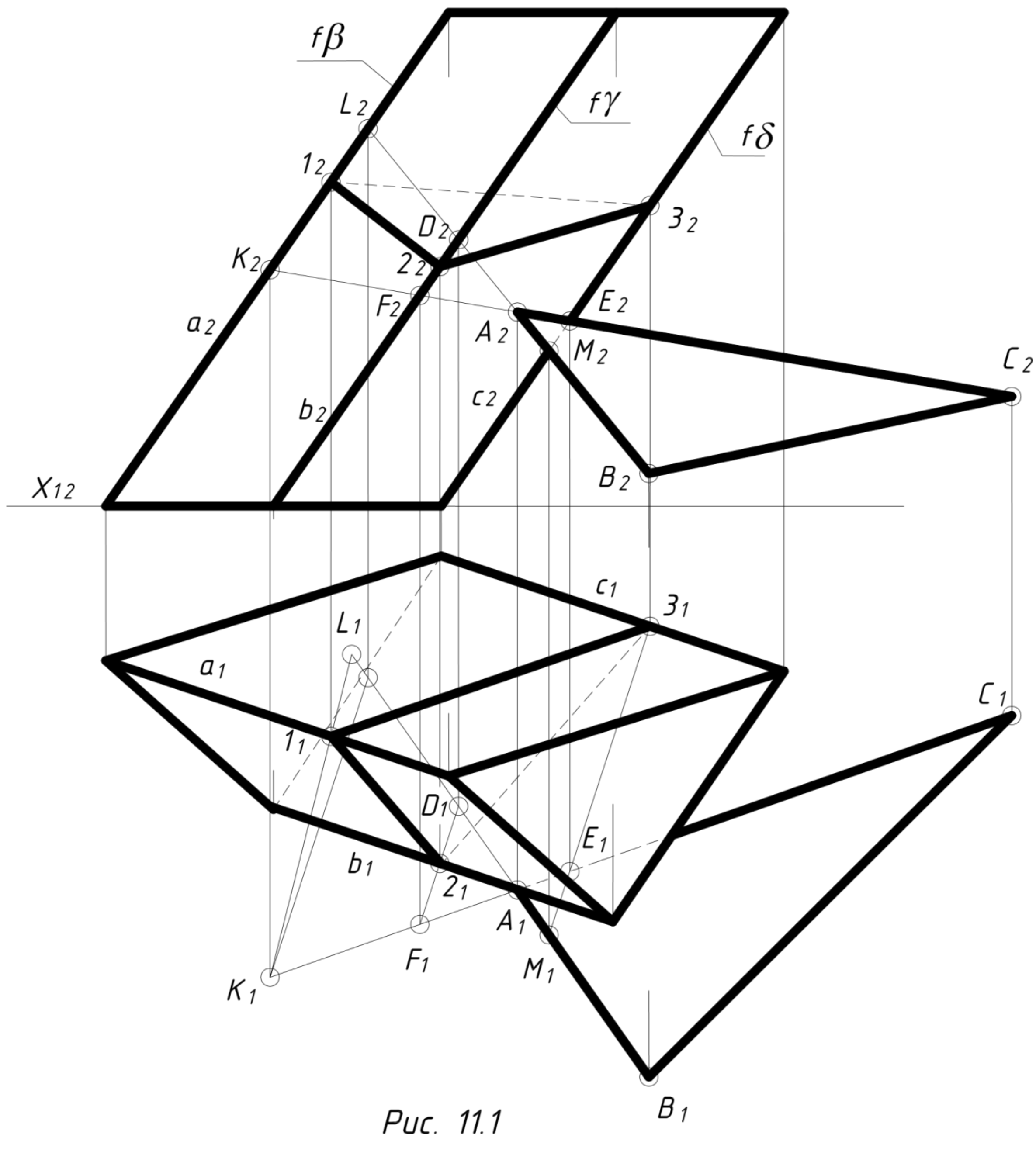


Рис. 11.1

Необхідно пам’ятати, що серед нанесених на кресленні твірних чи ребер треба мати ті, що дають можливість зафіксувати так звані опорні точки. Опорними точками лінії перетину називають такі, що мають особливе розташування відносно площин проекцій або займають особливі місця на кривій. Цими точками є найближчі та найвіддаленіші від площин проекцій (екстремальні) точки, а також точки, розташовані на обрисах (точки видимості).

11.2. Переріз піраміди площиною загального положення

Розглянемо побудову проекцій фігури перерізу піраміди **SABC (**рис. 11.2) площиною загального положення **α**, що задана слідами.

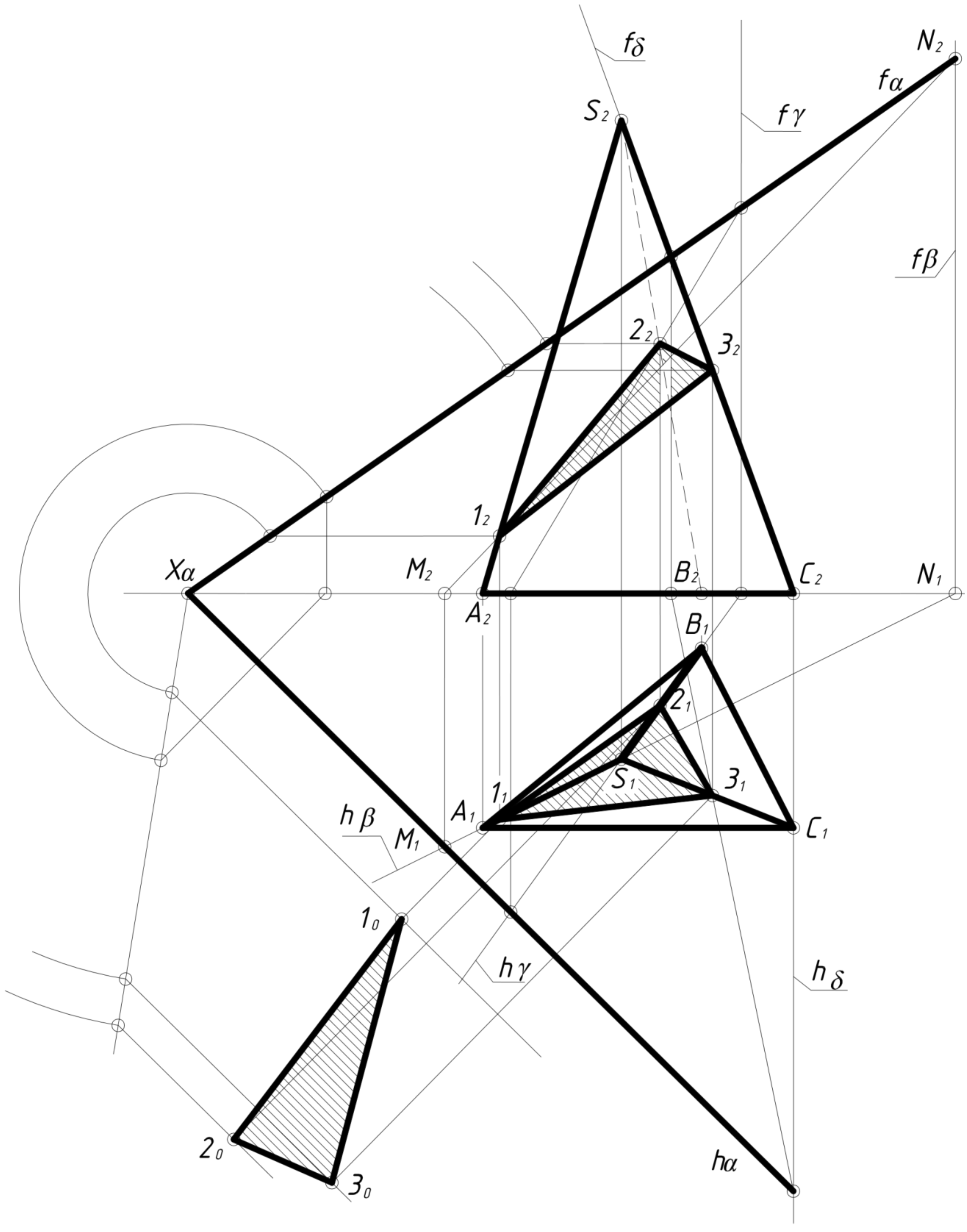


Рис. 11.2

Для побудови проекцій фігури перерізу визначають точки перетину ребер піраміди з площиною **α,** тобто застосовують «спосіб ребер», вводячи допоміжні січні площини **β**, **γ** і **δ**. Для знаходження точки **1**, у якій ребро **SA** перетинає площину **α**, через ребро **SA** проводять горизонтальнопроектуючу площину **β** (сліди $\mathbf{h_β}$ і $\mathbf{f_β}$), яка перетинається з площиною **α** по прямій **MN**. Шукану точку $\mathbf{1_2}$

знаходять на перетині відрізка $\mathbf{M_2N_2}$ з фронтальною проекцією $\mathbf{S_2A_2}$ ребра **SA**. Точку $\mathbf{1_1}$ знаходять на перетині лінії зв'язку з проекцією $\mathbf{S_1A_1}$. Аналогічно, щоб побудувати точки **2** і **3**, у яких ребра **SB** і **SC** перетинають площину **α**, проводять через ребро **SB** горизонтально-проектуючу площину **γ** (сліди $\mathbf{h_\gamma}$ і $\mathbf{f_\gamma}$) і через ребро **SC** – фронтально-проектуючу площину **δ** (сліди $\mathbf{h_\delta}$ і $\mathbf{f_\delta}$). За допомогою площини **β** спочатку знаходять точку $\mathbf{2_2}$, по ній – точку $\mathbf{2_1}$; за допомогою площини **γ** – спочатку точку $\mathbf{3_1}$, а потім точку $\mathbf{3_2}$. Послідовним сполученням прямими точок $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{2_1}$, $\mathbf{3_1}$ отримують горизонтальну проекцію перерізу, а точок $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$ – фронтальну проекцію. Дійсну величину фігури перерізу будують суміщенням площини **α**, у якій лежить трикутник **1-2-3**, з площиною $\mathbf{П_1}$.

11.3. Переріз циліндра площиною загального положення

На рис. 11.3 зображено прямий коловий циліндр, який стоїть на горизонтальній площині проекцій. Необхідно побудувати переріз циліндра площиною загального положення **α**.

Січна площина похила до циліндра, перетинає усі його твірні й тому в перерізі буде еліпс. Горизонтальна проекція еліпса проектується в коло, яке збігається з горизонтальною проекцією циліндра. Фронтальна проекція перерізу – еліпс, для побудови якого слід визначити велику й малі осі.

Велика вісь еліпса лежить на лінії найбільшого нахилу площини **α**. Цією лінією буде лінія перетину площини **α** з горизонтально-проектуючою площиною **β**, проведеною через вісь циліндра перпендикулярно до площини **α**. На епюрі слід $\mathbf{h_\beta}$ буде перпендикулярним до сліду $\mathbf{h_\alpha}$. Площина **β** перетинає площину **α** по прямій **MN**, циліндр – по твірних **а** і **в** у точках **1** і **2**. Таким чином, великою віссю еліпса буде відрізок **1-2** ($\mathbf{1_12_1}$ і $\mathbf{1_22_2}$) на прямій **MN**. Мала вісь еліпса лежатиме на лінії перетину горизонтальнопроектуючої площини **γ** з площиною **α**. Площина **γ** перпендикулярна до площини **β** і проходить через вісь циліндра. Площина **γ** перетинається з площиною **α** по горизонталі $\mathbf{h(h_1,h_2)}$, а з циліндром – по твірних **c** і **d** у точках **3** і **4**. Отже, малою віссю еліпса є відрізок **3-4** ($\mathbf{3_14_1}$ і $\mathbf{3_24_2}$). Ще одна допоміжна площина **δ**, окрім **β** і **γ**, проведена через контурні твірні **e** і **q**. Ця площина буде паралельною до фронтальної площини проекцій, тобто фронтальною і перетне площину **α** по фронталі $\mathbf{f(f_1, f_2)}$, а циліндр – по крайній лівій **e** і правій **q** твірних у точках відповідно **5** і **6**. Ці точки є межею видимої та невидимої частин фігури перерізу. Для визначення точок перетину осьових твірних **l** і **k** з площиною **α** через ці твірні проводять фронтальні площини **ε** і **ζ**, які перетнуться з твірними **l** і **k** у точках **7** і **8**.

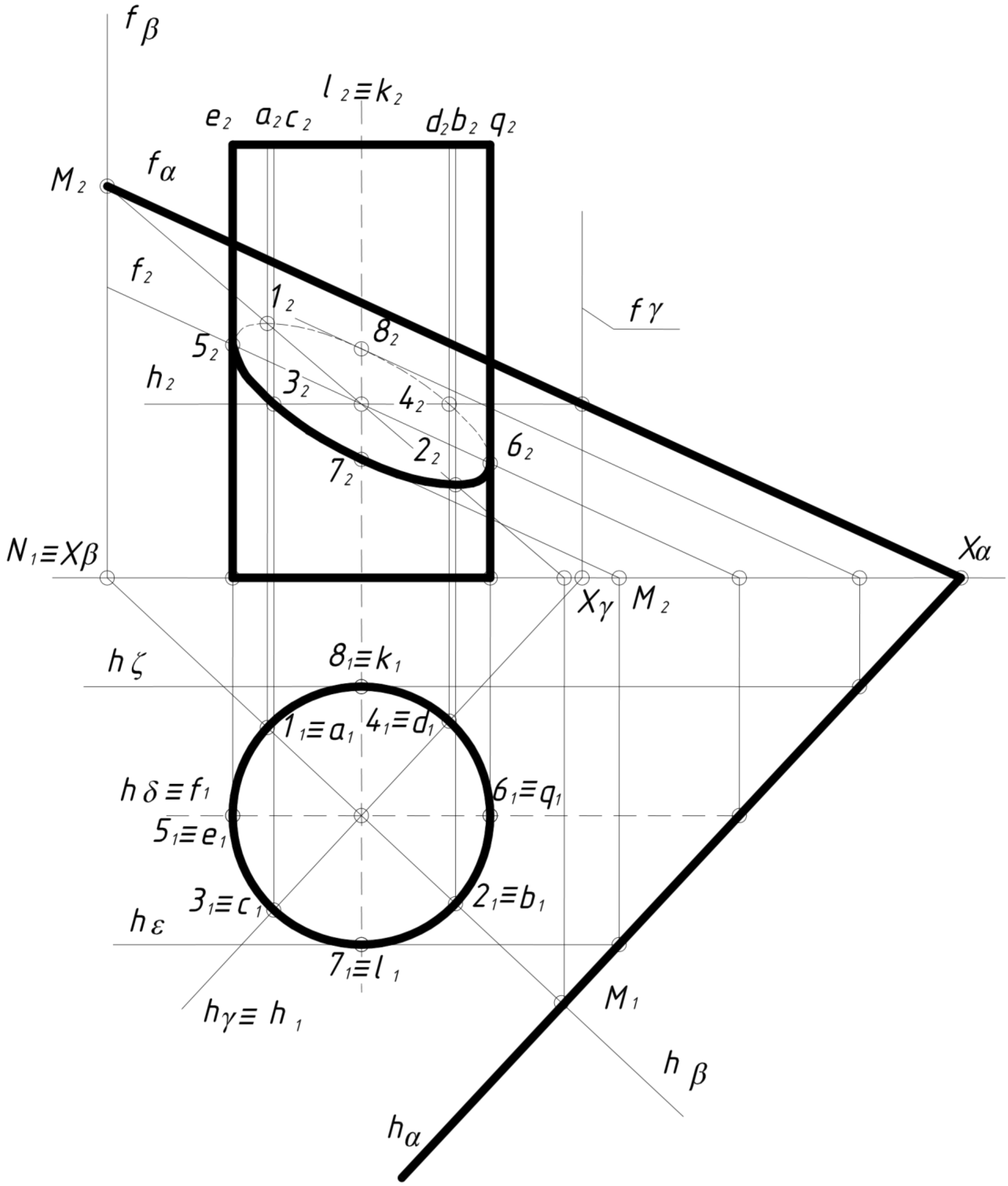


Рис. 11.3

11.4. Переріз конуса площиною загального положення

На рис. 11.4 показано побудову проекцій фігури перерізу прямого колового конуса площиною загального положення, що задана горизонталлю **AC** і фронталлю **AB**, і натуральну величину фігури перерізу.

Побудову виконують за допомогою способу заміни площин проекцій. Вводять додаткову площину проекцій $\mathbf{П_4}$, яку вибирають так, щоб вона була перпендикулярною не лише до площини проекцій $\mathbf{П_1}$, але й до січної площини. Нову вісь $\mathbf{X_{14}}$ розміщують перпендикулярно до проекції $\mathbf{A_1C_1}$. На площині $\mathbf{П_4}$

січна площина проектується у пряму, на якій розміщена проекція фігури перерізу (відрізок **$1_4 2_4$**). Так визначають велику вісь еліпса, по якому конус перерізається заданою площиною. У точці **O_4**, що ділить відрізок **$1_4 2_4$** навпіл, знаходиться проекція центра еліпса. За допомогою площини **$f\beta_4$**, що проведена перпендикулярно до осі конуса, знаходять малу вісь еліпса (на рис. 11.4 проведено півколо, у якому відрізок **$O_4 3_4^{\cup}$** дорівнює половині малої осі еліпса). За точками **O_4**, **1_4**, **2_4** знаходять проекції **O_1**, **1_1**, **2_1**, а потім проекції **O_2**, **1_2**, **2_2**, які знаходяться на тій же відстані від осі **X_{12}**, що й проекції точок **O_4**, **1_4**, **2_4** від осі **X_{14}**. Точка **2_2** – найвища на фронтальній проекції, точка **1_2** – найнижча з точок еліпса – фронтальної проекції фігури перерізу.

Для визначення розміщення точок **5_2** і **6_2**, що на фронтальній проекції розділяють «видиму» й «невидиму» частини еліпса будують проекції **S_4D_4** і **S_4F_4** твірних **SD** і **SF**, знаходять точки **5_4** і **6_4**, а за ними – проекції **5_1** і **6_1**, а потім – **5_2** і **6_2**.

Мала вісь еліпса проектується на площину **Π_1** у свою натуральну величину (відрізок **$3_1 4_1$**), розміщуючись на горизонтальній січній площині, і є також малою віссю еліпса – горизонтальної проекції фігури перерізу. Натуральний вигляд цієї фігури перерізу отримують побудовою еліпса за його великою віссю (**$1_4 2_4 = 1_0 2_0$**) і малою віссю (**$3_4 4_4 = 3_0 4_0$**).

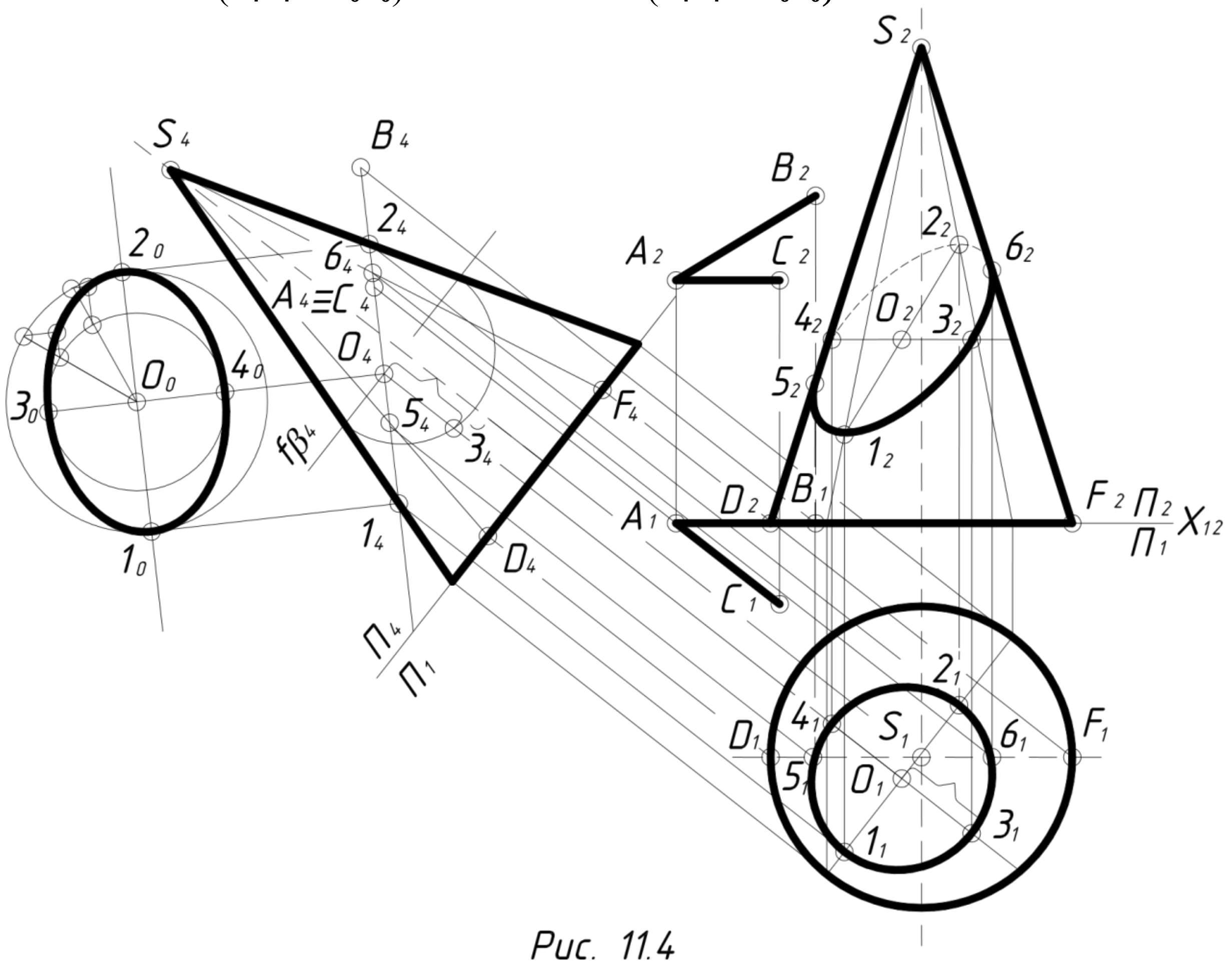


Рис. 11.4

11.5. Переріз геометричного тіла проектуючою площиною

Побудова проекції лінії перетину у цьому випадку здійснюється простіше, бо одна із проекцій лінії збігається зі слідом-проекцією площини.

На рис. 11.5 зображено похилий циліндр, що перетинається фронтально-проектуючою площиною **α(f$_α$)**. Після нанесення кількох твірних циліндра на сліді січної площини фіксують фронтальні проекції **A$_2$, B$_2$, C$_2$, D$_2$, E$_2$, F$_2$** точок зустрічі твірних з площиною, а потім і горизонтальні проекції **A$_1$, B$_1$, C$_1$, D$_1$, E$_1$, F$_1$**.

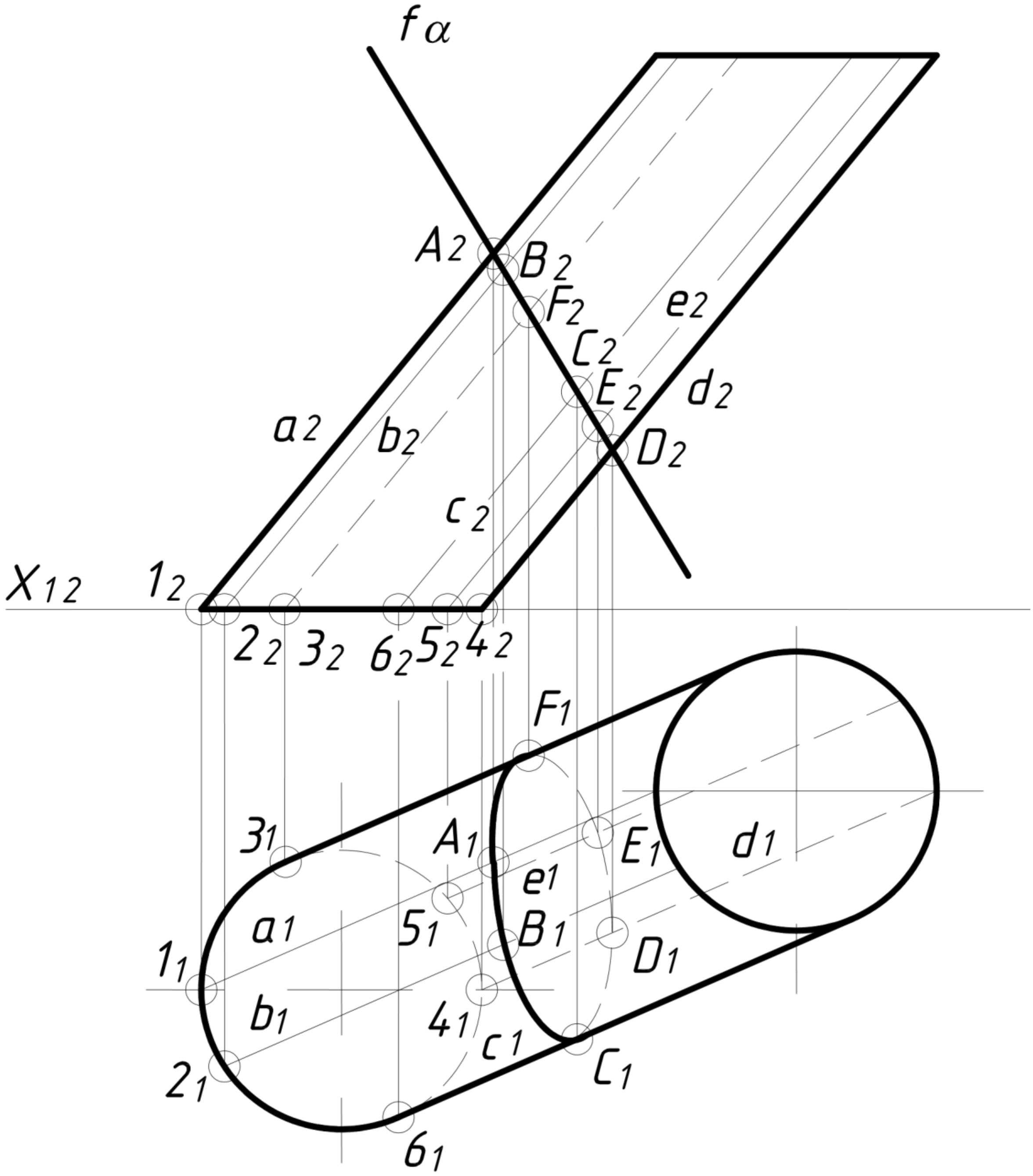


Рис. 11.5

На рис. 11.6 зображено побудову лінії перетину поверхні піраміди горизонтально-проектуючою площиною.

