УДК 517.532

Г.Готинчан
Чернівецький факультет Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В БАГАТОШАРОВИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ ТІЛАХ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ – ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ – ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ - ФУР’Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв’язок алгоритмічного характеру задач квазістатики та статики для кусково-однорідного чотирискладового середовища.

Постановка проблеми та її аналіз. Інтенсивне впровадження композитних матеріалів в технологічні процеси вимагає знання їх властивостей. Виникають задачі математичної фізики неоднорідних середовищ. Розв’язання таких задач потребує відповідного математичного апарату. Це породило метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в працях Я.С. Уфлянда [1]. Продовження цих досліджень знаходимо в роботах В.С. Проценка [2]. Теорію гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в працях [3, 4]. Дана робота присвячена розв’язанню деяких задач квазістатики та статики в неоднорідному середовищі методом ГІП.

Основна частина. Задача квазістатики. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області

$$D_3 = \left\{(t,r): t \in (0,+\infty), r \in I_3^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3) \cup (R_3, +\infty); R_0 > 0\right\}$$

розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{\partial u_1(t,r)}{\partial t} + \chi_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 \mathrm{B}_{\alpha_1}\left[u_1(t,r)\right] = f_1(t,r), \quad r \in (R_0, R_1)$$

$$\frac{\partial u_2(t,r)}{\partial t} + \chi_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}\left[u_2(t,r)\right] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1, R_2)$$

$$\frac{\partial u_3(t,r)}{\partial t} + \chi_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}\left[u_3(t,r)\right] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2, R_3) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_4(t,r)}{\partial t} + \chi_4^2 u_4(t,r) - a_4^2 \frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial r^2} = f_4(t,r), \quad r \in (R_3, +\infty)$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0} = g_i(r), \quad r \in (R_{i-1}, R_i), \quad i = \overline{1,4},\ R_4 = +\infty, \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k(t),\ j = 1,2,\ k = \overline{1,3} \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^{0}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^{0}\right)u_1(t,r)\right|_{r=R_0}=g_0(t),\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\partial^m u_4(t,r)}{\partial r^m}=0,\ m=0,1, \tag{4}$$

де $a_i>0$, $\chi_i^2\geq 0$, $\alpha_{jm}^k\geq 0$, $\beta_{jm}^k\geq 0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $i=\overline{1,4}$, $j,m=1,2$, $k=\overline{1,3}$; B_{α_1} - диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі старших [4,5]

$$\mathrm{B}_{\alpha_1}=r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{\partial}{\partial r}+\alpha_1-\lambda^2 r^2,\ \alpha_1>-\frac{1}{2},\ \lambda\in(0,+\infty),$$

$\Lambda_{(\mu)}$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [3,4]

$$\Lambda_{(\mu)}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+cthr\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{1-chr}+\frac{\mu_2}{1+chr}\right),\quad \mu_1\geq\mu_2>-\frac{1}{2},$$

$\mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}$ - диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі молодших [4,5]

$$\mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\alpha_2+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu^2-\alpha_2}{r^2},\quad \nu\geq\alpha_2\geq-\frac{1}{2},$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$ - диференціальний оператор Фур'є.

Ефективним методом побудови розв'язку задачі (1) – (4) може служити спеціально запроваджене ГІП (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра 2-го роду – Ганкеля 2-го роду – Фур'є на полярній осі.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині I_3^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\begin{aligned}M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}&=a_1^2\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\mathrm{B}_{\alpha_1}+a_2^2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\Lambda_{(\mu)}+a_3^2\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}+\\&+a_4^2\theta(r-R_3)\frac{d^2}{dr^2},\quad (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),\quad (\mu)=(\mu_1,\mu_2).\end{aligned} \tag{5}$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда.

За область визначення оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r);g_4(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r)=\{\mathrm{B}_{\alpha_1}[g_1(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)];\mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)];g_4''(r)\}$ неперервна на множині I_3^+;

2) справджуються крайові умови

$$\left.\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)g_1(r)\right|_{r=R_0}=0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{d^k g_4(r)}{dr^k}=0,\ k=0,1; \tag{6}$$

3) справджуються умови спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=0,\ j=1,2,\ k=\overline{1,3}. \tag{7}$$

Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{1}{a_1^2}\frac{c_{11}c_{12}c_{13}}{c_{21}c_{22}c_{23}}\frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}}\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{2\alpha_2+1}\frac{shR_1}{shR_2},\ \sigma_2=\frac{1}{a_2^2}\frac{c_{12}c_{13}}{c_{22}c_{23}}\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{2\alpha_2+1}\frac{1}{shR_2},$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{a_3^2}\frac{c_{13}}{c_{23}}\frac{1}{R_3^{2\alpha_2+1}}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{a_4^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 shr + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1} + \\ + \theta(r-R_3)\sigma_4 \tag{8}$$

і скалярний добуток

$$(u,v) = \int_{R_0}^{+\infty} u(r)v(r)\sigma(r)dr = \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 shrdr + \\ + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr + \int_{R_3}^{+\infty} u_4(r)v_4(r)\sigma_4 dr, \quad u(r)\in G, v(r)\in G. \tag{9}$$

Із умов спряження (7) маємо базову тотожність

$$u_k'(R_k)v_k(R_k) - u_k(R_k)v_k'(R_k) = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\right]. \tag{10}$$

Безпосередньо інтегруючи частинами двічі, знаходимо

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v\right) = \left(u, M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v]\right). \tag{11}$$

Отже, ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений. Значить, його власні числа дійсні.

