Д-р ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦЬКИЙ (Львів)

Деякі типи рівнання Riccati.

1. Загальне рівнання Riccati

$$\frac{dy}{dx} = r(x)\, y^2 + 2s(x)\, y + t(x) \tag{1}$$

можна — як відомо — розвязати квадратурами лиш тоді, коли істнує реляція:

$$r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 = 0 \tag{2}$$

де λ, μ є сталі сучинники, що не є рівночасно рівні нулі.[1])

Тема нинішної ноти — найти такий тип рівнання Riccati, що його інтеґралом є відома автоморфна трансформація:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{3}$$

при чому:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Наколиб $ad - bc = D$ (D ріжне від 0 та 1), тоді возьмемо місто 3)

$$y = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}, \text{ де } a' = \frac{a}{\sqrt{D}},\ b' = \frac{b}{\sqrt{D}},\ c' = \frac{c}{\sqrt{D}},\ d' = \frac{d}{\sqrt{D}}$$

(тоді $a'd' - b'c' = \frac{ad - bc}{D} = 1$).

2. Тому, що:

$$y' = \frac{1}{(cx + d)^2}$$

рівнання 1) дасть:

$$1 = r(ax + b)^2 + 2s(ax + b)(cx + d) + t(cx + d)^2 = 0$$

[1]) пор. пр. артикул R. Lagrange'a в Bullet. de la Société mathém. de France t. LXVI, fascic. III—IV стор. 155 sqts. 1938.

або:

$$(rb^2+2sbd+td^2)+r(a^2x^2+2abx)+2s(acx^2+bcx+adx)+$$
$$+t(c^2x^2+2cdx)=1 \qquad 4).$$

Коли рівнання 1) має мати інтеґрал при помочи квадратури, тоді на основі 2) мусить бути:

$$r\,b^2+2s\,b\,d+t\,d^2=0 \qquad 5).$$

Тоді з 4) слідує:

$$r(a^2x^2+2abx)+2s(acx^2+bcx+adx)+t(c^2x^2+2cdx)-1=0.$$

Це рівнання розвязане на x дасть:

$$x=\frac{-(abr+bcs+ads+cdt)\pm\sqrt{(abr+bcs+ads+cdt)^2+(a^2r+2acs+c^2t)}}{a^2r+2acs+c^2t};$$

а що x має мати усякі можливі вартости, т. є. $x=\frac{0}{0}$, тож з чисельника і знаменника дістанемо:

$$a^2r+2\,acs+c^2\,t=2 \qquad 6).$$

Рівнання 5) і 6) є конечною умовою, щоби

$$y=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$$

було інтеґралом рівнання Riccati.

3. З рівнання 6) слідує:

$$r+2\frac{c}{a}s+\frac{c^2}{a^2}t=0$$

або:

$$\frac{c}{a}=\frac{-s\pm\sqrt{s^2-rt}}{t} \qquad 7).$$

Коли в рівнання 5). вставимо:

$$d=\frac{1+bc}{a}=\frac{1}{a}+\frac{b}{t}\left(-s\pm\sqrt{s^2-rt}\right)$$

тоді рівнання 5) дістане вид:

$$b^2r+\frac{2b}{a}s+2b^2s\frac{-s\pm\sqrt{s^2-rt}}{t}+\frac{t}{a^2}+$$

$$+\frac{2b}{a}(-s\pm\sqrt{s^2-rt})+\frac{b^2}{t}(-s+\sqrt{s^2-rt})^2=0$$

а по обчисленню дістанемо:

$$t\pm 2ab\sqrt{s^2-rt}=0$$

або:

$$t^2=4a^2\,b^2\,(s^2-rt) \qquad 8)$$

а звідси:

$$t=2a^2\,b^2\,(\pm\sqrt{r^2+s^2}) \qquad 9).$$

Отже для рівнання Riccati дістаємо реляції

$$\left.\begin{aligned} \frac{-s+\sqrt{s^2-rt}}{t} &= \frac{c}{a} \\ \frac{r \pm \sqrt{r^2+s^2}}{t} &= \frac{1}{2a^2b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (ad-bc=1). \tag{10}$$

Виелімінуймо тепер t.

З рівнання 6) слідує:

$$t = -\frac{a^2 r + 2acs}{c^2}$$

тож в виду цього рівнання 10) дасть:

$$r \pm \sqrt{r^2+s^2} = -\frac{a^2 r + 2acs}{2a^2b^2c^2}$$

або:

$$\pm\sqrt{r^2+s^2} = -\frac{ar(1+2b^2c^2)+2cs}{2a\,b^2c^2} \tag{11}$$

Коли це рівнання розвяжемо що до s, дістанемо:

$$s = -\frac{ar}{2c}(1+2b^2c^2) \pm \frac{a\,r}{2\,c} 2\,b^2c^2, \text{ т. є дістанемо:}$$

або:

$$s_1 = -\frac{a\,r}{2\,c} \tag{12}$$

або:

$$s_2 = -\frac{a\,r}{2\,c}(1+4b^2c^2) \tag{13}$$

4. Провірмо тепер оба випадки 12) і 13).

Рівнання 12). дасть у злуці з рівнанням 6)

$$a^2 r - a^2 r + c^2 t = 0,$$

тобто t рівналобся 0; тоді рівнання Riccati дістане вид:

$$y' = ry^2 + 2sy$$

або:

$$y' = ry\left(y - \frac{a}{c}\right) \tag{14}$$

А що:

$$y - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c(cx+d)},$$

тож з рівнання 14) дістанемо:

$$r(x) = -\frac{c}{ax+b},$$

а само рівнання Riccati дістане вид:

$$y' = -\frac{cy^2}{ax+b} + \frac{ay}{ax+b}\,. \qquad 15).$$

В цім випадку — як дуже легко провірити — дійсно інтеґралом рівнання є $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

В випадку 13). дістанемо з рівнання 6):

$$a^2 r - a^2 r - 4a^2 b^2 c^2 r + c^2 t = 0$$

т. є.

$$t = 4a^2 b^2 r,$$

а тоді рівнання 11) дасть:

$$\frac{r \pm \sqrt{r^2+s^2}}{4a^2 b^2 r} = \frac{1}{2a^2 b^2}$$

або:

$$\pm \sqrt{r^2+s^2} = r$$

т. є.

$$s = 0.$$

Одначе тоді з 13) виходить, що і $r = 0$, а з $t = 4a^2 b^2 r$ і $t = 0$. Рівнання Riccati редукується тоді до рівнання:

$$y' = 0$$

т. є.

$$y = const.;$$

це в дійсности не є вже рівнання Riccati.

Значиться, що лише рівнання Riccati типу:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cy^2}{ax+b} + \frac{ay}{ax+b}$$

розвязується інтеґралом $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Львів, 26. II. 1939.