

ОСНОВНІ ІНТЕГРАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ТЕХНІЧНІЙ ТЕОРІЇ ЗГИНУ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ

Сформульовано мішану контактну задачу про підсилення контура отвору в нескінченній ізотропній пластинці тонким пружним ребром змінної жорсткості. Використовуючи технічну теорію згину пластин в уточненій постановці, одержано основні інтегральні співвідношення з ядрами Гільберта між компонентами тензора напружень і тензора деформації на контурі отвору, які дозволили звести задачу до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта відносно контактних моментів.

Умовні позначення

$M_\rho, H_{\rho\lambda}, M_\lambda$ - нормальні, дотичні (крутні) та кільцеві моменти на контурі отвору;

X, Y - деформації контура отвору;

E, ν - модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;

$g_2(s)$ - жорсткість підсилення на згин;

s - дуга на контурі отвору;

$\tilde{\rho}$ - радіус кривини контура отвору.

У різних галузях інженерної практики широке застосування мають пластинчасті деталі, які послаблені отворами. З метою зменшення концентрації напружень, збільшення їх жорсткості контури отворів підсилюють тонкими пружними ребрами сталої або змінної жорсткості.

Достатньо повно ці проблеми розроблені для замкнених підсилювальних елементів [1,2]. Контактна взаємодія пластин з отворами, які підсилені розіркненими пружними ребрами, у випадку узагальненого плоского напруженого стану досліджується в [3-6]. Що стосується задач циліндричного згину пластин з отворами, частково підсиленними пружними ребрами змінної жорсткості, то вони вивчені недостатньо. В роботі [7] розглянуто такі задачі про часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в пластинці тонкими пружними елементами. При цьому не враховувалася довільна стала C_1 , яка фігурує в граничних умовах задачі.

У даній роботі в уточненій постановці пропонуються інтегральні співвідношення технічної теорії згину пластин між компонентами тензора напружень і деформації контура отвору, які дозволяють формулювати мішані контактні задачі про його часткове підсилення замкненими або розіркненими пружними ребрами змінної жорсткості на згин у вигляді системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта.

1. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену криволінійним отвором, контур якого L має форму правильного N -кутника ($N = 2,3,4$) із закругленими кутами. Нехай така пластинка згинається рівномірно розподіленими постійними моментами інтенсивності $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$, тобто напружений стан на нескінченності визначається сталими Γ і Γ' , які визначаються за формулами [1]

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)} = -\frac{M_1 + M_2}{4D(1+\nu)}; \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty - 2iH_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)} = -\frac{(M_1 - M_2)e^{-2i\alpha_\infty}}{2D(1-\nu)}. \quad (1)$$

Тут M_1, M_2 - значення головних згинальних моментів на нескінченності; α_∞ - кут між площиною дії момента M_1 і віссю Ox ; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість пластинки; E, ν - модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Систему координат в серединній площині пластинки вибираємо так, як показано на рис. 1.

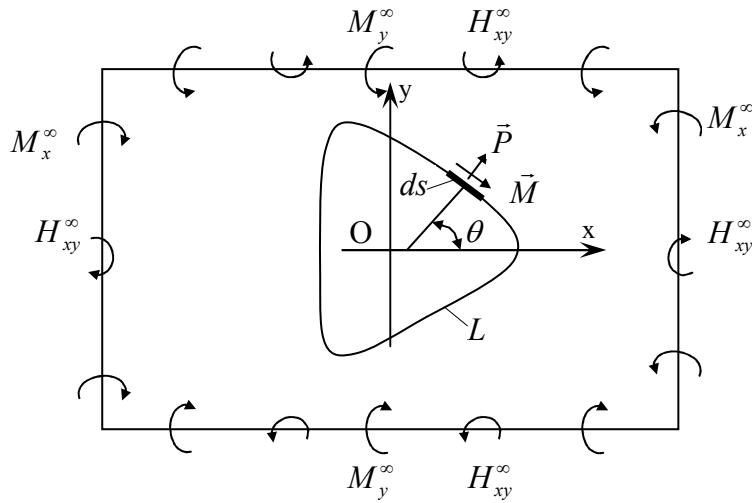


Рисунок 1 - Схема навантаження пластинки.