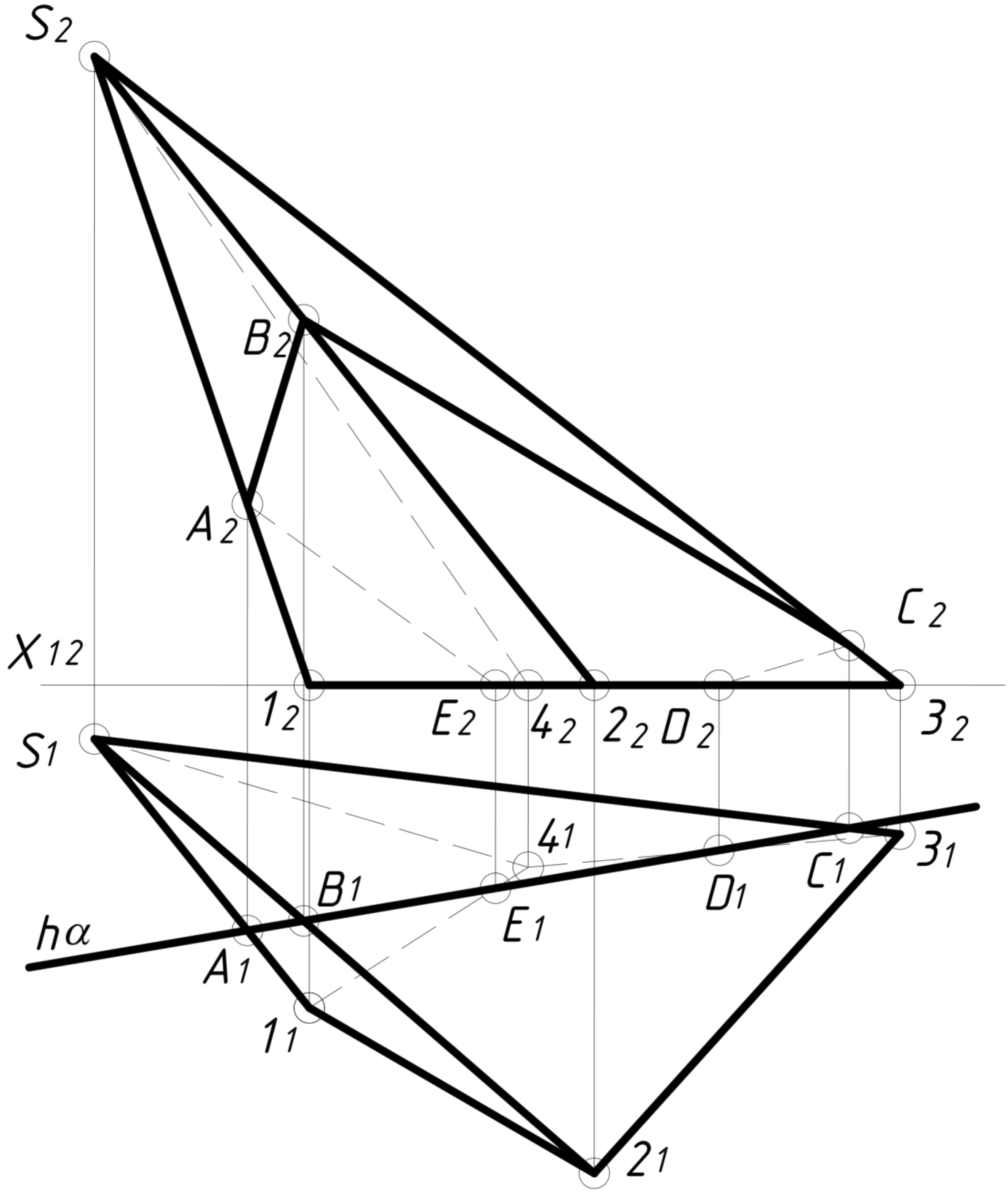


Рис. 11.6

Фронтальною проекцією лінії перетину кулі горизонтальнопроектуючою площиною є еліпс. Його будують за осями або за окремими точками (рис. 11.7).

При побудові еліпса необхідно мати на увазі, що його мала вісь за величиною є фронтальною проекцією діаметра кола перетину, а велика вісь є діаметром цього кола. Якщо лінію перетину будувати за допомогою окремих точок, тоді кожну з точок визначають за допомогою січних площин. На рис. 11.7 точки **K**(**K_1**, **K_2**), **L**(**L_1**, **L_2**), **C**(**C_1**, **C_2**) і **E**(**E_1**, **E_2**) будують за допомогою фронтальних січних площин **β**(**h_β**) і **γ**(**h_γ**).

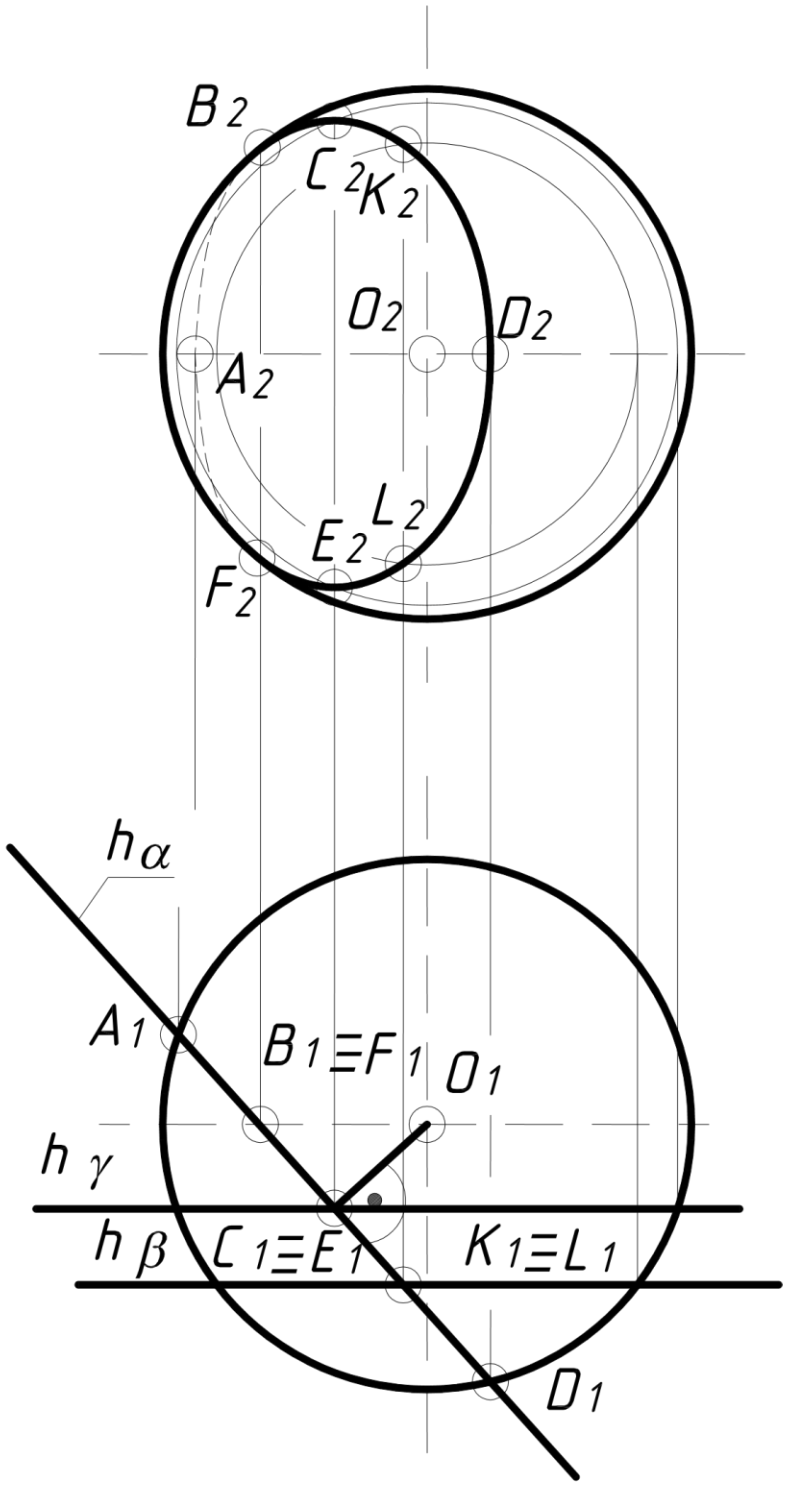


Рис. 11.7

11.6. Конічні перерізи

Конічними називають перерізи, утворені при перерізі поверхні конуса другого порядку січною площиною. До них належать такі плоскі фігури: трикутник, коло, еліпс, парабола, гіпербола, а також їх вироджені зображення – точка (вершина конуса) і подвійна пряма (твірна). Та чи інша фігура перерізу залежить від кута нахилу січної площини до осі прямого колового конуса і кута нахилу твірної конуса до його осі.

Отже, якщо січна площина **α(f$_\alpha$)** перпендикулярна до осі конуса, то у перерізі буде коло (рис. 11.8). Від перерізу **β(f$_\beta$)** утворюється еліпс за умови, що площина нахилена під кутом **φ>ψ**. Площина **γ(f$_\gamma$)**, що проведена через вершину конуса і не перетинає його основу, утворює в перерізі точку. Площина **δ(f$_\delta$)**, дотична до поверхні конуса, перерізує його по двійній прямій – дотичній (рис. 11.9). Якщо площина **ε(f$_\varepsilon$)** нахилена до осі конуса під кутом **φ=ψ**, тобто пралельна до твірної конуса, то у перерізі буде парабола (рис. 11.9). Якщо ж площина **η(f$_\eta$)** нахилена під кутом **φ≤0**, то перерізом буде гіпербола (рис. 11.10). Площина **λ(f$_\lambda$)**, проведена через вершину конуса під кутом **φ<ψ**, перерізує конус по двох твірних, тобто по трикутнику (рис. 11.10).

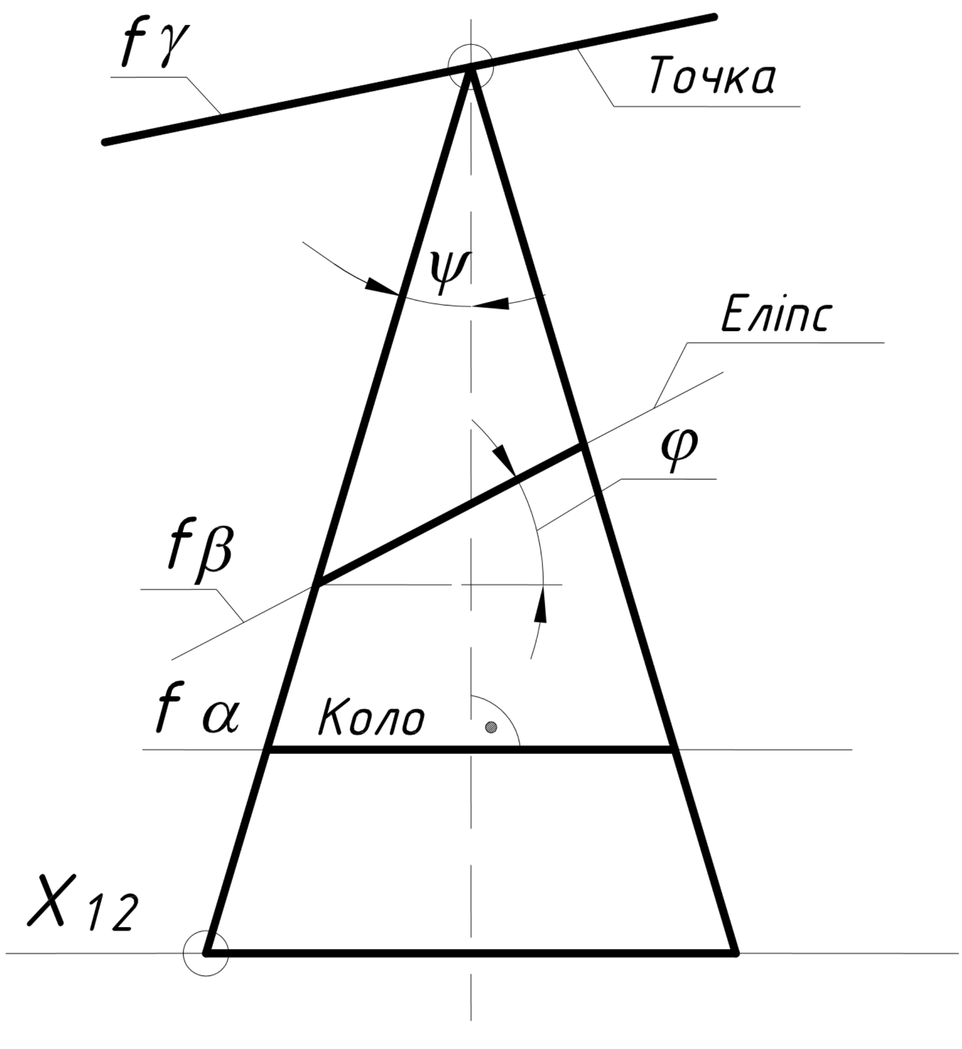


Рис. 11.8

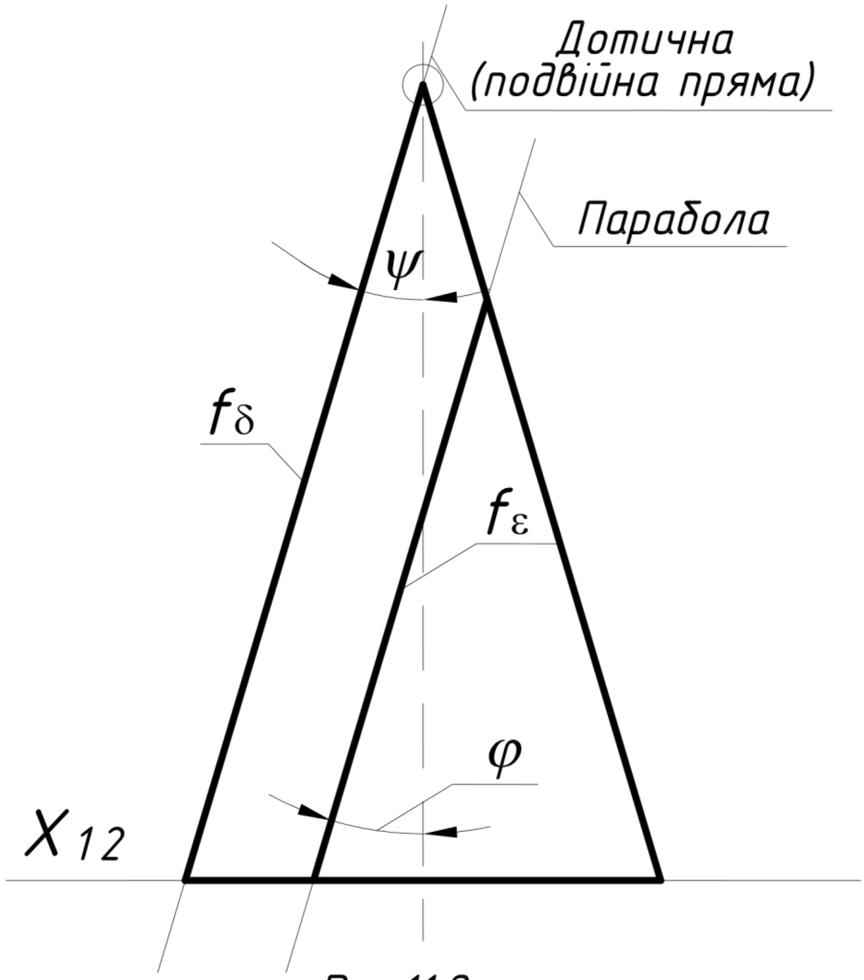


Рис. 11.9

Величина будь-якого конічного перерізу може бути побудована за допомогою двох координат. Зупинимося на визначенні величини малої та великої осей еліптичного розрізу.

На рис. 11.11 дано прямий конус обертання і його січну площину **α(f$_\alpha$)**. Очевидно, що великою віссю еліпса перерізу буде відрізок сліду площини, що розташований між обрисовими твірними конуса. Мала вісь проходить через середину великої й у даному випадку перпендикулярна площині **П$_2$**. Щоб визначити величину малої осі досить через точку середини великої осі провести допоміжну січну площину **β(f$_\beta$)** і побудувати коло радіусом **О1**. Відрізок **АВ(А$_1$, В$_1$)** лінії перетину площин **α** та **β** – мала вісь.

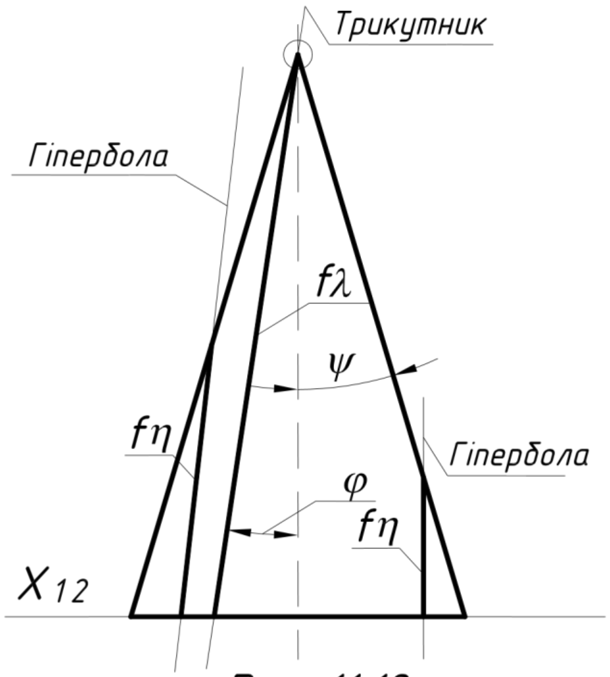


Рис. 11.10

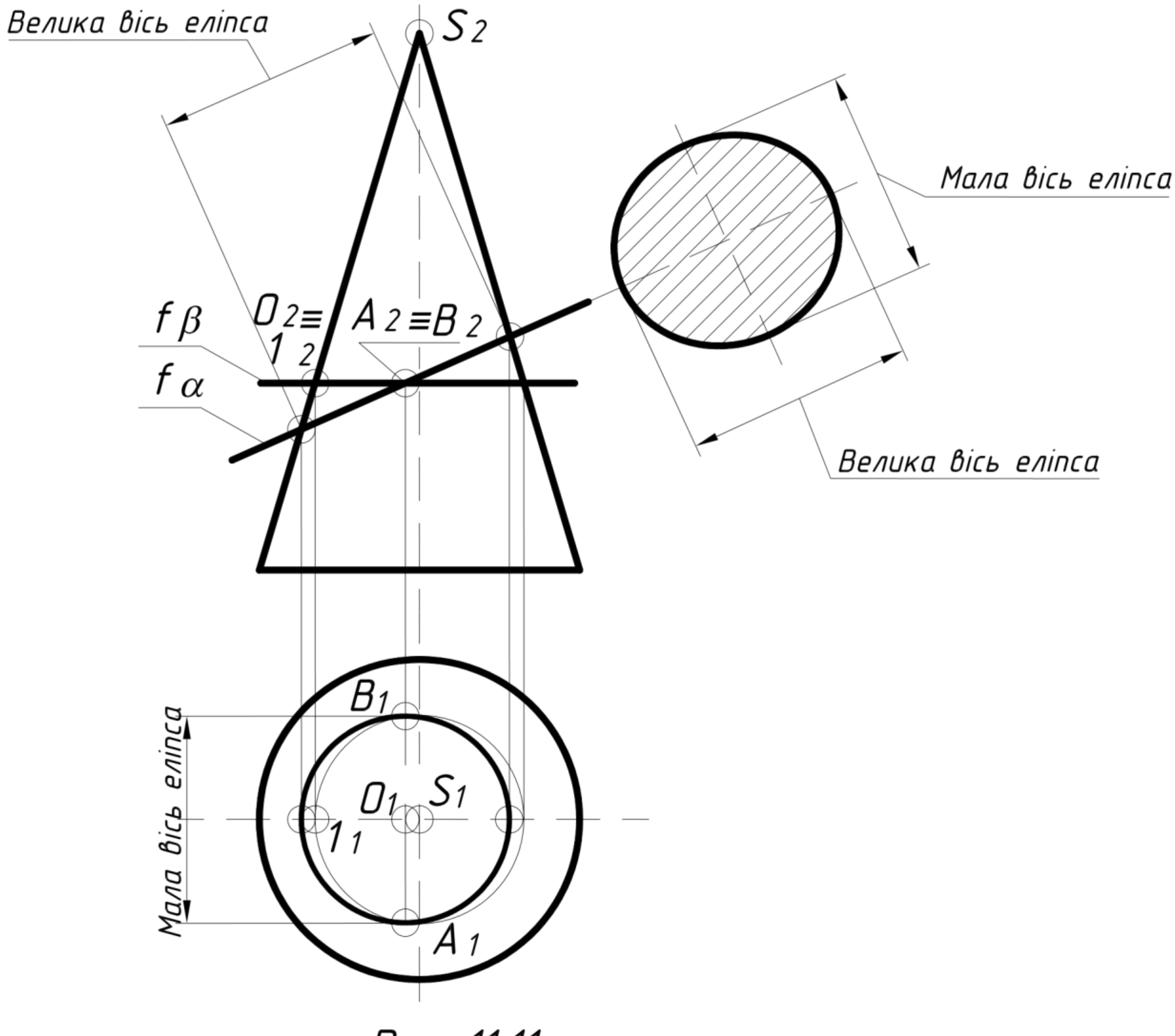


Рис. 11.11

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає загальний спосіб побудови перерізу поверхні площиною?
2. Що називають перерізом поверхні?
3. Які лінії отримують при перерізі многогранників та кривих поверхонь площиною?
4. В чому суть «способу граней»?
5. В чому суть «способу ребер»?
6. Які лінії отримують при перерізі многогранника, циліндра, конуса, сфери проектуючою площиною?
7. Що таке «конічні перерізи»?
8. Як будують «конічні перерізи»?
9. Яке положення повинна займати проектуюча площина, щоб утворився в перерізі еліпс?
10. При якому розміщенні проектуючої площини у перерізі утвориться парабола?
11. При якому розміщенні проектуючої площини у перерізі утвориться гіпербола?
12. При якому розміщенні проектуючої площини у перерізі утвориться трикутник

12. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ ЛІНІЇ З ПОВЕРХНЕЮ

Загальниий принцип визначення точок перетину прямої з поверхнею полягає у наступному:

- через пряму проводять допоміжну площину-посередник;
- відшукують лінію перетину площини-посередника з поверхнею даного тіла;
- фіксують точки перетину даної прямої зі знайденою лінією перетину.

Коли поверхня тіла проектуюча, точки перетину визначають без допоміжних побудов. На рис. 12.1 і 12.2 зображені тригранна призма і циліндр. Їхні бічні поверхні складаються із проектуючих поверхонь. Горизонтальні проекції $\mathbf{1_1}$ та $\mathbf{2_1}$ (рис. 12.1) точок перетину прямої $\mathbf{a(a_1, a_2)}$ з поверхнею призми фіксують безпосередньо на проекції $\mathbf{a_1}$ прямої. Фронтальні проекції $\mathbf{1_2}$ та $\mathbf{2_2}$ фіксують на $\mathbf{a_2}$, користуючись проекційним зв’язком.

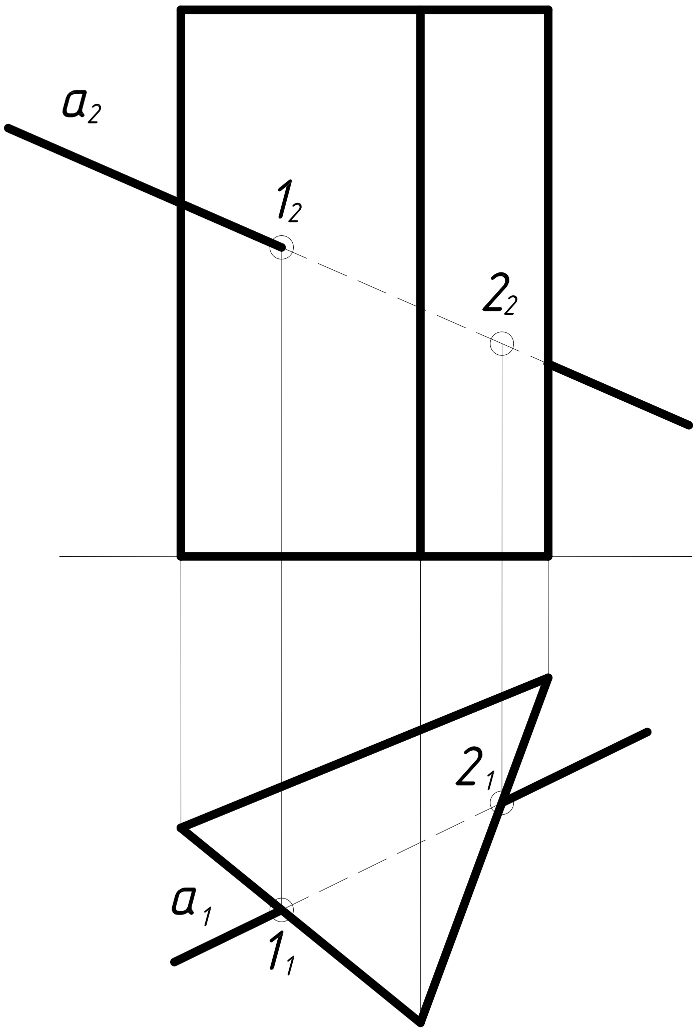


Рис. 12.1

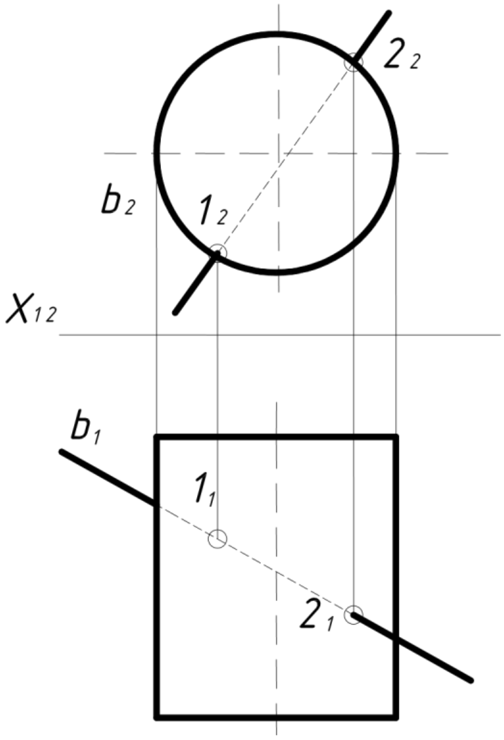


Рис. 12.2

Для визначення точок зустрічі прямої **a**(**a**1, **a**2**)** з похилою призмою (рис. 12.3) через пряму проводять допоміжну фронтально-проектуючу площину **α**(**f**α). Спочатку знаходять лінію перетину **ABC** площини **α**(**f**α) з поверхнею призми, а потім – самі точки перетину **1**(**1**1, **1**2) та **2**(**2**1, **2**2).

