Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра математичних методів в інженерії

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Навчальний посібник

Частина 1.
Математика фінансів, лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія

для студентів економічних спеціальностей
усіх форм навчання

Тернопіль
2020

УДК 51
В 55

Укладачі:
Блащак Н. І., канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Цимбалюк Л. І., канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Бойко А. Р., канд. техн. наук, асистент.

Рецензент:
Михайлишин М. С., канд. фіз.-мат. наук, професор.

Навчальний посібник розглянуто й затверджено на засіданні
кафедри математичних методів в інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 4 від 19 листопада 2019 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні науково-методичної комісії
факультету комп’ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 3 від 18 грудня 2019 р.

В 55 Вища математика в прикладних задачах економічного змісту (Частина 1. Математика фінансів, лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія) : навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання / укладачі : Блащак Н. І., Цимбалюк Л. І., Бойко А. Р. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2020. – 100 с.

УДК 51

ВСТУП

Сьогодні, в умовах зростання ролі аналітичних досліджень соціально-економічних процесів майбутнім економістам потрібна глибока математична підготовка, яка б давала змогу застосовувати математичні інструменти для дослідження широкого кола проблем у своїй діяльності.

У зв’язку з цим сучасні вимоги до фундаментальної математичної підготовки студентів економічних спеціальностей полягають не лише у володінні поняттями вищої математики, але й навичками застосування математичного апарату для розв’язування певної групи економічних задач і формуванню практичних висновків.

Слід зазначити, що сучасні навчальні плани вивчення вищої математики пропонують кількість годин, половина з яких відведена для самостійного засвоєння дисципліни. З метою допомоги студентам самостійно оволодіти теоретичними основами дисципліни, дати економічне тлумачення математичних понять, навчити студентів прийомів застосування математичних методів до розв'язання задач економічного спрямування, заохотити студентів до подальшого поглиблення математичних знань і створено цей посібник.

Навчальний посібник «Вища математика в прикладних задачах економічного змісту» складається з трьох частин. У першій частині розглядаються елементи математики фінансів, лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії. Друга частина містить елементи теорії границь, диференціальне числення функції однієї та кількох змінних та його застосування. Третя частина посібника присвячена інтегральному численню функцій однієї змінної та диференціальним рівнянням.

Увесь матеріал кожної частини посібника поділено на розділи, які, у свою чергу, – на підрозділи, де стисло викладено теоретичний матеріал, передбачений робочою програмою з вищої математики для підготовки студентів економічних спеціальностей, необхідний для засвоєння дисципліни «Вища математика» та подальшого її використання при вивченні спеціальних предметів, а також при розв’язанні задач економічної спрямованості, наведено прикладні застосування розглянутих математичних понять та приклади задач економічного змісту, що ілюструють відповідні теорії.

Після кожної розділу запропоновано завдання для самоконтролю – приклади практичного змісту. Наприкінці посібника в додатках наведено основні формули, таблиці значень функцій, які використовуються при розв’язуванні прикладів і задач.

Навчальний посібник розрахований для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання для активної самостійної роботи, при підготовці до модульних та семестрових контролів, при виконанні контрольно-розрахункових робіт, а також може бути використаний як довідник спеціалістами у різних галузях економіки для розв’язування задач, де потрібно застосувати інструменти вищої математики.

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИКА ФІНАНСІВ

1.1. Відсотки

Процент або відсоток (з латинської procentum – на сотню) визначається як сота доля числа. Відсотки часто зустрічаються у різних областях економічної теорії. У відсотках вимірюють зміну виробництва товару, ріст грошового доходу, зміну рівня споживання, приріст середнього курсу акцій, тощо. Таке широке застосування пояснюється тим, що при економічних обчисленнях часто доводиться знаходити відносні величини, що характеризують зміну рівня певного показника, які зручно подавати у процентах.

Поняття простих відсотків на капітал

Нехай сума коштів P вкладена під R відсотків річних. Тоді після першого року буде отримано прибуток величиною $d = \frac{P}{100}R$. Якщо капітал вкладений під простий річний відсоток, то з кожним роком прибуток зростає на однакову величину d, а, отже, значення капіталу утворюють арифметичну прогресію із першим членом $a_0 = P$ і різницею $d = 0.01PR$. Отже, величина капіталу P, вкладеного під простий річний відсоток R, через n років буде

$$P_n = P + nd = P + 0.01PRn = P\left(1 + 0.01Rn\right).$$

Зауваження 1.1. У фінансових розрахунках застосовують позначення $i = 0.01R$ (питома процентна ставка) і величина капіталу P_n, накопичена з врахуванням простих відсотків, через n років складе

$$P_n = P\left(1 + ni\right) \tag{1.1}$$

Приклад 1.1. Якщо сума $P = 5000$ грн, то при нормі простого відсотка 4 накопичена сума складе через 3 роки

$$P_3 = 5000\left(1 + 3 \times 0.04\right) = 5000 \times 1.12 = 5600 \text{ грн.}$$

Зауваження 1.2. У формулі (1.1) фігурують чотири величини: P_n, P, n, i. Кожну із них можна обчислити, якщо решта три відомі.

Приклад 1.2. Визначити, із яких коштів, вкладених під прості 6% річних, через 2 роки набута сума складе 784000 гривень.

Розв'язання. Із формули (1.1) випливає, що $P = \dfrac{P_n}{1+ni}$. Відомо, що $R = 6\%$ (а, значить, $i = 0.06$), $n = 2$, $P_n = 784000$. Отже, $P = \dfrac{784000}{1.12} = 700000$ грн.

Поняття складних відсотків на капітал

При розв'язанні економічних задач зустрічаються так звані складні відсотки. Тут дохід від грошової суми додається до вкладеного капіталу, на який він нараховувався, і в наступному періоді процент нараховується на грошову суму, що збільшилась таким чином.

Нехай сума коштів P вкладена під R складних відсотків річних. Тоді після першого року буде отримано прибуток $d = \dfrac{P}{100}R$ і величина вкладу буде дорівнювати $P + \dfrac{P}{100}R = P\left(1+0.01R\right)$.

Після другого року величина вкладу вже буде становити:

$$P\left(1+0.01R\right) + \frac{P\left(1+0.01R\right)}{100}R = P\left(1+0.01R\right)^2.$$

За допомогою методу математичної індукції можна довести, що величина капіталу P, вкладеного під складний відсоток R, через n років буде становити

$$P_n = P\left(1+0.01R\right)^n = P\left(1+i\right)^n, \tag{1.2}$$

де i – питома процентна ставка.

Отже, величина капіталу, вкладеного під складний відсоток, з роками утворює геометричну прогресію із першим членом $a_0 = P$ і знаменником $q = 1+i$

Зауваження 1.3. Вираз $q = 1+i$ називають коефіцієнтом складного процента. Оскільки $i = \dfrac{R}{100}$, то $q = 1+\dfrac{R}{100}$. Звідси маємо:

$$R = 100q - 100. \tag{1.3}$$

В економічному аналізі цією формулою часто користуються для визначення середнього темпу росту.

Приклад 1.3. В банк зроблено вклад в сумі 10000 гривень. Яку суму виплатить банк через 10 років при процентній ставці 5 складних відсотків річних?

Розв'язання. Згідно з умовою задачі $P = 10000$ грн, $R = 5\%$, $n = 10$. За формулою (1.2), отримаємо:

$$P_{10} = 10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} = 10000\cdot(1.05)^{10} = 10000\cdot 1.62889 = 16288.9 \text{ грн.}$$

Таким чином, початковий вклад у сумі 10000 грн через 10 років при процентній ставці 5 складних відсотків річних зросте до 16288.9 грн.

Зауваження 1.4. Обчислення величини $q = 1+i$ в степені n є трудомістким процесом. На практиці користуються також спеціальними розрахунковими таблицями, в яких наводяться значення степенів коефіцієнта q (див. додаток 1).

Приклад 1.4. За період виконання п'ятирічного плану обсяг продукції повинен зрости на 85%. Яким повинен бути середній темп зростання?

Розв'язання. Нехай на початку планового періоду обсяг продукції складав P. Через 5 років він буде складати: $P_5 = P(1+i)^5$. Але $P_5 = 1.85P$ і, отже, $1.85P = P(1+i)^5$, звідки отримуємо $(1+i)^5 = 1.85, 1+i = \sqrt[5]{1.85} = 1.131$.

Згідно з формулою (1.3) $R = 100\times 1.131 - 100 = 13.1\%$.

Отже, для того щоб в процесі виконання п'ятирічного плану обсяг продукції зріс на 85%, він повинен щорічно зростати на 13.1%.

Зауваження 1.5. Аналіз задач із заданими процентними співвідношеннями між величинами часто приводить до розв'язання певних рівнянь, нерівностей або їх систем. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 1.5. Однотипні деталі виготовляються на двох верстатах. Продуктивність першого верстата на 40% більша продуктивності другого. Скільки деталей було виготовлено за зміну кожним верстатом, якщо перший працював у зміну 6 год., а другий – 8 год., причому всього було виготовлено 820 деталей?

Розв'язання. Нехай x – кількість виготовлених деталей першим верстатом, тоді $(820 - x)$ – кількість виготовлених деталей другим верстатом; $\frac{x}{6}$ – продуктивність першого верстату, $\frac{820-x}{8}$ – продуктивність другого верстату. Згідно з умов задачі отримаємо рівняння: $\frac{820-x}{8}\times 1.4 = \frac{x}{6}$, розв'язавши яке знайдемо кількість виготовлених деталей першим верстатом $x = 420$ деталей та другим верстатом $-820 - x = 400$ деталей.

1.2. Рахунки накопичення

Найпростішим типовим рахунком накопичення є такий рахунок фізичної або юридичної особи, на який регулярно вноситься (наприклад, в кінці кожного року чи місяця) фіксований дохід під складні проценти та робиться баланс вкладень і запланованих відсотків із врахуванням терміну одержання вкладень.

Нехай кожного місяця фізична особа вносить P гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку величиною $R\%$ за кожен місяць. З'ясуємо, яка сума накопичиться через n місяців.

На кожен внесок за місяць нараховується $\frac{P}{100}R$ грошових коштів, внесок зростає до $P+\frac{P}{100}R=P\left(1+0.01R\right)=Pq$ ($q-$ коефіцієнт складного процента), тобто внесок за місяць зростає в q раз. Перший вклад P вкладається на термін n місяців, отже, із нього утвориться сума $P_1=Pq^n$ де $q=1+0.01R$. Другий внесок буде знаходитись на рахунку $n-1$ місяць, тому він зросте до величини $P_2=Pq^{n-1}$ і т. д.

Останній внесок вкладається тільки на 1 місяць і з нього одержимо суму

$$P_n=Pq.$$

Отже, загальна сума накопиченого рахунку особи набуде значення:

$$S=P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}=P\left(q^n+q^{n-1}+\ldots+q\right).$$

Тому, згідно з формулою суми скінченої геометричної прогресії з першим членом Pq та знаменником q одержимо:

$$S=Pq\frac{q^n-1}{q-1},\ \left(q=1+0.01R\right) \tag{1.4}$$

Приклад 1.6. Обчислити суму, яка накопичиться через 10 років, якщо періодичний щорічний внесок складає 3000 гривень, а ставка складного відсотка рівна 5% річних.

Розв'язання. Згідно з формулою (1.4), одержимо:

$$S=\frac{3000\times1.05\times\left(1.05^{10}-1\right)}{0.05}=63000\times\left(1.05^{10}-1\right).$$

З таблиці додатку 1 знаходимо, що $1.05^{10}=1.62889$.

Отже, $S=63000\times0.62889=39620.07\approx39620$ гривень.

1.3. Розрахунки ренти

Деяка частина населення держав з ринковою економікою живе за рахунок ренти, тобто регулярно, на протязі певного терміну, одержують раніше обумовлену величину коштів з відповідного рахунку в банку або в страховій компанії.

Основна задача, яка при цьому виникає: скільки коштів треба покласти на рахунок ренти для виконання відповідних умов?

Нехай громадянин відкрив рахунок ренти в страховій компанії з умовами, що він буде одержувати виплати розміром P регулярно, з постійним періодом часу (наприклад, кожного року) на протязі n періодів, починаючи через один період після відкриття рахунку ренти. Величина внеску зростає кожного періоду на R відсотків. Яку суму потрібно внести на рахунок ренти?

Позначимо через A_1 частину всього внеску, яка забезпечує виконання умов договору ренти через один період. Ця частина ренти на протязі одного періоду знаходилась на рахунку і тому, згідно з умовою страхової компанії, одержала R відсотків прибутку, тобто стала дорівнювати:

$$A_1 + \frac{A_1}{100}R = A_1\left(1+\frac{R}{100}\right) = A_1\left(1+0.01R\right).$$

За умовою ця величина коштів повинна дорівнювати P. Отже, з рівності $P = A_1\left(1+0.01R\right)$ знаходимо:

$$A_1 = P\left(1+0.01R\right)^{-1} = Pq^{-1}.$$

Позначимо тепер через A_2 частину первинного внеску, яка через два періоди часу повинна бути сплаченою у кількості P. Оскільки ця величина ренти знаходилась на рахунку два періоди і за кожний період нараховувалось R відсотків, то вона набула значення $A_2\left(1+0.01R\right)^2$, а, отже,

$$P = A_2\left(1+0.01R\right)^2, A_2 = P\left(1+0.01R\right)^{-2} = Pq^{-2}.$$

Аналогічно знаходимо частину первинного внеску A_3, яка зростає до P після трьох періодів часу $A_3 = P\left(1+0.01R\right)^{-3} = Pq^{-3}$ і т. д., аж до частини внеску A_n, яка зростає до P після n періодів: $A_n = P\left(1+0.01R\right)^{-n} = Pq^{-n}$. Загальна величина внеску A на рахунок ренти є сумою:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = Pq^{-1} + Pq^{-2} + \ldots + Pq^{-n} = \sum_{k=1}^{n} Pq^{-k}.$$

Отже, A є сумою n членів геометричної прогресії з першим членом Pq^{-1} та знаменником q^{-1}, тому:

$$A = \frac{Pq^{-1}\left(1-q^{-n}\right)}{1-q^{-1}} = \frac{P\left(1-q^{-n}\right)}{q-1} = P\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}, \tag{1.5}$$

де $i-$ питома процентна ставка.

Зауваження 1.6. У фінансових розрахунках застосовують позначення $a_{n/i} = \dfrac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$, де функція $a_{n/i}$ протабульована (див. додаток 2), і загальна величина внеску A на рахунок ренти з питомою процентною ставкою i, з якого буде виплачуватись n періодів сума P, складає:

$$A = Pa_{n/i} \qquad (1.6)$$

Приклад 1.7. В день 60-річчя містер Стоун відкрив рахунок ренти в страховій компанії на своє ім'я з умовою, що він буде одержувати щорічно у свій день народження, починаючи з наступного року 5000 доларів на протязі 10 років. Компанія відкрила йому рахунок ренти з щорічним зростанням вкладених ним коштів на 8%. Яку суму покладено на рахунок ренти містера Стоуна?

Розв'язання. Згідно з формулою (1.6) одержимо $A = 5000 \times a_{10/0.08}$. З таблиці додатку 2 знаходимо, що $a_{10/0.08} = 6.710081$.

Отже, $A = 5000 \times 6.710081 = 33550$ доларів – вклад на рахунок ренти, що забезпечує зазначені виплати ренти $(5000\$)$ протягом 10 років.

Приклад 1.8. Місіс Стоун у свою 59 річницю зробила внесок 120000 доларів у страхову компанію як ренту під 6% щорічного прибутку з умовою, що вона буде одержувати щорічно, починаючи з наступного року, виплати на протязі 15 років. Скільки коштів щорічно буде одержувати місіс Стоун з цього рахунку?

Розв'язання. З формули (1.6) маємо: $P = \dfrac{A}{a_{n/i}}$. Для нашого випадку

$$A = 120000,\ a_{15/0.06} = 9.712249, \text{ тому } P = \frac{120000}{9.712249} = 12355.53\$.$$

Отже, місіс Стоун буде одержувати $12355.53\$$ щорічної ренти.

1.4. Погашення довготривалих кредитів

При наданні довготривалих кредитів кредитними установами повинен бути розроблений план погашення кредитів боржниками на протязі певної кількості років, причому боржники вносять регулярні виплати (наприклад, в кінці року) таким чином, щоб на протязі певної кількості років погасити весь кредит, включаючи проценти за використання наданих коштів. Описаний процес повернення кредиту (боргу) називають погашенням кредиту або його амортизацією.

Нехай деяка юридична особа взяла в банку кредит у розмірі A гривень з умовою його погашення щорічно на протязі n років з виплатою R відсотків річного зростання. Яким повинен бути щорічний внесок на погашення кредиту із врахуванням відсотку його зростання?

Сформульована задача про погашення кредиту з математичної точки зору цілком аналогічна до задачі про ренту. Справді, задачу про ренту можна розглядати як задачу погашення боргу (кредиту) страховою компанією, яка взяла внесок A в кредит на умовах його зростання на R відсотків і повертає його регулярно величиною P. Тому, використовуючи формулу (1.6) $A = Pa_{n/i}$ отримаємо:

$$P = \frac{A}{a_{n/i}} \tag{1.7}$$

Зауваження 1.7. Для обчислення за формулою (1.7) можна використати таблицю значень функції $a_{n/i}$, однак у фінансових розрахунках вираз $P_{n/i} = \frac{1}{a_{n/i}} = \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}$ називають коефіцієнтом погашення, для якого існують таблиці значень (додаток 3).

Формула (1.7) в нових позначеннях набере вигляду

$$P = AP_{n/i} \tag{1.8}$$

Приклад 1.9. Приватне підприємство взяло кредит в розмірі 120000 гривень на 10 років. Даний кредит наданий банком із 5% щорічного зростання і умовою повернення боргу в кінці кожного року. Скільки коштів щорічно доведеться сплачувати підприємству?

Розв'язання. Із таблиці додатку 3 знаходимо, що для $i = 0.05$ та $n = 10$ коефіцієнт погашення становить $P_{10/0.05} = 0.12950$. Тому за формулою (1.8) розміри внеску на погашання кредиту повинні складати $P = AP_{10/0.05} = 120000 \times 0.12950 = 15540$ гривень.

1.5. Вправи до розділу 1

Завдання 1.1

1. Чоловік має 7000 грн і бажає вкласти їх частину під 8% річних, а іншу частину під 10%. Яку максимальну кількість коштів він повинен вкласти під 8%, якщо бажає отримати загальний прибуток за рік 600 грн?
2. Фірма почала використовувати нову технологічну лінію вартістю 1 млн. 700 тис. грн, вартість якої буде зменшуватися кожного року на 150 тис. грн. Знайти значення вартості цієї технологічної лінії після n років. При вартості 200 тис. грн технологічна лінія буде не придатною для виробництва. Коли це станеться?
3. Визначити на протязі скількох років процент від суми коштів 2000 грн, вкладених під прості відсотки при нормі 5% річних, складе 500 грн.
4. Початкова собівартість одиниці продукції дорівнювала 50 грн. На протязі першого року виробництва вона зросла на певне число процентів, а на протязі другого року знизилась (по відношенню до зміненої собівартості) на таке ж число процентів, в результаті чого собівартість стала рівною 48 грн. Визначити проценти зростання та зниження собівартості одиниці продукції.
5. Підприємство збільшувало обсяг випуску продукції щорічно на одне і те ж саме число відсотків. Знайти це число, відомо, що за два роки обсяг продукції, яка виробляється підприємством, зріс у два рази.
6. Ціну товару спочатку понизили на 20%, потім нову ціну понизили ще на 15% і, нарешті, після перерахунку провели зниження ще на 10%. На скільки процентів всього понизили початкову ціну товару?
7. В ощадну касу поклали вклад на 15 років в сумі 5000 грн. Яку суму грошових коштів виплатить ощадна каса по закінченні цього періоду при ставці 4 складних відсотки?
8. До елеватора надійшло 20000 т пшениці двох сортів. Перший сорт містить 5% смітних домішків, других – 9%. Після очищення одержано 18000 т чистої пшениці. Скільки пшениці кожного сорту привезено на елеватор?
9. Населення США за 10 років з 1960 по 1970 зросло на13,41%, за наступні 10 років зросло ще на 11,33% і, нарешті, за 80-ті роки збільшилось ще на 8,85%. Визначити на скільки процентів всього зросло населення США за тридцять років. Знайти кількість населення США (в млн чол.) на 1990 рік, якщо в 1960 році населення США становило 179 млн чол.
10. Визначити, при якій місячній процентній ставці процент від суми 4500 грн складе 270 грн, якщо термін нарахування процентів дорівнює 9 місяцям.
11. В січні завод виконав план на 108%, а в лютому виробив продукції на 9% більше ніж у січні. Скільки продукції було зроблено понад план за січень та лютий, якщо за місячним планом завод повинен виробляти 120000 одиниць продукції?
12. Що вигідніше: вкласти кошти під 5% простих відсотків терміном на 15 років чи вкласти їх під 4% складних відсотків на той самий період?