Нехай контур L або його частина $L_1 \subset L$ підсилений тонким пружним стрижнем змінної жорсткості на згин $g_2(s)$ (s – дуга на L). Підсилювальний елемент будемо моделювати пружною лінією, його жорсткістю на кручення нехтуємо. При цьому вважаємо, що одна із головних осей інерції поперечного перерізу підсилення розміщена в серединній площині пластинки.

Граничні умови спряження пластинки і підсилення запишемо у вигляді [1]

$$M_\rho = \tilde{M}_\rho - \frac{g_2(s)}{\tilde{\rho}} X; \quad Q_\rho = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} (\tilde{\rho}(M_\rho - \tilde{M}_\rho)) + \tilde{Q}_\rho, \quad (2)$$

де M_ρ , $Q_\rho = N_\rho + \frac{\partial H_{\rho\lambda}}{\partial s}$ - згинальний момент і узагальнена поперечна сила, які діють на контур L пластинки; $H_{\rho\lambda}$ - крутний момент; N_ρ - поперечна сила; \tilde{M}_ρ , \tilde{Q}_ρ - компоненти зовнішнього навантаження на підсилення; $\tilde{\rho}$ - радіус кривини контура L ; X - компонента деформації пластинки.

Інтегруючи другу умову по s , співвідношення (2) перетворимо так

$$M_\rho = \tilde{M}_\rho - \frac{g_2(s)}{\tilde{\rho}} X; \quad P = \tilde{P} - \frac{\partial}{\partial s} [\tilde{\rho}(M_\rho - \tilde{M}_\rho)]. \quad (3)$$

Тут введено позначення $P = H_{\rho\lambda} + \int_0^s N_\rho(s) ds + C$; $\tilde{P} = \tilde{H}_{\rho\lambda} + \int_0^s \tilde{N}_\rho(s) ds$; C - стала інтегрування.

2. Для визначення деформацій контура L умовно відділимо підсилення від пластинки, замінивши його дію моментами M_ρ і P , головний момент яких $M = M_x + M_y$ відмінний від нуля, а головний вектор P_z дорівнює нулю.

У даному випадку крайова умова першої граничної задачі технічної теорії згину пластин [8] має вигляд

$$\chi[\omega'(\tau)\Phi(\tau)]^- + [\omega(\tau)\Phi(\tau)]^+ = k[M_\rho + i(P + C_1)]\omega'(\tau), \quad (4)$$

де $[\omega'(\tau)\Phi(\tau)]^{\mp}$ - граничні значення функції $\omega'(\xi)\Phi(\xi)$ при підході до L з боку областей S^- і S^+ відповідно; $\Phi(\xi)$ - комплексний потенціал [8];

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) - \quad (5)$$

функція, яка реалізує конформне відображення зовнішності одиничного кола γ в комплексній площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка; R_0 - характерний розмір отвору (не порушуючи загальності приймаємо $R_0 = 1$); ε - параметр, який характеризує форму контура L ; C_1 - дійсна стала, яка визначається з умови однозначності прогину пластинки; $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$; $k = \frac{1}{D(1-\nu)}$; $\tau = e^{it}$ - точка на контурі γ ; $i = \sqrt{-1}$.

Загальний розв'язок задачі спряження (4), (5), який обмежений на нескінченності і задовольняє певним умовам [8] при $\xi = 0$, має вигляд

$$\omega'(\xi)\Phi(\xi) = \frac{-k}{2\pi i \chi} \oint_{\gamma} \frac{f_*(\tau) d\tau}{\tau - \xi} + \Gamma - \frac{R_*(\xi)}{\chi}, \quad |\xi| > 1; \quad (6)$$

$$\omega'(\xi)\Phi(\xi) = \frac{-k}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_*(\tau) d\tau}{\tau - \xi} - \chi\Gamma + R_*(\xi), \quad |\xi| < 1.$$

Тут

$$R_*(\xi) = \frac{\varepsilon(N-1)(\Gamma - ikC_1)}{\xi^N} + \left[\Gamma' - \frac{(N-2)(N-3)}{2} \varepsilon \bar{b} \right] \frac{1}{\xi^2} + \frac{a_1}{\xi} + \frac{\bar{a}_1 \varepsilon (N-2)}{\xi^{N-1}};$$

$$\varepsilon \bar{b} + \chi b = -\Gamma' - \frac{k}{2\pi} \oint_{\gamma} f_*(\tau) \tau^2 dt; \quad f_*(\tau) = (M_{\rho} + iP)\omega'(\tau) = M_{\rho}^* + iP^*;$$

$$a_1 = -\frac{k}{\chi+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f_*(\tau) d\tau = \frac{M_x + iM_y}{8\pi i D}.$$

В (7) і надалі верхня риска означає знак комплексного спряження.