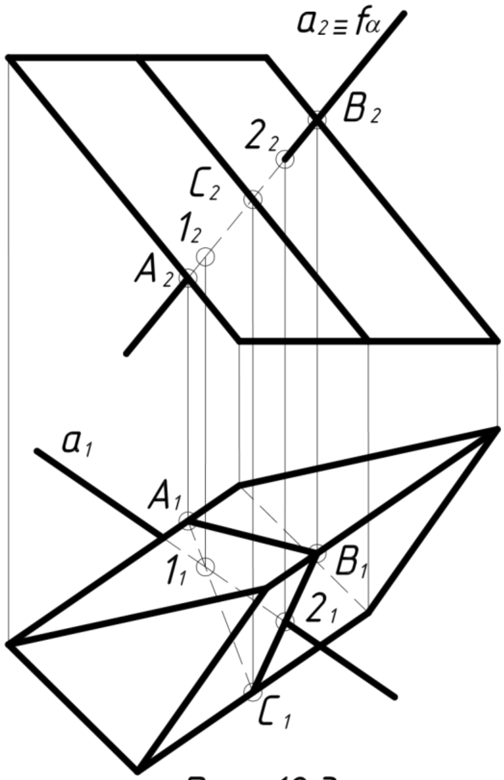


Рис. 12.3

При перетині прямої з поверхнями загального вигляду раціональне вирішення задачі залежить від того, чи дає площина-посередник прості лінії-посередники. На рис. 12.4 проводять площину-посередник через вершину конуса **S(S**$_1$, **S**$_2$) і довільно взяту точку **К(К**$_1$, **К**$_2$) на заданій прямій **a(a**$_1$, **a**$_2$**)**. Площину-посередник орієнтують таким чином, що вона перетинає конус по простій ламаній – трикутнику. Для побудови цього трикутника визначають горизонтальний слід $\mathbf{h_\alpha}$ площини-посередника. Він пройде через сліди $\mathbf{H^a}$ і $\mathbf{H^l}$ прямих **a** і **SK**. Відрізок **EF** сліду $\mathbf{h_\alpha}$ з вершиною **S** конуса задають необхідний трикутник. Січна пряма **a** перетинається з **SE** і **SF** і дає точки **1(1**$_1$, **1**$_2$) та **2(2**$_1$, **2**$_2$) зустрічі прямої **a** з поверхнею конуса.

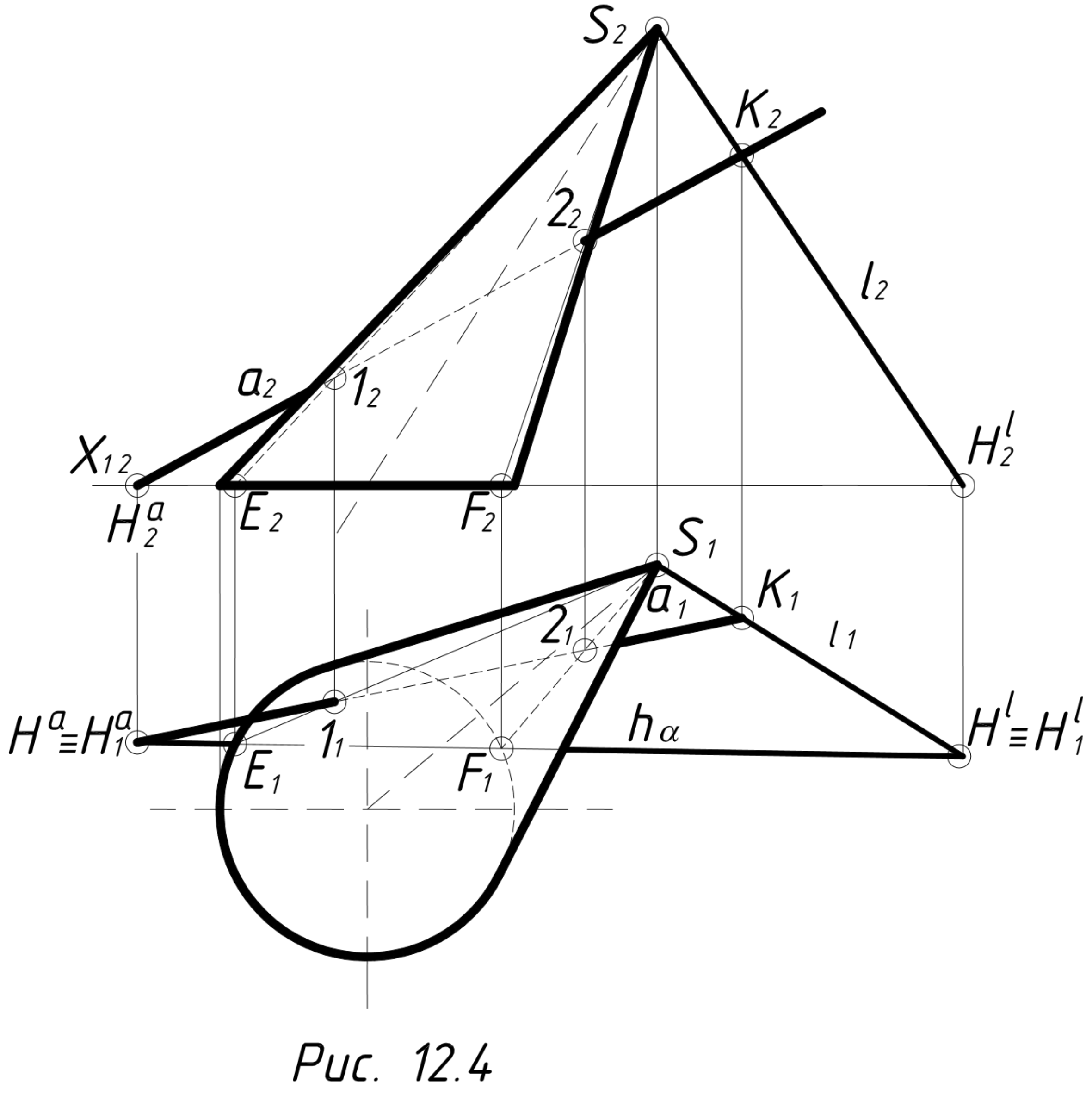


Рис. 12.4

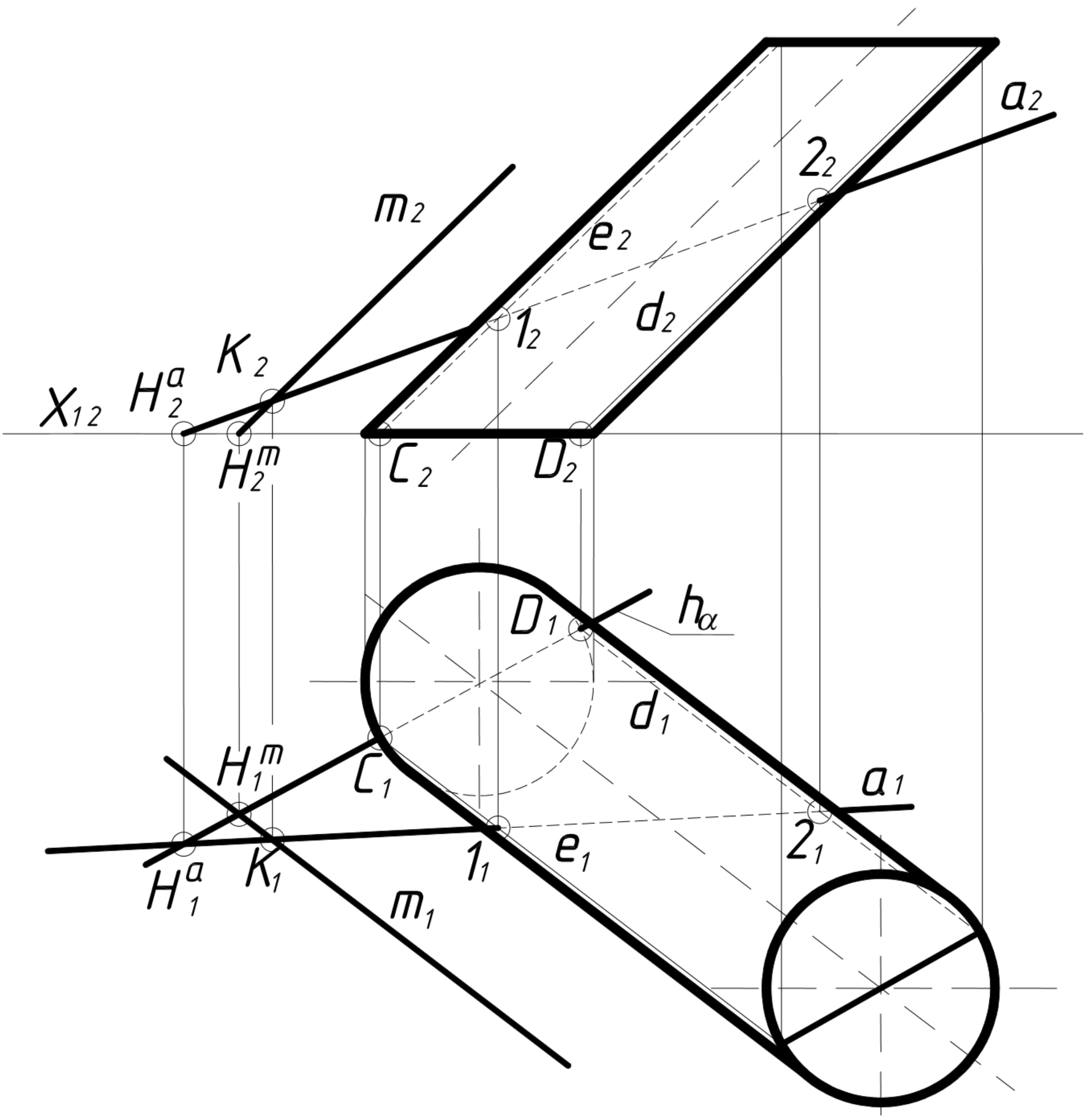


Рис. 12.5

На рис. 12.5 подано аналогічне рішення для похилого циліндра. Пряму **КН**(**К**$_1$**Н**$_1$, **К**$_2$**Н**$_2$) проводять паралельно до твірних циліндра. Побудувавши слід **h**$_\alpha$ площини-посередника, позначають точки **С**(**С**$_1$, **С**$_2$) та **D**(**D**$_1$, **D**$_2$) перетину сліду з основою циліндра. Через ці точки проводять паралельно до твірних циліндра прямі **d**(**d**$_1$) та **е**(**е**$_1$), які є лініями перетину площини-посередника з поверхнею циліндра. Точки **1**$_1$ і **2**$_1$ перетину **d**$_1$ та **е**$_1$ з **а**$_1$ є горизонтальними проекціями точок зустрічі даної прямої з циліндром. Фронтальні проекції цих точок знаходять прямим проектуванням на **а**$_2$.

Запитання для самоперевірки

1. Суть способу побудови точки перетину прямої з поверхнею.

2. Які допоміжні площини застосовують для знаходження точок перетину прямої з поверхнею?

3. Подумайте, в якому положенні повинні бути січні площини, щоб у перерізі прямої чотиригранної призми, поставленої на площину Π_1, утворилися шестикутники?

4. Які площі-посередники використовують при побудові точок перетину прямої з поверхнею похилого конуса з круговою основою?

5. Які площі-посередники використовують при побудові точок перетину прямої з поверхнею похилого циліндра з круговою основою?

6. Чому при побудові точок перетину прямої з повнрхнею конуса допоміжна площина проходить через вершину конуса?

7. Чому при побудові точок перетину прямої з поверхнею циліндра допоміжна площина проходить через пряму, що паралельна до його твірних?

8. У чому особливість побудови точок перетину прямої з поверхнями, що знаходяться в окремому положенні?

13. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Переважна більшість речей, предметів, технічних деталей, машин, будівельних та інших виробів предметного світу, в якому живе і працює людина, являють собою поєднання різноманітних геометричних тіл. Таке поєднання слід розуміти, передусім, як перетин поверхонь тіл: циліндрів, конусів, сфер, пірамід, призм та інших гранних і кривих поверхонь та їх комбінацій.

Перетин поверхонь призводить до утворення ліній – прямих чи кривих, які являють собою сукупність ряду точок, спільних для поверхонь, що перетинаються. Ці лінії мають назву *ліній взаємного перетину* або *ліній переходу*. Для їх побудови, зрозуміло, потрібно відшукати такі точки, які б належали одночасно двом заданим поверхням, що перетинаються.

Лінії взаємного перетину поверхонь можуть бути плоскими або просторовими. При перетині двох алгебраїчних поверхонь лінія перетину має порядок, що дорівнює добутку порядків поверхонь, які перетинаються.

Для побудови точок лінії взаємного перетину двох поверхонь застосовують способи допоміжних січних площин, сфер та перетворення проекцій.

13.1. Спосіб допоміжних січних площин

У цьому способі лінію перетину двох поверхонь будують за її окремими точками, які знаходять за допомогою посередників – допоміжних січних площин. Площини-посередники слід вибирати так, щоб вони перерізували дані поверхні по лініях, проекції яких є графічно легкими для побудови. Допоміжні площини-посередники можуть бути як окремого, так і загального положення. Зрозуміло, що застосування допоміжних площин-посередників окремого положення (площин рівня, проектуючих площин) полегшує побудову. Площини окремого положення широко використовуються як посередники для побудови ліній перетину поверхонь, що займають певне (перпендикулярне або паралельне) положення відносно площин проекцій.

Побудову лінії перетину багатогранників, подібно до побудови фігури перерізу багатогранників площиною, можна виконувати одним із двох відомих способів – «способом ребер» або «способом граней».

У першому випадку визначають вершини ламаної лінії перетину, тобто побудова зводиться до відшукування точок перетину ребер кожного із багатогранників з гранями іншого.

За другим способом знаходять сторони ламаної лінії, що відповідає лінії перетину двох площин – граней багатогранника. Цей спосіб застосовують лише тоді, коли грані хоча б одного із багатогранників є проектуючими площинами.

Таким чином, лінії взаємного перетину двох багатогранників будують шляхом розв'язування задачі на перетин двох площин або перетин прямої з площиною. Тут слід мати на увазі, що ребро одного багатогранника не перетинає грані другого тоді, коли проекція ребра не перетинає проекції грані хоча б на одній із проекцій цих багатогранників. Однак перетин проекції ребра і грані ще не означає, що дані ребро і грань перетинаються у просторі.

На рис. 13.1 зображено випадок, де грані призми знаходяться у положенні горизонтально-проектуючих площин, а тому точки зустрічі **A, B**, **C**, **E**, **F**, **D** ребер піраміди з гранями призми визначаються без допоміжних побудов.

При побудові лінії перетину двох кривих поверхонь допоміжні січні площини-посередники вибирають так, щоб вони перетинали дані поверхні по найпростіших лініях – колах чи прямих. Будучи розташованими в одній січній площині, ці лінії перетинаються між собою, що і визначає спільні точки обох кривих поверхонь, тобто лінію їх перетину.

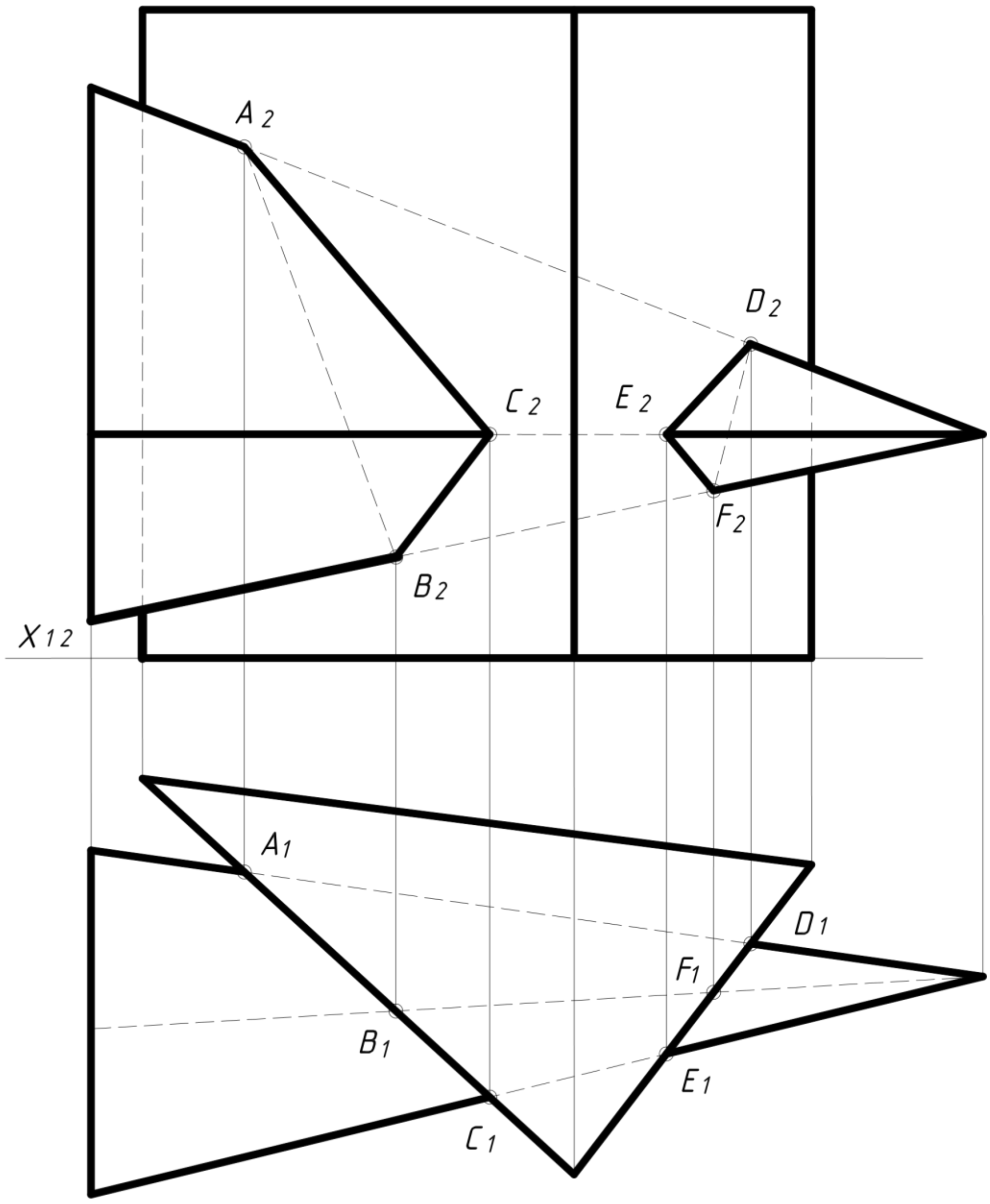


Рис. 13.1

Розглянемо такий приклад. Нехай необхідно побудувати лінію перетину двох циліндрів, осі яких не перетинаються і паралельні до фронтальної плошини проекцій (рис. 13.2).

Пояснення. Насамперед знаходять характерні точки **A, B**, **C** і **D** без допоміжних побудов. Для цього позначають точки $\mathbf{A_1}$**,** $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$ і $\mathbf{D_1}$ і за ними на лініях зв'язку – точки $\mathbf{A_2}$**,** $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{C_2}$ і $\mathbf{D_2}$. Дві інші характерні точки **E** і **F** визначають за допомогою посередника – фронтальної січної площини $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h_\alpha})$, проведеної через контурну праву твірну циліндра. Ця площина перетне обидва циліндри по твірних, у перетині яких лежать точки **E** і **F**. Допоміжні точки **M**, **N**, **K** і **L** визначають за допомогою фронтальних січних площин $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{h_\beta})$ і $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{h_\gamma})$. З'єднують у певній послідовності побудовані точки **A, B**, ... й отримують просторову замкнену криву лінію перетину даних поверхонь.

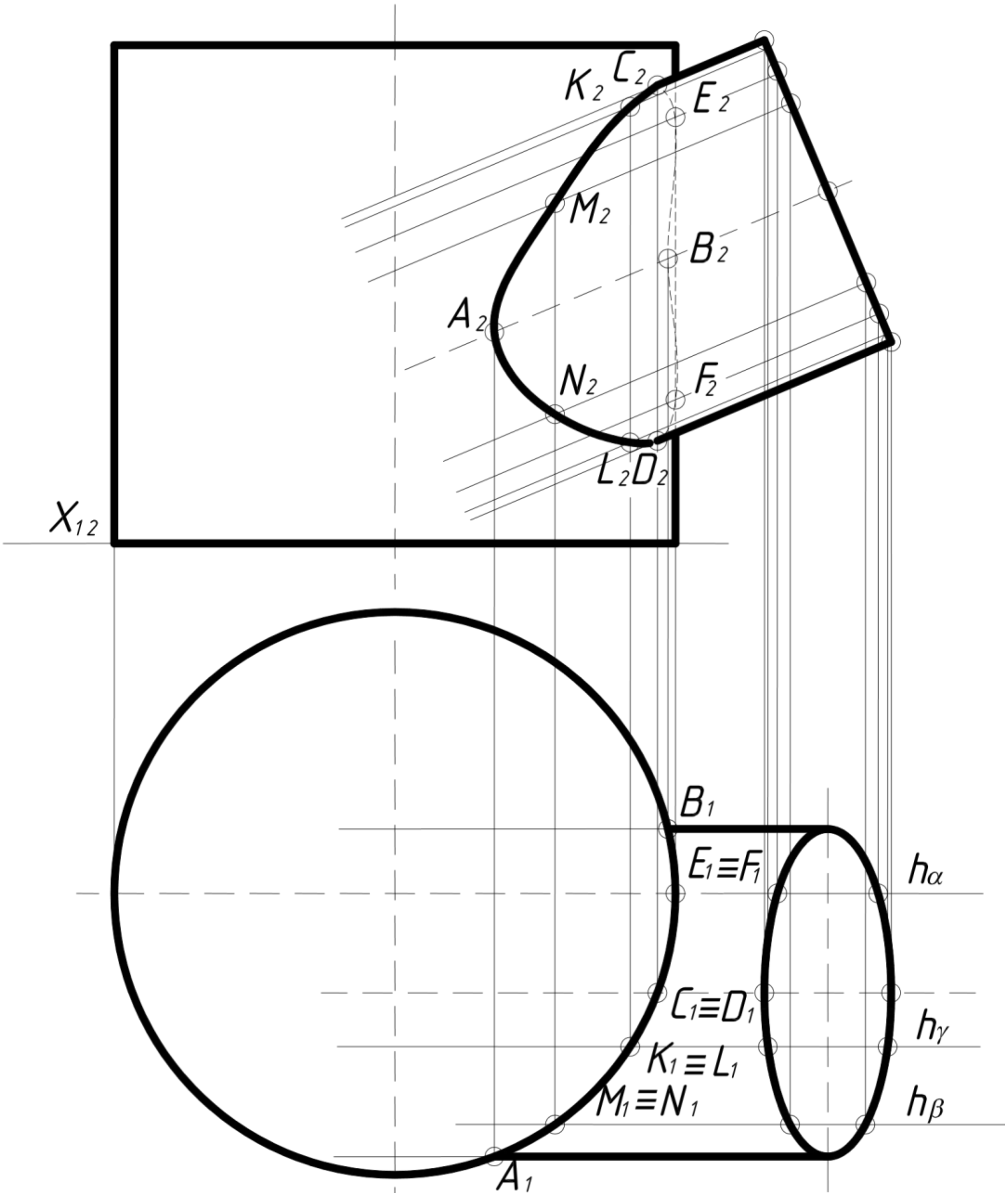


Рис. 13.2

Видимість точок лінії перетину виявляють, виходячи із видимості твірних, на яких лежать точки.

Розв'язування задач на побудову ліній перетину багатогранників з кривими поверхнями грунтується на тих же способах, за допомогою яких визначають лінії перетину двох багатогранників або двох кривих поверхонь. Розглянемо такий приклад.

Нехай необхідно побудувати лінію перетину призми з конусом (рис. 13.3).

Пояснення. Спочатку знаходять без допоміжних побудов характерні точки **A, B**, **C** і **D**, в яких основа конуса – коло – перетинається з чотирикутником – гранню призми, оскільки коло і чотирикутник лежать у горизонтальній площині проекцій.

Для визначення проміжних точок лінії перетину використовують посередники – січні горизонтальні площини $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{f}_\alpha)$ і $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{f}_\beta)$ та фронтальну площину $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{h}_\gamma)$. Січна площина $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{f}_\alpha)$, проведена через верхнє ребро призми, переріже конус по колу радіуса **R**, горизонтальна проекція якого перетнеться з горизонтальною проекцією твірної призми у точках $\mathbf{E}_1$ і $\mathbf{F}_1$. Побудувавши ці точки, знаходять на лініях зв'язку точки $\mathbf{E}_2$ і F_2. Зазначимо, що у даному випадку точка **E** лежить на крайній лівій твірній конуса, а точка **F** – на видимій частині його бічної поверхні.

Аналогічно будують проміжні точки **K**, **L**, **M** і **N** за допомогою січної площини) $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{f}_\beta)$, яка перетне призму по чотирикутнику **1-2-3-4**, а конус – по колу радіуса $\mathbf{R}^1$. Перетин горизонтальних проекцій чотирикутника і кола визначить точки $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{M}_1$ і $\mathbf{N}_1$, за якими знаходять точки $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{M}_2$ і $\mathbf{N}_2$. Отже, побудовано ще чотири точки, які належать лініям перетину заданих поверхонь.

Сполучивши точки **A**, **K**, **E**, **M**, **B** і **A**, отримаємо одну гілку лінії перетину, яку приймаємо за лінію входу.

Для побудови другої гілки необхідно знайти ще одну точку, а саме точку перетину крайньої правої твірної конуса з поверхнею призми. З цією метою проводять фронтальну площину $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{h}_\gamma)$, яка переріже відповідну грань призми по прямій **E5**, а конус – по трикутнику.