Скільки складає різниця накопичених коштів, якщо початковий внесок на рахунок дорівнює 2000 грн.

13. Населення певного міста зростає в 4 рази на протязі 47 років. Який щорічний процент приросту?
14. Кооператив взяв позику у розмірі 90 тисяч гривень на 8 років при ставці складних процентів рівній 5% річних. Обчислити підсумкову заборгованість.
15. Два заводи взялись виконати замовлення за 12 днів. Через два дні перший завод закрили на ремонт і надалі над виконанням замовлення працював тільки другий завод. Знаючи, що продуктивність другого заводу складає $66\ \frac{2}{3}\%$ від продуктивності першого, визначити, через скільки днів буде виконано замовлення?
16. Із загальної кількості товару $a\%$ його було продано з прибутком в $p\%$, а з частини, що залишилася, $b\%$ було продано з прибутком $q\%$. З яким процентом прибутку слід продати всю решту частину товару, щоб загальний процент прибутку складав $r\%$?
17. За скільки років подвоїться населення району, якщо щорічний приріст населення рівний 15%.
18. Букіністичний магазин продав книжку із знижкою 10% від назначеної ціни і одержав при цьому 8% прибутку. Скільки відсотків прибутку початковопланував одержати магазин?
19. 50000 грн принесли на протязі року деякий прибуток. Який процент склав прибуток, якщо відомо, що ці 50000 грн разом із прибутком за перший рік на протязі наступного року дали 2612,5 грн прибутку, причому другого року число процентів було на 0,5 більше, ніж число процентів прибутку в перший рік.
20. Два вкладники вклали однакові суми в банк (під прості відсотки). Перший по закінчені 8 місяців одержав разом з нарахуваннями 616 грн. Другий по закінчені 15 місяців одержав 630 грн 24 коп. Яка сума була вкладена кожним вкладником і під який відсоток?
21. Приріст продукції на заводі в порівнянні з попереднім роком за перший рік склав $p\%$, а за другий рік $q\%$. Яким повинен бути відсоток приросту продукції за третій рік, щоб середній річний приріст продукції за три роки склав $r\%$?
22. Взуттєва фабрика за перший тиждень виконала 20% місячного плану, за другий – 120% кількості продукції, виготовленої за перший тиждень, а затретій тиждень – 60% продукції, виготовленої за перші два тижні разом. Який місячний план випуску взуття, якщо відомо, що для його виконання потрібно за останній тиждень місяця виготовити 1480 пар взуття?
23. За перший квартал автозавод виконав 25% річного плану випуску автомашин. Число машин, випущених за другий, третій і четвертий квартал, виявилось пропорційне числам 11, 25; 12 і 13, 5. Визначити перевиконання річного плану в процентах, якщо у другому кварталі автозавод дав продукції в 1,08 рази більше, ніж у першому.

24. Батьки відкрили рахунки в банку на двох своїх синів, вклавши однакові суми під складний річний відсоток. Обидва сини зняли вклади, коли їм виповнилось 18 років, причому перший вклад перебував на рахунку 10 років і з нарахованими відсотками склав 1628 грн 89 коп., а другий – 15 років і склав 2078 грн 93 коп. Скільки вклали батьки на рахунок і під який відсоток?
25. Згідно з бізнес-планом приватного підприємства за п'ять років об'єм продукції повинен зрости на 90%. Яким повинен бути середній темп зростання?
26. Виробництво продукції за перший рік роботи підприємства зросло на p%, а за наступний рік в порівнянні з початковим воно зросло на 10% більше, ніж за перший рік. Визначити, на скільки процентів збільшилось виробництво за перший рік, якщо відомо, що за два роки воно збільшилось в цілому на 48,59%.
27. На протязі року завод двічі збільшував випуск продукції на однакове число процентів. Знайти це число, якщо відомо, що на початку року завод щомісячно випускав 600 виробів, а в кінці року став випускати щомісячно 726 виробів.
28. В фермерському господарстві, що спеціалізується на тваринництві стадо збільшується за рахунок природного приросту і придбання нових тварин. На початку першого року стадо складало 300 голів, а в кінці фермер купив ще 70 голів. В кінці другого року стадо складало 440 голів. Визначити процент природного приросту.
29. Заробітна плата певної категорії службовців підвищувались два рази, причому процент підвищення другого разу був вдвічі більший, ніж першого разу. Визначити, на скільки процентів підвищувалась заробітна плата кожного разу, якщо до першого підвищення вона складала 120 грн, а після другого заробітна плата склала 158 грн 40 коп.
30. Продуктивність першого автомобільного заводу не перевищує 950 машин на добу. Продуктивність другого автомобільного заводу початково склала 95% від продуктивності першого. Після введення додаткової лінії другий завод збільшив виробництво машин за добу на 23% від числа машин, що випускають за добу на першому заводі і став їх випускати більше 1000 штук за добу. Скільки машин за добу випускав кожен завод до реконструкції другого заводу? Припускається, що кожний завод за добу випускає ціле число машин.

Завдання 1.2

Скільки грошей щорічно потрібно вносити батькам на рахунок накопичення із ставкою складного відсотка рівною R% річних, щоб за n років зібрати суму коштів S в гривнях, необхідну для оплати навчання дітей?

1. S = 25000, R = 5, п= 15;
2. S = 9000, R = 3, n= 18;
3. S = 10000, R = 2, n= 7;
4. S = 12000, R = 4, n = 17;
5. S = 220000, R = 3, n= 20;
6. S = 6000, R = 3, n= 5;
7. S = 11200, R = 2, n = 10;
8. S = 9800, R = 2, n = 9;
9. S = 9800, R = 5, n= 10;
10. S = 28800, R = 5, n= 17;
11. S = 7600, R = 1, n = 8;
12. S = 8000, R = 3, n= 9;
13. S = 11500, R = 4, n = 10;
14. S = 9400, R = 5, n= 7;
15. S = 9800, R = 2, n= 5.

Кожного року чоловік вкладає P доларів на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунку на R%. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

1. P = 800, R = 2, n = 17;
2. P = 300, R = 3, n = 20;
3. P = 500, R = 3, n = 10;
4. P = 250, R = 4, n = 15;
5. P = 1000, R = 5, n = 7;
6. P = 50, R = 3, n = 25;
7. P = 150, R = 2, n= 30;
8. P = 80, R = 5, n = 18;
9. P = 200, R = 4, n =8;
10. P = 100, R = 3, n = 5;
11. P = 350, R = 5, n = 12;
12. P = 70, R = 2, n = 23;
13. P = 150, R = 5, n = 10;
14. P = 1500, R = 5, n = 3;
15. P = 100, R = 4, n = 20.

Завдання 1.3

Батько бажає відкрити рахунок ренти на ім’я доньки у страховій компанії, яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків. Його умова – сплачувати на початку року Р доларів на протязі n років, починаючи з наступного року. Яку кількість А коштів він повинен зараз покласти на рахунок?

1. P = 2000, R = 8, n = 3;
2. P = 6000, R = 6, n = 5;
3. P = 4000, R = 8, n = 4;
4. P = 2800, R = 8, n = 2;
5. P = 3000, R = 5, n = 8;
6. P = 10000, R = 7, n =10;
7. P = 7000, R = 3, n = 7 ;
8. P = 5500, R = 6, n = 6;
9. P = 15000, R = 5, n =15;
10. P = 3000, R = 6, n = 12.

На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг А гривень. Цей кредит йому надано із R% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу на протязі n років (на початку кожного року після закінчення університету). Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

1. A = 10000, R = 8, n= 5;
2. A = 6000, R = 6, n = 10;
3. A = 12000, R = 5, n = 15;
4. A = 7500, R = 8, n = 8;
5. A = 7500, R = 3, n = 10;
6. A = 18000, R = 7, n = 20;
7. A = 6000, R = 2, n =15;
8. A = 25000, R = 1, n = 18;
9. A = 12000, R = 6, n = 17;
10. A = 15000, R = 4, n = 10.

Подружжя у свою 25 річницю спільного життя зробило внесок A гривень у банк як ренту із $R\%$ щорічного зростання і умовою проводити виплати кожного року на протязі n років. Скільки коштів щорічно буде одержувати подружжя з цього рахунку?

1. A = 120000, R = 6, n = 15;
2. A = 80000 , R = 8, n = 10;
3. A = 150000 , R = 3, n = 20;
4. A = 70000, R = 5, n = 7;
5. A = 50000, R = 8, n = 10;
6. A = 10000, R = 8, n = 5;
7. A = 100000, R = 3, n = 17;
8. A = 20000, R = 7, n = 10;
9. A = 250000, R = 5, n = 25;
10. A = 75000, R = 4, n = 15.

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1. Теоретичні відомості

2.1.1. Матриці та визначники

Матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця з $m \times n$ чисел a_{ij},

$$i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right).$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці A, де i – номер рядка, а j – номер стовпця, в яких стоїть елемент a_{ij}.

Якщо $m = n$, то матриця A називається квадратною матрицею порядку n, а елементи $\boldsymbol{a_{11}}$, a_{22}, ..., a_{nn} складають головну діагональ.

Квадратна матриця, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, називається одиничною матрицею і позначається через E.

Сумою матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ розміру $m \times n$ називається матриця $C=(c_{ij})$ того ж розміру така, що

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,,\ i=\overline{1,m}\,, j=\overline{1,n}\,.$$

Позначення $C=A+B$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m \times n$ на число α називається матриця $C=(c_{ij})$ того ж розміру така, що

$$c_{ij}=\alpha\, a_{ij}\,,\ i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}\,.$$

Позначення $C=\alpha A$.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розміру $m \times n$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $n \times k$ називається матриця $C=(c_{ij})$ розміру $m \times k$ така, що

$$c_{ij}=\sum_{e=1}^{n} a_{ie}b_{ej}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\,,\ i=\overline{1,m}\,, j=\overline{1,k}\,.$$

Позначення: $C=AB$.

Зауваження 2.1. В загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то матриці A і B називаються переставними.

Лінійні перетворення

Лінійним перетворенням величин $x_1, x_2, ..., x_n$ в величини $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ називається перетворення виду

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ .... \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n; \end{cases},$$

або скорочено

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \ i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

де a_{ij} – задані числа.

Матриця $A=(a_{ij})$, складена із коефіцієнтів лінійного перетворення, називається **матрицею лінійного перетворення.**

Введемо матриці розміру $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тоді лінійне перетворення можна записати в матричній формі

$$X' = AX.$$

Поряд з лінійним перетворенням (2.1) розглянемо лінійне перетворення величин $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ в величини $x''_1, x''_2, ..., x''_n$:

$$x''_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j{}', \ i = \overline{1, n}. \tag{2.2}$$

Потрібно засобами матричного числення знайти лінійне перетворення, яке виражає $x''_1, x''_2, ..., x''_n$ через x_1, x_2, ... x_n.

Запишемо лінійне перетворення (2.2) також в матричній формі

$$X'' = BX', \text{ де } B = (b_{ij}),\ X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ . \\ . \\ . \\ x_n'' \end{pmatrix}, \text{ тоді } X'' = BX' = B\cdot(AX) = (BA)\cdot X.$$

Отже, шукане лінійне перетворення має матрицю *C=BA*.

Приклад 2.1. Дано два лінійні перетворення

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' + x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_2' - 4x_3' \end{cases}.$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, яке виражає x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Розв'язання. Запишемо відповідні матриці лінійних перетворень:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю C шуканого лінійного перетворення

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

і шукане перетворення має вигляд:

$$\begin{cases} x_1'' = 8x_1 + x_2 + 4x_3, \\ x_2'' = 7x_1 + 4x_2, \\ x_3'' = -4x_1 - 3x_2 + 11x_3. \end{cases}$$

Визначники

Визначником *n*-го порядку, що відповідає квадратній матриці *A* порядку *n*, називається число, яке знаходиться за певним правилом і позначається $|A|$ або $detA$. У випадку n=2:

$$det\,A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2.3)$$

У випадку n=3:

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (2.4)$$

На практиці, визначники третього порядку обчислюються з використанням правила трикутника: перші три доданки, які входять в праву частину (2.4) із знаком плюс, є добутком елементів визначника, взятих по три, а останні три доданки, які входять в (2.4) із знаком мінус, – як на рис. 2.1.

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 2.1

Властивості визначників

Властивість 2.1. Величина визначника не зміниться, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожен рядок замінити стовпцем з тим же номером.

Властивість 2.2. Перестановка двох рядків, чи стовпців визначника рівносильна множенню його на (-1).

Властивість 2.3. Якщо визначник має два однакових рядки чи стовпці, то він рівний 0.

Наслідок. Визначник з двома пропорційними рядками чи стовпцями рівний нулю.

Властивість 2.4. Множення всіх елементів одного стовпця чи рядка визначника на довільне число k рівносильне множенню визначника на це число

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 2.5. Якщо всі елементи деякого стовпця чи рядка дорівнюють нулю, то сам визначник також дорівнює нулю.

Властивість 2.6. Якщо кожен елемент деякого стовпця (чи рядка) є сумою двох доданків, то визначник може бути поданий у вигляді суми двох визначників

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 2.2. Якщо кожен елемент деякого стовпця чи рядка є сумою k доданків, то визначник може бути представлений у вигляді суми k визначників.

Властивість 2.7. Визначник не змінить свого значення, якщо до всіх елементів будь-якого рядка, чи стовпця додати відповідні елементи довільного іншого рядка чи стовпця, помноженого на одне і те ж число

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивості (2.1)–(2.7) справджуються і для визначників n-го порядку.

Приклад 2.2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta-\sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma-\sin^2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -\sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & -\sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & -\sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0+0=0;$$

Використано властивість 2.6, 2.3 і наслідок з неї.

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай маємо визначник n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник (n-1)-го порядку, одержаний з визначника Δ викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивість 2.8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпця (чи рядка)на їх алгебраїчне доповнення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

(розклад за елементами *i*-го рядка) або

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} \text{ (розклад за елементами } k\text{-го стовпця).}$$

Властивість (2.7) і (2.8) дають можливість обчислювати визначники будь-якого порядку.

Приклад 2.3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В третьому рядку вибираємо контрольний елемент ① , а всі інші елементи цього рядка перетворюємо в 0, для цього всі елементи 1-го стовпця додаємо до відповідних елементів 2-го і 5-го стовпців, а також всі елементи 1-го стовпця множимо на (-2) і додаємо до відповідних елементів 3-го стовпця, потім всі елементи 1-го стовпця множимо на (-1) і додаємо до 4-го стовпця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -7 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

винесемо 4 з четвертого стовпця

$$= 4 \begin{vmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

всі елементи 2-го рядка множимо на (-1) і додаємо до 1-го рядка

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Виносимо з 1-го рядка 2, одержимо

$$\Delta = 8\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Елементи другого рядка додаємо до відповідних елементів першого рядка, а також множимо їх на 2 і додаємо до відповідних елементів третього рядка.

$$\Delta = 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 8(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8\,(0+7) = 8\cdot 7 = 56$$

Обернена матриця

Матриця *B* називається оберненою до матриці *A*, якщо

$$AB = BA = E\,.$$

Позначення: $B = A^{-1}$

Обернена матриця A^{-1} до *A* існує тоді і тільки тоді**,** коли $|A| \neq 0.$ Має місце формула

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.4. Знайти матрицю, обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Переконаємось, що $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 0 - 0 - 16 - 0 = 2 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij}, i=1, 2, 3; j=1, 2, 3.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Аналогічно знайдемо: A_{12}=1, A_{22}=1, A_{32}=-1, A_{13}=0, A_{23}=6, A_{33}=-4.
Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

або в матричному вигляді

$$AX=B, \qquad (2.6)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця системи.

Якщо система (2.5) має розв’язки, то вона називається **сумісною,** в протилежному випадку – **несумісною.**

Матричний спосіб розв’язання системи лінійних рівнянь

Нехай $|A| \neq 0$.Помножимо матричне рівняння (2.6) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B;\ (A^{-1}A)X=A^{-1}B.$$

Так як $A^{-1}A=E,\ EX=X,$ то

$$X=A^{-1}B. \tag{2.7}$$

Приклад 2.5. Матричним способом розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання. Скористаємося формулою (2.7). Напишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

В прикладі 2.4 було показано, що $|A| \neq 0$ і $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Отже, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Відповідь: $x_1= -1$, $x_2=2$, $x_3=1$.

Формули Крамера

Якщо $|A| \neq 0$, то розв’язок системи (2.5) може бути знайдений за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1,n},\ \text{де}\ \Delta = |A|, \tag{2.8}$$

$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1i-1} b_1 a_{1i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2i-1} b_2 a_{2i+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{ni-1} b_n a_{ni+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$ – визначник матриці, одержаної з матриці системи A заміною i-того стовбця на стовбець вільних членів.

Приклад 2.6. За формулами Крамера розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Згідно з формулами (2.8) обчислимо $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Отже, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3.$

Зауваження 2.3. Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0,$ то система (2.5) має нескінченну кількість розв'язків.

Зауваження 2.4. Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_i \neq 0,$ то система несумісна.

Метод Гаусса

Метод Гаусса використовується для розв'язування довільних систем рівнянь.

Нехай задана система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.9}$$

де число рівнянь m може як співпадати з числом невідомих x_n, так і бути відмінним від нього.

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Виключимоневідомеx_1 з усіх рівнянь системи, за винятком першого. Для цього помножимо перше рівняння на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ і додамо до другого рівняння і т. д., помножимо перше рівняння на $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ і додамо до m-того рівняння.

В результаті отримаємо систему рівнянь, еквівалентну системі (2.9):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ .... \\ \quad a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Припустимо тепер, що $a'_{22} \neq 0$ і виключимо аналогічно невідоме x_2 з 3-го і всіх наступних рівнянь системи (2.10). Після цього переходимо до невідомого x_3і т.д. В ході виконання вказаного алгоритму можуть з'явитися рівняння виду 0=0. Такі рівняння відкидаємо. Якщо ж з'являються рівняння виду $0 = \alpha,$ де $\alpha \neq 0$, то це означає, що система (2.9) несумісна. В результаті отримаємо систему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'{,}_2 \\ .... \\ \quad a''_{ss}x_s + ... + a''_{sn}x_n = b''_s. \end{cases} \text{, де } s \leq n; \;\; a_{11}a'_{22}...a''_{ss} \neq 0. \qquad (2.11)$$

Розглянемо тепер два випадки.

1) Якщо $s=n$, то система (2.11), а значить і система (2.9), має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за допомогою зворотного ходу метода Гаусса. Із останнього рівняння знаходимо $x_n = b''_n / a''_{nn}$.

Підставляючи знайдене значення x_n в передостаннє рівняння, знайдемо значення для x_{n-1} і т.д. З першого рівняння знайдемо значення для x_1.

2) Якщо $s<n$, то система (2.11), а значить і система (2.9), має нескінченну кількість розв'язків. Надаючи невідомим x_{s+1}, x_{s+2}, …, x_n довільних значень c_{s+1}, c_{s+2}, …, c_n, виразимо невідомі x_1, x_2, …, x_s через c_{s+1}, $c_{s+2, \, ...,}$ c_n і отримаємо загальний розв'язок системи (2.9).

Зауваження 2.5. Система рівнянь (2.9) називається однорідною, якщо $b_1=b_2=...=b_n=0$. Однорідна система рівнянь завжди сумісна, оскільки має тривіальний розв'язок $x_1=x_2=...=x_n=0$.