Для визначення компонент тензора деформації X , Y контура L використаємо крайову умову другої граничної задачі технічної теорії згину пластин [8]

$$[\omega(\tau)\Phi(\tau)]^{-} - [\omega(\tau)\Phi(\tau)]^{+} = X^* - iY^*, \quad (8)$$

$$\text{де } X^* - iY^* = (X - iY)\omega'(\tau); \quad X = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad Y = \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial w}{\partial s}; \quad (9)$$

w - прогин контура L . Підставляючи (6), (7) в умову (8), знаходимо після певних перетворень

$$X^* - iY^* = \frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu)f_*(\lambda) - \frac{i}{\pi} \oint_{\gamma} f_*(t) \left(i - ctg \frac{\lambda-t}{2} \right) dt + X_0^* + iY_0^* \right]. \quad (10)$$

Тут введено позначення

$$X_0^* + iY_0^* = (\chi + 1)\Gamma - \left(\frac{1}{\chi} + 1\right) \left\{ \frac{\Gamma - ikC_1}{\sigma^N} \varepsilon(N-1) + \left(\Gamma' - \frac{(N-2)(N-3)}{2} \varepsilon \bar{b} \right) \frac{1}{\sigma^2} + \frac{a_1}{\sigma} + \frac{\varepsilon(N-2)\bar{a}_1}{\sigma^{N-1}} \right\}; \sigma = e^{it}. \quad (11)$$

Враховуючи співвідношення [7],

$$M_\rho^* = M_\rho \alpha - P\beta; \quad P^* = M_\rho \beta + P\alpha; \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad (12)$$

$$X = \frac{\alpha X^* - \beta Y^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad Y = \frac{\alpha Y^* + \beta X^*}{\alpha^2 + \beta^2},$$

із (10) одержимо після розділення дійсної та уявної частин

$$X = \frac{k}{(3+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)} \left[(1+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)M_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi_\gamma} \oint I(\lambda, t)M_\rho(t)dt - \frac{1}{\pi_\gamma} \oint J(\lambda, t)P(t)dt - (\alpha X_0^* + \beta Y_0^*) \right]; \quad (13)$$

$$Y = -\frac{k}{(3+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)} \left[(1+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)P(\lambda) + \frac{1}{\pi_\gamma} \oint I(\lambda, t)P(t)dt - \frac{1}{\pi_\gamma} \oint J(\lambda, t)M_\rho(t)dt - (\beta X_0^* - \alpha Y_0^*) \right],$$

де

$$R(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad I(\lambda, t) = R(\lambda, t) - Q(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2}; \quad (14)$$

$$Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t); \quad J(\lambda, t) = Q(\lambda, t) + R(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2}.$$

Для визначення сталої C_1 використаємо співвідношення (4), яке через однозначні і голоморфні функції $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ ($|\xi| > 1$) можна записати так [9]

$$\omega'(\tau)\Psi(\tau) = -\frac{\chi}{\tau} \overline{\omega'(\tau)}\Phi(\tau) + \frac{1}{\tau^2} \overline{\omega'(\tau)}\Phi(\tau) - \overline{\omega(\tau)}\Phi'(\tau) - \frac{k}{\tau^2} \overline{f_*(\tau)} + i \frac{C_1 k}{\tau^2} \overline{\omega'(\tau)}. \quad (15)$$

Умова однозначності прогину пластинки рівносильна тому, що уявна частина коефіцієнта при $\frac{1}{\tau^2}$ функції $\Psi(\tau)$ дорівнює нулю [9]. Підставляючи (5) - (7) в (15), визначаємо

$$\text{Im} \left[\frac{\varepsilon(N-1)(N-3)(N-4)}{4} \Gamma' - \chi\Gamma + \varepsilon a_N + iC_1 k - \frac{k}{2\pi_\gamma} \oint \overline{f_*(t)} dt \right] = 0. \quad (16)$$