На фронтальній площині проекцій відзначають перетин відрізка $\mathbf{E}_2\mathbf{5}_2$ з фронтальною проекцією правої контурної твірної конуса у точці $\mathbf{E}_2^1$, за якою знаходимо точку $\mathbf{E}_1^1$.

Просторова крива **C**, **L**, ..., **D**, **C** буде другою гілкою лінії перетину – лінією виходу.

Розглядаючи побудови лінії перетину поверхонь, слід мати на увазі, що при взаємному перетині кривих поверхонь лінія переходу є плавною кривою.

У випадку перетину кривих поверхонь з багатогранниками лінія перетину може бути плоскою кривою, а також кривою, яка складається з відрізків кривих, з'єднаних зі зломами у точках, що лежать на ребрах багатогранників.

Відрізками ліній перетину поверхонь другого порядку є найчастіше криві другого порядку. У розглянутому прикладі лініями перетину даних поверхонь є чотири ділянки еліпсів і дві ділянки кола – основи циліндра (між точками **A** і **B** та **C** і **D**).

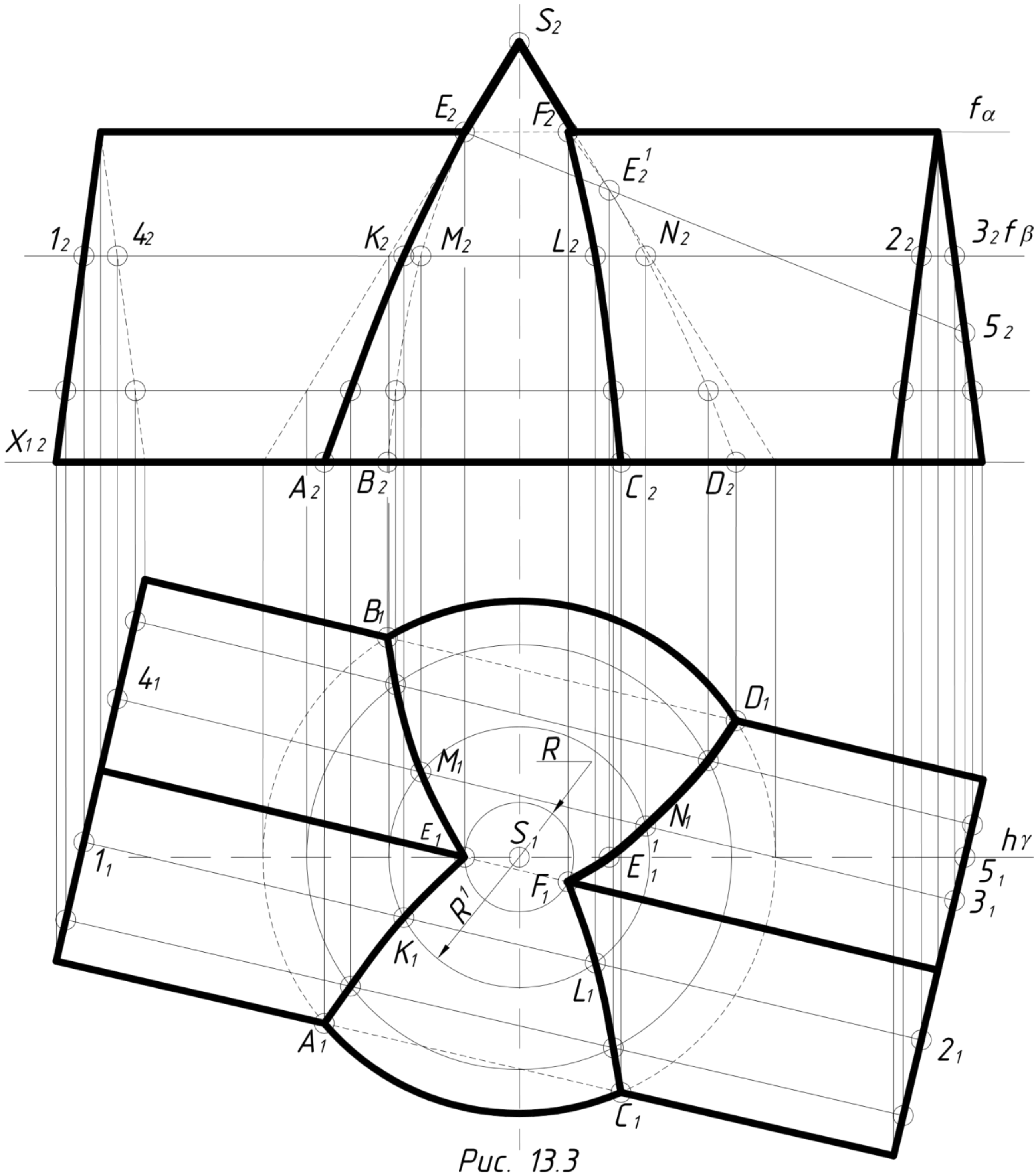


Рис. 13.3

13.2. Спосіб сфер

Іноді для побудови ліній перетину двох кривих поверхонь зручно обертання за умови, що осі цих поверхонь перетинаються і паралельні до будь-якої площини проекцій. Точку перетину осей поверхонь приймають за центр концентричних поверхонь. Принцип допоміжних сферичних перерізів грунтується на тому, що сфера з центром на осі будь-якої поверхні обертання перетинається з нею по колу. Оскільки за умовою осі поверхонь обертання мають бути перпендикулярні до однієї з площин проекцій, коло проектується на цю площину без спотворення, а на інші площини проекцій – у відрізки, що дорівнюють діаметру кола.

При побудові лінії перетину двох поверхонь способом допоміжних сфер можливі два випадки: у першому користуються сферами, проведеними з одного центра – спосіб концентричних сфер; у другому використовують сфери, побудовані з різних центрів – спосіб ексцентричних сфер. Перший доцільно використовувати тоді, коли осі поверхонь – прямі лінії, а другий – коли одна з осей є кривою.

Розглянемо спосіб концентричних сфер. Нехай необхідно побудувати лінію перетину конуса з циліндром, осі яких перетинаються під прямим кутом і паралельні до фронтальної площини проекцій
(рис. 13.4).

Пояснення. Побудову виконують за допомогою січних концентричних сфер, проведених з центра $\mathbf{O(O_1, O_2)}$ – точки перетину осей даних тіл. Вибираючи радіуси січних сфер, слід мати на увазі, що радіусом найбільшого кола ($\mathbf{R_{max}}$) є відстань від точки $\mathbf{O_2}$ до точки $\mathbf{B_2}$ – однієї з характерних точок **A, B**, **C** і **D**, у яких перетинаються контурні твірні поверхонь. Радіусом найменшого кола буде відстань від точки $\mathbf{O_2}$ до найдальшої твірної конуса. Для визначення проміжних точок, що належать лінії взаємного перетину, проводять ще ряд сфер у проміжку між найбільшою і найменшою сферами.

Побудову виконують у такій послідовності. На площині $\mathbf{П_2}$ проводять коло радіусом **R** з точки $\mathbf{O_2}$ і приймають це коло за фронтальну проекцію січної сфери, яка перетинається з конусом і циліндром по колах. Ці кола проектуються на площину $\mathbf{П_2}$ у відрізки $\mathbf{1_2 2_2}$, $\mathbf{3_2 4_2}$ і $\mathbf{5_2 6_2}$. На перетині цих відрізків знаходять точки $\mathbf{E_2}$ і $\mathbf{F_2}$, що є фронтальними проекціями точок **E** і **F** лінії перетину заданих поверхонь.

Далі, найменшим радіусом $\mathbf{R_{min}}$ проводять коло з центра $\mathbf{O_2}$ і, прийнявши його за проекцію січної сфери, будують проекції кіл, по яких ця сфера перетинається з конусом і циліндром. Це будуть відрізки $\mathbf{7_2 8_2}$, $\mathbf{9_2 10_2}$, і $\mathbf{11_2 12_2}$, оскільки кола на $\mathbf{П_2}$ проектуються у їх діаметри. На перетині цих відрізків позначають точки **K** і **L** – фронтальні проекції точок $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{L_2}$ лінії взаємного перетину даних поверхонь. Характерні точки **M** і **N** знаходять як точки перетину найближчої і найдальшої твірних циліндра з колом, отриманим від перерізу конуса горизонтальною площиною, проведеною через точку **O**. Спочатку знаходять точки $\mathbf{M_1}$ і $\mathbf{N_1}$, за якими на лініях зв’язку – точки $\mathbf{M_2}$ і $\mathbf{N_2}$.

Зауважимо, що для побудови горизонтальної проекції лінії перетину необхідно відзначити проекції невидимих на площині $\mathbf{П_2}$ точок лінії перетину, які будуть симетричними до видимих. Усі побудовані й позначені точки плавно з’єднують між собою й отримують дві замкнені лінії перетину: лінію **AKMB**, ... **A**, яку приймають за лінію входу, і лінію виходу **CLND**, ... **C**. Знайдені лінії є симетричними, враховуючи характер і взаємне розміщення поверхонь.

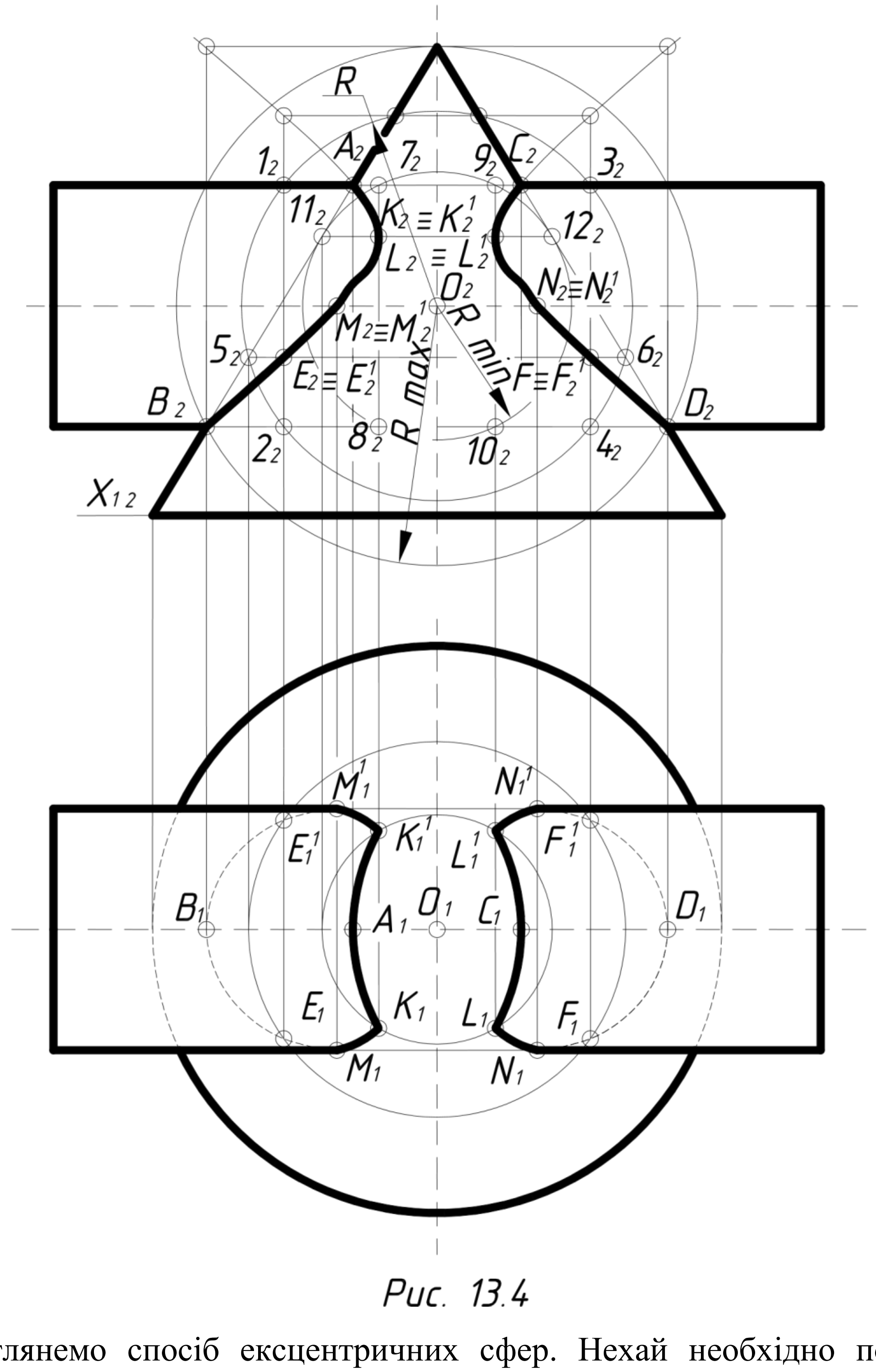


Рис. 13.4

Розглянемо спосіб ексцентричних сфер. Нехай необхідно побудувати лінію перетину прямого колового циліндра з тором за умови, що вісь циліндра лежить у площині, яка проходить через середню лінію тора (рис. 13.5).

Пояснення. Побудову лінії перетину виконують за допомогою ексцентричних сфер (інакше, сфер з ковзними центрами), оскільки вісь однієї із заданих поверхонь – тора – є крива лінія (коло). Спочатку знаходять характерні точки – найвищу **A** і найнижчу **B**.

Для побудови проміжних точок знаходять центри січних сфер. Для цього проводять кілька фронтально-проектуючих площин, наприклад, площин $\mathbf{f_\alpha}$ і $\mathbf{f_\beta}$, які проходять через вісь тора і перетинають його по колах з центрами в точках $\mathbf{S_2}$ і $\mathbf{S_2^1}$. Далі через центр **S** проводять пряму, перпендикулярну і до площини кола, та продовжують її до перетину з віссю циліндра в точці **O₂**. Легко бачити, що проведена пряма буде дотичною до середньої лінії тора.

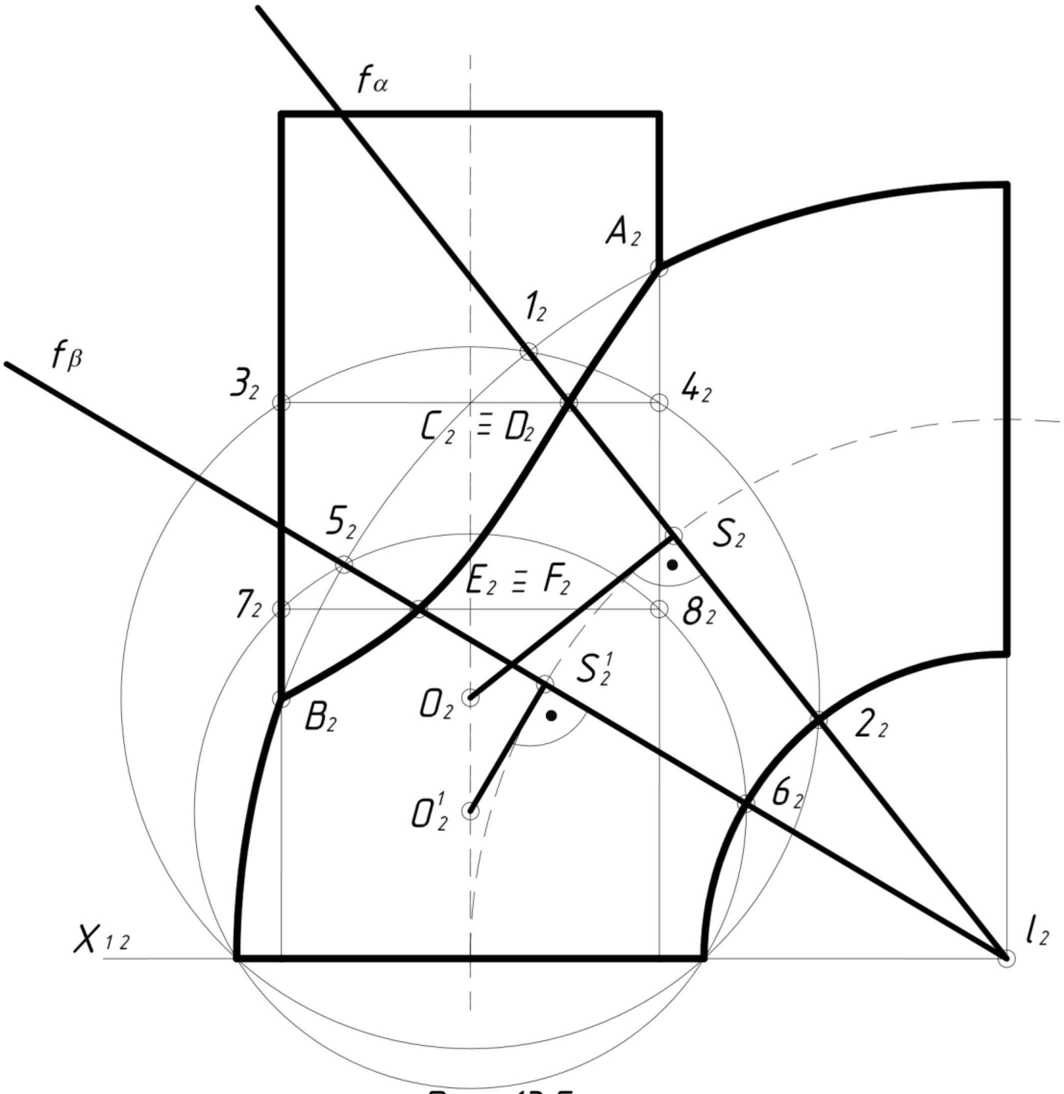


Рис. 13.5

Приймають точку **O_2** за центр, проводять коло так, щоб воно пройшло через кінці відрізка, у який проектується коло з центром **S_2**, тобто через кінці **1_2** **і** **2_2** діаметра кола. Прийнявши це коло за січну сферу, легко бачити, що вона перетне кільце і циліндр по колах, проекціями яких на фронтальній площині проекцій будуть відрізки **$1_2 2_2$** і **$3_2 4_2$**. Перетин цих відрізків визначає спільні точки **C** і **D** лінії перетину даних поверхонь. Міркуючи аналогічно, знаходять центр **O_2^1** для другої січної сфери, в результаті перетину якої з тором і циліндром знаходять точки **E** і **F** лінії їх перетину.

Слід мати на увазі, що незалежно від кількості застосування січних сфер центри їх лежать у різних точках, але обов'язково на осі циліндра.

13.3. Побудова ліній взаємного перетину поверхонь способом перетворення проекцій

Як відомо із попередніх прикладів, розв'язування будь-якої задачі на епюрі значно спрощується, якщо об'єкти проектування задані в окремому положенні щодо площин проекцій.

Справді, побудова проекцій лінії перетину значною мірою полегшується, якщо бічна поверхня одного з тіл, що перетинаються, є проектуючою. Користуючись цим твердженням, доцільно при розв'язуванні окремих задач на перетин двох поверхонь, що займають загальне положення, перетворити епюр так, щоб одна із цих поверхонь зайняла проектуюче положення.

З цією метою можна застосувати заміну площин проекцій або інші способи перетворення проекцій епюра.

Розглянемо такий випадок. Нехай необхідно визначити лінію взаємного перетину піраміди **SABC** з трикутною призмою ***lpt***, ребра якої паралельні до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$ і до ребра піраміди **AB** (рис. 13.6).

Пояснення. Побудову виконують за допомогою заміни площин проекцій $\mathbf{П_2}$ на $\mathbf{П_4}$, на якій грані призми займуть проектуюче положення, тобто призма спроектується у трикутник $\boldsymbol{l_4p_4t_4}$, що забезпечить спрощення у пошуку лінії перетину.

Розглядаючи нову проекцію заданих тіл, легко побачити, що лінія їх перетину складається з двох гілок – трикутника **1 – 2 – 3** (як результат перерізу піраміди гранню ***lt*** призми) і просторової лінії входу – п'ятикутника **4 – 5 – 6 – 7 – 8**. Оскільки призма стала проектуючою, слід спочатку відшукати характерні точки лінії перетину без допоміжних побудов.

Такими точками будуть точки **1**, **2** і **3** лінії виходу і точки **4**, **6** і **7** лінії входу. Отже, позначивши точки $\mathbf{1_4}$, $\mathbf{2_4}$, $\mathbf{3_4}$, $\mathbf{4_4}$, $\mathbf{6_4}$ і $\mathbf{7_4}$, знаходять їхні горизонтальні проекції на відповідних лініях зв'язку, за ними – фронтальні проекції цих точок.

Залишилося визначити дві точки **5** і **8** перетину ребра ***p*** призми з поверхнею піраміди. Для цього проводять через це ребро і вершину піраміди січну площину $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{f_{\alpha 4}})$, перпендикулярну до нової площини проекцій $\mathbf{П_4}$, яка переріже піраміду по трикутнику **SKL**. Шукані точки знаходять на перетині трикутника з ребром ***p***. Отже, позначають спочатку точки $\mathbf{5_1}$ і $\mathbf{8_1}$, а відтак, на лініях зв'язку точки $\mathbf{5_2}$ і $\mathbf{8_2}$. Фронтальні проекції лінії взаємного перетину визначають за відповідністю з горизонтальною її проекцією.

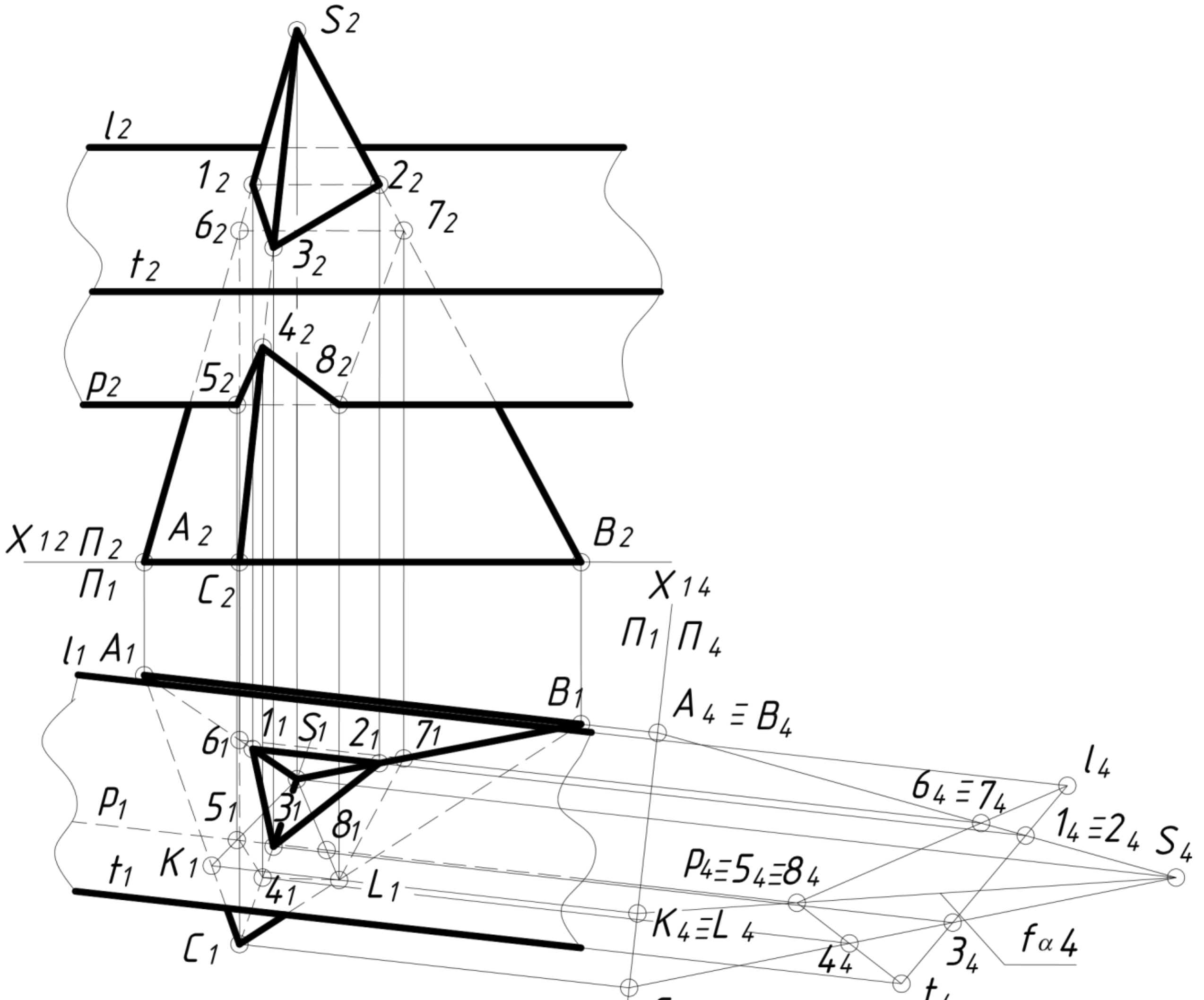


Рис. 13.6

Далі з'єднують послідовно знайдені точки лінії перетину, маючи на увазі рекомендації, про які йшлося вище, насамперед про належність точок їх відповідним граням. Точку **4** з'єднують з точками **5** і **8**, точку **5** – з точкою **6**, а точку **8** – з точкою **7**. З'єднавши точки **6** і **7**, отримаємо просторову лінію входу – п'ятикутник **4 – 5 – 6 – 7 – 8**. На горизонтальній пощині проекцій **П**1 лінія виходу – трикутник **1 – 2 – 3** є видимим, а п'ятикутник – невидимим. На фронтальній проекції сторони трикутника **1 – 3** і **2 – 3** та дві сторони п'ятикутника **4 – 5** і **4 – 8** – видимі.

13.4. Деякі особливі випадки взаємного перетину поверхонь обертання

На рис. 13.7 зображені два циліндри з паралельними твірними і два конуси зі спільною твірною. В обох випадках лініями перетину є спільні твірні.