Зауваження 2.6. При використанні метода Гаусса на практиці зручно виконувати відповідні перетворення не над рівняннями системи, а над рядками матриці системи, яка називається розширеною матрицею системи

$$A \mid B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}...a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{21n} & b_2 \\ .... & . \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} & b_m \end{array} \right). \qquad (2.12)$$

Приклад 2.7. Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язання

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right).$$

Даній розширеній матриці відповідає система рівнянь, еквівалентна вихідній:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 5 \\ -11x_3 = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{-22}{-11} = 2 \\ -x_2 + 8 = 5 \\ x_1 = x_3 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2.$$

Приклад 2.8. Знайти загальний розв'язок однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося методом Гаусса

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Даній матриці відповідає однорідна система рівнянь, еквівалентна вихідній:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -6x_3 + 5x_4, \\ x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Покладаючи $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, отримаємо $x_2=-6c_1+5c_2$, $x_1=8c_1-7c_2$.

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x_1=8c_1-7c_2,\ x_2=-6c_1+5c_2,\ x_3=c_1,\ x_4=c_2.$$

Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь у загальному випадку

Системі (2.9) поставимо у відповідність матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.13)$$

яку назвемо основною матрицею. Виділимо в цій матриці які-небудь k рядків і k стовпців ($k \le m,\ k \le n$). З виділених рядків і стовпців складемо визначник k-го порядку. Всі такі визначники називаються мінорами k-того порядку цієї матриці.

Рангом матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Ранг матриці A будемо позначати $r(A)$.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні її перетворення:

1. Транспонування, тобто заміна кожного рядка стовпцем з тим же номером, і навпаки.
2. Перестановка двох рядків, чи двох стовпців.
3. Множення всіх елементів рядка чи стовпця на довільне число, не рівне нулю.
4. Додавання до всіх елементів рядка чи стовпця відповідних елементів іншого рядка чи стовпця, помножених на одне і те ж число.

Матриці, які одержуються одна з одної за допомогою елементарних перетворень називаються **еквівалентними** і з'єднуються знаком **~**.

Елементарні перетворення (1)-(4) не змінюють рангу вихідної матриці.

Відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називається базисним**.**

Для обчислення рангу матриці можна використати елементарні перетворення, а також метод обвідних мінорів. За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де на головній діагоналі стоять r одиниць, а всі інші елементи матриці рівні нулю, ранг такої матриці дорівнює r.

Приклад 2.9. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перший рядок множимо на (-1) і додаємо відповідно до другого і четвертого рядків, а також на (-2) і додаємо до третього рядка

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

другий рядок множимо на (-1) і додаємо до третього і четвертого рядків

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

другий рядок поділимо на (-4), а третій рядок додаємо до четвертого рядка

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

другий рядок множимо на (-1) і додаємо до першого, а потім третій рядок додаємо до першого

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

третій рядок множимо на (-1) і переставляємо його місцями з другим рядком, одержимо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $r(A)=3$.

Приклад 2.10. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що $r(A)=2$.

За допомогою введеного поняття рангу матриці питання сумісності системи (2.9) може бути вирішене на основі наступної теореми.

Теорема Кронекера-Капеллі

Для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг її розширеної матриці дорівнював рангу основної матриці системи, тобто $r(A) = r(A|B)$.

В нашому випадку матриця (2.13) це основна матриця A, а (2.12) – розширена матриця $A|B$ системи лінійних рівнянь (2.9).

Очевидно, що $r(A|B) \geq r(A)$, оскільки кожен мінор матриці A буде мінором і матриці $A|B$, але не навпаки.

Таким чином, якщо $r=n$ – матриця має єдиний розв'язок, $r<n$, $(m\leq n)$, то система має безліч розв'язків.

Якщо ж $r(A)<r(A|B)$, то система несумісна.

При знаходженні рангу матриці системи лінійних рівнянь елементарні перетворення відповідних матриць здійснюємо лише над рядками.

Приклад 2.11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю, де рискою відокремлений стовпець вільних членів

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right)^{(-2)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right)^{(2)} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)^{(-3)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

звідки випливає, що останні два рівняння системи є лінійною комбінацією перших двох рівнянь системи, ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної і дорівнює 2, тому система має безліч розв'язків.

Оскільки мінор $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$ то на основі отриманої розширеної матриці складемо систему двох рівнянь і перенесемо в праву частину невідомі x_3, x_4, x_5, коефіцієнти при яких не входять в мінор Δ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_3 + x_4 - x_5 + 1 \\ x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 + 2x_5 \end{cases}.$$

додамо перше рівняння системи до другого

$$3x_1 = x_5 + 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3},$$

одержане значення невідомої x_1 підставимо в друге рівняння системи:

$$x_2 = \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - 2x_5,$$

$$x_2 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 + \frac{1}{3},$$

де невідомим x_3, x_4, x_5 можна надати довільних значень. Побудований розв'язок називається загальним розв'язком системи.

Приклад 2.12. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю і знайдемо її ранг

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)^{(-2)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, що $r(A)$=2, а $r(A|B)$=3. Отже, $r(A) \neq r(A|B)$, тому система несумісна.

Застосування теоретичного матеріалу цього розділу математики до розв'язання прикладних економічних задач відбувається за двома напрямками: по-перше, матрична форма запису і введені операції над матрицями дозволяють спростити запис і розв'язання економічних задач; по-друге, деякі економічні моделі приводять до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, методи розв'язання яких вивчає лінійна алгебра.

Проілюструємо на прикладах обидва ці напрямки.

2.2. Модель міжгалузевого планування потреб та пропозицій

Кожна галузь народного господарства виступає, з одного боку, як виробник певної продукції, а з другого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями. Тому природно виникають питання, пов'язані з ефективністю (збалансованістю) ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути об'єм виробництва кожної галузі, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? Відповідь на ці питання дає аналіз моделі міжгалузевої економіки (балансовий аналіз).

Постановка задачі. Нехай маємо n галузей промисловості. Розглянемо процес виробництва за певний період часу, наприклад, рік. Позначимо через x_i – валовий об'єм продукції i – тої галузі $(i=1,\ldots,n)$; x_{ij} – об'єм продукції i – тої галузі, який використовується j – тої галуззю (потреба j – тої галузі в продукції i – тої галузі) $(i, j=1,\ldots,n)$; y_i – об'єм продукції i-тої галузі, який використовується іншими галузями (потреби інших галузей в продукції i – тої галузі) $(i=1,\ldots,n)$.

Валовий об'єм продукції будь-якої галузі дорівнює сумарному об'єму продукції, що споживається галузями, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, (i=1,\ldots,n) \tag{2.14}$$

Рівняння (2.14) називають співвідношенням балансу. Введемо в розгляд коефіцієнти $a_{ij} = {x_{ij}}/{x_j}, (i, j=1,\ldots,n)$, що визначають об'єм продукції i – тої галузі, який використовується на виробництво одиниці продукції j – тої галузі (коефіцієнт витрат продукції). Із останнього співвідношенні одержимо:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, (i, j=1,\ldots,n) . \tag{2.15}$$

Будемо вважати, що технологія виробництва є незмінною, тобто $a_{ij} = const$, $(i, j=1,\ldots,n)$. Це означає, що залежність (2.15) є лінійною, і побудована на цій основі модель міжгалузевого балансу називається лінійною.

Згідно з (2.15) співвідношення (2.14) набирають вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{2.16}$$

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

де X – матриця-стовпець валового випуску продукції;
Y – матриця-стовпець потреб інших галузей в продукції;
A – матриця витрат продукції.

Тоді співвідношення балансу (2.16) у матричній формі матиме вигляд:

$$X = AX + Y \qquad (2.18)$$

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такої матриці-стовпця валового випуску X, яка за відомою матрицею витрат A забезпечує задану матрицю потреб інших галузей у продукції. Розв'язуючи рівняння (2.18) відносно X, одержимо:

$$X - AX = Y, \ \ (E - A)X = Y.$$

Якщо матриця $(E - A)$- невироджена$\left(\det(E - A) \neq 0\right)$, то $X = (E - A)^{-1}Y$.

Зауваження 2.7. Якщо коефіцієнти витрат продукції $a_{ij}\ (i, j = 1,\dots,n)$ початково не задані, то їх можна визначити із таблиці взаємних потреб та пропозицій. Коефіцієнт a_{ij} знаходимо як відношення потреб j – тої галузі в продукції i – тої галузі до загальної кількості пропозицій j – тої галузі. Матрицю A в такому випадку ще називають матрицею потреб-пропозицій.

У відповідності з економічним змістом задачі значення x_i, мають бути невід’ємними $(x_i \geq 0)$ при невід’ємних значеннях $y_i \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0\ (i, j = 1,\dots,n)$.

Невід’ємна матриця $A\left(a_{ij} \geq 0\right)$ називається продуктивною, якщо для будь-якої невід'ємної матриці $Y(y_i \geq 0)$ існує розв'язок X рівняння (2.18), причому невід’ємний$(x_i \geq 0)$.У цьому випадку і модель називається продуктивною.

Приклад 2.13. Таблицею задані показники взаємних потреб та пропозиці й між різними галузями промисловості. (див. табл. 1.)

Галузь	Галузеві потреби				Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3	4		
1	10	24	33	0	33	100
2	10	12	11	30	57	120
3	20	12	11	30	37	110
4	20	24	22	75	9	150

Потрібно: а) визначити матрицю потреб-пропозицій A; б) припустимо, що через три роки потреби інших галузей зростуть до 38, 60, 45 та 15 показників для галузей 1, 2, 3, 4 відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

Розв’язання. а) Елементи шуканої матриці A знаходимо як відношення потреб j – тої галузі в продукції i – тої галузі до кількості усіх пропозицій j – тої галузі. Тому для знаходження, наприклад елементів другого стовпця матриці A ми кожний елемент другого стовпця потреб ділимо на загальну кількість пропозицій другої галузі, тобто на 120.

Отже, одержуємо матрицю потреб-пропозицій вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{24}{120} & \frac{33}{110} & \frac{0}{150} \\ \frac{10}{100} & \frac{12}{120} & \frac{11}{110} & \frac{30}{150} \\ \frac{20}{100} & \frac{12}{120} & \frac{11}{110} & \frac{30}{150} \\ \frac{20}{100} & \frac{24}{120} & \frac{22}{110} & \frac{75}{150} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Позначимо через $Y = \begin{pmatrix} 38 \\ 60 \\ 45 \\ 15 \end{pmatrix}$ – матрицю-стовпець нових потреб інших галузей;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ – невідома матриця-стовбець нових пропозицій, що відповідають новим потребам, тоді $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$.

Знайдемо матрицю $B = E - A$.

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,3 & 0 \\ -0,1 & 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & -0,1 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,2 & -0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Для обчислень майбутніх пропозицій залишилось знайти B^{-1}. Матриця $B-$ квадратна матриця четвертого порядку, її визначник

$$\det B = \begin{vmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,3 & 0 \\ -0,1 & 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & -0,1 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,2 & -0,2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,2289.$$

Оскільки $\det B \neq 0,$ то обернена матриця B^{-1} існує. Для її знаходження обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці B.

$$B_{11} = 0,32;\ B_{12} = 0,099;\ B_{13} = 0,131;\ B_{14} = 0,22;\ B_{21} = 0,109;\ B_{22} = 0,327;$$

$$B_{23} = 0,109;\ B_{24} = 0,218;\ B_{31} = 0,141;\ B_{32} = 0,108;\ B_{33} = 0,351;\ B_{34} = 0,24;$$

$$B_{41} = 0,1;\ B_{42} = 0,174;\ B_{43} = 0,184;\ B_{44} = 0,641.$$

Отже,

$$B^{-1} = \frac{1}{0,2289} \begin{pmatrix} 0,32 & 0,109 & 0,141 & 0,1 \\ 0,099 & 0,327 & 0,108 & 0,174 \\ 0,131 & 0,109 & 0,351 & 0,184 \\ 0,22 & 0,218 & 0,24 & 0,641 \end{pmatrix}.$$

Підставивши Y та знайдену матрицю B^{-1} у формулу $X = B^{-1} \cdot Y$, одержимо:

$$X = \frac{1}{0,2289} \begin{pmatrix} 0,32 & 0,109 & 0,141 & 0,1 \\ 0,099 & 0,327 & 0,108 & 0,174 \\ 0,131 & 0,109 & 0,351 & 0,184 \\ 0,22 & 0,218 & 0,24 & 0,641 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 60 \\ 45 \\ 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 115,97 \\ 134,78 \\ 131,38 \\ 182,85 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, через три роки першій галузі треба виробити 115,97 одиниць продукції, другій галузі – 134,78 одиниць продукції, третій галузі – 131,38 одиниць продукції, четвертій галузі – 182,85 одиниць продукції, щоб забезпечити нові потреби інших галузей.

2.3. Знаходження коефіцієнтів повних та непрямих витрат, плану та програми підприємства

Розглянемо роботу великого підприємства, яке має декілька цехів. Частина продукції кожного цеху йде на виробничі потреби (використовується іншими цехами; так званий, проміжний продукт), а інша частина використовується для реалізації (поза сферою матеріального виробництва; кінцевий продукт). Для такого підприємства актуальними також є питання балансового аналізу, щоб розробити такі виробничі програми для кожного цеху, які б забезпечували і роботу підприємства і запланований випуск кінцевого продукту.

Постановка задачі. Розглядатимемо процес роботи підприємства за певний період часу (рік).

Нехай підприємство складається з n цехів. Введемо такі позначення:

$x_i -$ валовий випуск продукції $i-$того цеху $(i=1,\ldots,n)$;

$y_i -$ об'єм кінцевого продукту $i-$того цеху $(i=1,\ldots,n)$;

$a_{ij} -$ коефіцієнти прямих витрат, які показують витрати продукції $i-$того цеху на виробництво одиниці продукції $j-$того цеху.

Валовий випуск продукції довільного цеху дорівнює сумарному об'єму продукції, який споживається цехами підприємства і кінцевого продукту:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Ввівши позначення (2.17), де X – матриця-стовпець валового випуску, $Y-$матриця-стовпець кінцевого продукту, $A-$ матриця прямих витрат, отримане співвідношення у матричній формі набирає вигляду (2.18): $X = AX + Y$. Основна задача формулюється у цьому випадку так: знайти таку матрицю валового випуску X, яка за відомою матрицею прямих витрат A забезпечує задану матрицю кінцевого продукту Y.

За умови невиродженості матриці $(E-A)$, одержимо:

$$X = (E-A)^{-1} Y.$$

Матриця $S=(E-A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат.

Щоб з’ясувати економічний зміст елементів матриці $S=S_{ij}$, задаймося матрицями-стовпцями кінцевого продукту виду:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді відповідні матриці валового випуску:

$$X_1 = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ \dots \\ S_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ \dots \\ S_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{pmatrix} S_{1n} \\ S_{2n} \\ \dots \\ S_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отже, кожен елемент S_{ij} матриці S є величиною валового випуску продукції $i-$того цеху, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту $j-$того цеху: $y_j = 1,\ \left(j = 1, \dots, n \right)$.

Приклад 2.14. Підприємство складається із трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. Прямі витрати $a_{ij} \left(i, j = 1, 2, 3 \right)$ одиниць $i-$того цеху, що використовуються як сировина (проміжний продукт) для випуску одиниці вибору продукції $j-$того цеху, а також кількість одиниць продукції $i-$того цеху, призначених до реалізації (кінцевий продукт) наведені у таблиці:

Цех	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	I	II	III	
I	0	0,2	0	200
II	0,2	0	0,1	100
III	0	0,1	0,2	300

Знайти:
1) коефіцієнти повних витрат;
2) план (валовий випуск) для кожного цеху;
3) виробничу програму цехів;
4) коефіцієнти непрямих витрат.

Розв'язання. Позначимо виробничу програму підприємства через

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, де $x_1, x_2, x_3 -$ плани валового випуску продукції цехів;

валовий випуск товарної продукції – Y, де $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$;

матрицю прямих витрат – A, де $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.

a) матрицю повних витрат знайдемо за формулою $S = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник $\det(E - A) = 0,758.$

Отже, обернена матриця до $(E - A)$ існує, обчисливши алгебраїчні доповнення елементів матриці $(E - A)$ одержимо:

$$S = \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix};$$

b) матрицю-стовбець X (розв'язок системи (2.18)) знайдемо за формулою $X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y$ (матричний метод розв'язання системи):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \times Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, план валового випуску продукції: для першого цеху - $x_1 = 238$, для другого - $x_2 = 186$, для третього - $x_3 = 400$;

c) Знайдемо виробничу програму кожного цеху, використовуючи витратні коефіцієнти $a_{ij} \left(i, j = 1,2,3\right)$ за формулою $x_{ij} = a_{ij} x_j$ (x_{ij} – об'єм продукції i – того цеху, що використовується j – тим цехам).

$$x_{11} = a_{11}x_1 = 0 \cdot 238 = 0;\ x_{12} = a_{12}x_2 = 0,2 \cdot 186 = 37,2 \approx 37;$$
$$x_{13} = a_{13}x_3 = 0 \cdot 400 = 0;\ x_{21} = a_{21}x_1 = 0,2 \cdot 238 = 47,6 \approx 48;$$
$$x_{22} = a_{22}x_2 = 0 \cdot 186 = 0;\ x_{23} = a_{23}x_3 = 0,1 \cdot 400 = 40;$$
$$x_{31} = a_{31}x_1 = 0 \cdot 238 = 0;\ x_{32} = a_{32}x_2 = 0,1 \cdot 186 = 18,6 \approx 19;$$
$$x_{33} = a_{33}x_3 = 0,2 \cdot 400 = 80.$$

Таким чином, одержали такі дані:

Цех	Виробничі витрати			$\sum_{j=1}^{3} x_{ij}$	Кінцевий продукт	Валовий випуск
	I	II	III			
I	0	37	0	37	200	238
II	48	0	40	88	100	186
III	0	19	80	99	300	400

Зауваження 2.8. Незначні розбіжності результатів, наприклад, $\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + y_1 = 37 + 200 = 237$, а валовий випуск для першого цеху – 238, пояснюється наближено визначеними (з округленням до сотих) коефіцієнтами матриці S повних витрат.

Коефіцієнти непрямих витрат $C_{ij}, i, j = 1,2,3,$ визначаються як різниця повних внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці S) та прямих витрат (елементи матриці A). Отже, у матричній формі отримаємо:

$$C = S - A = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2.9. У випадку більшої кількості цехів, лінійна система (2.14) буде містити більшу кількість невідомих і, очевидно, порядок матриць буде більшим. Тому в такому випадку систему доцільно розв’язувати методом Гаусса.

2.4. Знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів

У таблиці для розглянутого в прикладі 2.14 підприємства задані витратні норми двох видів сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожного цеху, трудомісткість в людино-годинах на одиницю продукції вартість одиниці відповідної сировини, палива та вартість однієї робочої людино-години.

Показники	Норми витрат цехів			Вартість
	I	II	III	
Сировина а)	1,4	2,4	0,8	5
Сировина б)	0	0,6	1,6	12
Паливо	2	1,8	2,2	2
Трудомісткість	10	20	20	1,2

Знайти:

1) сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програми виробництва;

2) коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеху;

3) повні витрати сировини, палива та праці кожним цехом та підприємством;

4) внутрішньовиробничі витрати цехів;

5) внутрішньовиробничі витрати на кожну одиницю товарної продукції.

Розв'язання. Задана таблиця дозволяє скласти матрицю норм витрат сировини, палива та праці:

$$D = \begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix},$$

та матрицю рядок вартості $V = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 2 & 1,2 \end{pmatrix}$.

1) Сумарні витрати сировини, палива, трудових ресурсів для виконання програми підприємства одержимо як добуток матриці норм витрат D на матрицю X валового випуску продукції:

$$D \times X = \begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 283 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1100 \\ 752 \\ 1691 \\ 14100 \end{pmatrix}.$$

Отже, для виконання програми підприємства потрібно затратити сировини – 1100 одиниць; сировини – 752 одиниці; палива –1691 одиниця; робочих людино-годин – 14100.

2) Коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеху одержимо як добуток матриці норм витрат D на матрицю коефіцієнтів повних витрат S .

$$K = D \times S = \begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,98 & 2,92 & 1,37 \\ 0,17 & 0,84 & 2,11 \\ 2,52 & 2,6 & 3,09 \\ 15,2 & 25,7 & 28,3 \end{pmatrix}.$$

Елементи $j-$ того стовпця одержаної матриці K визначають кількість витрат сировини а), сировини б), палива та робочих людино-годин, необхідних для виготовлення одиниці продукції $j-$ того цеху. Так, наприклад, для виробництва одиниці продукції третім цехом використовується 1,37 одиниць сировини а) 2,11 одиниць сировини б), 3,09 одиниць палива та 28,3 людино-годин.