Тут введено позначення

$$a_N = \frac{1}{\chi} \left[\frac{-k}{2\pi i_\gamma} \oint f_*(\tau) \tau^{N-1} d\tau + \varepsilon(N-1)[(\chi-1)\Gamma + ikC_1] - \bar{\Gamma}' \right]. \quad (17)$$

Після певних перетворень із (14), (15) знаходимо

$$C_1 = \frac{\frac{\varepsilon}{2\pi} \oint (M_\rho^* \sin Nt + P^* \cos Nt) dt - \frac{\chi}{2\pi} \oint P^* dt - \frac{\varepsilon(3-N)(4-N)}{2} (1 + (N-1)\chi) \text{Im} \Gamma'}{\varepsilon^2 + \chi}. \quad (18)$$

Таким чином, стала C_1 визначається в процесі розв'язування задачі і дорівнює нулю тільки у випадку симетричних задач. Важливе значення цієї сталої полягає в тому, що правильним її вибором можна добитися автоматичного задоволення умови однозначності прогину розв'язком задачі. На цей факт звертається увага в роботі [9].

Якщо компоненти тензора деформації (13), (14) на контурі отвору L стануть відомі, то кільцеві згинальні M_λ і крутні $H_{\rho\lambda}$ моменти визначаються за формулами [7]

$$M_\lambda = \nu M_\rho - \frac{1+\nu}{k} X; \quad H_{\lambda\rho} = -\frac{Y}{k}. \quad (19)$$

Покладаючи в (13), (14), (18) $\varepsilon = 0$, одержимо відповідні співвідношення для пластинки з круговим отвором.

Залежності (13), (18), які пов'язують компоненти контурного навантаження з відповідними деформаціями цього контура, можна використати при формулюванні мішаних контактних задач, зокрема задач про підсилення контура отвору тонкими пружними ребрами змінної жорсткості.

Підставляючи (13), (14), (18) в граничні умови (3), приходимо до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних моментів M_ρ і P

$$M_\rho = \tilde{M}_\rho - \frac{k}{(3+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)} \left[(1+\nu)(\alpha^2 + \beta^2) M_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma I(\lambda, t) M_\rho(t) dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma J(\lambda, t) P(t) dt - (\alpha X_0^* + \beta Y_0^*) \right]; \quad P = \tilde{P} - \frac{\partial}{\partial S} \left[\tilde{\rho} (M_\rho - \tilde{M}_\rho) \right]. \quad (20)$$

Крім системи (20), повинні виконуватися умови рівноваги підсилення

$$\oint_\gamma \left[(M_\rho + iP) - (\tilde{M}_\rho + i\tilde{P}) \right] e^{i\theta} dS = 0, \quad (21)$$

де θ - кут між нормаллю до контура L і віссю Ox .

Точний розв'язок задачі (20), (21) у загальному випадку знайти неможливо. Для її наближеного розв'язку необхідно використовувати числові методи.

Висновки. Оскільки система рівнянь (20), (21) має таку ж структуру, як і відповідні системи в [3,6] для узагальненого плоского напруженого стану, то:

- наближений розв'язок задачі у випадку повного підсилення контура L ребром змінної жорсткості можна визначити методом рядів [1];
- при частковому підсиленні ділянки L_1 контура отвору можна успішно використовувати метод колокації [3-6].

The contact problem about strengthening a contour of an aperture in an infinite isotropic plate is formulated by a thin elastic edge of replaceable rigidity mixed. Using the technical theory of a bend of plates in the specified statement the basic integrated parities with Hilbert's kernels between components tensor pressure and tensor deformations on a contour of an aperture which have allowed to reduce a problem about strengthening a contour of an aperture to system of two singular the integrated equations with Hilbert's kernels concerning the contact moments are received.

Література

1. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – Киев: Наук. думка, 1964. – 384 с.
2. Мартынович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те. – 1984. – 160 с.
3. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 5. – С. 94-99.
4. Батишкіна Ю.В. Часткове підсилення криволінійних отворів в пластинках тонкими пружними стержнями змінної жорсткості // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, – 2003. – С. 316 – 318.
5. Батишкіна Ю.В., Сяський А.О. Часткове підкріплення криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним стержнем // Волинський математичний вісник. – 2002. – Випуск 9. – С. 4–11.
6. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці // Вісник ТДТУ. - № 2. – 2004. – С. 5-12.
7. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, № 2.- С. 247-254.
8. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 200 с.
9. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.

Одержано 28.10.2005 р.