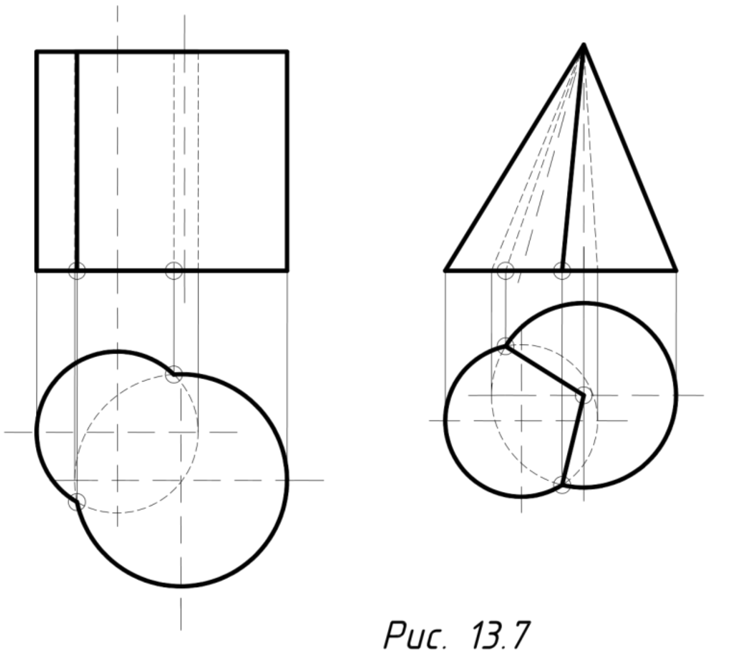


Рис. 13.7

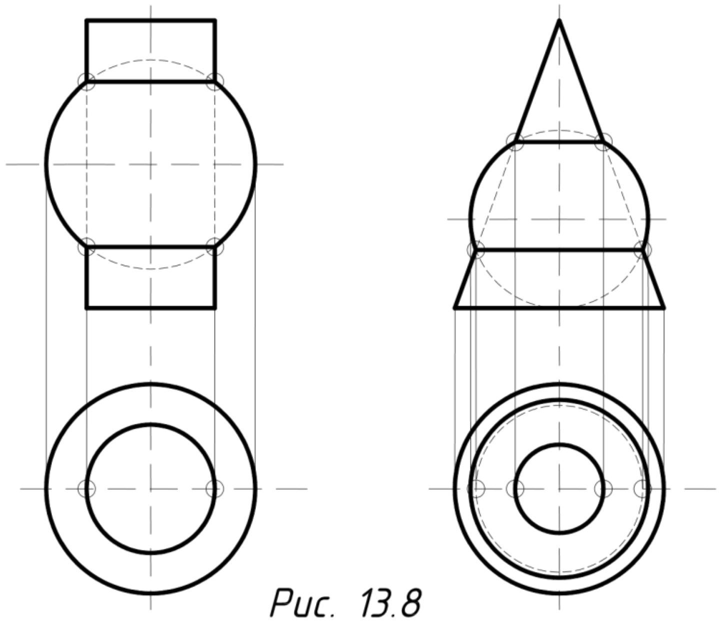


Рис. 13.8

На рис. 13.8 зображені співвісні циліндр та сфера і конус та сфера. Лініями перетину таких поверхонь є кола.

Слід зазначити, що співвісними поверхнями обертання називають такі поверхні, які мають спільну вісь обертання. Співвісні поверхні обертання завжди перетинаються по колах, площини яких перпендикулярні до осі обертання.

У деяких випадках при перетині поверхонь обертання другого порядку їх лінія перетину розпадається на дві плоскі криві (еліпси), розміщені у фронтально-проектуючих площинах. Таке буває тоді, коли обидві поверхні огинають спільну сферу. Це підтверджується *теоремою Монжа: Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку, то вони перетинаються по двох кривих другого порядку.* Такі поверхні мають дві точки дотику.

На рис. 13.9 показано лінію взаємного перетину конуса та циліндра обертання, які огинають спільну сферу.

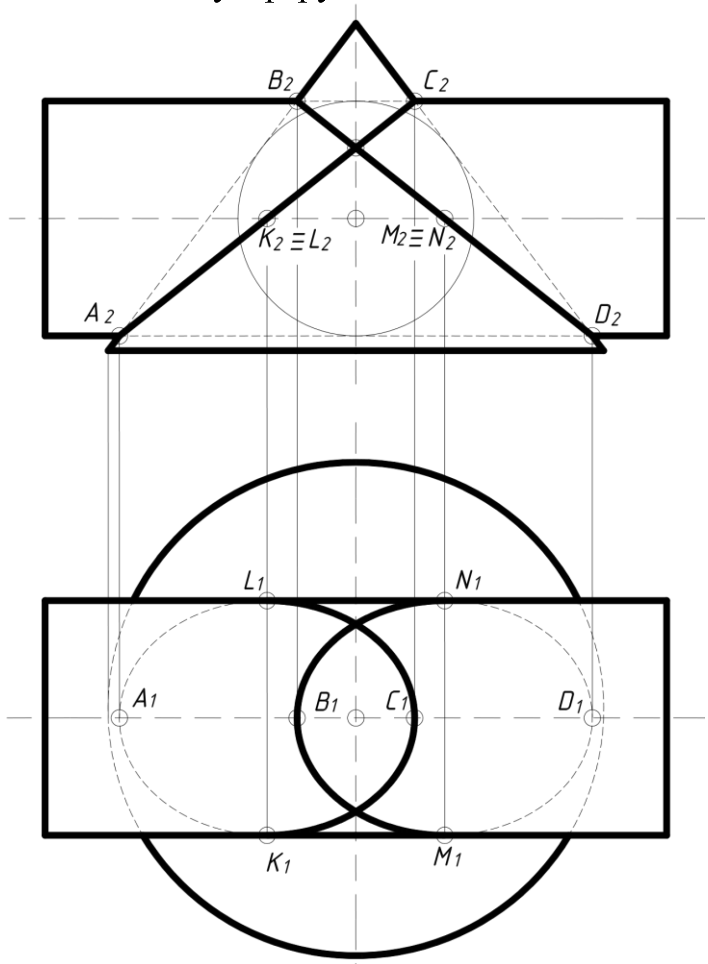


Рис. 13.9

Запитання для самоперевірки

1. В чому суть способу побудови лінії перетину двох поверхонь?

2. Що являє собою лінія перетину двох многранників, двох кривих поверхонь?

3. Які лінії утворюються при перетині многогранників з кривими поверхнями?

4. Які точки належать до характерних або опорних при побудові лінії перетину двох поверхонь?

6. Якого положення і у яких випадках доцільно застосовувати допоміжні січні площини при перетині двох поврхонь?

7. Суть способу допоміжних сфер.

8. Суть способу допоміжних ексцентричних сфер.

9. Коли доцільно застосовувати способи перетворення проекцій при пернетині двох поверхонь?

10. Які особливі випадки взаємного перетину поверхонь обертання? Як будуються їх лінії взаємного перетину?

14. ПОБУДОВА РОЗГОРТОК ПОВЕРХОНЬ

Розгорткою поверхні називають плоску фігуру, отриману при суміщенні поверхні тіла з площиною.

Розгорткою многогранника називають таке його зображення в суміщеному з площиною креслення вигляді, де всі його грані побудовані у дійсну величину і в тому ж порядку, що й у многогранника.

Зрозуміло, що для побудови розгортки поверхні многогранника необхідно мати дійсні величини усіх його граней.

Криві поверхні є, як відомо, розгортні та нерозгортні. Розгортка нерозгортних поверхонь будується наближено.

Для розгортних поверхонь, які повністю суміщаються без складок і розривів з площиною, встановлюється взаємно однозначна відповідність, при якій точці однієї точкової множини відповідає точка другої точкової множини, а прямій однієї точкової множини відповідає пряма другої точкової множини.

Можна рекомендувати такий загальний порядок побудови розгорток поверхонь:

1. У задану поверхню вписують (описують) допоміжну многогранну поверхню.
2. Будують дійсну величину усіх ребер многогранника. У випадку довільної форми грані її поділять на трикутники і визначають дійсні величини усіх допоміжних ліній.
3. Будують послідовно дійсні величини усіх граней поверхні за дійсними величинами їх елементів.
4. Сполучають відповідні точки на побудованій розгортці кривими лініями. Побудована таким чином плоска фігура й буде розгорткою поверхні.

14.1. Побудова розгорток призматичних і циліндричних поверхонь

Побудову розгорток призматичних і циліндричних поверхонь виконують за одним і тим самим методом, оскільки незважаючи на те, що циліндричні поверхні належать до розгортних, практично їх будують наближено, замінюючи вписаною (описаною) призматичною.

Якщо ж ці поверхні похилі, побудова розгорток ускладнюється насамперед тому, що необхідно побудувати дійсні величини плоских фігур – граней, з яких складається задана поверхня. З цією метою використовують різні способи, наприклад, спосіб нормального перерізу, спосіб розгортання, спосіб трикутників та ін.

Зауважимо, що розгортку поверхні многогранника доцільно виконувати, починаючи з найкоротшого ребра. Це забезпечує економію матеріалів, з яких виготовлають поверхні предметів. Верхню і нижню основи зрізаних фігур рекомендується добудовувати при найдовших ребрах, що зумовлює компактність розгортки.

Нехай необхідно побудувати розгортку нижньої частини чотиригранної призми, розрізаної фронтально-проектуючою площиною **α** (рис. 14.1).

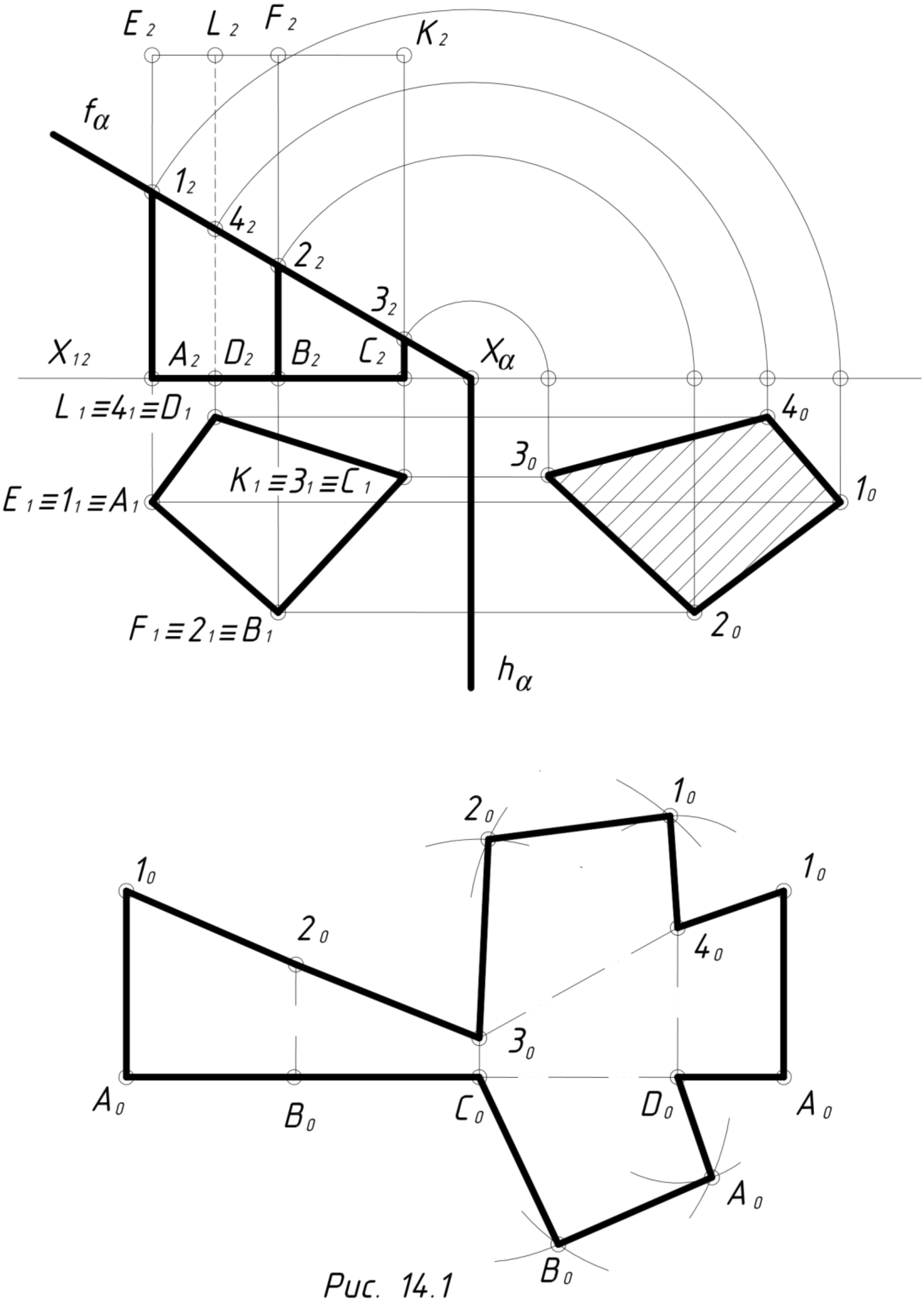


Рис. 14.1

Пояснення. Усі необхідні для побудови розгортки елементи призми, окрім фігури перерізу, відомі.

Дійсну величину фігури перерізу $\mathbf{1_0 2_0 3_0 4_0}$ знаходять методом суміщення січної площини **α** з площиною $\mathbf{\Pi_1}$ обертанням навколо сліду $\mathbf{f_\alpha}$.

Побудову виконують, відклавши на довільній прямій від точки $\mathbf{A_0}$ відстані, що дорівнюють відстані між ребрами призми $\mathbf{A_0B_0=A_1B_1}$, $\mathbf{B_0C_0=B_1C_1}$,

$C_0D_0=C_1D_1$ і **$D_0A_0=D_1A_1$**. На перпендикулярах з точок **A_0**, **B_0**, **C_0** і **D_0** відкладають частини ребер **$A_01_0=A_21_2$**, **$B_02_0=B_22_2$**, **$C_03_0=C_23_2$** і **$D_04_0=D_24_2$**. Точки **1_0**, **2_0**, **3_0** і **4_0** з'єднують прямими й отримують лінію, по якій січна площина **α** переріже бічну поверхню призми. Дорисувавши основу призми **ABCD** і фігуру перерізу **1-2-3-4**, знаходять повну розгортку зрізаної частини заданої призми.

Нехай треба побудувати повну розгортку нижньої частини прямого колового циліндра, розрізаного фронтально-проектуючою площиною **α**
(рис. 14.2).

Пояснення. Для виконання побудови потрібно визначити лише фігуру перерізу, оскільки усі інші елементи циліндра – відомі.

Фігурою перерізу у цьому випадку буде еліпс, дійсну величину якого знаходять заміною площини проекцій **$П_1$**.

Розгортають коло діаметром **d** у пряму **0_0-8_0**, позначають на прямій точки **0_0**, **1_0**, **2_0**, **...**, **8_0**, з яких опускають перпендикуляри і відкладають на них дійсні величини твірних – відрізки **OA_0**, **$1B_0$**, **$2C_0$**, **...**, **$8A_0$**. Отримані точки **A_0**, **B_0**, **C_0**, ... з'єднують плавною кривою, яка буде розгорнутою лінією перерізу бічної поверхні циліндра січною площиною **α**.

Для отримання повної розгортки поверхні зрізаної частини циліндра дорисовують фігури основи й перерізу.

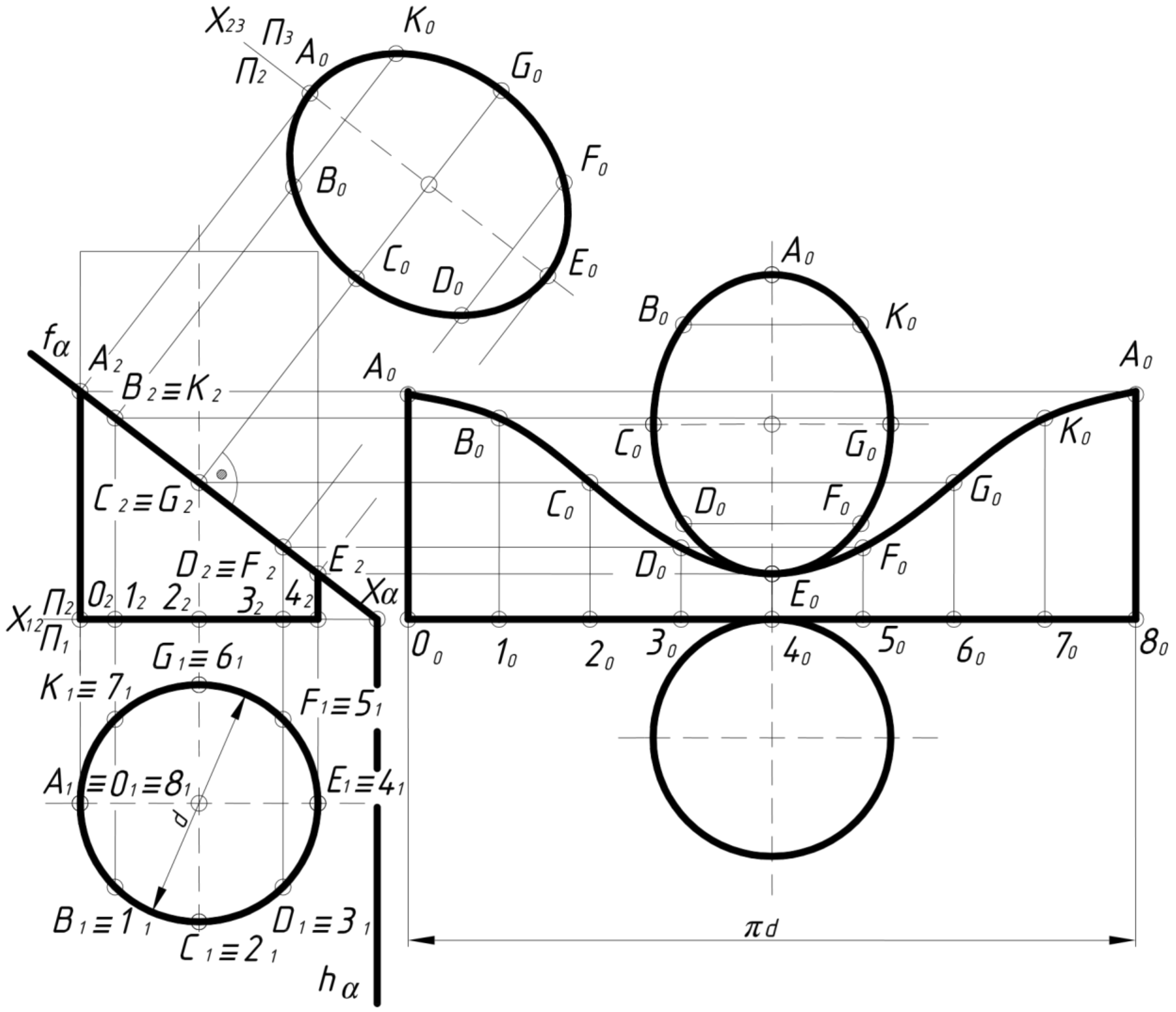


Рис. 14.2

14.2. Побудова розгорток піраміди і конуса

Побудову розгортки поверхні піраміди виконують шляхом послідовної побудови ряду трикутників (за трьома їх сторонами), кожен з яких дорівнює величині відповідної грані піраміди. Отже, розгортання поверхні піраміди можна виконати за таким планом:

1. Визначити довжину ребер і сторони основи піраміди.
2. Побудувати послідовно у площині рисунка трикутники – грані піраміди.

Якщо піраміда стоїть основою на якійсь площині проекцій, то довжини сторін беруть безпосередньо з цієї площини без допоміжних побудов.

Для визначення довжини бічних ребер піраміди можна використати відомі способи знаходження дійсної величини відрізка прямої за його проекціями.

На рис. 14.3 показано побудову повної розгортки поверхні піраміди **SABC**, яка стоїть на площині проекцій **$П_1$**. Тому для побудови граней **SAB**, **SBC** і **SCA** достатньо визначити величини ребер **SA**, **SB** і **SC**, що й виконують у даному разі способом обертання їх навколо осі **l** до положення, паралельного до площини проекцій **$П_2$**.

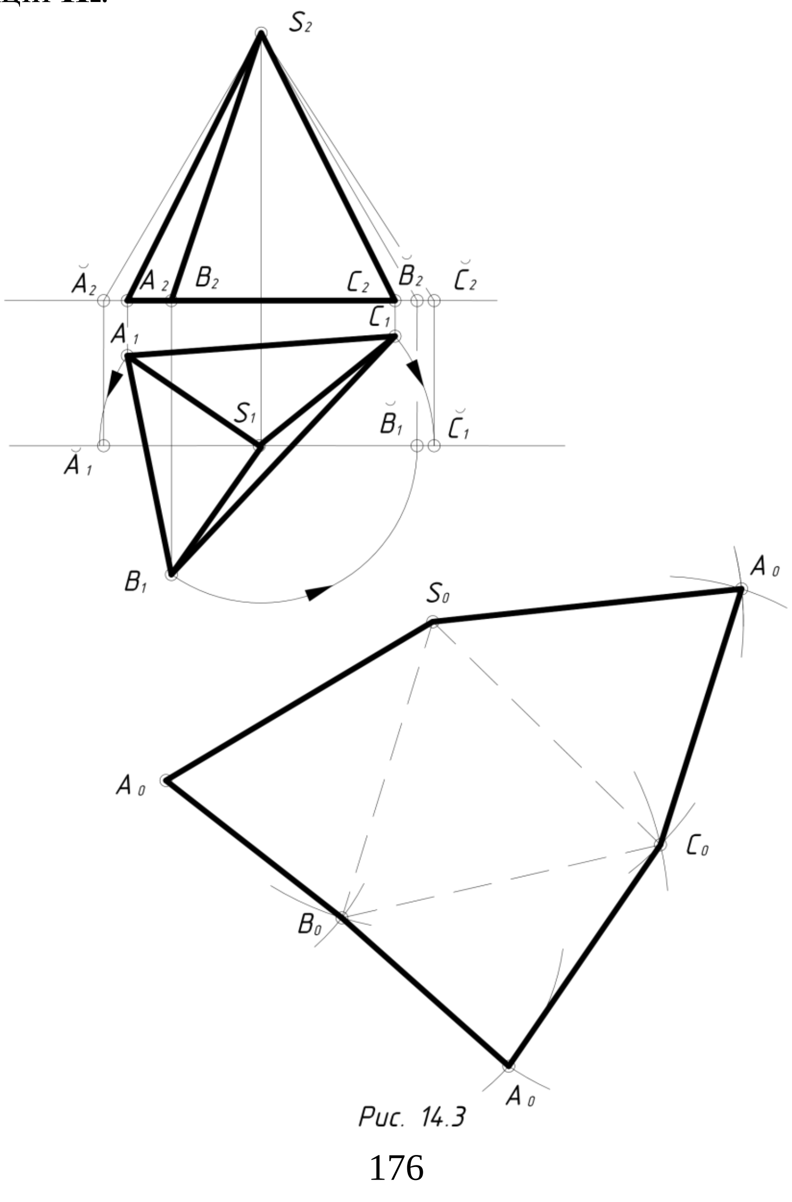


Рис. 14.3

Отже, нові положення ребер $\mathbf{S_2A_2}^{\cup}$, $\mathbf{S_2B_2}^{\cup}$**,** і $\mathbf{S_2C_2}^{\cup}$ є дійсними їх величинами. Оскільки сторони основи піраміди лежать у площині проекцій $\mathbf{П_1}$**,** їх дійсні величини вимірюють на цій площині проекцій. Для побудови розгортки на вільному місці рисунка вибирають довільну точку $\mathbf{S_0}$ і за допомогою засічок будують трикутник $\mathbf{S_0A_0B_0}$, що дорівнює дійсній величині грані **SAB**. Подібно будують трикутники $\mathbf{S_0B_0C_0}$ і $\mathbf{S_0C_0A_0}$. У результаті отримують розгортку бічної поверхні призми. Для визначення повної розгортки добудовують основу – трикутник $\mathbf{A_0B_0C_0}$.

У випадку необхідності побудови розгортки поверхні зрізаної піраміди слід нанести на дійсні величини ребер точки перетину їх із січною площиною і сполучити ці точки прямими лініями на розгортці бічної поверхні. Для повної розгортки зрізаної частини тіла необхідно дорисувати фігури основи й перерізу.

Розгортання конічної поверхні виконують у загальному випадку за схемою розгортання поверхні піраміди.

Нехай необхідно побудувати розгортку прямого колового конуса (рис. 14.4).

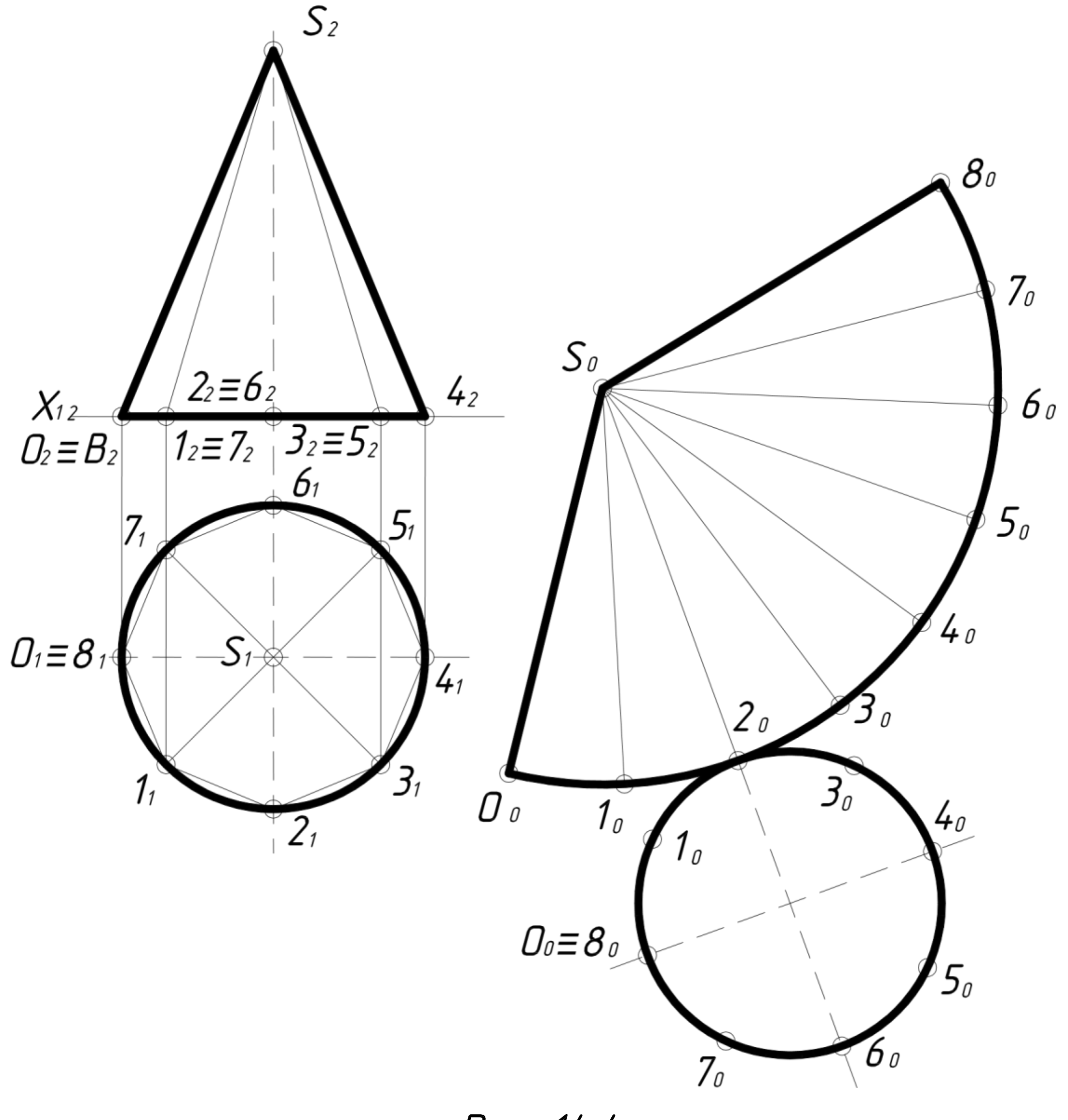


Рис. 14.4

Пояснення. Для побудови розгортки вписують у конус піраміду. Зрозуміло, що побудова розгортки конічної поверхні теоретично буде більш точною при більшій кількості граней піраміди. У нашому прикладі вписана восьмигранна піраміда. Дійсні величини твірних піраміди і сторін основи визначають тут без допоміжних побудов.