3) Повні витрати сировини, палива та праці кожним цехом одержимо як добуток витратної норми кожного цеху (для $j-$ того цеху – $j-$тий стовпець матриці норм витрат D) на його валовий випуск продукції:

$$238 \times \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 333 \\ 0 \\ 476 \\ 2380 \end{pmatrix}.$$

Повні витрати сировини а), сировини б), палива, людино-годин першого цеху, необхідні для виробництва валового об’єму продукції.

Аналогічно знаходимо повні витрати інших цехів

$$186\times\begin{pmatrix}2,4\\0,6\\1,8\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}446\\112\\335\\3720\end{pmatrix};\qquad 400\times\begin{pmatrix}0,8\\1,6\\2,2\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\640\\880\\8000\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця повних витрат сировини, палива та праці усього підприємства набере вигляду:

$$\varPi=\begin{pmatrix}333 & 446 & 320\\0 & 112 & 640\\476 & 335 & 880\\2380 & 3720 & 8000\end{pmatrix}.$$

4) Виробничі витрати цехів одержимо як добуток матриці-рядка вартостей V на матрицю повних витрат підприємства.

$$V\times\varPi=\begin{pmatrix}5 & 12 & 2 & 1,2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}333 & 446 & 320\\0 & 112 & 640\\476 & 335 & 880\\2380 & 3720 & 8000\end{pmatrix}=(5473;\quad 8708;\quad 20640).$$

Отже, вартість витрат першого цеху 5473, другого – 8708, третього – 20640.

5) Внутрішньовиробничі витрати на одиницю товарної продукції цехів одержимо як добуток рядка вартостей V на матрицю прямих витрат K:

$$V\times K=\begin{pmatrix}5 & 12 & 2 & 1,2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1,98 & 2,92 & 1,37\\0,17 & 0,84 & 2,11\\2,52 & 2,6 & 3,09\\15,2 & 25,7 & 28,3\end{pmatrix}=(35,22;\quad 60,72;\quad 72,31).$$

2.5. Вправи до розділу 2

Завдання 2.1

Два заводи залізобетонних конструкцій випускають вироби P, R, S вищої, першої та другої категорії якості. Кількість випущених кожним заводом виробів по кожній категорії якості характеризуються наступною таблицею:

Категорії якості	Готові вироби					
	Перший завод			Другий завод		
	P	R	S	P	R	S
Вища	100+3N	200+N	250+2N	270+2N	300+N	400+N
Перша	100+N	130+N	175+N	120+N	150+N	170+N
Друга	5+N	10+N	3+N	2N	20+N	10+N

Який загальний випуск виробів за вказаними категорії якості?

Завдання 2.2.

Фірма використовує три різних види сировини M_1, M_2 та M_3 для виробництва двох видів продукції P_1 та P_2. Витратні норми сировини на виробництво одиниці продукції кожного виду та вартості одиниці відповідної сировини (в грн) задані в таблиці.

Види ситовини	Види продукції		Вартість сировини
	P_1	P_2	
M_1	3	4	8
M_2	2	1	10
M_3	4	3	15

Фірма виготовляє (N + 2) одиниці виробів P_1 та 30(N+5) одиниць виробів P_2 кожного тижня. Знайти:

a) необхідну щотижневу кількість сировини;

b) вартість сировини для виготовлення одиниць виробів P_1 та P_2;

c) чому дорівнюють загальні щотижневі витрати виробництва продукції P_1 та P_2 ?

Завдання 2.3.

Таблицею задані показники взаємних потреб та пропозицій трьох галузей промисловості. Потрібно:

a) визначити матрицю A потреб-пропозицій;

b) припустимо, що через 5 років потреби інших галузей стануть 24+N , 33+N та 75+N та продукції галузей 1, 2, 3 відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити нові потреби? Відповідну систему рівнянь розв’язати матричним методом, методом Крамера та методом Гаусса.

Номер варіанту	Галузь	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
		1	2	3		
1–10	123	20	48	18	14	100120180
		30	12	54	24	
		30	36	36	78	
11–20	1	20	40	30	10	100
	2	30	20	90	60	200
	3	40	100	60	100	300
21–30	1	10	34	45	11	100
	2	40	68	30	32	170
	3	30	17	30	73	150

РОЗДІЛ 3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Теоретичні відомості

3.1.1. Елементи векторної алгебри

Вектори та лінійні операції над ними

Вектором називається величина, яка визначається як числовим значенням так і напрямком; графічно зображується напрямленим відрізком прямої; позначається $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$, де A-початок, а B- кінець вектора.(див. рис. 3.1)

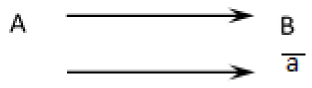

Рис. 3.1

Відстань між початком вектора і його кінцем називається довжиною (або модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$або $|\vec{a}|$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|$і вони мають однаковий напрям. Звідси випливає, що початок вектора можна помістити в довільну точку простору.

Якщо $|\vec{a}|=0$, то вектор називається нульовим і позначається $\vec{0}$.

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (див. рис. 3.2).Кажуть, що додавання векторів відбувається за правилом трикутника.

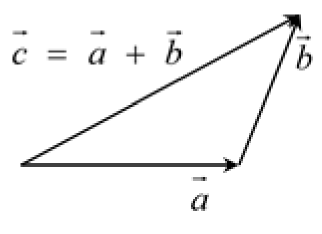

Рис. 3.2

Добутком $(\lambda\vec{a})$ **вектора** $\vec{a}$ **на число** λ називається вектор $\vec{p}$ такий, що $|\vec{p}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, напрям $\vec{p}$ збігається з напрямом $\vec{a}$ при λ>0 і змінюється на протилежний, якщоλ<0 (див. рис. 3.3).

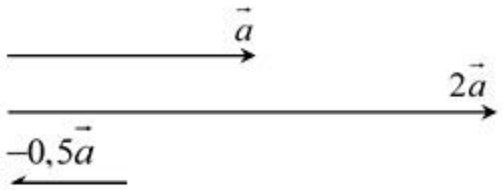

Рис. 3.3

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$ (див. рис. 3.4).

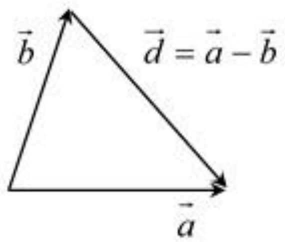

Рис. 3.4

Вектори називаються **колінеарними,** якщо вони лежать на паралельних прямих, або на одній прямій.

Вектори називаються **компланарними,** якщо вони паралельні деякій площині, або лежать в одній площині.

Вектор $\vec{a}_0=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ називається **ортом** вектора $\vec{a}$ ($|\vec{a}_0|=1$ і напрям $\vec{a}_0$ співпадає з напрямом $\vec{a}$).

Розклад вектора за базисом

Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ називається **базисом** множини векторів трьохмірного векторного простору. Всякий вектор $\vec{a}$ може бути єдиним чином розкладений за базисом:

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3\,. \tag{3.1}$$

Числа $x_1,\ x_2,\ x_3$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$

Нехай в просторі введена прямокутна декартова система координат *Oxyz*. Трійка $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ одиничних векторів, які напрямлені вздовж осей *Ox, Oy, Oz* відповідно називається координатним базисом (див. рис. 3.5).

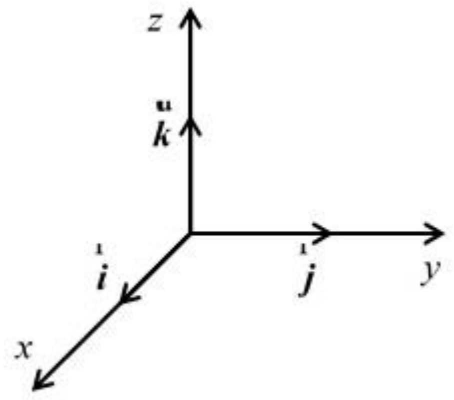

Рис. 3.5

Якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то будемо також записувати $\vec{a} = (x, y, z)$. Якщо $\vec{a} = (x, y, z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Числа $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|}$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$; α,β,γ – кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатними напрямами координатних осей.

Має місце наступна рівність: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2);$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \tag{3.2}$$

Три вектори $\vec{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ утворюють базис тоді і лише тоді, коли визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.3}$$

Розглянемо таку задачу. Нехай задано чотири вектори $\vec{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Відомо, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис. Потрібно знайти розклад (3.1) вектора $\vec{a}$ за базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

В силу (3.2), записуючи рівність (3.1) покоординатно, отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 = a_1, \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = a_2, \\ \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 = a_3. \end{cases} \tag{3.4}$$

Оскільки визначник Δ даної системи лінійних рівнянь відносно невідомих x_1, x_2, x_3, не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок.

Приклад 3.1. Задано вектори $\vec{e}_1 = (1,0,5)$, $\vec{e}_2 = (3,2,7)$, $\vec{e}_3 = (5,0,9)$, $\vec{a} = (-4,2,-12)$. Переконатися, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис і знайти розклад вектора $\vec{a}$ за цим базисом.

Розв'язання. Перевіримо умову (3.3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2(9-25) = -32 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис. Координати x_1, x_2, x_3 вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ знайдемо із відповідної системи (3.4)

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = -4, \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2, \\ 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язок системи знайдемо за формулами Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -12 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 64, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -12 & 9 \end{vmatrix} = -32, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -12 \end{vmatrix} = 32.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Отже, шуканий розклад має вигляд $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Проекція вектора на вектор

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$ називається число $np_{\vec{e}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{e}$ (0≤φ≤π) (див. рис. 3.6).

Очевидно, що якщо $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$, то координати *x, y, z* вектора $\vec{a}$ співпадають з проекціями вектора $\vec{a}$ на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ відповідно.

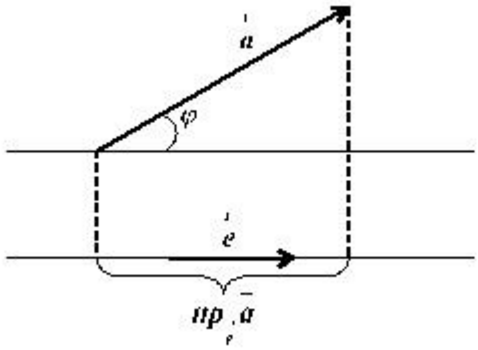

Рис. 3.6

Приклад 3.2. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, якщо $|\vec{b}| = 10$ і вектор $\vec{b}$ утворює тупий кут з віссю *Oy*.

Розв'язання. Оскільки вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a} = 3\lambda\cdot\vec{i} - \lambda\cdot\vec{j} + \lambda\cdot\vec{k}$. Число λ знайдемо з умови $|\vec{b}| = 10$:

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + \lambda^2} = 10 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Знак виберемо такий, щоб вектор $\vec{b}$ утворював тупий кут з віссю Oy, тобто, щоб його проекція на вектор $\vec{j}$ була від'ємною $\lambda = \frac{10}{\sqrt{11}}$ (якщо φ- тупий кут, то $\cos\varphi < 0$).Відповідь: $\vec{b} = 3\frac{10}{\sqrt{11}}\vec{i} - \frac{10}{\sqrt{11}}\vec{j} + \frac{10}{\sqrt{11}}\vec{k}$.

Координати точки в просторі

Нехай в просторі введена прямокутна декартова система координат $Oxyz$. Якщо *M* – довільна точка простору, то вектор $\overrightarrow{OM}$ називається **радіус – вектором** точки *M*. **Координатами точки** *M* називаються координати її радіус – вектора $\overrightarrow{OM}$, тобто *M*= *M*(*x, y, z*), якщо $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – дві довільні точки простору, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\right) \tag{3.5}$$

Відстань ρ між точками M_1 і M_2 знаходиться за формулою

$$\rho(M_1M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{3.6}$$

Приклад 3.3. Задано вершини $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$ і точка E (-1, 2, 1) перетину медіан трикутника ABC. Знайти координати вершини C. (див. рис. 3.7).

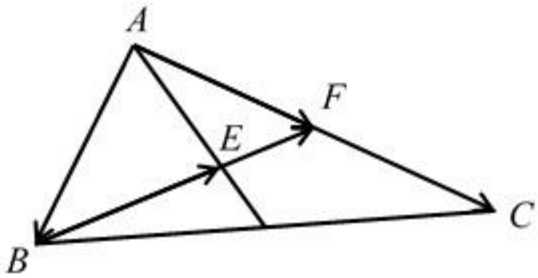

Рис. 3.7

Розв'язання. Оскільки координати вершини A задані, то, згідно з формулою (3.5), достатньо знайти координати вектора $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = 2(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BE})$, оскільки точка E ділить медіану у відношенні 2:1, $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$,

$\overrightarrow{BE} = (-3, 0, 0)$, звідки

$\overrightarrow{AC} = 2\left((1,2,2) + \frac{3}{2}(-3,0,0)\right) = (-7,4,4).$ Нехай $x_c,\ y_c,\ z_c$ – координати точки C. Тоді на основі (3.5) знайдемо:

$x_c = 1 + (-7) = -6$, $y_c = 0 + 4 = 4$, $z_c = -1 + 4 = 3$.

Відповідь: C (-6, 4, 3).

Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ у відношенні λ, тобто

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2} \tag{3.7}$$

Причому, λ>0, якщо точка M знаходиться всередині відрізка $\overrightarrow{M_1M_2}$ і λ<0, якщо – зовні. Співвідношення (3.7) у першому випадку можна записати у вигляді $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|} = \lambda$.

Нехай $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді із (3.6) випливає, що

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3.8}$$

Приклад 3.4. Дано суміжні вершини паралелограма A(-2, 6), B(2, 8), і точку перетину його діагоналей M (2, 2). Знайти дві інші вершини (див. рис. 3.8).

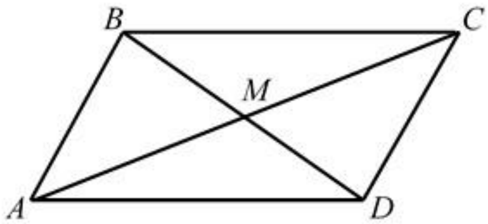

Рис. 3.8

Розв'язання. В точці перетину діагоналі паралелограма діляться пополам. Тоді $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CM} \Rightarrow \lambda = -2$. Нехай $C(x_C,\ y_C)$, $D(x_D,\ y_D)$.

За формулами (3.8) знайдемо

$x_C = \dfrac{-2-2\cdot 2}{1+(-2)} = 6,\ y_C = \dfrac{6-2\cdot 2}{1+(-2)} = -2.$ Аналогічно

$x_D = \dfrac{2-2\cdot 2}{1+(-2)} = 2,\ y_D = \dfrac{8-2\cdot 2}{1+(-2)} = -4.$

Відповідь: C (6, -2), D (2, -4).

Приклад 3.5. Дано трикутник з вершинами A(1, -1, -3), B(2, 1, -2), C(-5, 2, -6). Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A (див. рис. 3.9).

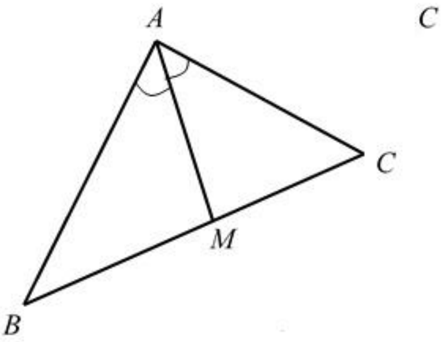

Рис. 3.9

Розв'язання. Відомо, що бісектриса ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим до неї сторонам:

$$\frac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{MC}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|},\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{6}\,.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-5-1)^2+(2+1)^2+(-6+3)^2}=3\sqrt{6}.\,\text{Отже, }\frac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{MC}\right|}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=\frac{1}{3}=\lambda.$$

Нехай $M(x,\ y,\ z)$. За формулами (3.8) знайдемо

$$x=\frac{2-\frac{1}{3}\cdot 5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4},\ y=\frac{1+\frac{1}{3}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{4},\ z=\frac{-2-\frac{1}{3}\cdot 6}{1+\frac{1}{3}}=-3.\quad \text{Отже, } M(\frac{1}{4},\frac{5}{4},-3) \text{ і}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(1-\frac{1}{4})^2+(-1-\frac{5}{4})^2+(-3+3)^2}=\frac{3}{4}\sqrt{10}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}\sqrt{10}.$

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ називається число

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi, \tag{3.9}$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{3.10}$$

Із (3.9) випливає, що $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 0$ – умова перпендикулярності векторів.

Із (3.9) і (3.10) отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (3.11)$$

Приклад 3.6. Знайти косинус внутрішнього кута φ при вершині B у ΔABC, якщо A (1, 1, 0), B (0, -1, 0), C (-2, 1, 1).

Розв'язання. За формулою (3.5) знаходимо

$\overrightarrow{BA} = (1-0, 1-(-1), 0-0) = (1, 2, 0),$

$\overrightarrow{BC} = (-2-0, 1-(-1), 1-0) = (-2, 2, 1).$

За формулою (3.11) знайдемо $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot(-2) + 2\cdot 2 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}}.$

Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам:

1) 1) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють **праву трійку** векторів, тобто, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти стрілки годинника;

3) 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Позначення $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$або $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Геометричний зміст векторного добутку: модуль векторного добутку $|[\vec{a},\vec{b}]|$ чисельно дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на суміжних сторонах. Із означення випливає, що $[\vec{a},\vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$, тобто, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні вектори.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$;

2) $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$;

3) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$.

Якщо $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

Приклад 3.7. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах

$$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2 \text{ та } \vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2, \text{ де } |\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1 \text{ і } \left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}\right)=45^\circ.$$

Розв'язання.

$S_\Delta=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|$. Знайдемо, враховуючи властивості векторного добутку:

$[\vec{a},\vec{b}]=(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)\times(\vec{e}_1+3\vec{e}_2)=2\left[\vec{e}_1,\vec{e}_1\right]+6\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right]-\left[\vec{e}_2,\vec{e}_1\right]-3\left[\vec{e}_2,\vec{e}_2\right]=$

$=2\cdot 0+6\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right]+\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right]-3\cdot 0=7\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right].$

Отже,

$\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=7\left\|\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right]\right\|=7|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\sin 45^\circ=\frac{7}{2}\sqrt{2}.$

Відповідь. $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ кв. од.

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left([\vec{a},\ \vec{b}],\vec{c}\right).$$

Із означення випливає, що три вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

Геометричний зміст мішаного добутку: модуль $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$ мішаного добутку дорівнює об'єму $V_{\text{пар.}}$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, тобто $V=|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.

Якщо $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$

Приклад 3.8. Задано вершини піраміди $A(1,1,2), B(-1,2,0), C(0,1,2), D(2,0,3)$. (див. рис. 3.10).

Знайти: 1) довжину ребра AB; 2) косинус кута між ребрами AB і AD; 3) кут між ребрами AD і гранню ABC; 4) площу грані ABC; 5) об'єм піраміди; 6) висоту піраміди, опущену з вершини D на грань ABC; 7) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$.

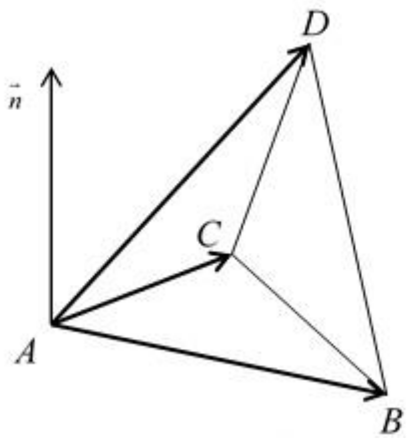

Рис. 3.10

Розв'язання: 1) Оскільки $\overrightarrow{AB} = (-2,\ 1,\ -2)$, то згідно з формулою (3.6)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2} = 3.$$

2) Знайдемо $\overrightarrow{AD} = (1,\ -1,\ 1)$ і позначимо φ – кут між $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, тоді згідно з формулою (3.11)

$$\cos\varphi = \frac{-2-1-2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = -\frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

3) Оскільки $\overrightarrow{AC} = (-1,\ 0,\ 0)$, то

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}.$$

Звідки $\vec{n} = (0,2,1)$. Вектор $\vec{n}$ - перпендикулярний до грані ABC. Позначимо кут між гранню ABC і ребром AD через α, тоді кут між вектором $\vec{n}$ та вектором $\overrightarrow{AD}$ рівний $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

$$\cos(\vec{n}\,\hat{}\,\overrightarrow{AD}) = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{0\cdot1+2\cdot(-1)+1\cdot1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Звідки $\alpha = -\arcsin(\frac{1}{\sqrt{15}})$.