Маючи ці величини, будують розгортку бічної поверхні піраміди як сукупність трикутників – бічних граней піраміди. Побудована таким способом фігура є наближеною розгорткою бічної поверхні даного тіла. Для повної розгортки слід дорисувати круг – основу конуса.

Інший, аналітичний спосіб побудови бічної поверхні прямого кругового конуса випливає з того, що бічна поверхня розгортається у коловий сектор, радіус якого дорівнює довжині твірної, а кут сектора визначається за формулою $\boldsymbol{\alpha = (d/t) \times 180^{\circ}}$, де **d** – діаметр кола основи конуса і **t** – довжина твірної конуса (рис. 14.5).

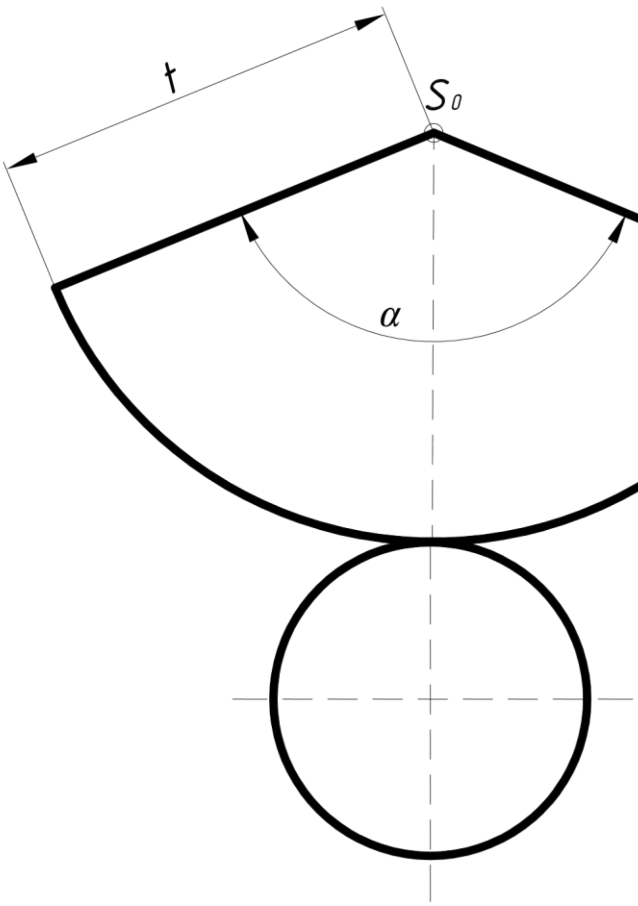


Рис. 14.5

14.3. Способи побудови розгорток. Спосіб нормального перерізу. Спосіб трикутників і спосіб розгортання

Для знаходження розгортки бічної поверхні многогранної чи кривої поверхні способом нормального перерізу необхідно виконати такі побудови:

1) перерізати поверхню площиною, перпендикулярною до ребер або твірних поверхні;

2) визначити дійсну величину перерізу;

3) розгорнути переріз у пряму;

4) через характерні точки лінії перерізу провести перпендикуляри, на яких відкласти довжини відрізків ребер або твірних, розміщених між лінією перерізу й основами;

5) кінці відрізків з'єднати прямими (або кривими у випадку циліндричної поверхні) лініями.

Дійсні величини ребер або твірних, а також сторін фігури нормального перерізу знаходять одним із відомих способів побудови довжини відрізка прямої. Для отримання повної розгортки дорисовують основи даного тіла.

У випадку загального положення ребер або твірних щодо площин проекцій площина нормального перерізу є також площиною загального положення і знаходження дійсної величини фігури перерізу потребує застосування одного з способів перетворення проекцій.

Розглянемо це на прикладі побудови розгортки поверхні еліптичного циліндра, розміщеного похило до площин проекцій (рис. 14.6).

Для побудови розгортки необхідно визначити дійсні величини твірних циліндра і його нормального перерізу.

З цією метою застосовують плоскопаралельне переміщення. Переміщують горизонтальну проекцію циліндра на вільне місце рисунка так, щоб його твірні зайняли положення фронтальних прямих, і будують нову фронтальну проекцію циліндра.

Тепер на фронтальній площині проекцій твірні циліндра проектуються в дійсну величину. Потім знаходять нормальний переріз циліндра площиною **α**, проведеною перпендикулярно до його осі у будьякій її точці.

Фронтальна проекція перерізу збігається зі слідом $\mathbf{f_\alpha}$. На горизонтальній площині проекцій позначають лише точки $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$ і $\mathbf{D_1}$ – проекції кінців осей еліпса. Дійсну величину перерізу знаходять способом суміщення площини **α**. Для побудови розгортки бічної поверхні циліндра дійсну величину перерізу – еліпс – поділяють на кілька частин додатковими точками $\mathbf{2_2^\cup}$, $\mathbf{3_2^\cup}$, $\mathbf{4_2^\cup}$ і $\mathbf{5_2^\cup}$ (окрім точок $\mathbf{A_2^\cup}$, $\mathbf{B_2^\cup}$, $\mathbf{C_2^\cup}$ і $\mathbf{D_2^\cup}$ – кінців осей еліпса) і відкладають частини еліпса на довільній прямій **t**: $\mathbf{A_05_0 = A_2^\cup 5_2^\cup}$, $\mathbf{5_0C_0 = 5_2^\cup C_2^\cup}$, $\mathbf{C_02_0 = C_2^\cup 2_2^\cup}$,... Через точки $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{5_0}$, $\mathbf{C_0}$,... проводять до прямої перпендикуляри, на яких з обох боків від прямої відкладають дійсні величини відповідних твірних, які беруть з фронтальної площини проекцій. Відкладаючи від прямої **t** вниз відрізок $\mathbf{A_0M_0 = A_2M_2}$ і вгору відрізок $\mathbf{A_0N_0 = A_2N_2}$, будують твірну **MN** на розгортці. Аналогічно визначають усі твірні, проведені через відповідні точки на еліпсі. З'єднують плавними кривими лініями точки на кінцях сусідніх твірних і отримують розгортку бічної поверхні заданого циліндра.

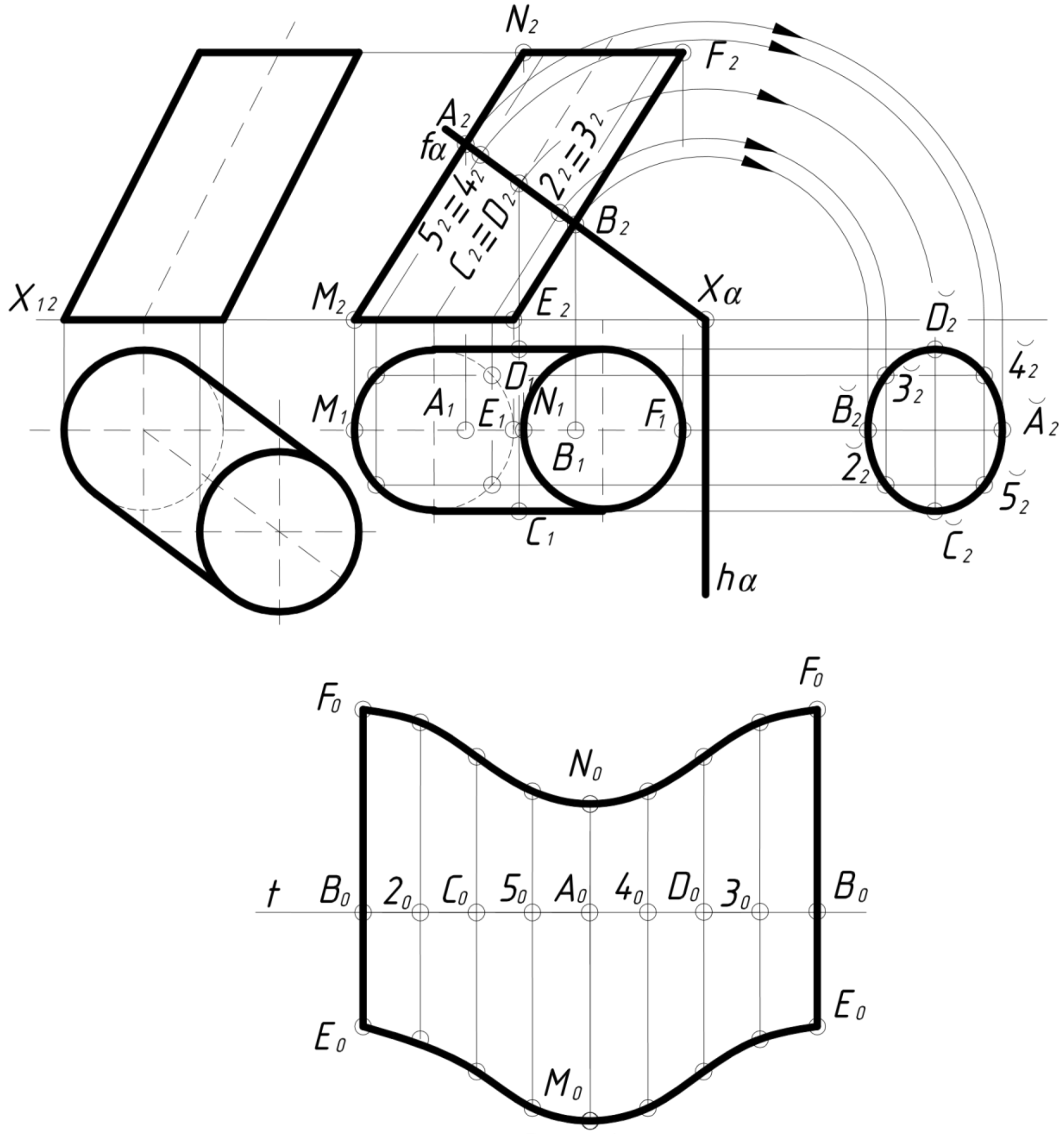


Рис. 14.6

Суть способу трикутників полягає у тому, що грані призми – чотирикутники – розбивають діагоналями на трикутники, які легко побудувати, визначивши дійсні величини сторін трикутників будь-яким із відомих способів побудови довжини відрізків.

На рис. 14.7 показано розбивку граней призми на трикутники **1, 2, 3, 4, 5,** і **6**. Далі визначають дійсні величини сторін цих трикутників і будують послідовно у площині креслення їх дійсні величини, дотримуючись порядку розміщення трикутників на гранях призми. Отримана фігура буде розгорткою бічної поверхні даного тіла. Добудувавши фігуру основ, знаходять повну розгортку поверхні призми.

Спосіб розгортання застосовується, якщо основа призми або циліндра зображається на одній з площин проекцій у дійсну величину (рис. 14.8).

Побудова розгортки за цим способом зводиться до послідовного суміщення граней призми або поверхні циліндра з площиною.

Для знаходження дійсних величин граней використовують спосіб обертання площини навколо прямої рівня. Площинами тут є грані призми, а за осі обертання приймають одну зі сторін граней. Побудову виконують на фронтальній площині проекцій і починають з розгортання грані **ABFE**, обертаючи її навколо ребра **AB**. Точки **F** і **E** будуть ковзати у площинах обертання перпендикулярно до осі обертання, тобто ребра **AB**. Проводять з точок $\mathbf{E_2}$ і $\mathbf{F_2}$ перпендикуляри (сліди площин обертання) до $\mathbf{A_2B_2}$ – фронтальної проекції осі обертання. Тепер з точок $\mathbf{A_2}$ і $\mathbf{B_2}$, як із центрів, роблять засічки на цих перпендикулярах радіусом **R**, що дорівнює стороні $\mathbf{AE = A_1E_1}$ основи, яка належить грані **ABFE**.

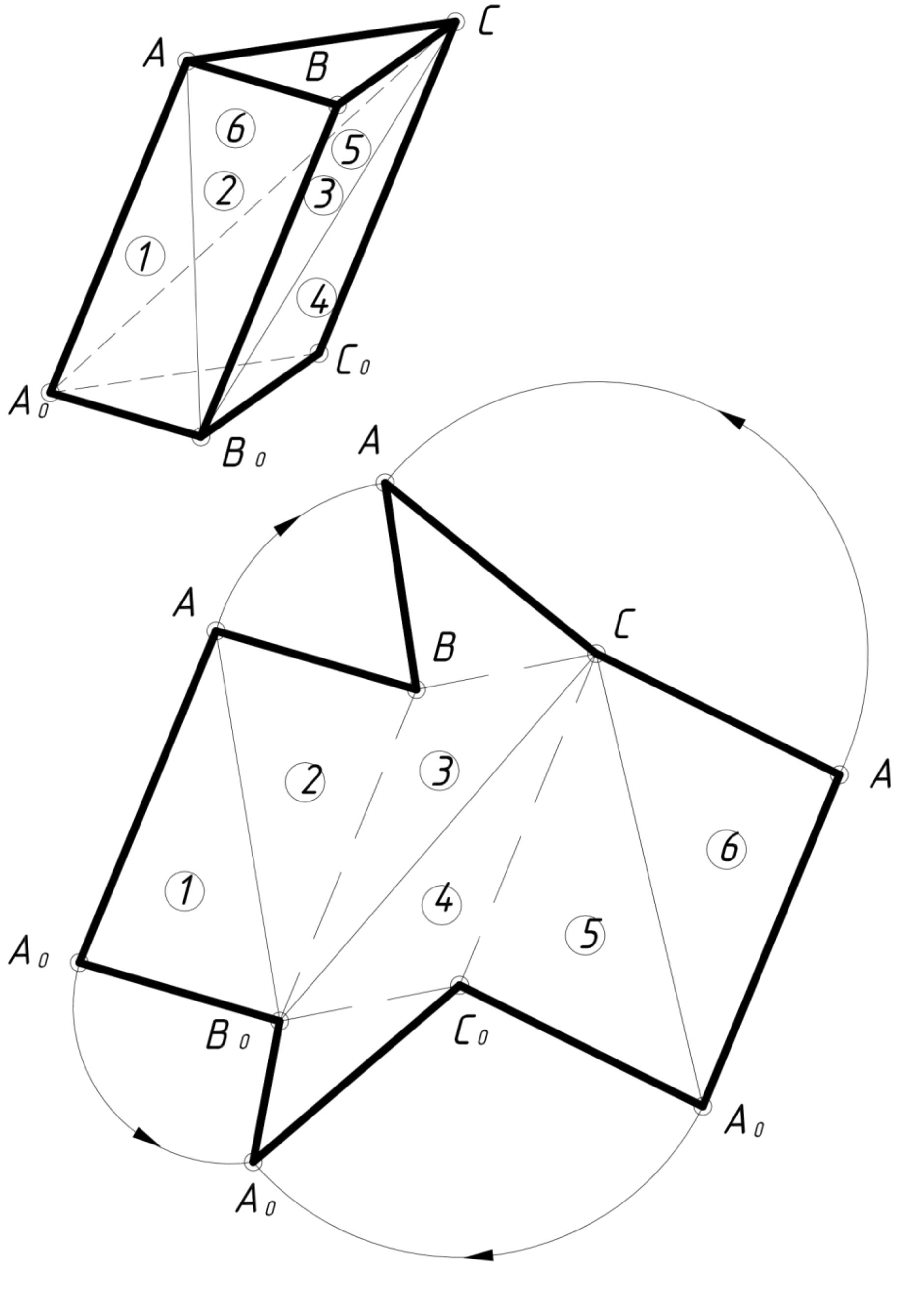


Рис. 14.7

Позначивши точки **E_0** і **F_0**, будують суміщену грань **$A_2B_2F_0E_0$**. Наступну грань **EFDC** обертають навколо ребра **EF**. Точки **C** і **D** ковзають у площинах, перпендикулярних до ребра **CD**. Тому із точок **C_2** і **D_2** проводять перпендикуляри до **C_2D_2** і позначають на них точки **C_0** і **D_0** як засічки з радіусом **$EC = E_1C_1$**.

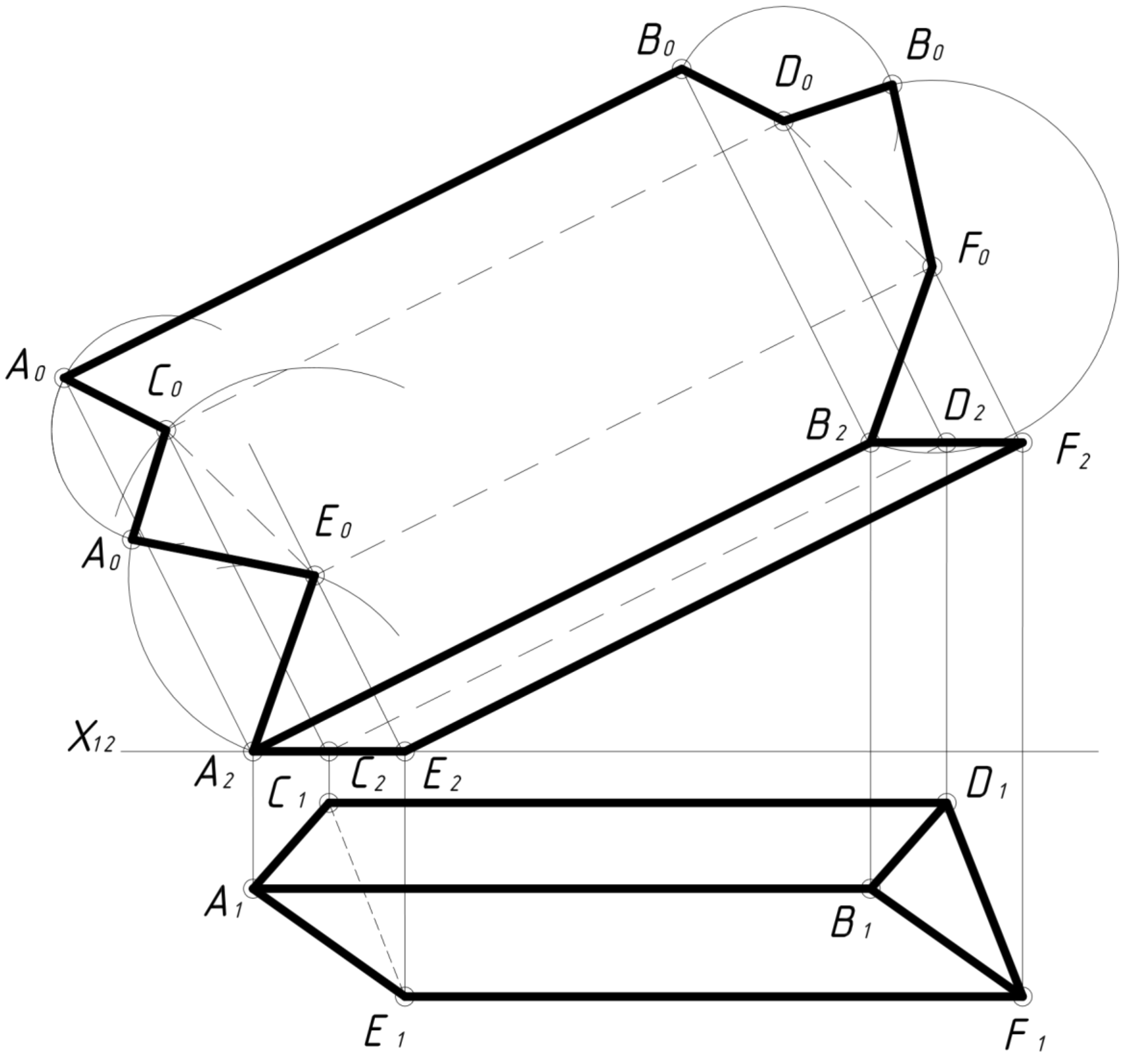


Рис. 14.8

Грань **CDFE** суміщена у площину грані **ABFE**. Останню грань **ABDC** суміщають, знайшовши точки **A_0** і **B_0**. Для повної розгортки добудовують основи – трикутники **$A_0C_0E_0$** і **$B_0D_0F_0$** за відомими їх сторонами.

14.4. Способи наближеного розгортання поверхонь

Розгортка нерозгортної поверхні будується наближено. Її розбивають на невеликі частини (елементи) і замінюють кожну таку частину розгортною, тобто площиною.

Розглянемо це на прикладі побудови розгортки сфери. З цією метою її поверхню розбивають на частини по меридіанах (рис. 14.9) або по паралелях (широтах) (рис. 14.10).

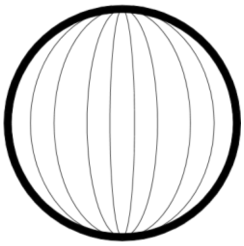


Рис. 14.9

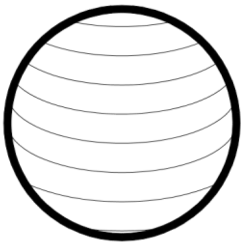


Рис. 14.10

У першому випадку поверхню сфери поздовжньо поділяють на ряд рівних частин за допомогою площин, проведених через вісь сфери **MN** (рис. 14.11). Поділ роблять на шість частин. Для зручності фронтальні проекції лінії перетину (меридіани) не показані.

Потім поділяють головний меридіан на шість рівних частин і через точки поділу проводять паралелі, горизонтальні проекції яких будуть кола відповідних діаметрів, що пройдуть через точки A_1^1, B_1^1, ... перетину цих кіл з горизонтальними проекціями меридіанів.

Маючи ці точки (а також симетричні до них на нижній півкулі), можна побудувати наближену розгортку поверхні частини сфери, замінивши дуги кіл на горизонтальній площині проекцій між двома точками на відповідних паралелях прямими, дотичними до кіл.

Наприклад, відрізок A_1B_1 заміняє дугу $A_1^1B_1^1$. Розгортають одну частину сфери. Для цього на довільно проведеній прямій відкладуать відрізок A_0B_0, який дорівнює хорді дуги $A_1^1B_1^1$. Потім через середину цього відрізка проводять перпендикуляр, на якому вгору і вниз відкладають точки 1_0, 2_0, 3_0 і 4_0 на відстанях одна від одної, що дорівнюють відповідно хордам дуг A_2C_2,, C_2E_2 і E_2M_2 на фронтальній площині проекцій. Через точки 1_0, 2_0, 3_0 і 4_0 проводять перпендикуляри до осі M_0N_0 частини сфери і позначають на них з обох боків від осі на рівних відстанях від неї точки C_0 і D_0, E_0 і F_0. Довжини відрізків C_0D_0 і E_0F_0 будують аналогічно побудові довжини відрізка A_0B_0.

Визначивши таким способом ширину частини поверхні у різних її місцях, з'єднують точки A_0, C_0, E_0, M_0, F_0, D_0 і B_0 плавними кривими лініями й отримують фігуру, яка є наближеною розгорткою половини шостої частини сфери. Розгортка другої половини симетрична відносно прямої A_0B_0.

Повна розгортка поверхні сфери складається з шести таких самих частин.