4) Площа грані *ABC* дорівнює площі ΔABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \sin(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AC}).$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 1$. Позначимо кут між ($\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$)=β, тоді

$$V_{пір.} = \frac{1}{6}V_{пар.} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} | \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} |= \frac{1}{6} | -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} |= \frac{1}{6}.$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2}{3}; \ \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ \text{ і } \ S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

5. Для знаходження висоти піраміди використаємо формулу

$$V_{пір.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h, \text{ звідки } h = \frac{3V_{пір.}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

6. Оскільки $np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AD})$, то

$$np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi = 3 \cdot (-\frac{5}{3\sqrt{3}}) = -\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

3.1.2. Елементи аналітичної геометрії

Пряма на площині

В декартовій прямокутній системі координат Oxy на площині пряма може бути задана рівнянням одного із таких видів:

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $\left(x_0, \ y_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B)$;

2) $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої, де $\vec{n} = (A, B)$ – вектор, перпендикулярний до прямої (вектор нормалі до прямої);

3) $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\varphi$, де φ – кут між прямою та додатним напрямом осі Ox;

4) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(x_0,\ y_0\right)$ і має кутовий коефіцієнт k;

5) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1,\ y_1\right)$ та $M_2\left(x_2,\ y_2\right)$;

6) $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(x_0,\ y_0\right)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (\ell, m)$;

7) $\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$ - параметричні рівняння прямої;

8) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках на осях, де $(a;0)$ і $(0;b)$ – точки перетину прямої з осями координат;

9) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ – нормальне рівняння прямої, в якому $p > 0$ – довжина перпендикуляра до прямої, опущеного з початку координат; α – кут між перпендикуляром і додатним напрямом осі Ox.

Щоб одержати рівняння (9) з рівняння (2), треба поділити рівняння (2) на $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, вибравши знак, протилежний знаку C.

Відстань d від точки $M_0\left(x_0,\ y_0\right)$ до прямої (2) або (9) знаходиться за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right|. \tag{3.12}$$

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2, то кут φ між ними можна знайти за формулою

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|; \tag{3.13}$$

звідки випливає ознака паралельності двох прямих: $k_1 = k_2$ і ознака перпендикулярності $\boldsymbol{k_2 = -\dfrac{1}{k_1}}$.

Приклад 3.9. Задано трикутник з вершинами в точках A (1, 2), B (2,-2), C (6, 1).

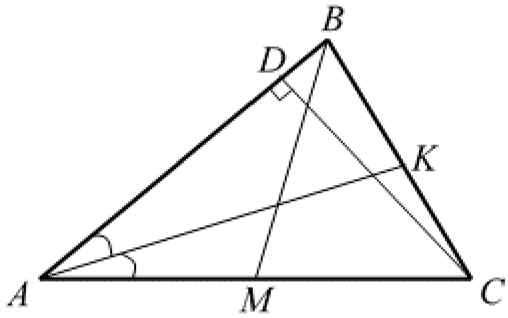

Рис. 3.11

Потрібно:

1) написати рівняння сторони (AB);
2) написати рівняння висоти (CD) і знайти її довжину $|CD|$;
3) знайти кут φ між висотою (CD) і медіаною (BM);
4) записати рівняння бісектриси (AK) внутрішнього кута при вершині A.

Розв'язання.

1. Використовуючи рівняння прямої (5), отримаємо

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-2-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 4x+y-6=0 \text{ – рівняння прямої } (AB).$$

2. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої (CD): $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-4}=\dfrac{1}{4}.$

Тепер скористаємося рівнянням прямої (4):

$$y-1=\frac{1}{4}(x-6) \quad \Leftrightarrow \quad x-4y-2=0 \text{ – рівняння прямої } (CD).$$

Визначимо координати точки D. Для цього розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x+y-6=0 \\ x-4y-2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{26}{17},\ y=-\frac{2}{17}.$$

Отже, $D\left(\dfrac{26}{17},-\dfrac{2}{17}\right)$ і $|CD|=\sqrt{\left(6-\dfrac{26}{17}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{17}\right)^2}=\dfrac{19}{\sqrt{17}}.$

3. Координати точки M:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{7}{2}, \qquad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3}{2}.$$

Із рівняння прямої (5) знайдемо, що кутовий коефіцієнт прямої (BM):

$$k_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{7}{2}-2}=\frac{7}{3}.$$

Для знаходження кута φ скористаємось формулою (3.13):

$$tg\varphi=\left|\frac{k_{BM}-k_{CD}}{1+k_{BM}k_{CD}}\right|=\frac{\frac{7}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{25}{19}\quad\Rightarrow\quad\varphi=arctg\frac{25}{19}.$$

4) За властивістю бісектриси $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$. Знайдемо довжини

$|AB|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ та $|AC|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$. Отже, $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\lambda.$

Далі скористаємося формулами поділу відрізка в заданому відношенні λ і знайдемо координати точки K:

$$x_K=\frac{2+\sqrt{\frac{17}{26}}\cdot 6}{1+\sqrt{\frac{17}{26}}}=\frac{2\sqrt{26}+6\sqrt{17}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}};\quad y_K=\frac{-2+\sqrt{\frac{17}{26}}\cdot 1}{1+\sqrt{\frac{17}{26}}}=\frac{-2\sqrt{26}+\sqrt{17}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}}.$$

Рівняння бісектриси (AK) напишемо у формі (5):

$$\frac{x-1}{x_K-1}=\frac{y-2}{y_K-2}\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}=\frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(4\sqrt{26}+\sqrt{17}\right)x+\left(\sqrt{26}+5\sqrt{17}\right)y-6\sqrt{26}-11\sqrt{17}=0$$ – рівняння прямої (AK).

Приклад 3.10. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин B (2, -7), а також рівняння висоти $3x+y+11=0$ і медіани $x+2y+7=0$, проведених з різних вершин.

Розв'язання. Нехай (AK) – висота, а (CM) медіана (див. рис. 3.12):

(AK): $3x+y+11=0$;

(CM): $x+2y+7=0$.

Кутовий коефіцієнт прямої (BC)

$$k_{BC}=-\frac{1}{k_{AK}}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}.$$

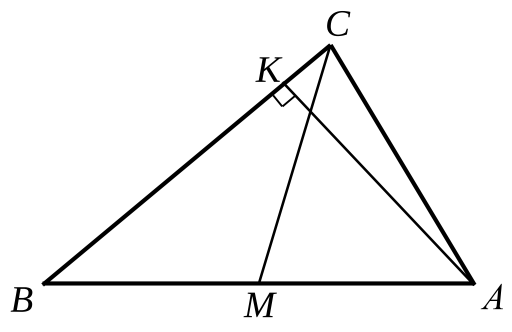

Рис. 3.12

Скористаємося рівнянням прямої (4), щоб записати рівняння прямої (*BC*):

$y+7=\frac{1}{3}(x-2) \;\Leftrightarrow\; x-3y-23=0$ – рівняння прямої (*BC*).

Знайдемо координати точки *C*, розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x+2y+7=0 \\ x-3y-23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \; x=5,\; y=-6.$$

Отже, *C* (5, -6).

Нехай $M\left(x_1, y_1\right)$ і $A(x, y)$. Тоді $\frac{x+2}{2}=x_1$, $\frac{y-7}{2}=y_1$, оскільки |*BM*|=|*MA*|.

Оскільки точка *M* лежить на прямій (*CM*), а точка *A* – на (*AK*), то їх координати задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2y_1+7=0, \\ 3x+y+11=0, \\ \dfrac{x+2}{2}=x_{1.}, \\ \dfrac{y-7}{2}=y_1 \end{cases}$$

Звідки,

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}+2\dfrac{y-7}{2}+7=0, \\ 3x+y+11=0, \end{cases} \Leftrightarrow \; \begin{cases} x+2y+2=0, \\ 3x+y+11=0, \end{cases} \Leftrightarrow \; x=-4,\; y=1.$$

Отже, *A*(-4, 1).

Оскільки координати усіх вершин трикутника відомі, то, скориставшись рівнянням прямої (5), можемо записати після перетворень рівняння його сторін:

(*AC*): 7*x*+9*y*+19=0;

(*AB*): 4*x*+*y*+13=0.

Приклад 3.11. Нехай задані вершина *C* (-1, 3) прямого кута рівнобедреного трикутника *ABC* і його гіпотенуза $3x-4y-12=0$. Знайти рівняння катетів.

Розв'язання. Нехай гіпотенуза (AB): $3x-4y-12=0$. Тоді її кутовий коефіцієнт $k_{AB}=\frac{3}{4}$. Оскільки трикутник рівнобедрений, то $\angle CAB=\angle CBA=45^0$.

Знайдемо кутові коефіцієнти за допомогою формули (3.13):

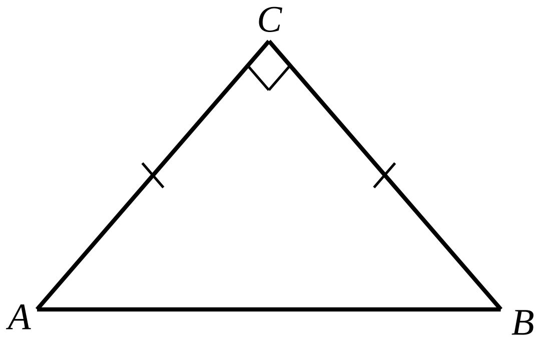

Рис. 3.13

$$tg\,45^0=\left|\frac{k-k_{AB}}{1+k\cdot k_{AB}}\right|=\left|\frac{k-\frac{3}{4}}{1+k\cdot\frac{3}{4}}\right| \Leftrightarrow 1=\pm\frac{4k-3}{4+3k} \Leftrightarrow k_1=7,\ k_2=-\frac{1}{7}.$$

Використовуючи рівняння прямої (4), можемо записати шукані рівняння катетів:

$$y-3=7(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 7x-y+10=0;$$

$$y-3=-\frac{1}{7}(x+1) \Leftrightarrow \quad x+7y-20=0.$$

Площина в просторі

В прямокутній декартовій системі координат *Oxyz* в просторі площина може бути задана рівнянням одного із наступних видів:

1) $A_x+B_y+C_z+D=0$ – загальне рівняння площини, де $\vec{n}=(A,B,C)$ – вектор, перпендикулярний до площини (вектор нормалі);

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A,B,C)$;

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – рівняння площини у відрізках, де $(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$ – точки перетину площини з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно;

4) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ – нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси напрямного вектора $\vec{n}$, направленого з початку координат в сторону площини; $p>0$ – відстань від початку координат до площини.

Рівняння (1) зводиться до рівняння (4) шляхом ділення на $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, вибравши знак протилежний знаку *D*.

Відстань *d* від точки $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ до площини (1) або (4) знаходиться за формулою

$$d = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\right| = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

$$(\|)\ \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1};\ (\perp)\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5) якщо $M_1\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$, $M_2\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$, $M_3\left(x_3,\ y_3,\ z_3\right)$ точки, які не лежать на одній прямій, то рівняння площини, що проходить через ці точки, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 3.12. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки M_1 (1,1,1), M_2 (0,1,2), M_3 (-1,3,2).

Розв'язання. Позначимо $M(x,\ y,\ z)$ – довільну точку площини. Три вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарні при будь-якому положенні точки M на площині. Тоді їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & 1-1 & 2-1 \\ -1-1 & 3-1 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Розкладаючи визначник за першим рядком, отримаємо

$$-2(x-1) - (y-1) - 2(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x - y - 2z + 5 = 0.$$

Відповідь: $2x + y + 2z - 5 = 0$.

Приклад 3.13. Скласти рівняння площини, яка проходить через задані точки M_1(1,2,0), M_2(2,1,1), паралельно вектору $\vec{a}$ =(3;0;1).

Розв'язання. Задача має єдиний розв'язок, оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = (1,-1,1)$ і $\vec{a} = (3,0,1)$ неколінеарні (їх координати не пропорційні). За вектор нормалі $\vec{n}$ можемо взяти вектор

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Отже $\vec{n}=(-1,2,3)$. Далі, скориставшись рівнянням площини (2), отримаємо $-(x-1)+2(y-2)+3z=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y-3z+3=0.$

Відповідь: $x-2y-3z+3=0$.

Пряма в просторі

Пряма в просторі може бути задана одним із наступних рівнянь:

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – загальне рівняння прямої, як лінії перетину двох площин, де вектори $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ і $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$ – неколінеарні;

$\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – канонічні рівняння прямої, де

$\vec{s}=(\ell,m,n)$ – напрямний вектор прямої, $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ – точка на прямій;

$\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \ ,t\in(-\infty,+\infty) \\ z=z_0+nt \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої;

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right),\ M_2\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$.

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих, заданих рівнянням виду (2):

$$\parallel \frac{\ell_2}{\ell_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1};\ \perp:\ \ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Приклад 3.14. Записати канонічні рівняння прямої, яка задана загальним рівнянням:

$$L:\begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Візьмемо будь-яку точку $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ на прямій *L*. Для цього покладемо, наприклад, $x_0=0$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} -y+2z-3=0, \\ 2y-z-1=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y_0=\frac{5}{3},\ z_0=\frac{7}{3}.\ \text{Отже, } M_0\left(0,\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right).$$

За напрямний вектор $\vec{s}$ прямої L можемо взяти вектор

$$\vec{s}=\left[\vec{n_1},\vec{n_2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k},$$

$\vec{n_1}$ і $\vec{n_2}$ – вектори нормалі до площин, що перетинаються по прямій L.

Отже, $\vec{s}=(-3,\ 4,\ 5)$. Крім того $M_0\left(0,\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$. Скориставшись рівнянням прямої (2), одержимо: $\dfrac{x-0}{-3}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{4}=\dfrac{z-\frac{7}{3}}{5}$.

Відповідь: $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{3y-5}{12}=\dfrac{3z-7}{15}$.

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою і площиною в просторі вимірюється кутом між прямою та її проекцією на площину. Якщо пряма задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а площина – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, то цей кут φ визначається за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{A\ell+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}.$$

Звідки випливає умова паралельності прямої і площини: $A\ell+Bm+Cn=0$.

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд: $\dfrac{A}{\ell}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$.

Приклад 3.15. Визначити точку $M\left(x,\ y,\ z\right)$ перетину прямої

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}\text{ з площиною } 2x+3y-2z+2=0$$

Розв’язання. Перейдемо до параметричних рівнянь прямої

$$\begin{cases}x=2t+1,\\ y=3t-1,\\ z=2t+5.\end{cases}$$

Підставимо ці вирази замість *x, y, z* у рівняння площини:

$2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0$, звідки, $t=1$. Отже, координати точки перетину будуть $x=3$, $y=2$, $z=7$.

Відповідь: $M(3, 2, 7)$.

Приклад 3.16. Довести, що прямі

$(L_1)\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ і $(L_2)=\begin{cases} x=3t+7, \\ y=2t+2, \\ z=-2t+1. \end{cases}$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Пряма L_1 проходить через точку $M_1(1, -2, 5)$ і має напрямний вектор $\overrightarrow{s_1}=(2, -3, 4)$. Пряма L_2 проходить через точку $M_2(7, 2, 1)$ і має напрямний вектор $\overrightarrow{s_2}=(3, 2, -2)$. Тоді для того, щоб прямі L_1 і L_2лежали в одній площині, необхідно, щоб вектори$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$ були компланарними. В свою чергу, для цього потрібно, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю. Покажемо це:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

оскільки перший і третій рядки визначника пропорційні. Отже, L_1 і L_2 лежать в одній площині. Складемо їх рівняння.

Нехай $M\left(x,\ y,\ z\right)$– довільна точка площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$ – компланарні і їх мішаний добуток має дорівнювати нулю, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Розкладемо визначник за першим рядком, отримаємо

$$-2(x-1)+16(y+2)+13(z-5)=0 \Leftrightarrow -2x+16y+13z-31=0.$$

Відповідь: $2x-16y-13z+31=0$.

Криві другого порядку

Рівняння кривої другого порядку на площині в прямокутній декартовій системі координат *Oxy* має вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де *A, B, C, D, E, F* – сталі. Якщо крива невироджена (порожня множина, точка, пряма, пара прямих), то для неї знайдеться така прямокутна декартова система координат, в якій рівняння кривої набуває одного із наступних видів:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a \geq b > 0) - \textbf{еліпс;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a, b > 0) - \textbf{гіпербола}; \qquad (3.14)$$

$$y^2 = 2px \; (p > 0) - \textbf{парабола.}$$

Дані рівняння називаються **канонічними.**

Для знаходження канонічного рівняння кривої другого порядку, заданої загальним рівнянням, використовується паралельне перенесення осей координат в деякому напрямку і поворот системи координат на деякий кут.

Якщо точка *M* має координати $(x, \; y)$ в системі координат *Oxy*, а нова система $O'x'y'$ одержана перенесенням початку $O(0, \; 0)$ старої системи в точку $O'(x_0, \; y_0)$, то нові координати $(x', \; y')$ точки *M* зв'язані з старими формулами

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина стала (більша, ніж віддаль між фокусами).

Позначимо цю сталу величину через $2a$; віддаль між фокусами через $2c$; тоді $2a>2c$, отже, $a>c$.

Виберемо систему координат так: вісь абсцис проведемо через фокуси, а початок координат візьмемо всередині відрізка $F_1 F_2$.

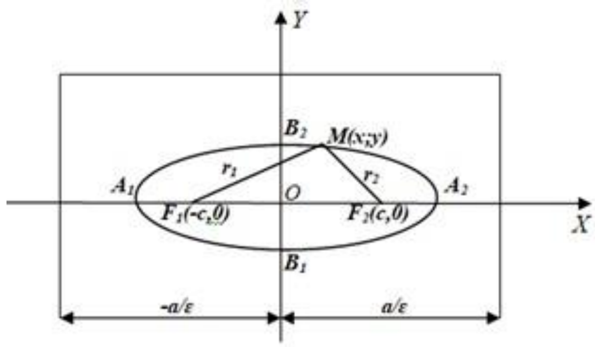

Рис. 3.14

$$0B_1=0B_2= в;\ 0A_1=0A_2= a;\ 0F_1=0F_2= c.$$

В цій системі координати фокусів будуть такі: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Віддалі довільної точки $M\left(x,\ y\right)$ еліпса до фокусів називаються фокальними радіусами і позначаються

$$MF_1 = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$MF_2 = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Згідно з означенням еліпса $r_1 + r_2 = 2a$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Це і є рівнянням еліпса, після спрощення якого одержимо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.16)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > b)$ у випадку, якщо фокуси лежать на осі OX, і $b^2 = a^2 + c^2$ $(a < b)$ у випадку, якщо фокуси лежать на осі $0Y$.

Відрізок $|A_1A_2|=2a$ називається великою віссю еліпса, а відрізок $|B_1B_2|=2b$ називається малою віссю еліпса. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називаються **вершинами еліпса**.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної віддалі ($2c$) до довжини великої осі еліпса ($2a$). Тоді за означенням: $\varepsilon = c / a$, тому, що $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса (3.16) називаються прямі, паралельні до малої осі еліпса і розміщені симетрично відносно неї на віддалі, рівній a / ε, тому рівняння директрис мають вигляд: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ $(\varepsilon = c / a)$.

Якщо в рівнянні еліпса $b > a$, то рівняння директрис будуть $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ $(\varepsilon = c / b)$.

Якщо $a = b$, то рівняння (3.16) приймає вигляд $x^2 + y^2 = a^2$ і визначає коло з центром в початку координат радіуса a.

Якщо центр еліпса (3.16) знаходиться в точці $0_1(x_1, y_1)$, а осі симетрії паралельні осям координат, то його рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1 \qquad (3.17)$$

Якщо в рівнянні (3.17) $a = b$, то одержимо рівняння

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = a^2. \qquad (3.18)$$

яке визначає рівняння кола з центром в точці (x_1, y_1) і радіусом рівним a.

Приклад 3.17. Велика вісь еліпса дорівнює 10; фокуси знаходяться в точках $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$. Скласти рівняння еліпса, знайти ексцентриситет та написати рівняння директрис.

Розв'язання. За умовою $2a = 10$, $a = 5$, $c = 4$.
$b^2 = a^2 - c^2$, $b^2 = 25 - 16$, $b^2 = 9$.
Рівняння еліпса буде $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\varepsilon = c / a$, $\varepsilon = 4 / 5$.
Рівняння директрис $x = \pm a / \varepsilon$, тобто $x = \pm 25/4$.

Приклад 3.18. Знайти канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип і побудувати графік: $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки, які містять лише x і лише y:

$$9(x^2 - 10x) + 16(y^2 + 2y) + 97 = 0.$$

Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів:

$$9\left[(x^2 - 10x + 25) - 25\right] + 16\left[(y^2 + 2y + 1) - 1\right] + 97 = 0,$$
$$9(x - 5)^2 + 16(y + 1)^2 - 144 = 0.$$

Позначимо

$$\begin{cases} x' = x - 5, \\ y' = y + 1, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x = x' + 5, \\ y = y' - 1. \end{cases}$$

Порівнюючи дані формули з формулами (3.15), бачимо, що вони визначають паралельне перенесення старої системи координат Oxy в нову $O'x'y'$ з початком $O'(5,\ -1)$. В системі координат $O'x'y'$ рівняння кривої набуває вигляду:

$$9(x')^2 + 16(y')^2 - 144 = 0, \text{ або } \frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1.$$

Це канонічне рівняння еліпса з півосями a=4 і b=3.

Зробимо побудову

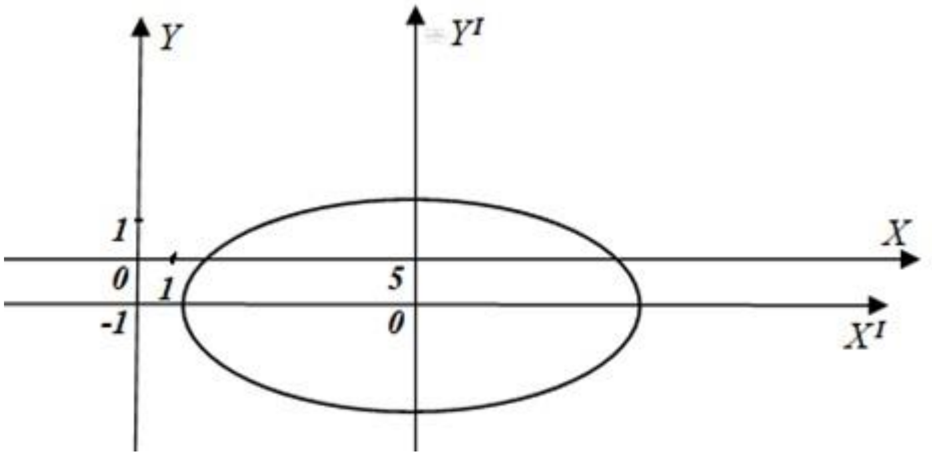

Рис. 3.15

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця віддалей яких від двох заданих точок F_1 та F_2, що називаються фокусами, є величина стала, менша за віддаль між фокусами.

Позначимо цю сталу величину через $2a$; віддаль між фокусами $F_1F_2 = 2c$. Причому $2c > 2a,\ c > a$.

Розташуємо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси, а початок координат знаходився в середині відрізка F_1F_2.

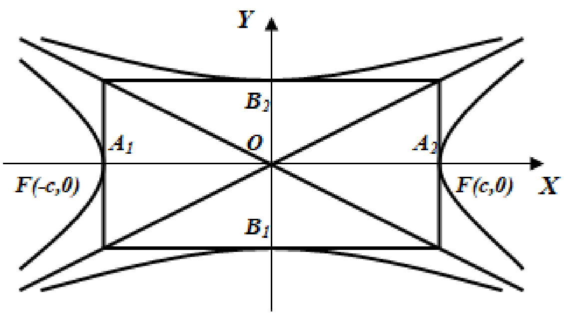

Рис. 3.16

$$0B_1 = 0B_2 = в;\ 0F_1 = 0F_2 = c;\ 0A_1 = 0A_2 = a.$$

У цьому випадку фокуси будуть мати координати: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Віддалі довільної точки $M(x,\ y)$ гіперболи від фокусів, називаються її фокальними радіусами і позначаються

$$MF_1 = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad MF_2 = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

За означенням гіперболи, маємо $r_1 - r_2 = \pm 2$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

це і є рівняння гіперболи, після спрощення якого одержимо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.18}$$

де $b^2 = c^2 - a^2, (c > a)$.

Відрізок A_1A_2 називається дійсною віссю гіперболи, а відрізок B_1B_2 – уявною віссю гіперболи.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної віддалі гіперболи $(2c)$ до довжини дійсної осі гіперболи $(2a)$, $\varepsilon = c / a$, тому, що $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Директрисами гіперболи називаються прямі, паралельні до уявної осі гіперболи і розміщені симетрично відносно неї на віддалі a / ε, тому $x = \pm - a / \varepsilon$ – рівняння директрис гіперболи.

Асимптотами гіперболи називаються прямі $y = \pm \frac{b}{a} x$, до яких наближаються вітки гіперболи, коли $|x|$ необмежено зростає. Асимптоти гіперболи напрямлені по діагоналях прямокутника, побудованого на дійсній та уявній осях гіперболи.

Дві гіперболи, у яких дійсна вісь однієї є уявною віссю другої і навпаки, називаються **спряженими.**

Рівняння спряжених гіпербол в одній і тій же системі координат будуть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Спряжені гіперболи мають спільний центр і спільні асимптоти

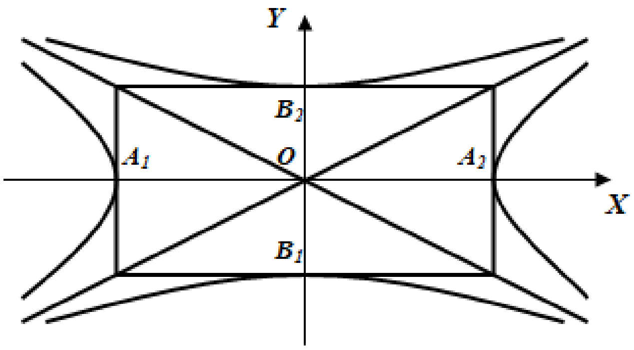

Рис. 3.17.

$$A_1 0 = A_2 0 = a; \ B_1 0 = B_2 0 = b.$$

Для гіперболи $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ фокуси якої знаходяться на осі ординат рівняння директрис мають вигляд $y = \pm b / \varepsilon, \ де \ \varepsilon = c / b.$

Слід відмітити ще одну важливу властивість гіперболи: відношення віддалі будь-якої точки гіперболи від фокуса до віддалі цієї точки відповідної директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи.

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Якщо центр гіперболи (3.18) знаходиться в точці $0_1(x_1, y_1),$ а осі симетрії паралельні осям координат, то рівняння такої гіперболи має вигляд

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Приклад 11. Задано гіперболу $25x^2 - 9y^2 - 225 = 0.$

1) знайти її пів осі;
2) знайти фокуси;
3) обчислити ексцентриситет;
4) написати рівняння асимптот і директрис;
5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис;
6) побудувати обидві гіперболи.

Розв'язання.

1) $25x^2 - 9y^2 - 225 = 0. \ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1; \ a^2 = 9, a = 3; \ b^2 = 25, b = 5.$

2) $c^2 = a^2 + b^2; \ c^2 = 9 + 25; \ c^2 = 34; \ c = \sqrt{34}.$

3) $F_1(-\sqrt{34}; \ 0), F_2(\sqrt{34}; \ 0).$

4) $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Рівняння асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, $y = \pm\dfrac{5}{3}x$

Рівняння директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{34}/3}$, $x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{34}}$.

5) $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ – рівняння спряженої гіперболи, $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{34}}{5}$.

Рівняння директрис: $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$, $y = \pm\dfrac{5}{\sqrt{34}/5} = \pm\dfrac{25}{\sqrt{34}}$.

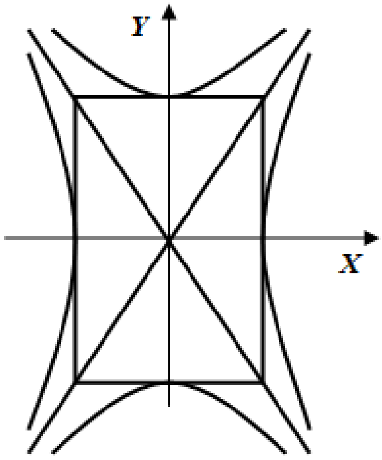

Рис. 3.18

Приклад 12. Знайти канонічне рівняння кривої, визначити її тип і побудувати $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 31 = 0$

Розв'язання.

$$x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 31 = 0$$
$$x^2 - 4y^2 - 2x - 16y = 31$$
$$\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - 4\left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) = 31$$
$$\left(x-1\right)^2 - 4\left(y+2\right)^2 = 31 + 1 - 16$$
$$\left(x-1\right)^2 - 4\left(y+2\right)^2 = 16$$
$$\left(x-1\right)^2 - 4\left(y+2\right)^2 = 16$$
$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Позначимо $\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 2, \end{cases}$ або $\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' - 2. \end{cases}$

Ці формули визначають паралельне перенесення системи координат Oxy в точку $0'(1,-2)$. В системі координат $O'x'y'$ рівняння кривої прийме вигляд:

$\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ – це канонічне рівняння гіперболи з півосями $a = 4$ і $b = 2$.

Зробимо рисунок.

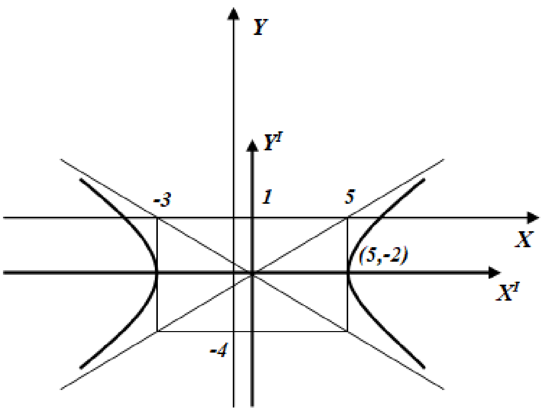

Рис. 3.19

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, яка називається фокусом, і від заданої прямої, яка називається **директрисою параболи.**

Вибираємо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус перпендикулярно до директрис, а за початок координат візьмемо середину відрізка, який лежить між фокусом і директрисою, тоді рівняння параболи в цій системі координат буде мати вигляд:

$$y^2 = 2px, \tag{3.19}$$

де параметр p, є віддаль від фокуса до директрис.

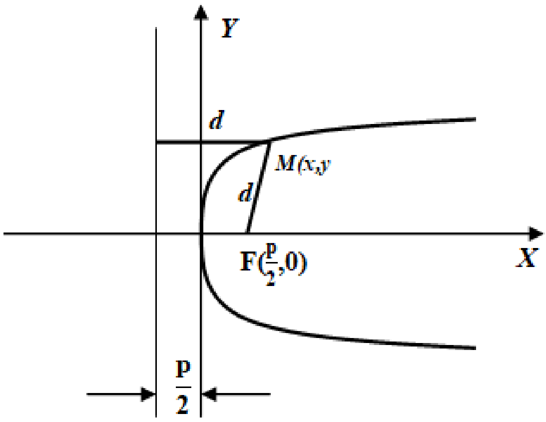

Рис. 3.20

Рівняння директрис $x=-p/2$.

Якщо вітки параболи напрямлені вліво, то її рівняння буде

$$y^2 = -2px, \tag{3.20}$$

рівняння директрис в цьому випадку $x = p/2$.

Віссю симетрії парабол (3.19) і (3.20) є вісь абсцис.

Якщо вісь симетрії параболи є вісь 0y, то її рівняння буде:

$$x^2 = \pm 2py, \tag{3.21}$$

де знак «–» вказує на те, що вітки параболи напрямлені вниз. Рівняння директрис будуть мати відповідно вигляд: $y = \pm p/2$.

Якщо вершина параболи знаходиться в точці $0_1(x_1, y_1)$, то рівняння параболи набуде вигляду $(x - x_1)^2 = \pm 2p(y - y_1)$ –у випадку, коли вісь симетрії паралельна осі *0y* і $(y - y_1)^2 = \pm 2p(x - x_1)$ – у випадку, коли вісь симетрії паралельна осі *0x*.

Приклад 13. Задано рівняння параболи. Визначити координати вершини параболи, величину параметра *p*, скласти рівняння директрис та побудувати криву.

а) $2x^2 - x + 2y + 3 = 0;$

$$2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 2y + 3 = 0; \qquad 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -2y - 3 + \frac{1}{8};$$

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -2y - \frac{23}{8}; \qquad 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -2\left(y + \frac{23}{16}\right); \qquad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\left(y + \frac{23}{16}\right),$$

де $0\left(\frac{1}{4},-\frac{23}{16}\right)$ – координати вершини.

Позначимо $\begin{cases} x-\frac{1}{4}=x' \\ y+\frac{23}{16}=y' \end{cases}$ або $\begin{cases} x=x'+\frac{1}{4} \\ y=y'-\frac{23}{16} \end{cases}$ – ці формули визначають перенесення старої системи координат $0xy$, в нову $0'x'y'$, з початком в $0'\left(\frac{1}{4},-\frac{23}{16}\right)$.

В системі координат $0'x'y'$ рівняння параболи набуде вигляду

$(x')^2=-y',\left(x^2=-2py\right),-2py=-1, p = \frac{1}{2}$ – величина параметра.

Рівняння директрис $y'=\frac{p}{2}$, але $y'=y+\frac{23}{16}$, тому

$y+\frac{23}{16}=\frac{1/2}{2},\ \ y=\frac{1}{4}-\frac{23}{16},\ \ y=-\frac{19}{16}$ – рівняння директрис.

Побудуємо криву:

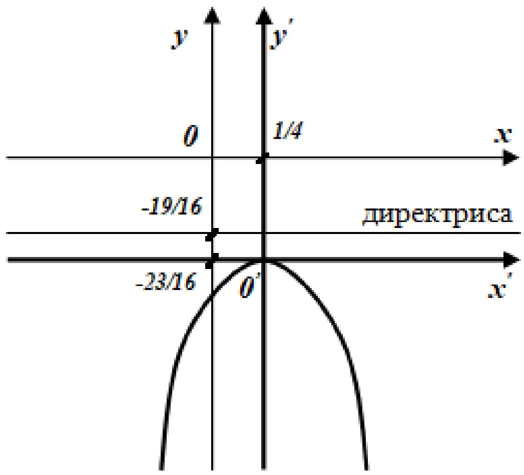

Рис. 3.21

b) $y^2-5y+6x+10=0,$

$y^2-5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6x+10=0;\qquad \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-6x-10+\frac{25}{4};$

$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-6x-\frac{15}{4};\qquad \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-6\left(x+\frac{15}{24}\right)$

$0'\left(-\frac{15}{24},\frac{5}{2}\right)$ – це вершина параболи.

Позначимо $\begin{cases} x+\dfrac{15}{24}=x', \\ y-\dfrac{5}{2}=y', \end{cases}$ або $\begin{cases} x=x'-\dfrac{15}{24}, \\ y=y'+\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

В системі координат з початком в точці $0'\left(-\frac{15}{24},\frac{5}{2}\right)$ рівняння параболи має вигляд:

$$(y')^2=-6x', -2p=-6, p=\ 3 \text{ – величина параметра.}$$

Рівняння директрис для параболи $y^2=-2px$ має вигляд $x=\frac{p}{2}$ (*)

Якщо $x'=x+\frac{15}{24}$, підставимо в (*), то одержимо $x+\frac{15}{24}=\frac{3}{2}$.

Звідки маємо $x=\frac{3}{2}-\frac{15}{24}$; $x=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$; $x=\frac{7}{8}$ – рівняння директрис.

Побудуємо криву.

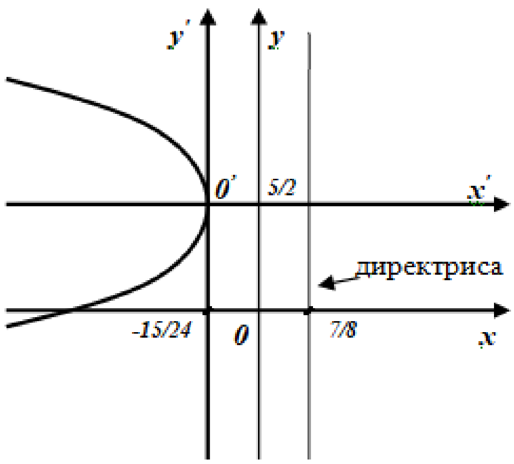

Рис. 3.22

Широке застосування аналітичної геометрії в різних областях природознавства, зокрема в економічній теорії, пояснюється їх здатністю тлумачити алгебраїчні рівняння (або нерівності) у вигляді геометричних образів чи графіків. При розв'язані реальних економіко – математичних задач особливе місце займає векторне числення і теорія багатомірних просторів. Справа в тому, що не існує єдиної міри (еталона), який би можна було застосувати до різних економічних величин, тому їх називають багатомірними і математично, як правило, виражають векторами. Наприклад, якщо підприємство випускає m

різних виробів, тоді випуск усіх виробів можна подати як вектор $\vec{Y} = \left(y_{1,} y_{2,}, \ldots, y_{n,} \right)$, де y_i – кількість i – того виробу.

І, звичайно, не можна не згадати про важливі застосування геометрії в теорії лінійного програмування та оптимального управління (розроблена радянським математиком і економістом Л. В. Канторовичем, який відзначений Ленінською (1965 р.) та Нобелівською (1975 р.) преміями за дану роботу), де геометричний метод у випадку двох змінних є найбільш наглядним і простим до застосування.

Покажемо на простих економічних задачах можливість їх переведення на математичну мову і як, співставивши формули з геометричними фактами, можна «побачити» геометрично розв'язок задачі та знайти такі шляхи розв'язання, передбачити які без застосування геометрії просто неможливо.

3.2. Визначення оптимального плану перевезень. Транспортна задача

Приклад 3.1. На три заводи $З_1, З_{2,} З_3$ треба завести сировину одного виду, яка зберігається на двох складах C_1, C_2. Відповідні дані вказані у таблицях:

Наявність сировини в т.		Потреба в сировині в т.	
C₁	*C₂*	*З₂*	*З₃*
20	25	10	15

Довжина перевезень в км			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
C_1	5	7	10
C_2	3	4	6

Знайти найкращий варіант перевезень, тобто варіант, для якого обсяг транспортної роботи в тонно-кілометрах був би найменшим.

Розв'язання. Позначимо через x та y кількість сировини, яку потрібно вивезти із складу C_1, на заводи $З_1$ та $З_2$ відповідно. Тоді із другого складу треба довезти на ці заводи $10 - x$ та $15 - y$ тонн сировини. Оскільки загальна кількість сировини на складах співпадає із потребами заводів, то після забезпечення заводів $З_1$ та $З_2$ сировина що залишилася вивозиться на завод $З_3$: із складу C_1 вивозиться $20 - x - y$ тонн, із складу C_2 вивозиться $25 - (10 - x) - (15 - y) = x + y$ тонн.