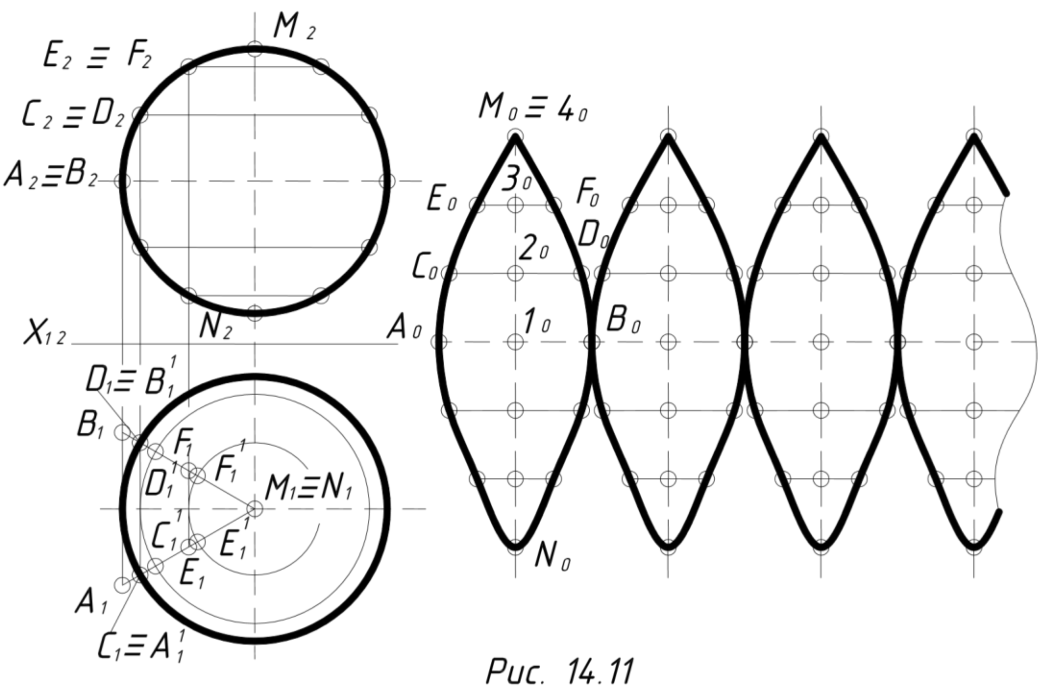


Рис. 14.11

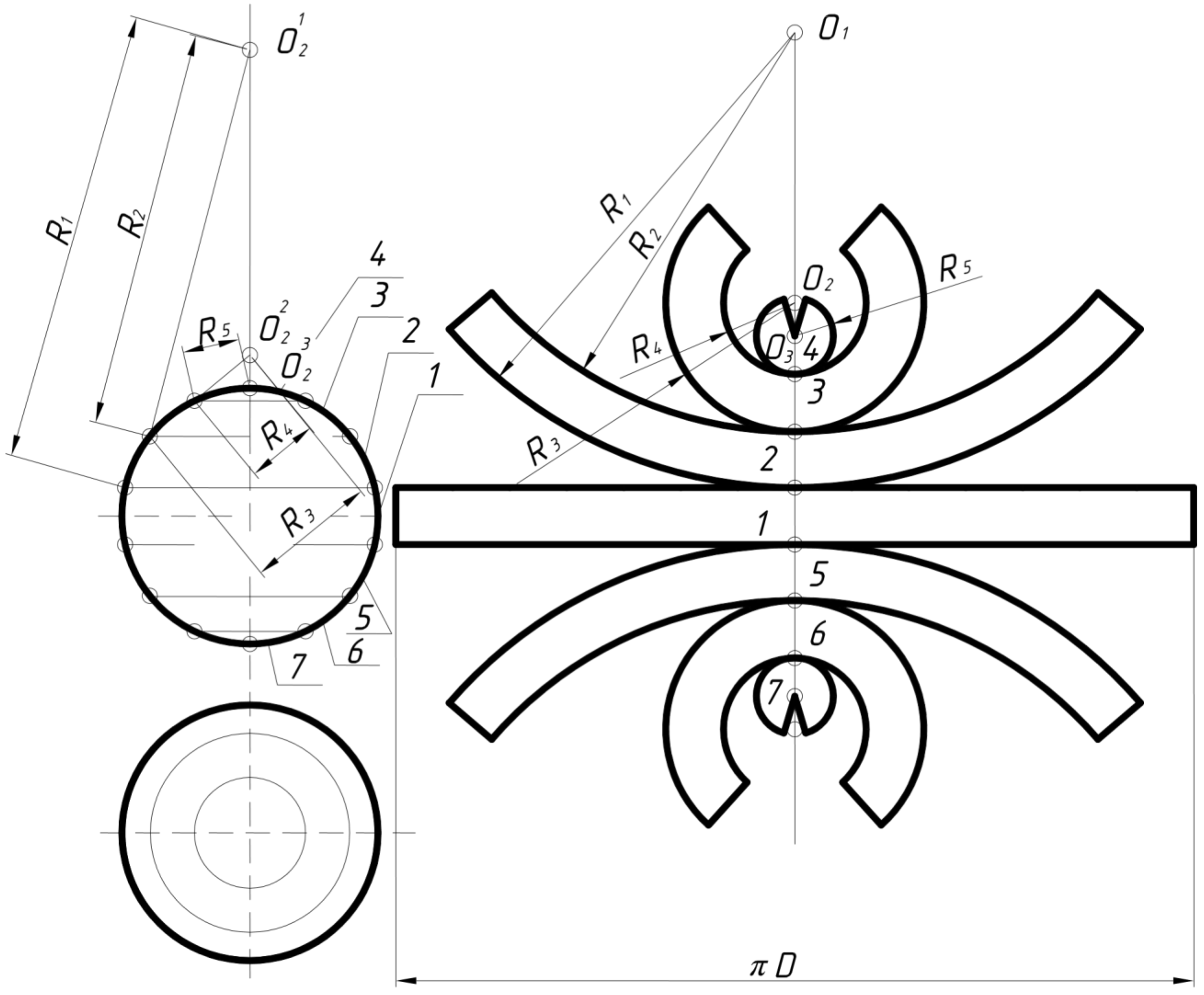


Рис. 14.12

Другий спосіб побудови наближеної розгортки поверхні сфери – широтний. Суть його полягає у тому, що сферу поділяють горизонтальними площинами на ряд поясів, які приймають за зрізані конуси, окрім середнього, екваторіального (що приймається за циліндр).

Розгортку поясів будують за правилами розгортання цих поверхонь (рис. 14.12).

Подібно можна побудувати розгортки інших поверхонь обертання. Побудову розгорток складніших поверхонь виконують як розглянутими вище, так і спеціальними способами.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається розгорткою поверхні?
2. Ячкі поверхні називаються розгортними, які нерозгорними?
3. Що являє собою розгортка многогранника?
4. Способи побудови розгортки призми.
5. Яким способом будується розгортка піраміди?
6. Якими сособами виконуються розгортки циліндрів, конусів?
7. Суть способу нормального перерізу.
8. Суть способу розгортання.
9. Суть способу трикутників.
10. Як будується розгортка нерозгортних поверхонь?

15. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Зображення об'єктів, виконані в системі ортогональних проекцій, часто не мають достатньої наочності. Треба мати розвинену просторову уяву і досвід роботи із зображеннями на комплексному рисунку. В зв'язку з цим такі зображення доповнюють їхніми аксонометричними проекціями, які дають можливість повніше уявити зображені об'єкти.

15.1. Утворення аксонометричних проекцій

Аксонометрія (від грецьк. *axon – вісь, metreo – виміряю*) є розділом теорії зображень, в якому розглянуто побудову аксонометричних проекцій об'єктів. Ідея аксонометрії полягає в тому, що об'єкт разом із осями просторової декартової системи координат, що пов'язана з ним, проектується на аксонометричну площину проекцій.

На рис. 15.1 показано утворення аксонометричної проекції точки **A** простору. Вона разом із просторовою системою координат **Oxyz** паралельно напрямку проектування **S** проектується на аксонометричну площину проекцій **П**$^{/}$. Напрямок проектування **S** складає кут □ з площиною **П**$^{/}$. Напрям аксонометричного проекціювання обирають таким чином, щоб він не співпадав із напрямом координатних осей чи площин. На площині **П**$^{/}$ утворюються аксонометричні осі $O^{/}x^{/}y^{/}z^{/}$ та аксонометрична проекція **A**$^{/}$ точки **A**.

Щоб побудувати аксонометрію предмета, спочатку необхідно віднести його до системи трьох взаємно перпендикулярних площин, що співпадають із площинами проекцій, вибрати аксонометричну площину і напрям проектування, а потім на основі паралельного проектування за заданим напрямом на площині побудувати проекцію предмета разом із прямокутними координатними осями. Розрізняють прямокутну та косокутну аксонометрію. В першому випадку кут між напрямом проектування та площиною аксонометричних проекцій – прямий, у другому – непрямий. У загальному випадку координатні осі, а разом із ними й об'єкт, проектується на аксонометричну площину проекцій **П**$^{/}$ зі спотворенням. Якщо на кожній з координатних осей **x, y, z** (див. рис. 15.1) від точки **0** відкласти відрізки e_x, e_y, e_z, довжини яких дорівнюють одиничному відрізку *e*, то внаслідок проектування отримаємо їх аксонометричні проекції $e_x^{/}$, $e_y^{/}$, $e_z^{/}$.

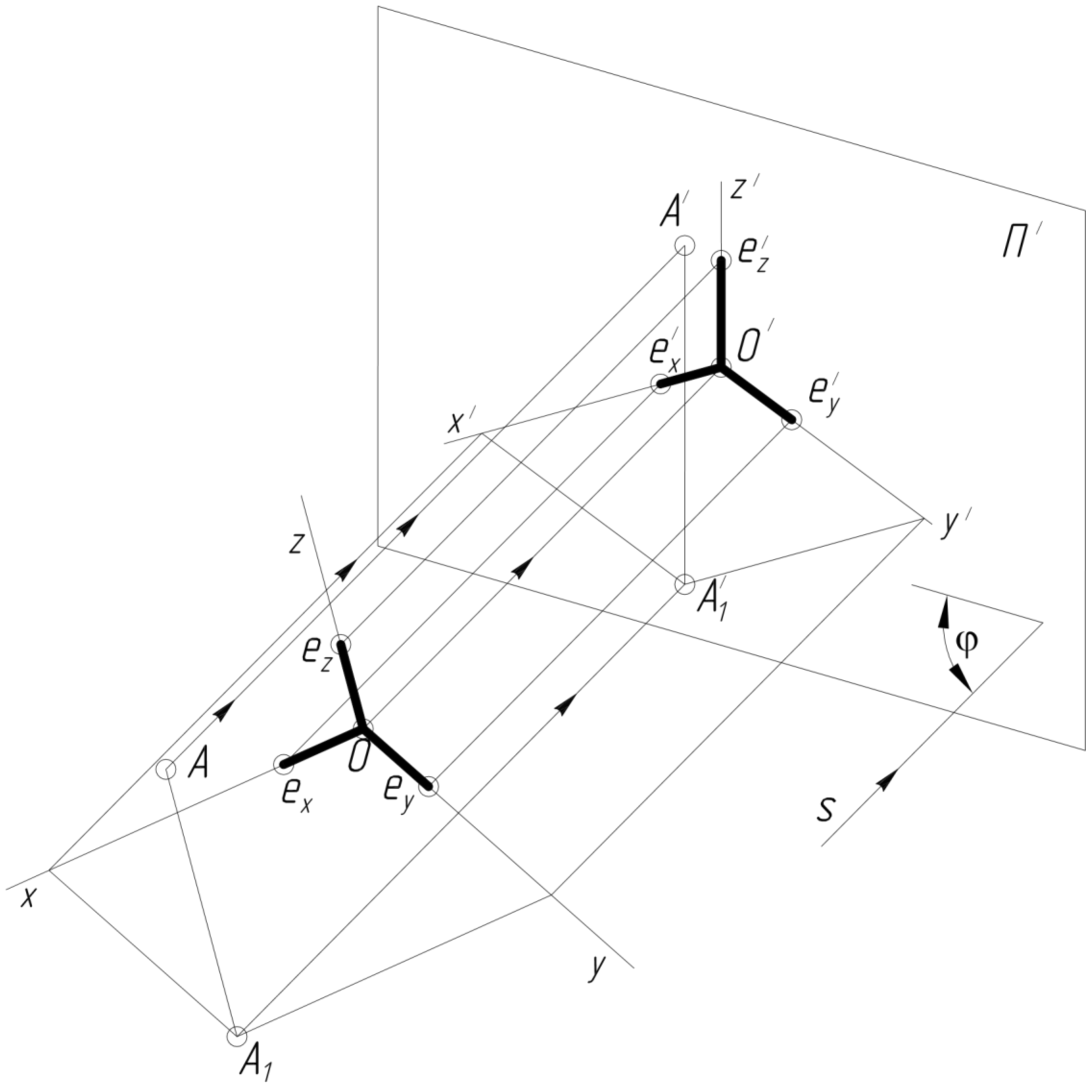


Рис. 15.1

Відношення аксонометричних проекцій відрізків до їх дійсних величин називають коефіцієнтами або показниками спотворення:

$$\mathbf{e'_x / e_x = u;\ e'_y / e_y = v;\ e'_z / e_z = w}. \qquad (1)$$

Оскільки $\mathbf{e_x = e_y = e_z = e}$, то:

$$\mathbf{e'_x / e = u;\ e'_y / e = v;\ e'_z / e = w}. \qquad (2)$$

Існує залежність між показниками спотворення і кутом проектування:

$$\mathbf{u^2 + v^2 + w^2 = 2 + ctg^2\, \varphi}. \qquad (3)$$

Для прямокутної аксонометрії, де $\boldsymbol{\varphi = 90^0}$, **а** $\mathbf{ctg\ 90^0 = 0}$, буде:

$$\mathbf{u^2 + v^2 + w^2 = 2}. \qquad (4)$$

Основною теоремою паралельної аксонометрії є теорема ПолькеШварца, яка стверджує: *будь-які три відрізки на площині, що виходять з однієї точки, можна розглядати як паралельні проекції трьох рівних та взаємно перпендикулярних відрізків у просторі.* Згідно з цією теоремою аксонометричні осі на площині проекцій, а також відношення показників спотворення можна задавати як завгодно.

Коли показники спотворення по всіх трьох осях однакові, тобто **u=v=w**, то аксонометрію називають ізометрією, якщо **u=w≠v**, вона має назву диметрії, а якщо **u≠v≠w** – триметрії.

ГОСТом 2.317-69 встановлено такі види аксонометричних проекцій: прямокутні – ізометрію та диметрію, косокутні – фронтальну ізометрію й диметрію та горизонтальну ізометрію.

У прямокутній ізометрії всі три координатні осі однаково нахилені до аксонометричної площини проекцій, а тому **u=v=w**. Тоді згідно з формулою (4) $3u^2=2$, звідки $u = \sqrt{2/3} = 0.82$. Кут між осями на аксонометричній площині проекцій становить 120^0 (рис. 15.2).

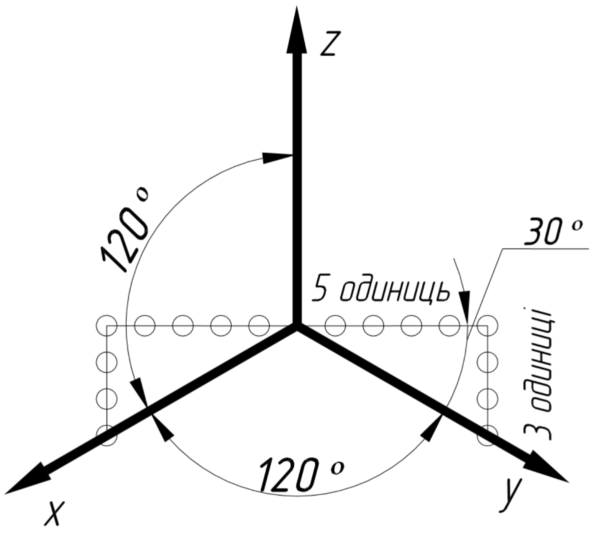


Рис.15.2

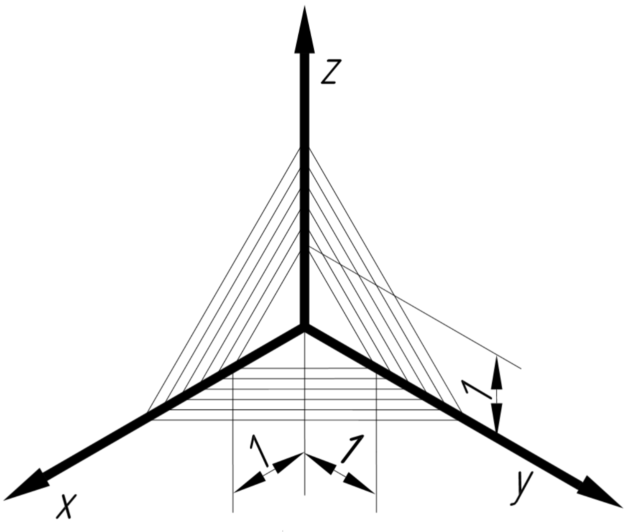


Рис. 15.3

На рис. 15.2 показано спрощений спосіб побудови аксонометричних осей.

Для зручності приймають, що показник спотворення по осях дорівнює одиниці, який призводить до збільшення зображення в 1,22 раза (1:0,82=1.22). Такі показники називають приведеними показниками спотворення.

При виконанні розрізів у прямокутній ізометрії штриховку в аксонометричних площинах виконують згідно з рис. 15.3.

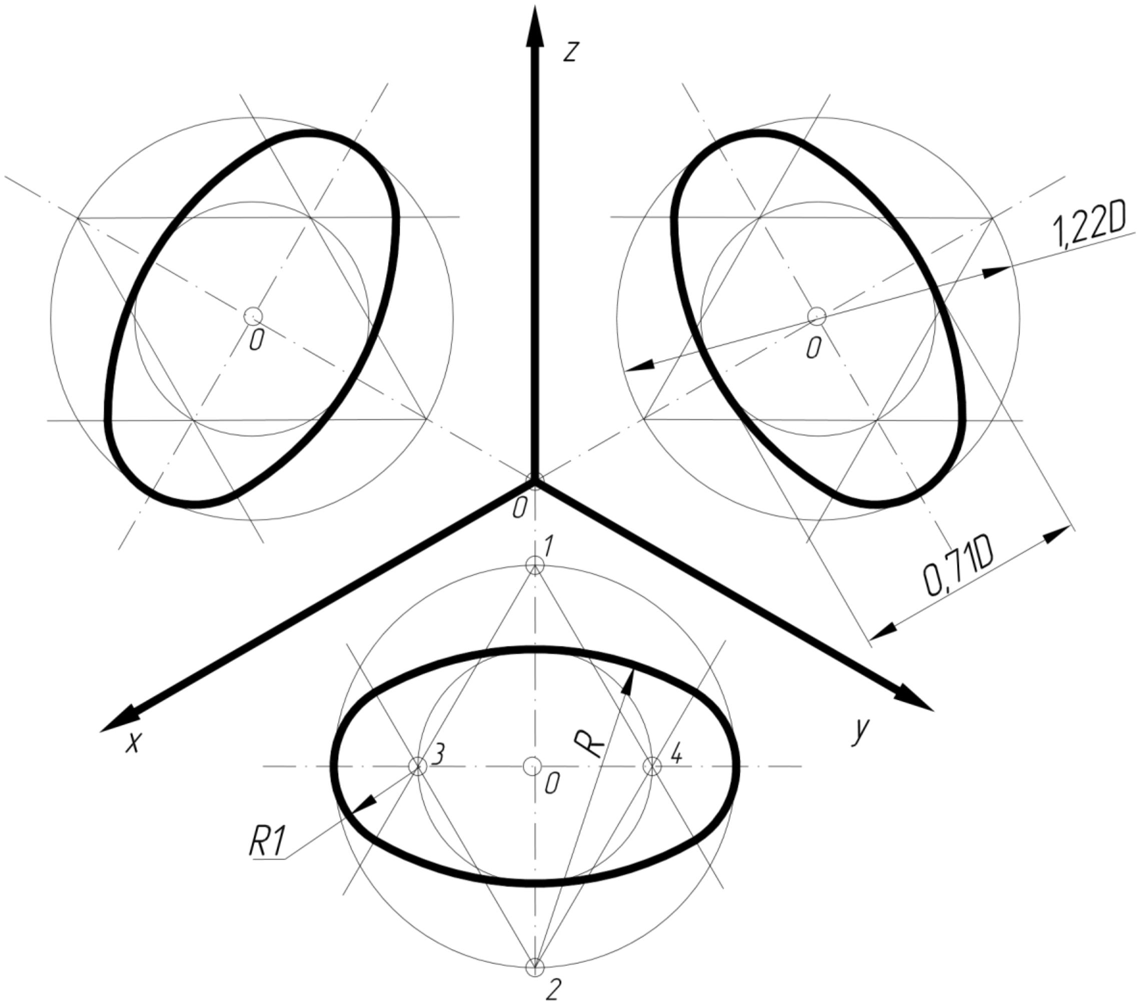


Рис. 15.4

Кола, що лежать у площинах, паралельних до площин проекцій, на аксонометричну площину проектуються в еліпси (рис. 15.4). Осі еліпсів у прямокутній аксонометрії мають певний напрям: велика вісь перпендикулярна до третьої аксонометричної осі, а мала – паралельна їй. Величина великої осі дорівнює **1.22D**, а малої – **0.71D**, де **D** – діаметр кола. Оскільки побудова еліпсів трудомістка, їх замінюють овалами. Це дає змогу будувати аксонометрію кола за допомогою циркуля. На рис. 15.4 зображено побудову еліпсів за допомогою допоміжних кіл діаметром **0,71D** та **1,22D**. Точки **1** та **2** перетину великих кіл із малою віссю будуть служити центрами великих дуг овала, а точки **3** і **4** перетину малих кіл із великою віссю – центрами малих дуг. Точки спряження дуг кіл в овала будуть знаходитися на продовженні лінії центрів великої та малої дуг.

У випадках, коли потрібно повніше показати одну грань об'єкта, а другу подати скорочено, застосовують прямокутну диметрію, в якій скорочення по осі $\mathbf{y}'$ вдвічі більше, ніж по осях $\mathbf{x}'$ та $\mathbf{y}'$. Тобто **u=w, v=u/2.** Тоді згідно з формулою (4) $\mathbf{2u^2+(u/2)^2=2}$, звідки **u=8/9=0.94** а **v=0.47**.

Диметричну проекцію виконують, як правило, за наведеними показниками спотворення **u=1, v=0.5, w=1**.

Розміщення осей та спрощений спосіб їх побудови зображено на рис. 15.5.

При виконанні розрізів у прямокутній диметрії штриховку в аксонометричних площинах виконують згідно з рис. 15.6.

При виконанні розрізів у прямокутній диметрії штриховку в аксонометричних площинах виконують згідно з рис. 15.6.

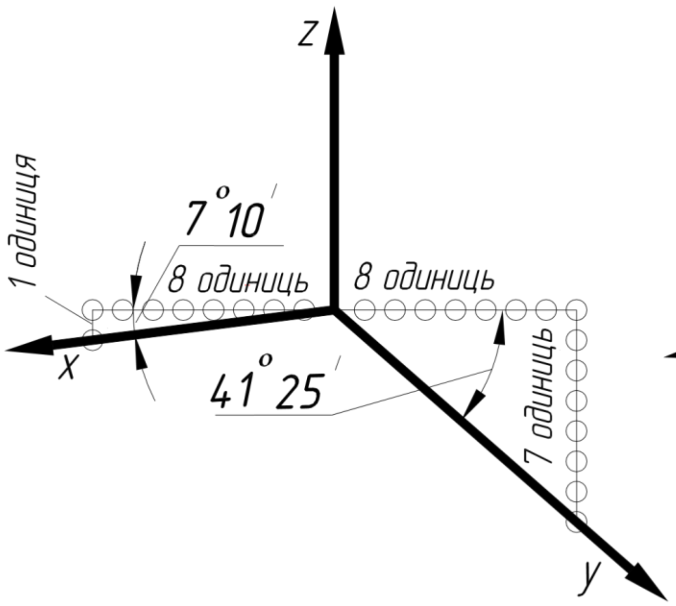


Рис. 15.5

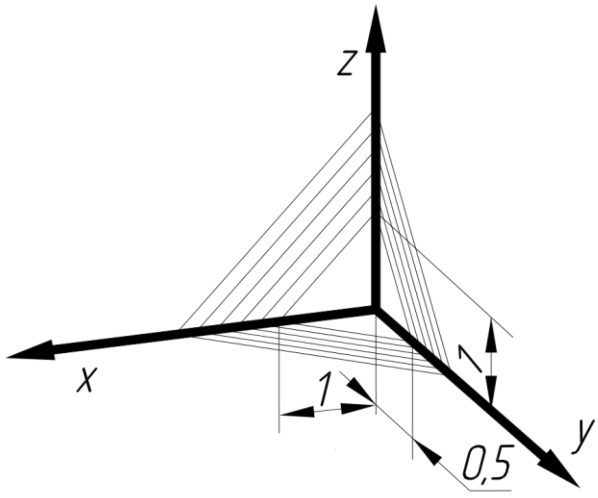


Рис.15.6

Кола, що лежать у площинах, паралельних площинам проекцій, проектуються на аксонометричну площину проекцій в еліпси. Для наведених показників спотворення велика вісь еліпса дорівнює **1,06D**.
Мала вісь на фронтальній площині – **0,95D**, а на горизонтальній і профільній площинах – **0,35D**.

На рис. 15.7 зображено побудову овала, що заміняє прямокутну диметричну проекцію кола в горизонтальній (профільній) площині. Спочатку проводять аксонометричні осі, через точку **O′** – вертикальну й горизонтальні прямі. На аксонометричних осях будують паралелограм, на відстані, що дорівнює **1.06** діаметра кола, від точки **O′** позначають точки **1**, сполучають їх із точками **A**. Лінія **1A** в перетині з горизонтальною віссю визначить точку **2**. Точки **1** та **2** є центрами дуг, що складають овал.

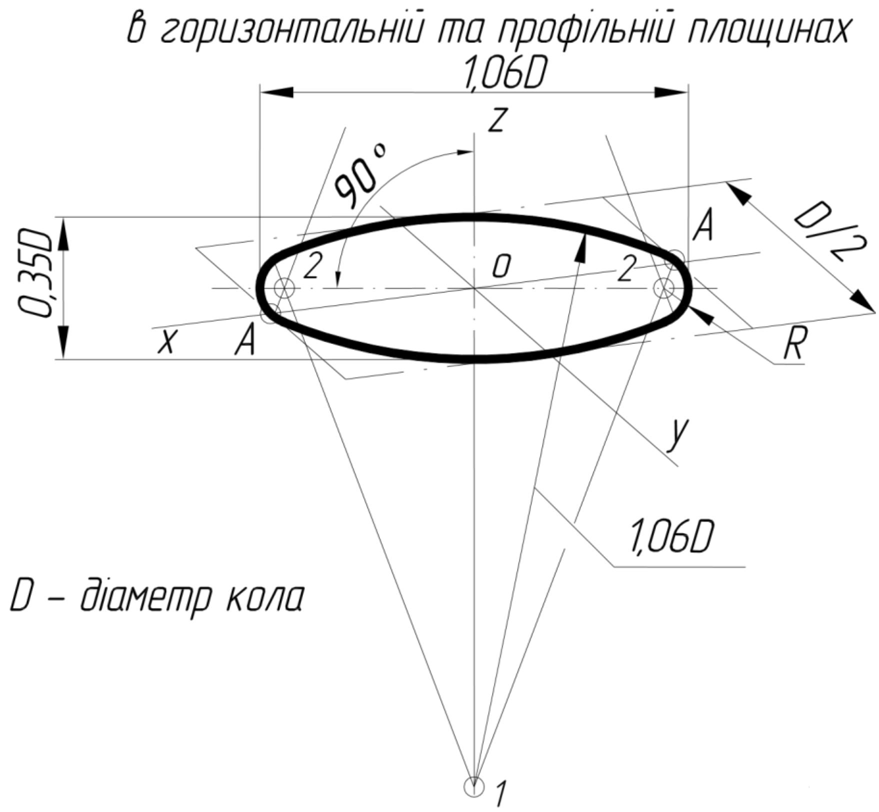


Рис. 15.7

Побудову фронтального зображення кола в прямокутній диметрії зображено на рис. 15.8. З точок **А** будують перпендикуляри до відповідних сторін ромба, знаходять точки **1** і **2** перетину перпендикулярів з діагоналями. Ці точки і є центрами дуг овала, які ми шукали.