Якщо позначити через $\overrightarrow{d_1}$ вектор довжини перевезень здійснених зі складу $C_1 : \overrightarrow{d_1} = (5;7;10)$, а через $\overrightarrow{k_1}$ – вектор кількості сировини, яка вивозиться на заводи $З_1, З_{2,} З_3$ відповідно зі складу $C_1 : \overrightarrow{k_1} = (x, y, 20 - x - y)$, то обсяг транспортної роботи при вивезенні всієї сировини зі складу C_1 знайдемо як скалярний добуток цих векторів

$$\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{k_1} = 5x + 7y + 10(20 - x - y) = 200 - 5x - 3y$$

Для перевезень зі складу C_2 аналогічно одержимо:

$$\overrightarrow{d_2} = (3;4;6), \quad \overrightarrow{k_2} = (10 - x;15 - y; x + y),$$

$$\overrightarrow{d_2} \cdot \overrightarrow{k_2} = 3(10 - x) + 4(15 - y) + 6(x + y) = 90 + 3x + 2y.$$

Отже, загальний обсяг вантажоперевезень складає

$$z = 200 - 5x - 3y + 90 + 3x + 2y = 290 - 2x - y. \qquad (3.22)$$

Зазначимо тепер, що всі величини, що виражають кількість сировини яка перевозиться, невід'ємні, тобто:

$$x \geq 0, y \geq 0, 20 - x - y \geq 0, 10 - x \geq 0, 15 - y \geq 0, \qquad (3.23)$$

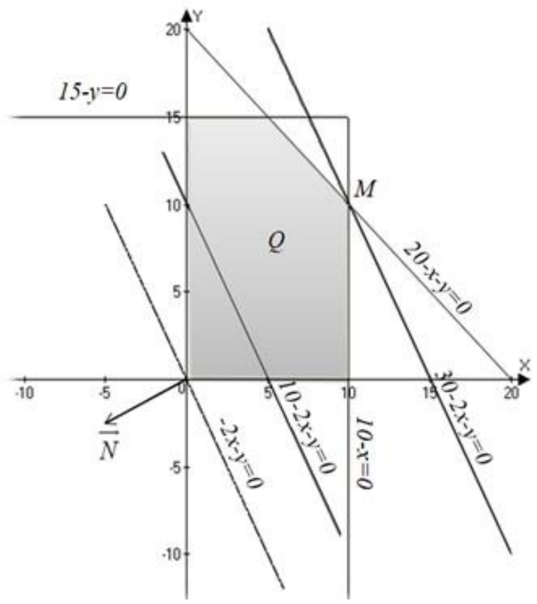

Рис. 3.23

$x + y \geq 0$ (дану нерівність можна не враховувати, оскільки вона є наслідком перших двох). Кожна із нерівностей (3.23) визначає в системі координат XOY півплощину, а система всіх нерівностей визначає перетин цих півплощин, тобто опуклий многокутник Q (рис. 3.23).

Отже, задача про знаходження оптимального плану перевезень звелася до знаходження точки $M(x, y)$ многокутника Q, в якій функція (3.22) досягає найменшого значення. Зауважимо, що замість функції z можна розглядати функцію $\tilde{z} = -2x - y$. Справді, якщо буде знайдено найменше значення функції $\tilde{z}$, то додавши до нього 290 одержимо найменше значення функції z. Рівняння $\tilde{z} = -2x - y$, де $\tilde{z}$ розглядатимемо як параметр, описує сімейство паралельних прямих $y = -2x - \tilde{z}$, ліній рівня, причому чим менше $\tilde{z}$ тим вище розмішена відповідна пряма. Як видно з малюнка, найменшого значення лінійна функція $\tilde{z} = -2x - y$, яка розглядається на многокутнику Q, досягає в точці $M(10.10)$, тобто $x = 10,\ y = 10$. Відповідний обсяг транспортної роботи в тонно-кілометрах буде дорівнювати $290 - 2x - y = 290 - 20 - 10 = 260$. Таким чином, геометрична модель дозволила повністю розв'язати поставлену задачу.

Зауваження 3.1. Для відшукання оптимального значення функції $z = ax + by + c$ на многокутнику можна використати вектор напрямків $\vec{N}(a;b)$, який вказує напрямок зростання функції z. Всі лінії рівня паралельні між собою і перпендикулярні до вектора напрямків $\vec{N}$, тому пересуваючи їх перпендикулярно до $\vec{N}$ в напрямку, який вказує цей вектор, ми знайдемо вершину, де z набуває найбільшого значення. Для відшукання точки мінімуму треба лінії рівня зсувати в напрямку, протилежному до $\vec{N}$. Для розглянутої задачі $\vec{N}(-2,-1)$.

Зауваження 3.2. В розглянутій задачі всі обсяги перевезень вдалось виразити через дві змінні $x, y,$ що дозволило дати геометричну інтерпретацію системи нерівностей на координатній площині. Припустимо, що при тих же двох складах число заводів рівне чотирьом, тоді потрібно буде ввести три змінні x, y, z Відповідні нерівності будуть залежати від трьох змінних; кожна нерівність буде визначати певний напівпростір, а система всіх нерівностей буде визначати опуклий багатогранник в трьохвимірному просторі.

До знаходження екстремумів лінійних функцій на опуклих багатогранниках приводять й інші практичні задачі, які, на перший погляд, ніякого відношення до багатогранників не мають. Це задачі про розкрій матеріалу з найменшими втратами, про оптимальний план виробництва, про оптимальний варіант капіталовкладень та інші. Розв'язок такого роду задач і складає предмет лінійного програмування.

Зауваження 3.3. В загальному вигляді задачу лінійного програмування можна сформулювати наступним чином: Визначити максимум (або мінімум) лінійної функції, що називається цільовою

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,\ p_i = const, \tag{3.24}$$

Причому задовольняються баланси умови:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, && a_{ij}, b_i = const; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, && i = 1, \ldots, m; \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, && j = 1, \ldots, n; \end{aligned} \tag{3.25}$$

та граничні умови:

$$x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n \tag{3.26}$$

У випадку коли в плані фігурують лише дві змінні, задача лінійного програмування може бути легко розв'язана геометричним способом.

3.3. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Постановка задачі. Розглянемо n країн, які торгують між собою. Будемо вважати, що весь національний прибуток P_j країни з номером j складається від продажі своїх товарів або всередині країни або іншим країнам. Вектор прибутків будемо позначати $\left(p = p_1, \dots, p_n\right)$.

Позначимо через a_{ij} долю прибутку P_j $j-$той країни, яка витрачається на закупівлю товарів (імпорт) в країни з номером i. Відзначимо, що визначення чисел $a_{ij}\left(i=1,\dots,n\right)$ як долей величин P_j дає рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \; j = 1,...,n \tag{3.27}$$

Припустимо також, що ми маємо справу з вже усталеною структурою міжнародної торгівлі, тобто $a_{ij} = const$, зокрема ці долі прибутку P_j $j-$той країни не залежать від самої величини P_j. Очевидно, що це дозволяє збудувати лінійну модель, але й зумовлює певну обмеженість цієї моделі, оскільки насправді існує постійна компонента прибутку довільної країни (що йде на найнеобхідніші потреби), що мало залежить від загальної величини прибутку і не може визначатись як стала доля від прибутку країни.

$$\text{Матриця } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

називається структурною матрицею торгівлі або матрицею обміну, причому згідно (3.27) сума елементів будь-якого стовпця матриці A рівна одиниці.

Починаючи торгувати у відповідності з матрицею обміну A, після одного туру торгівлі країни будуть володіти прибутками:

$$\gamma_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Жодна країна не зацікавлена в зменшені свого прибутку, отже виторг кожної країни має бути не меншим її національного прибутку, тобто $\gamma_i \ge p_i\left(i=1,\ldots,n\right)$, або у матричній формі

$$Ap \ge p \tag{3.29}$$

Покажемо тепер, що з врахуванням (3.27) співвідношення (3.29) можливе лише при умові

$$Ap = p \tag{3.30}$$

Справді, нехай $Ap > p$, тоді записавши це покоординатно, одержимо:

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n > p_1$$
$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{2n}p_n > p_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n > p_n.$$

Додаємо всі нерівності системи та згрупуємо доданки:

$$p_1\left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right) + p_2\left(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}\right) + \ldots$$
$$+ p_n\left(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}\right) > p_1 + p_2 + \ldots + p_n;$$

$$p_1\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + p_2\sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \ldots + p_n\sum_{i=1}^{n} a_{in} > p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Згідно з (3.27) маємо: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Одержане протиріччя і доводить (3.30). Зауважимо, що доведений факт очевидний із економічних міркувань: всі країни не можуть одночасно мати прибуток – якщо при описаному обміні хтось збагачується, то обов'язково хтось інший терпить збитки.

Отже, задачу моделі обміну можна сформулювати наступним чином: яким повинен бути вектор $\vec{p}$ прибутку країн, щоб виконувалась рівність (3.30). З математичної точки зору це означає відшукання власного вектора матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Зауваження 3.4. Число 1 згідно з означенням матриці обміну A (формула (3.27)) є власним значенням для A. Однак питання про відшукання власного вектора матриці обміну A, що відповідає власному числу $\lambda = 1$ і має невід'ємні координати, залишається відкритим.

Приклад 3.2. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайти національні прибутки країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання. Знаходимо власний вектор $\vec{p}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Розв'язавши рівняння $Ap = p,\ Ap - p = 0,\ \left(A - E\right)p = 0,$ що рівносильне розв'язанню системи:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Знайдемо $p_1 = 3c/2,\ p_2 = 2c,\ p_3 = c,$ або $p = \left(3c/2, 2c, c\right)$.

Отже, збалансована торгівля трьох країн досягається, якщо вектор національних прибутків рівний $p = \left(3c/2, 2c, c\right)$, тобто якщо відношення національних прибутків країн S_1, S_2, S_3 становить 3:4:2 відповідно.

3.4. Визначення рентабельності транспортного постачання

Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу (y) залізничним та автомобільним транспортом на відстань xзнаходять за формулами:

$y = \frac{1}{2}x + 10$ та $y = x + 5$ відповідно, де x вимірюється десятками кілометрів.

Знайдемо точки перетину прямих

$$\begin{cases} y = x + 5, \\ y = 0,5x + 10; \end{cases}$$

$$x + 5 = 0,5x + 10;$$

$\begin{cases} x = 10, \\ y = 15; \end{cases}$ та побудуємо графіки транспортних витрат (рис. 3.24).

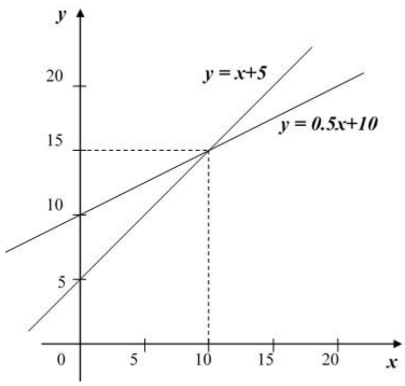

Рис. 3.24

Графіки витрат дозволяють зробити висновки:

а) коли $x \in [0;10)$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати (y) перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

b) коли $x \in [10;+\infty)$, тобто $x \geq 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

3.5. Дослідження впливу розширення тракторного парку на зростання врожаю зернових

В 1980 році держава мала 108,5 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 8,5 ц зернових.

В 1995 році держава мала 510 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 21 ц зернових.

Позначимо час – x, кількість тисяч тракторів – y; врожай, який одержали з одного гектара, позначимо – z (центнерів).

За умовою задачі маємо чотири точки:

$$A(x_1, y_1): x_1 = 1980, y_1 = 108,5;$$
$$B(x_2, y_2): x_2 = 1995, y_2 = 510;$$
$$M_1(x_1, z_1): x_1 = 1980, z_1 = 8,5;$$
$$M_2(x_2, z_2): x_2 = 1995, z_2 = 21.$$

Знайдемо рівняння прямих – графік зростання тракторного парку та врожайності зернових з одного гектара за 1980–1995 роки у вигляді $y = kx + b$.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, одержимо:

$$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{y-108,5}{510-108,5}; y = \frac{401,5}{15}x - \frac{793342,5}{15}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання тракторного парку буде:

$$k = \frac{401,5}{15} \approx 26,77.$$

Використовуючи точки M_1 та M_2, аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання врожайності зернових з одного гектара.

$$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{z-8,5}{21-8,5}; z = \frac{12,5}{15}x - \frac{24877,5}{15}; k_2 = \frac{12,5}{15} \approx 0,83.$$

З умови задачі можна зробити висновок, що при зростанні тракторного парку врожайність зернових з 1 га зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка зростання кількості тракторів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання врожайності зернових.

Отже, зростання тракторного парку сприяє зростанню врожайності зернових, але не пропорційно.

Зростання кількості тракторів – зростання енергоозброєності сільського господарства, – не є основним фактором у підвищенні ефективності сільського господарства. Необхідно врахувати вплив інших факторів, наприклад, якості насіння, культуру агротехніки.

3.6. Оптимальний розподіл ринку збуту

Приклад 3.3. Два підприємства, що розміщені одне від другого на відстані 100 км, виробляють один вид продукції, причому заводська ціна виробу на обох підприємствах однакова і рівна p. Вся продукція розвозиться споживачам власним автотранспортом підприємств, причому транспортні витрати на перевезення одиниці виробу від підприємства A до споживача складають 9 грн/км, а від підприємства B – 3 грн/км. Як буде розподілений ринок збуту, якщо витрати споживачів повинні бути однаковими?

Розв'язання. Введемо прямокутну систему координат наступним чином: початок системи координат помістимо в середину відрізка AB, вісь абсцис направлено вздовж прямої AB (рис. 3.25).

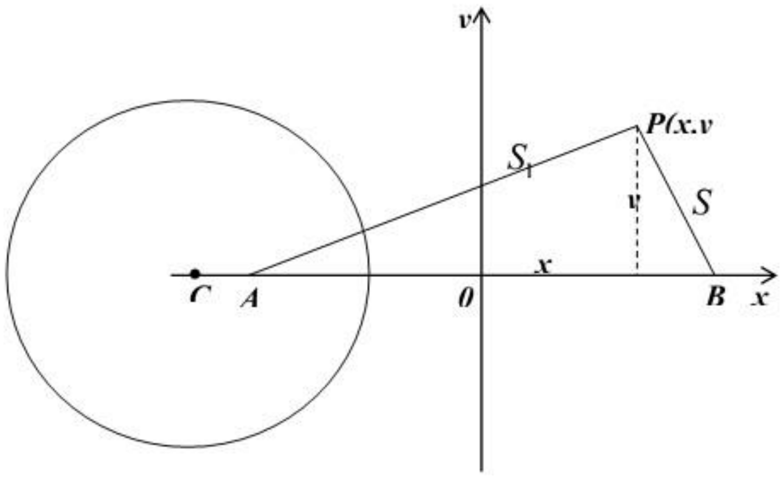

Рис 3.25

Тоді координати точок A та B, будуть $(-50{,}0)$ та $(50{,}0)$ відповідно. Припустимо, що споживач знаходиться в точці $P(x,y)$; введемо позначення $|AP| = S_1, |BP| = S_2$.

Витрати споживача на придбання одиниці виробу у підприємства A становлять: $p + S_1 \cdot 9$, а у підприємства B: $p + S_2 \cdot 3$. Витрати споживачів однакові, якщо $p + 9S_1 = p + 3S_2$, $9S_1 = 3S_2$, звідки $3S_1 = S_2$.

$$|AP| = S_1 = \sqrt{(x+50)^2 + y^2}, |BP| = S_2 = \sqrt{(x-50)^2 + y^2}.$$

Для споживачів витрати на придбання одиниці виробу однакові, якщо

$3S_1 = S_2$, тобто $3\sqrt{(x+50)^2 + y^2} = \sqrt{(x-50)^2 + y^2}$, звідки одержуємо

$9\left(x^2+100x+2500+y^2\right)=x^2-100x+2500+y^2$, або після скорочення $x^2+y^2+125x+2500=0$, або $x^2+y^2+125x=-2500.$

Виділимо повний квадрат і одержимо: $x^2+2x\cdot\frac{125}{2}+\left(\frac{125}{2}\right)^2+y^2=-2500+\left(\frac{125}{2}\right)^2$, звідки в результаті $\left(x+\frac{125}{2}\right)^2+y^2=\frac{5625}{4}$.

Це – рівняння кола, центр якого знаходиться на осі абсцис і має абсцису $-\frac{125}{2}=62{,}5$, а радіус рівний $r=\frac{75}{2}=37{,}5.$

Для споживачів, які знаходяться на цьому колі, витрати на придбання виробу однакові. Для споживачів, що знаходяться зовні кола, витрати на придбання виробу нижчі на підприємстві B, а для споживачів, що знаходяться всередині кола, - на підприємстві A.

Отже, ринок збуту буде поділено наступним чином:

a) споживачі, які знаходяться всередині кола, будуть закуповувати даний виріб на підприємстві A;

b) для споживачів, що знаходяться на колі, байдуже на якому підприємстві здійснювати закупку;

c) споживачі, що знаходяться ззовні кола, будуть закуповувати виріб на підприємстві B.

3.7. Вправи до розділу 3

Завдання 3.1

Витрати по перевезенню вантажу трьома видами транспорту відповідно обчислюються за формулами:

$y_1 = 20N + 8Nx,\ y_2 = 40N + 4Nx,\ y_3 = 60N + 4Nx$ (варіанти 1–10);
$y_1 = 12N + 4Nx,\ \ y_2 = 22N + 2Nx,\ \ y_3 = 30N + 2Nx$ (варіанти 11–20);
$y_1 = 6N + 2Nx,\ \ y_2 = 10N + Nx,\ \ y_3 = 14N + Nx$ (варіанти 21–30).

де x – відстань у сотнях кілометрів; $y_1,\ y_2,\ y_3$ – вартість перевезення у гривнях.

Графічно визначити, на які відстані і яким видом транспорту перевозити вантаж економніше:

а) при використанні всіх видів транспорту;

б) при використанні другого і третього видів транспорту;

в) при використанні першого і третього видів транспорту.

Завдання 3.2.

Дано координати вершин деякого трикутника *ABC*.

1. Знайти:
   a) рівняння сторін трикутника *ABC*;
   b) рівняння висоти, опущеної з вершини *A* на сторону *BC*;
   c) рівняння медіани, проведеної із вершини *C*;

d) рівняння бісектриси кута B;
e) величину кута B;
f) рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно до
g) протилежної сторони AC;
h) віддаль від точки A до прямої BC;
i) площу трикутника ABC.

2. Написати систему лінійних нерівностей, що визначають трикутник ABC (балансові умови). Геометрично знайти найбільше і найменше значення цільової функції z в багатокутнику, який визначається балансовими умовами та граничними умовами $x \geq 0, y \geq 0$. Виконати рисунок.

1. *A(5, 6); B(10, -9); C(-2,3); z= 2x + y + 15.*
2. *A(-4, 0); B(2,6); C(7,0); z= 3x + y+ 25.*
3. *A(-3, 12); B(2,2); C(12,-3); z= -2x – 3y +7.*
4. *A(-2,7); B(10,4); C(7,-2); z= -x+ 2y+10.*
5. *A(4; -5); B(6,6); C(-2,14); z= 3x+3y+3.*
6. *A(1,-3) B(6,2) C(-2, 14); z= x-2y+20.*
7. *A(5,2); B(2,8) C(-3,-2); z= -2x – 2y –10.*
8. *A(1, -4); B(8,3) C(1,10); z= -x+3y+12.*
9. *A(2,-4); B(9,11); C(2,-6); z= -3x-3y +7.*
10. *A(-1,6); B(9,11); C(2,-6); z=3x+5y+12.*
11. *A(13,-4); B(1,2); C(-5,14); z= 2x+5y+8.*
12. *A(-3,6); B(9,3); C(6,-3); z= 4x+2y- 20.*
13. *A(4,-10); B(6,1);C(-2;15); z= 2x+2y+9.*
14. *A(-4,1); B(13,-2); C(1,6); z= -2x +y –25.*
15. *A(10,1);B(3,8); C(-4,1); z= x+4y+23.*
16. *A(-1,10); B(1,2); C(9,0); z= -2x+5y+20.*
17. *A(-3,13);B(3,1); C(11,-1); z=3x-4y+5.*
18. 18.*A(-1,11);B(1,3); C(10,0); z= x-4y-21.*
19. 19.*A(-6,9) ; B(10,-3); C(6,9); z= 3x+2y+11.*
20. 20. *A(-7,3); B(-1,-3); C(11,9); z= x+y+7.*
21. 21. *A(15,7); B(5, -3) C(-1,3); z= -x-3y+27.*
22. 22. *A(9,9); B(-3,5); C(5,-3); z= 2x+2y-7.*
23. 23. *A(-1,-1); B(3,11); C(11,3); z= x+3y+10.*
24. 24. *A(9,6); B(-3,10); C(9,-6); z=3x-4y+17.*
25. 25.*A(-2,-3); B(8,2); C(2,5); z=-4x-2y+30.*
26. 26. *A(-3,1); B(14,-2); C(2,6); z= 2x- y +9.*
27. 27. *A(2,8); B(-1,4); C(9,9); z= 4x+4y –15.*
28. 28. *A(-4,2); B(13,9); C(8,-1); z= 2x+4y-8.*
29. 29. *A(-1,11); B(13,-3); C(1,3); z= -2x-3y+10.*
30. *A(-2,10); B(4,-5); C(6,6); z= -2x-3y +17.*

Завдання 3.3

Потрібно відновити межу квадратної ділянки землі за трьома стовпами, що залишились: одному в центрі ділянки і по одному на двох протилежних межах. На плані положення стовпів визначено координатами точок: середнього *M* і двох бокових *A* та *B*.

1. Скласти рівняння прямих, що визначають шукані межі;
2. Знайти координати вершин квадратної ділянки землі;
3. Знайти площу земельної ділянки безпосередньо за довжиною сторони квадрата та за допомогою векторного числення;
4. Зробити креслення.

Вказівка. Щоб відновити ті межі ділянки, на яких збереглися стовпці, достатньо провести через точки *A* та *B* дві паралельні прямі, що проходять на однаковій відстані від центра *M*. Дві інші межі будуть до них перпендикулярні і повинні проходити на такій же відстані від *M*.

1. *A(5,9); B(3,0); M(1,6).*
2. *A(1,15);B(10,2);M(6,9).*
3. *A(2,4); B(10,-7); M(3,-3).*
4. *A(3,2); B(8,12); M(7,7).*
5. *A(0,5); B(1-8); M(-4,-3).*
6. *A(2,4); B(19,4);M(11,6).*
7. *A(-29); B(-5,15); M(-2,-4).*
8. *A(0,12); B(3,-3); M(4,5).*
9. *A(14,-6); B(-1,-9);M (7,-10).*
10. *A(4,16); B(12,-3); M(10,8)*
11. *A(-6,-4); B(3,9); M(22).*
12. *A(24); B(2,-6); M(2,-1).*
13. *A(-11,-2); B(2,-1); M(-4,-3).*
14. *A(-5,6); B(8,7); M(2,5).*
15. *A(11,0); B(-2,-1); M(5,-2).*
16. *A(4,-1); B(2,8); M(5,3).*
17. *A(-4,1); B(1,-7); M(3-5).*
18. *A(-5,-5); B(16,7); M(4,2).*
19. *A(2,9); B(-4,13); M(2,4).*
20. *A(-5,3); B(9,1); M(2,2).*
21. *A(2,2); B(15,18); M(10,8).*
22. *A(-4,2); B(10,0); M(3,1).*
23. *A(-2,10); B(1,-5); M(2,3).*
24. *A(2,3); B(14,5); M(8,4).*
25. *A(-5,2); B(6,5); M(0,4).*
26. *A(3,1); B(12,3); M(7,3).*
27. *A(-2,-1); B(7,1); M(2,1).*
28. *A(2,5); B(5, -6); M(4,0).*
29. *A(-5,-1); B(10,2); M(3,-2).*
30. *A(-6,-2); B(8,4); M(1,-5).*

Завдання 3.4

Скласти рівняння геометричного місця точок площини, для яких:

a) відношення відстані від кожної точки до точки *F(4;3)* до відстані від неї до прямої *y=5* дорівнює: $\frac{N}{N+2}$ (варіанти 1–15); $\frac{N-10}{N-12}$ (варіанти 16–30);

b) відношення відстані від кожної точки до точки *F(2,-2)*до відстані від неї до прямої *x=-1* дорівнює: $\frac{N+2}{N}$ (варіанти 1–15); $\frac{N-14}{N-12}$ (варіанти 16–30);

c) відстань від кожної точки до точки: *F(N;4)* (варіанти 1–15); *F(3,N-15)* (варіанти 16–30);

d) дорівнює відстані від неї до прямої: *x = N + 4* (варіанти 1–15); *y = N -17* (варіанти 16–30).

Рівняння геометричних місць точок (ліній другого порядку) за допомогою паралельного перенесення звести до канонічного вигляду, визначити типи кривих. Знайти пів осі, фокальні відстані, фокальний параметр (для параболи), рівняння директрис, рівняння асимптот (для гіперболи). Побудувати криві та відповідні бісектриси.

Завдання 3.5.

Задано координати п'ятьох точок простору A_1,A_2,A_3,A_4,A_5.

1) Переконатися, що вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ утворюють базис в R^3та знайти координати вектора $\overrightarrow{A_1A_5}$ в цьому базисі.

2) Розглядаючи точки A_1,A_2, A_3, A_4як вершини трикутної піраміди, знайти:

a) рівняння грані $A_1A_2A_3$;

b) рівняння площини, що проходить через точку A_4 паралельно до грані $A_1A_2A_3$;

c) канонічне та параметричне рівняння висоти піраміди, що проведена з вершини A_4та довжину цієї висоти;

d) точку перетину висоти, проведено з вершини A_4, і площини $A_1A_2A_3$;

e) величину кута між ребрами A_1A_2 і гранню A_1A_3трикутника $A_1A_2A_3$;

f) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$на$\overrightarrow{A_1A_4}$.

g) площу грані $A_1A_2A_3$та об'єм піраміди (засобами векторної алгебри);

h) точку A_4'симетричну точці A_4 відносно площини A_1 A_2 A_3.

1. $A_1(1,-2,3)$; $A_2(1,-1,5)$; $A_3(2,-2,4)$; $A_4(0,0,7)$; $A_5(-1,2,10)$.

2. $A_1(-1,3,-7)$; $A_2(0,5,-4)$; $A_3(2,7,-9)$; $A_4(-2,6,-2)$; $A_5(-3,6,6)$.

3. $A_1(1,-2,4)$; $A_2(2,0,5)$; $A_3(3,1,3)$; $A_4(0,-1,3)$; $A_5(-2,-3,7)$.

4. $A_1(2,-5,-10)$; $A_2(4,-4,-7)$; $A_3(5,-3,-6)$; $A_4(4,-8,-9)$; $A_5(11,9,6)$.

5. $A_1(3,4,-1)$; $A_2(4,6,3)$; $A_3(4,3,0)$; $A_4(5,6,3)$; $A_5(2,0,-3)$.

6. $A_1(2,3,-4)$; $A_2(3,1,-3)$; $A_3(3,4,-3)$; $A_4(1,4,-3)$; $A_5(4,6,2)$.

7. $A_1(5,4,5)$; $A_2(9,10,10)$; $A_3(2,2,2)$; $A_4(7,7,7)$; $A_5(1,3,2)$.

8. $A_1(-5,-3,1)$; $A_2(-3,0,2)$; $A_3(-2,4,3)$; $A_4(0,1,3)$; $A_5(5,0,4)$.

9. $A_1(1,2,3)$; $A_2(6,5,7)$; $A_3(-5,-1,-2)$; $A_4(5,4,5)$; $A_5(4,4,4)$.

10. $A_1(2,0,-5)$; $A_2(3,2,-4)$; $A_3(4,-1,-2)$; $A_4(-1,-1,-1)$; $A_5(-5,1,1)$.

11. $A_1(-3,-5,-2)$; $A_2(-2,-2,2)$; $A_3(-1,-3,1)$; $A_4(-2,-4,-4)$; $A_5(5,5,2)$.

12. $A_1(3,2,1)$; $A_2(5,6,2)$; $A_3(2,3,-2)$; $A_4(4,0,2)$; $A_5(7,2,4)$.

13. $A_1(3,0,1)$; $A_2(4,1,3)$; $A_3(3,-3,0)$; $A_4(-2,-2,-5)$; $A_5(11,-1,8)$.

14. $A_1(0,2,-7)$; $A_2(3,4,-5)$; $A_3(2,5,-6)$; $A_4(1,3,-4)$; $A_5(5,3,4)$.

15. $A_1(2,3,-4);\ A_2(4,4,3);\ A_3(3,1,-3);\ A_4(1,5,-5);\ A_5(7,-2,6)$.

16. $A_1(-5,1,-10);\ A_2(-4,3,-6);\ A_3(-7,4,-11);\ A_4(-4,0,-8);\ A_5(-1,10,9)$.

17. $A_1(-3,2,4);\ A_2(-2,2,6);\ A_3(-1,1,4);\ A_4(-4,3,3);\ A_5(6,-2,-3)$.

18. $A_1(7,1,-4);\ A_2(8,3,-3);\ A_3(9,0,-1);\ A_4(4,0,0);\ A_5(0,2,2)$.

19. $A_1(6,5,1);\ A_2(9,3,3);\ A_3(5,6,0);\ A_4(6,6,5);\ A_5(4,9,2)$.

20. $A_1(-8,2,-3);\ A_2(-5,3,2);\ A_3(-6,5,0);\ A_4(-6,3,1);\ A_5(-5,6,3)$.

21. $A_1(4,5,-6);\ A_2(5,7,-2);\ A_3(5,2,-5);\ A_4(5,6,-11);\ A_5(8,-1,10)$.

22. $A_1(-7,3,-2);\ A_2(-5,7,-1);\ A_3(-8,4,-5);\ A_4(-6,1,-1);\ A_5(-3,3,1)$.

23. $A_1(-2,8,3);\ A_2(3,11,7);\ A_3(-8,5,-2);\ A_4(2,10,5);\ A_5(1,10,4)$.

24. $A_1(6,2,-3);\ A_2(7,4,0);\ A_3(9,6,-5);\ A_4(5,5,2);\ A_5(4,5,10)$.

25. $A_1(10,5,2);\ A_2(11,7,3);\ A_3(12,8,1);\ A_4(9,6,1);\ A_5(7,4,5)$.

26. $A_1(-5,0,4);\ A_2(-4,-2,5);\ A_3(-4,1,5);\ A_4(-6,1,5);\ A_5(-3,3,10)$.

27. $A_1(1,5,7);\ A_2(2,5,9);\ A_3(3,4,7);\ A_4(0,6,6);\ A_5(10,1,0)$.

28. $A_1(0,3,-5);\ A_2(2,4,2);\ A_3(1,1,-4);\ A_4(-1,5,-6);\ A_5(5,-2,5)$.

29. $A_1(-10,3,0);\ A_2(-7,1,2);\ A_3(-11,4,-1);\ A_4(-10,4,4);\ A_5(-12,7,1)$.

30. $A_1(1,1,-2);\ A_2(2,3,2);\ A_3(2,-2,-1);\ A_4(2,2,-7);\ A_5(5,-5,14)$.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Коефіцієнт нарахування складних відсотків

$$q^n = (1+i)^n = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

n	1%	2%	3%	4%	5%	n
1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	2
3	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15762	3
4	1,04060	1,08243	1,12551	1,16986	1,21551	4
5	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	5
6	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	6
7	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	7
8	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	8
9	1,09369	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133	9
10	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	10
11	1,11567	1,24337	1,38423	1,53945	1,71034	11
12	1,12682	1,26824	1,42576	1,60103	1,79586	12
13	1,13809	1,29361	1,46853	1,66507	1,88565	13
14	1,14947	1,31948	1,51259	1,73168	1,97993	14
15	1,16097	1,34587	1,55797	1,80094	2,07893	15
16	1,17258	1,37279	1,60471	1,87298	2,18287	16
17	1,18430	1,40024	1,65285	1,94790	2,29202	17
18	1,19615	1,42825	1,70243	2,02582	2,40662	18
19	1,20811	1,45681	1,75351	2,10685	2,52695	19
20	1,22019	1,48595	1,80611	2,19112	2,65330	20
21	1,23239	1,51567	1,86029	2,27877	2,78596	21
22	1,24471	1,54598	1,91610	2,36992	2,92526	22
23	1,25716	1,57690	1,97359	2,46471	3,07152	23
24	1,26973	1,60844	2,03279	2,56330	3,22510	24
25	1,28243	1,64060	2,09378	2,66583	3,38635	25
26	1,29526	1,67342	2,15659	2,77247	3,55567	26
27	1,30821	1,70689	2,22129	2,88337	3,73345	27
28	1,32129	1,74102	2,28793	2,99870	3,92013	28
29	1,33450	1,77584	2,35656	3,11865	4,11613	29
30	1,34785	1,81136	2,42726	3,24340	4,32194	30

Додаток 2

Коефіцієнт рахунків ренти

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-\left(1+\frac{R}{100}\right)^{-n}}{\frac{R}{100}}$$

Таблиця 1. Коефіцієнт рахунків ренти

n	1%	2%	3%	4%	*n*
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961539	1
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	2
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	3
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	4
5	4,853431	4,713459	4,579707	4,451822	5
6	5,795476	5,601431	5,417192	5,242137	6
7	6,728194	6,471991	6,230283	6,002055	7
8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	8
9	8,566017	8,162237	7,786109	7,435332	9
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	10
11	10,255077	9,786848	9,252624	8,760477	11
12	11,255077	10,575341	9,954004	9,385074	12
13	12,133740	11,348374	10,634955	9,985648	13
14	13,003703	12,106249	11,296073	10,563123	14
15	13,865053	12,849264	11,937935	11,118387	15
16	14,717873	13,577709	12,561102	11,652296	16
17	15,562251	14,291872	13,166118	12,165669	17
18	16,398269	14,992031	13,753513	12,659297	18
19	17,226008	15,678462	14,323799	13,133939	19
20	18,045553	16,351433	14,877475	13,590326	20
21	18,856983	17,011209	15,415024	14,029160	21
22	19,660379	17,658048	15,936917	14,451115	22
23	20,455821	18,292204	16,443608	14,856842	23
24	21,243387	18,913926	16,935542	15,246963	24
25	22,023155	19,523456	17,413148	15,622080	25
26	22,795203	20,121036	17,876842	15,982769	26
27	23,559608	20,706898	18,327032	16,329586	27
28	24,316443	21,281272	18,764108	16,663063	28
29	25,065785	21,844385	19,188455	16,983715	29
30	25,807708	22,396455	19,600441	17,292033	30

Продовження таблиці 1. Коефіцієнт рахунків ренти

n	5%	6%	7%	8%	*n*
1	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	1
2	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	2
3	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	3
4	3,545951	3,465106	3,387211	3,312127	4
5	4,329477	4,212364	4,100197	3,992710	5
6	5,075692	4,917324	4,766540	4,622880	6
7	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	7
8	6,463213	6,209794	5,971299	5,746639	8
9	7,107822	6,801692	6,515232	6,246888	9
10	7,721735	7,360087	7,023582	6,710081	10
11	8,306414	7,886875	7,498674	7,138964	11
12	8,863252	8,383844	7,942686	7,536078	12
13	9,393573	8,852683	8,357651	7,903776	13
14	9,898641	9,294984	8,745468	8,244237	14
15	10,379658	9,712249	9,107914	8,559479	15
16	10,837770	10,105895	9,446649	8,851369	16
17	11,274066	10,477260	9,763223	9,121638	17
18	11,689587	10,827603	10,059087	9,371887	18
19	12,085321	11,158116	10,335595	9,603599	19
20	12,462210	11,469921	10,594014	9,818147	20
21	12,821153	11,764077	10,835527	10,016803	21
22	13,163003	12,041582	11,061240	10,200744	22
23	13,488574	12,303379	11,272187	10,371059	23
24	13,798642	12,550358	11,469334	10,528758	24
25	14,093945	12,783356	11,653583	10,674776	25
26	14,375185	13,003166	11,825779	10,809978	26
27	14,643034	13,210534	11,986709	10,935165	27
28	14,898127	13,406164	12,137111	11,051078	28
29	15,141074	13,590721	12,277674	11,158406	29
30	15,372451	13,764831	12,409041	11,257783	30

Додаток 3

Коефіцієнти погашення

$$P_{n/i} = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \cdot \frac{R}{100}}{\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1}$$

Таблиця 2. Коефіцієнти погашення

n	1%	2%	3%	4%	n
1	1,01	1,02	1,03	1,04	1
2	0,507512	0,515050	0,522611	0,530196	2
3	0,340022	0,346755	0,353530	0,360349	3
4	0,256281	0,262624	0,269027	0,275490	4
5	0,206040	0,212158	0,218355	0,224627	5
6	0,172548	0,178526	0,184598	0,190762	6
7	0,148628	0,154512	0,160506	0,166610	7
8	0,130690	0,136510	0,142456	0,148528	8
9	0,116740	0,122515	0,128434	0,134493	9
10	0,105582	0,111327	0,117231	0,123291	10
11	0,096454	0,102178	0,108078	0,114149	11
12	0,088849	0,094560	0,100462	0,106552	12
13	0,082415	0,088118	0,094030	0,100144	13
14	0,076901	0,082602	0,088526	0,094669	14
15	0,072124	0,077826	0,083767	0,089941	15
16	0,067945	0,073650	0,079611	0,08582	16
17	0,064258	0,069970	0,075953	0,082199	17
18	0,060982	0,066702	0,072709	0,078993	18
19	0,058052	0,063782	0,069814	0,076139	19
20	0,055415	0,061157	0,067216	0,073582	20
21	0,053031	0,058785	0,064872	0,071280	21
22	0,050864	0,056631	0,062747	0,069199	22
23	0,048886	0,054668	0,060814	0,067309	23
24	0,047074	0,052871	0,059047	0,065587	24
25	0,045407	0,051220	0,057428	0,064012	25
26	0,043869	0,049699	0,055938	0,062567	26
27	0,042446	0,048293	0,054564	0,061239	27
28	0,041124	0,046990	0,053293	0,060013	28
29	0,039895	0,045778	0,052115	0,058880	29
30	0,038748	0,044650	0,051019	0,057830	30

Продовження таблиці 2. Коефіцієнти погашення

n	5%	6%	7%	8%	*n*
1	1,05	1,06	1,07	1,08	1
2	0,537805	0,545437	0,553092	0,560769	2
3	0,367209	0,374110	0,381052	0,388034	3
4	0,282012	0,288592	0,295228	0,301921	4
5	0,230975	0,237396	0,243891	0,250457	5
6	0,197018	0,203363	0,209796	0,216315	6
7	0,172820	0,179135	0,185553	0,192072	7
8	0,154722	0,161036	0,167468	0,174015	8
9	0,140690	0,147022	0,153487	0,160080	9
10	0,129505	0,135868	0,142378	0,149030	10
11	0,120389	0,126793	0,133357	0,140076	11
12	0,112825	0,119277	0,125902	0,132695	12
13	0,106456	0,112960	0,119651	0,126522	13
14	0,101024	0,107585	0,114345	0,121297	14
15	0,096342	0,102963	0,109795	0,116830	15
16	0,092270	0,098952	0,105858	0,112977	16
17	0,088699	0,095445	0,102425	0,109629	17
18	0,085546	0,092357	0,099413	0,106702	18
19	0,082745	0,089621	0,096753	0,104128	19
20	0,080243	0,087185	0,094393	0,101852	20
21	0,077996	0,085005	0,092289	0,099832	21
22	0,075971	0,083046	0,090406	0,098032	22
23	0,074137	0,081279	0,088714	0,096422	23
24	0,072471	0,079679	0,087189	0,094978	24
25	0,070953	0,078227	0,085811	0,093679	25
26	0,069564	0,076904	0,084561	0,092507	26
27	0,068229	0,075697	0,083426	0,091448	27
28	0,067123	0,074593	0,082392	0,090489	28
29	0,066046	0,073580	0,081449	0,089619	29
30	0,065051	0,072649	0,080586	0,088827	30

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. К. : Національна академія управління, 1997. 397 с.
2. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. Посібник для студентів вищих навчальних закладів. К. : Видавничий центр «Академія», 1998. 272 с.
3. Бугір М. К. Математика для економістів. Навчальний посібник. Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. 192 с.
4. Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М. : ЮНИТИ, 1997. 768 с.
5. Крыньский Х. Э. Математика для экономистов. М. : Статистика, 1970. 584.
6. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшейматематике (типове расчеты): учеб. Пособие для втузов. М. : Высшая школа, 1983. 175 с.
7. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь. М.: Наука, 1993. 448 с.
8. Лук’яненко І. Г., Красникова Л. А. Економетрика. Київ: Знання, 1998. 494 с.
9. Минорский В. П. Сборник задач по высшейматематике: учеб. Пособие. М.: Наука, 1969. 352 с.
10. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Вища математика (практикум): Навчальний посібник, Тернопіль: Економічна думка, 2001. 258 с.
11. Рудницький В. Б. Вища математика у вправах і задачах: Навчальний посібник для студентів економічних та технологічних спеціальностей вузів. Хмельницький: ТУП, 1999. 104 с.
12. Рудницький В. Б., Делей В. І. Вища математика: Навчальний посібник. Хмельницький: Поділля, 1999. 310 с.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТКІВ

ДЛЯ НОТАТКІВ

Навчально-методична література

Блащак Н. І., Цимбалюк Л. І., Бойко А. Р.

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Навчальний посібник

Частина 1.
Математика фінансів, лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія

для студентів економічних спеціальностей
усіх форм навчання

Комп'ютерне макетування та верстка *А. А. Флейтути.*

Формат 60х90/16. Обл. вид. арк. 2,49. Тираж 10 прим. Зам. № 3314.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.