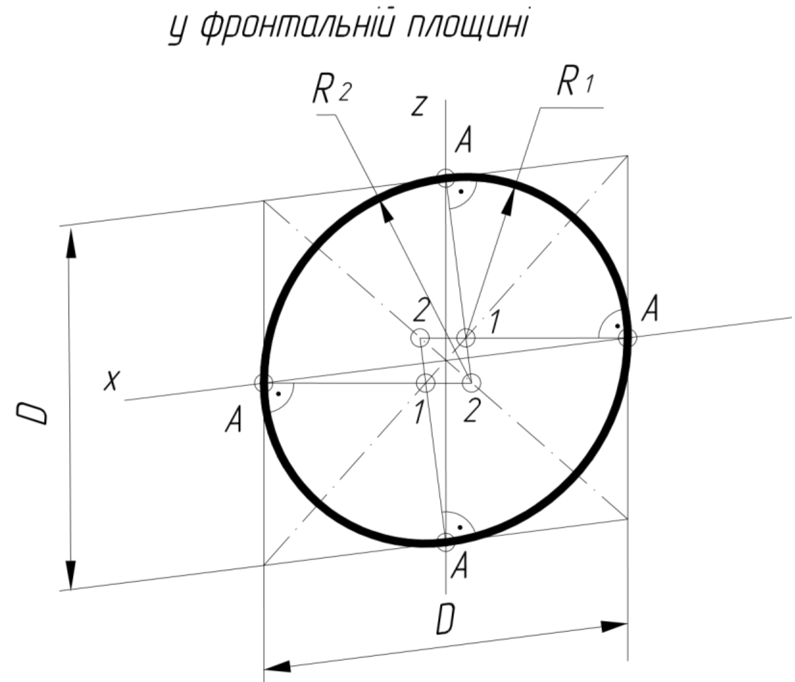


Рис. 15.8

Положення аксонометричних осей у косокутній фронтальній ізометрії зображено на рис. 15.9 зліва. Дозволяється застосовувати фронтальну ізометричну проекцію з кутом нахилу осі **Оу**$^{/}$ 30 і 60^0. Фронтальну ізометричну проекцію виконують без спотворення по осях **х, у, z**. Кола в площинах проекцій зображено на рис. 15.9 справа. Велика вісь еліпса дорівнює **1,3D**, а мала – **0,54D**.

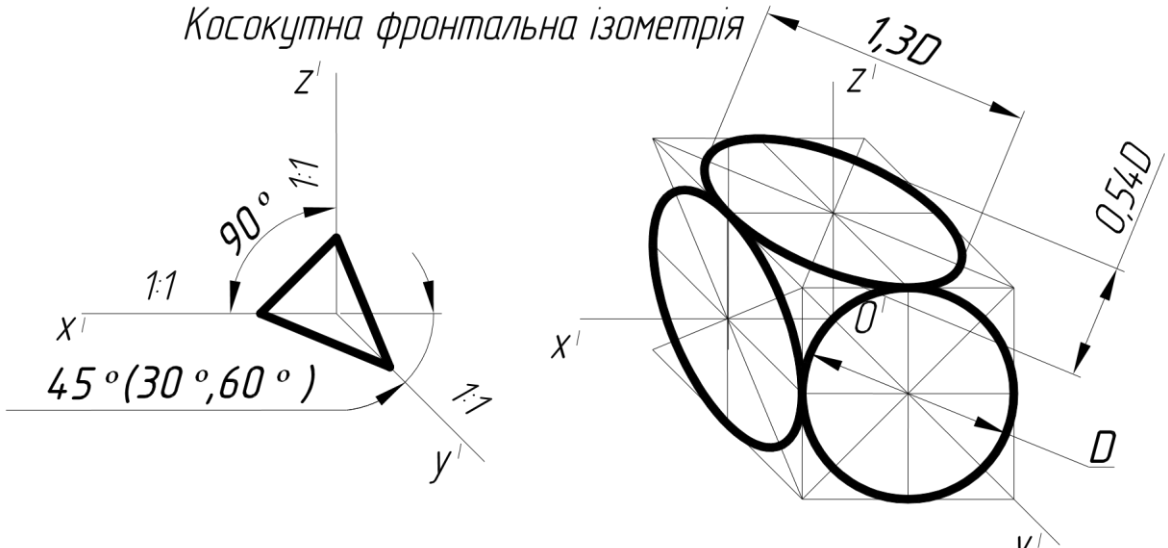


Рис. 15.9

Положення аксонометричних осей у косокутній горизонтальній ізометрії зображено на рис. 15.10 зліва.

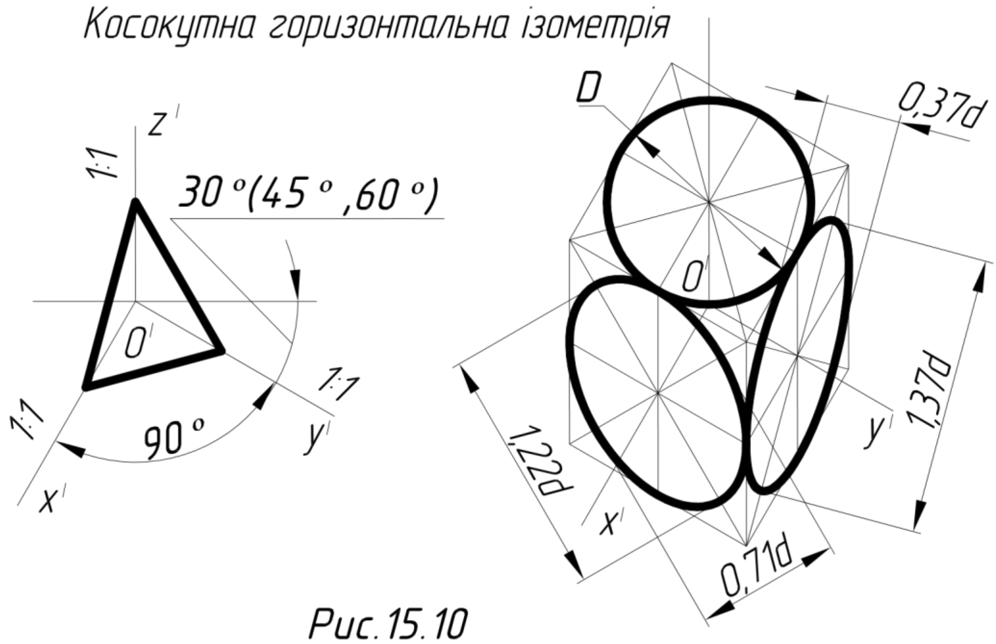


Рис.15.10

Дозволяється застосовувати горизонтальну ізометрію з кутом нахилу осі **Оу**$^{/}$ 45^0 і 60^0. Горизонтальну ізометричну проекцію виконують без спотворення осей по осях **Ox, Oy, Oz**. Кола, зорбражені в площинах проекцій, показано на рис. 15.10 справа. Розміри великих і малих осей еліпсів у різних аксонометричних площинах також подано на рис. 15.10 справа.

Косокутна фронтальна диметрія

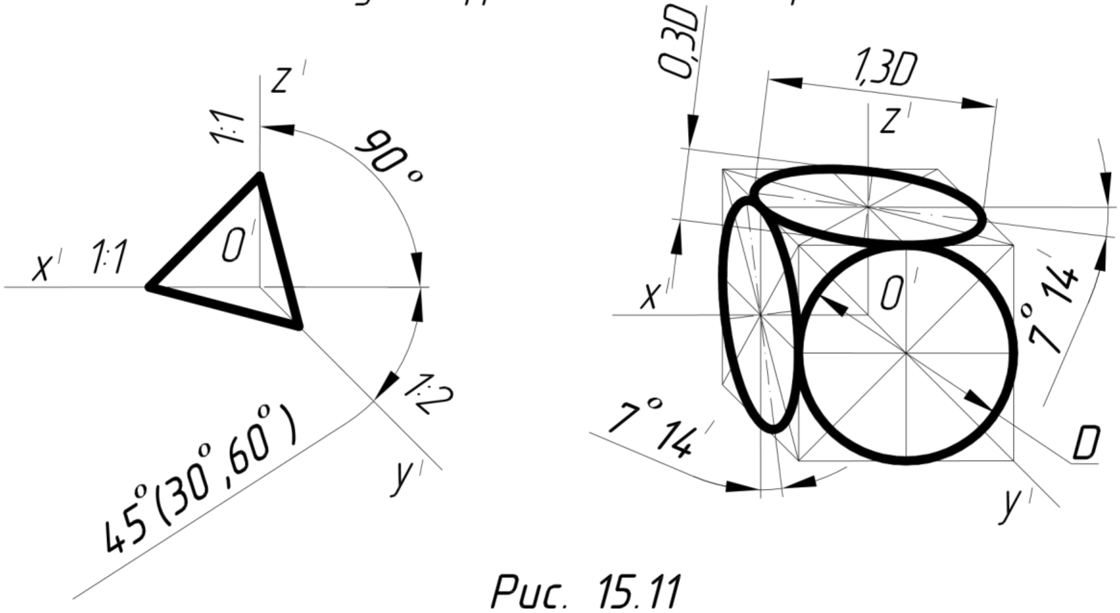


Рис. 15.11

Положення аксонометричних осей у косокутній фронтальній диметрії зображено на рис. 15.11 зліва. Дозволяється фронтальна диметрична проекція з кутом нахилу осі $\mathbf{Oy}^{/}$ 30^0 і 60^0. Коефіцієнт спотворення по осі $\boldsymbol{O}y^{/}$ дорівнює **0,5**, а по осях $\mathbf{Ox}^{/}$ і $\boldsymbol{Oz}^{/}$ – **1**. Розміщення осей еліпсів та їх розміри також зображено на рис. 15.11 справа.

При побудові аксонометричних проекцій зручно скористатися методом аксонометричних координат. Він полягає в тому, що за ортогональним комплексним кресленням визначають натуральні координати характерних точок предмета, перемножують їх на коефіцієнти скорочення (точні або приведені), чим і визначають аксонометричні координати, які відкладають на відповідних аксонометричних осях.

Аксонометричне зображення будують у такому порядку:

- вибирають вид аксонометричної проекції й з розрахунку отримання найкращої наочності;
- позначають осі координат на фігурі;
- будують осі координат в аксонометричній проекції;
- будують аксонометричне зображення вихідної форми деталі;
- будують аксонометричне зображекння решти елементів, що визначають форму деталі, будують, за необхідності, виріз частини заданої форми деталі.

15.2. Побудова аксонометричної проекції призми

На рис. 15.12*а* задано комплексне креслення правильної шестигранної призми висотою **H**. Для даної фігури призначаємо прямокутну ізометрію. Осі координат на комплексному кресленні проводимо так, щоб вони співпадали з головними осями симетрії, при цьому початок координат – точка **O** буде знаходитись у центрі нижньої основи призми. Вісь **Oz** суміститься з вертикальною геометричною віссю (з висотою) фігури. На вільному місці викреслюємо прямокутну ізометричну систему $\mathbf{Ox'y'z'}$.

Від початку координат $\mathbf{O'}$ (рис. 15.12*б*) у протилежні боки від нього відкладаємо по осі $\boldsymbol{Ox'}$ відрізки, взяті з ортогональних проекцій $\mathbf{O'A'=O_1A_1}$ і $\mathbf{O'D'=O_1D_1}$, а по осі $\mathbf{y'}$ – відрізки $\mathbf{O'1'=O_11_1}$ і $\mathbf{O'2'=O_12_1}$. Оскільки сторони **BC** і **EF** паралельні **Ox**, то і в аксонометричній проекції ця умова буде витримана. Через точки $\mathbf{1'}$ та $\mathbf{2'}$ пороводимо прямі, паралельні $\mathbf{Ox'}$ і відкладаємо $\mathbf{1'B'=1'C'=2'E'=2'F'=1B=\ ...\ =2F}$. З'єднавши між собою позначені точки, отримаємо ізометрію $\mathbf{A'B'C'D'E'F'}$ шестикутника **ABCDEF**. Верхню основу будуємо на висоті **H**. Уздовж осі $\mathbf{Oz'}$ від точки $\mathbf{O'}$ відкладаємо величину $\mathbf{H=O_2Q_2}$ і позначаємо точку $\mathbf{Q'}$. Через точку $\mathbf{Q'}$ проводимо осі й будуємо верхню основу призми аналогічно нижній. Вершини нижньої і верхньої основ з'єднуємо ребрами.

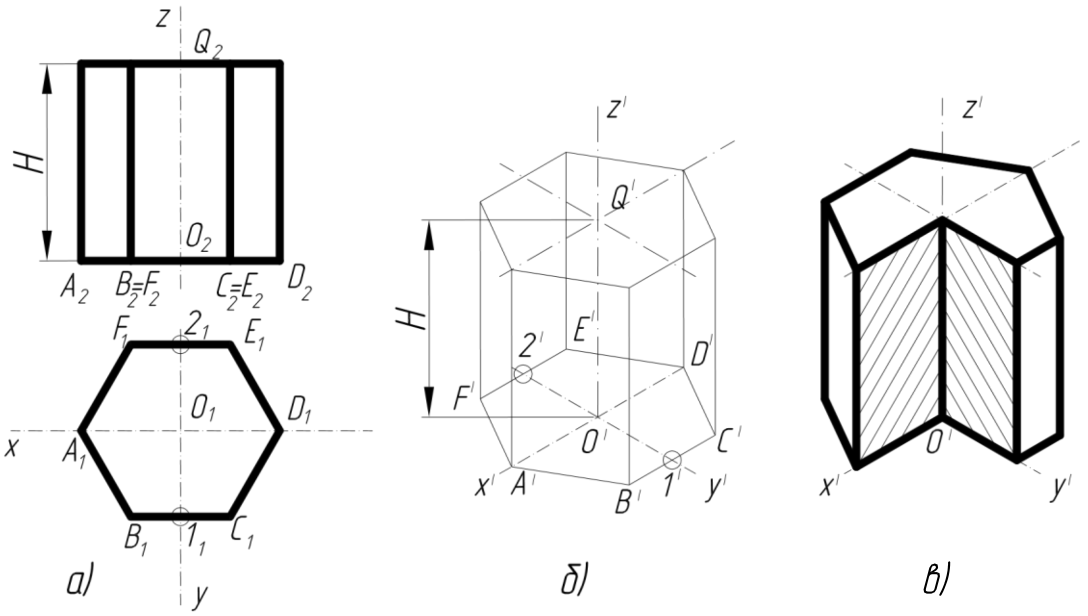


Рис. 15.12

На аксонометричному зображенні стираємо невидимі лінії та вирізуємо чверть (рис. 15.12*в*). Лінії штриховки проводимо згідно з правилами, описаними раніше.

15.3. Побудова аксонометрії піраміди

Як і в попередньому випадку задано комплексне креслення піраміди (рис. 15.13*а*).

Для даної фігури визначаємо прямокутну диметрію. Наносимо ортогональні осі на горизонтальній і фронтальній проекціях і будуємо диметричну проекцію осей. Наведені коефіцієнти скорочення для прямокутної диметрії **u=w=1, v=0,5**.

Від початку координат $\mathbf{O^{/}}$ (рис. 15.13*б*) у протилежні боки відкладаємо по осі $\mathbf{Ox^{/}}$ відрізки взяті з ортогональних проекцій $\mathbf{O^1A^1=O_1A_1}$ **і** $\mathbf{O^1C^1=O_1C_1}$, а по осі $\mathbf{Oy^{/}}$ – відрізки $\mathbf{O^{/}B^{/}=0.5O_1B_1}$ і $\mathbf{O^{/}D^{/}=0.5O_1D_1}$. З'єднавши знайдені аксонометричні проекції точок, отримаємо прямокутну диметрію основи піраміди. Вершину піраміди $\mathbf{S^{/}}$ отримуємо на осі $\mathbf{Oz^{/}}$, відклавши $\mathbf{O^{/}S^{/}=O_2S_2=H}$. Вершину з'єднуємо з точками основи, стираємо невидимі лінії та вирізуємо чверть (рис. 15.13*в*). Лінії штриховки наносимо згідно з правилами для прямокутної диметрії.

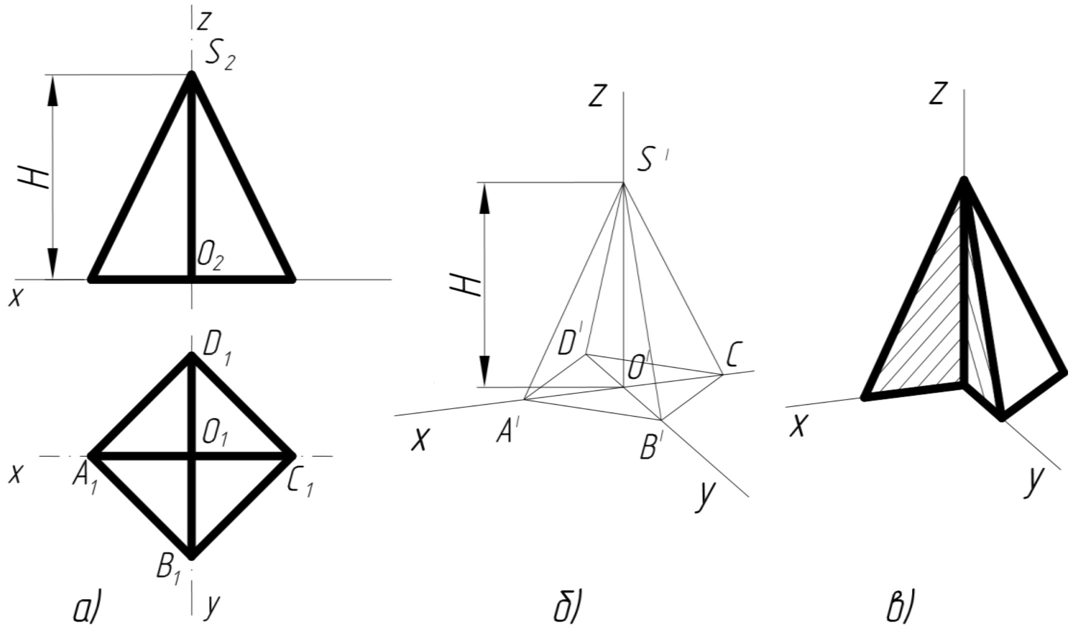


Рис. 15.13

15.4. Побудова аксонометрії конуса

Для даної фігури (рис. 15.14*а*) визначаємо прямокутну ізометрію. Наносимо ортогогнальні осі на горизонтальній і фронтальних проекціях і будуємо ізометричну проекцію осей.

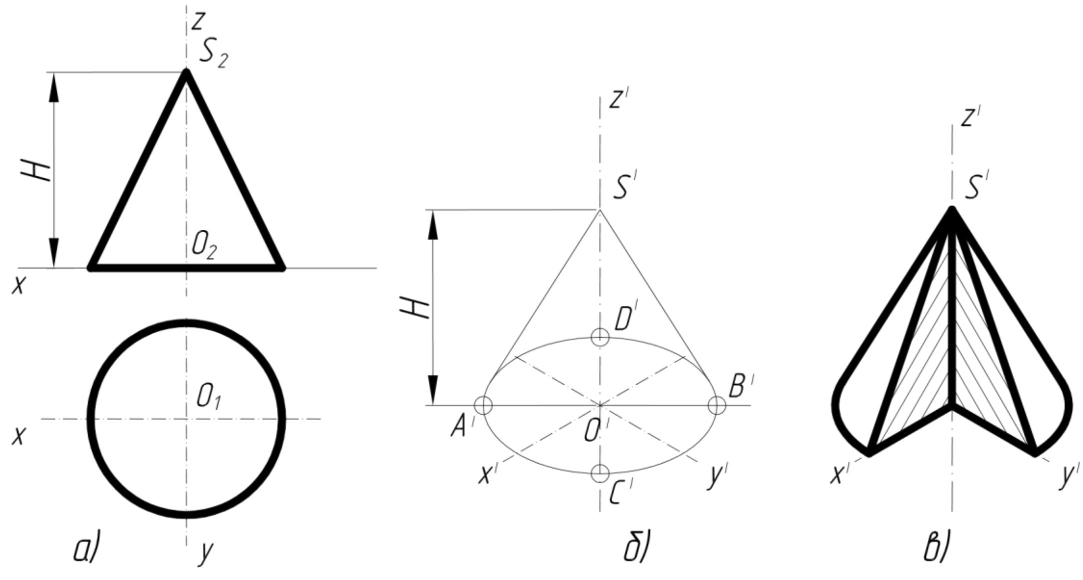


Рис. 15.14

Коло основи конуса проектується в еліпс. Через точку $\mathbf{O}^/$ (рис. 15.14*б*) проводимо велику $\mathbf{A}^/\mathbf{B}^/$ і малу $\mathbf{C}^/\mathbf{D}^/$ осі еліпса, що відповідно дорівнюють **1,22D** та **0,71D**. За двома осями будуємо еліпс. Вершина конуса $\mathbf{S}^/$ знаходиться на осі $\mathbf{O}^/\mathbf{z}^/$ на висоті $\mathbf{H=O^/S^/=O_2S_2}$. З точки $\mathbf{S}^/$ проводимо дотичні (контурні твірні) до еліпса. Побудова конуса закінчується стиранням невидимої частини конуса та вирізуванням чверті (рис. 15.14*в*).

15.5. Побудова аксонометричної проекції кулі

Кулю в прямокутній ізометрії й прямокутній диметрії зображують у вигляді кола (рис. 15.15).

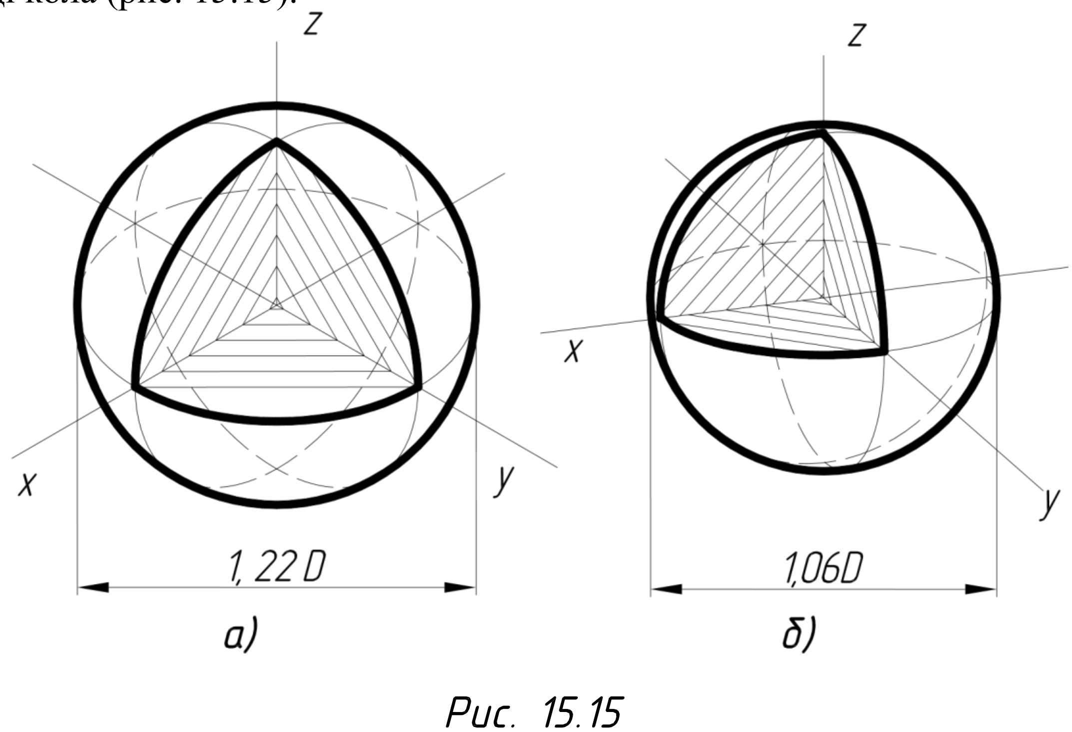


Рис. 15.15

У прямокутній ізометрії (рис. 15.15*а*) діаметр обрисного кола дорівнює **1,22D**, у прямокутній диметрії (рис. 15.15*б*) –**1,06D** (**D** – діаметр кулі на ортогональній проекції). На аксонометричних зображеннях показують еліпси, що відповідають екватору і двом меридіанам. Еліпси розташовані відповідно в площинах $\mathbf{x^{/}O^{/}y^{/}}$, $\mathbf{x^{/}O^{/}z^{/}}$ і $\mathbf{y^{/}O^{/}z^{/}}$**.** За допомогою цих еліпсів зроблено вирізи **1/8** частини кулі, що надає їй наочності.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення аксонометричної проекції.
2. Що називають коефіцієнтами (показниками) спотворення?
3. У чому полягає суть основної теореми аксонометрії?
4. Назвіть основні види аксонометричних проекцій.
5. У чому полягає відмінність між прямокутними та косокутними аксонометричними проекіями?
6. Що називається прямокутною ізометрією?
7. Що називається прямокутною диметрією?
8. Чому дорівнюють коефіцієнти спотворення прямокутної ізометрії і прямокутної диметрії?
9. Що таке збільшена ізометрія і чому дорівнюють тут коефіцієнти спотворення?
10. Назвіть коефіцієнти спотворення і кути між аксонометричними осями практичної диметрії?.
11. Назвіть види косокутних аксонометричних проекцій, вкажіть коефіцієнти спотворення і кути між осями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михайленко В. Є., Найдиш В. М., Підкоритов А. М., Скидан І. А. Інженерна та комп'ютерна графіка. Київ: Вища школа, 2001. 350 с.
2. Михайленко В. Є., Ванін В. В., Ковальов Ю. С. Інженерна графіка. Київ: Каравела, Львів: Піча Ю. В., Львів: Новий Світ, 2000. 336 с.
3. Фольта О. В., Антонович Є. А., Юрковський П. В. Нарисна геометрія. Львів: Світ, 1994. 304 с.
4. Михайленко В. Є., Найдиш В. М., Підкоритов А. М., Скидан І. А. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки. Київ: Вища школа, 2002. 159 с.
5. Михайленко В. Є., Євстифєєв М. Ф., Ковальов Ю. С., Кащенко О. В. Нарисна геометрія. Київ: Вища школа, 1993. 271 с.
6. Бубенников А. В. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1985. 288 с.
7. Крылов Н. Н., Иконникова Г. С., Николаев В. Л., Лаврухина Н. М. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1990. 240 с.
8. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. М.: Высшая шола, 1981. 263 с.
9. Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия. Київ: Вища школа, 1978. 312 с.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методична література

Ковбашин В. І., Пік А. І.

Нарисна геометрія

Навчальний посібник

для загальноосвітніх технічних закладів нового типу,
а також студентів
усіх спеціальностей усіх форм навчання

Комп’ютерне макетування та верстка *А. А. Флейтута*

Формат 60x90/16. Обл. вид. арк. 4,92. Тираж 300 прим. Зам. № 3313.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 422