При $b_j = a_j^{-1}\left(\beta^2 + \gamma_j^2\right)^{1/2}$, де $|\beta| \in (0,+\infty)$, $\gamma_j^2 \ge 0$, $j = \overline{1,4}$ фундаментальну систему розв'язків (ФСЗ) для диференціального рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\alpha_1} + b_1^2\right)u(r) = 0$ утворюють функції $C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)$ та $D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1)$ [5]; ФСР для модифікованого узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)u(r) = 0$ утворюють функції $A_{-\frac{1}{2}+b_2}^{(\mu)}(chr)$ та $\mathrm{B}_{-\frac{1}{2}+b_2}^{(\mu)}(chr)$ [4]; ФСР для диференціального рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_2} + b_3^2\right)u(r) = 0$ утворюють циліндричні функції $J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r) = (b_3 r)^{-\alpha_2} J_\nu(b_3 r)$ та $N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r) = (b_3 r)^{-\alpha_2} N_\nu(b_3 r)$ [5]; ФСР для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_4^2\right)u(r) = 0$ утворюють функції $\cos b_4 r$ та $\sin b_4 r$.

ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$, визначений рівністю (5), має одну особливу точку $r = +\infty$. Тому спектр оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ дійсний та неперервний і спектральна вектор-функція $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \left\{V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta); V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta); V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta); V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\right\}$, яка йому відповідає, дійсна.

Визначимо величини:

$$q_{(\mu)}(\beta) = Y_{-\frac{1}{2}+ib_2;12}^{(\mu),11}(chR_1)Y_{-\frac{1}{2}+ib_2;22}^{(\mu),12}(chR_1) - Y_{-\frac{1}{2}+ib_2;12}^{(\mu),12}(chR_1)Y_{-\frac{1}{2}+ib_2;22}^{(\mu),11}(chR_1) = \frac{c_{21}}{shR_1}\cdot\frac{1}{S_{(\mu)}(b_2)},$$

$$q_{\nu,\alpha_2}(\beta) = u_{\nu,\alpha_2;12}^{21}(b_3R_2)u_{\nu,\alpha_2;22}^{22}(b_3R_2) - u_{\nu,\alpha_2;12}^{22}(b_3R_2)u_{\nu,\alpha_2;22}^{21}(b_3R_2) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{b_3^{2\alpha_2}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$\delta_{\alpha_1;j}(\lambda R_0, \lambda R_1, b_1) = \mathrm{X}_{11}^{01}(\lambda R_0, b_1)\mathrm{X}_{j1}^{12}(\lambda R_1, b_1) - \mathrm{X}_{11}^{02}(\lambda R_0, b_1)\mathrm{X}_{j1}^{11}(\lambda R_0, b_1),$$

$$\delta^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_2;jk}(chR_1,chR_2)=Y^{(\mu),11}_{-\frac{1}{2}+ib_2;j2}(chR_1)Y^{(\mu),22}_{-\frac{1}{2}+ib_2;k1}(chR_2)-Y^{(\mu),12}_{-\frac{1}{2}+ib_2;j2}(chR_1)Y^{(\mu),21}_{-\frac{1}{2}+ib_2;k1}(chR_2),$$

$$\omega^{(\mu)}_{\alpha_1;j}(\beta)=\delta^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_2;1j}(chR_1,chR_2)\delta_{\alpha_1;2}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1)-\delta^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_2;2j}(chR_1,chR_2)\delta_{\alpha_1;1}(\lambda R_0,\lambda R_1,b_1),$$

$$\delta_{\nu,\alpha_2;jk}(b_3R_2,b_3R_3)=u^{21}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)u^{32}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_3R_3)-u^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)u^{31}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_3R_3),$$

$$a^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=\omega^{(\mu)}_{\alpha_1;2}(\beta)\delta_{\nu,\alpha_2;1j}(b_3R_2,b_3R_3)-\omega^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(\beta)\delta_{\nu,\alpha_2;2j}(b_3R_2,b_3R_3),$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=a^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)v^{3j}_{22}(b_4R_3)-a^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)v^{3j}_{12}(b_4R_3),\quad j,k=1,2.$$

Інші функції визначені в роботах [3,4,5]. Безпосередньо перевіряється, що компоненти $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$, $j=\overline{1,4}$, спектральної вектор-функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$ мають вигляд:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=c_{23}b_4q_{(\mu)}(\beta)q_{\nu,\alpha_2}(\beta)\Psi^0_{\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda r,b_1);$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=c_{23}b_4q_{\nu,\alpha_2}(\beta)\left[\delta_{\alpha_1;2}(\beta)f^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_2;12}(chR_1,chr)-\delta_{\alpha_1;1}(\beta)f^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_2;22}(chR_1,chr)\right],$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=c_{23}b_4\left[\omega^{(\mu)}_{\alpha_1;2}(\beta)\Psi^2_{\nu,\alpha_2;12}(b_3R_2,b_3r)-\omega^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(\beta)\Psi^2_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_2,b_3r)\right];$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)\cos b_4r-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\sin b_4r.$$

Наявність спектральної функції

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)+\theta(r-R_3)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta),$$

вагової функції $\sigma(r)$, визначеної рівністю (4), і спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)=$ $=\frac{\beta}{b_4(\beta)}\left(\left[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\right]^2+\left[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}$ дають можливість визначити пряме $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$ і обернене $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$ гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича - Лєбєдєва) 2–го роду – Лежандра 2-го роду – Ганкеля 2-го роду – Фур'є, породжене на множині I_3^+ ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ [4]:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[g(r)]=\int_{R_0}^{+\infty}g(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2shrdr+\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3r^{2\alpha_2+1}dr+\tag{12}$$

$$+\int_{R_3}^{+\infty}g_4(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)\sigma_4dr=\tilde{g}_1(\beta)+\tilde{g}_2(\beta)+\tilde{g}_3(\beta)+\tilde{g}_4(\beta)\equiv\tilde{g}(\beta),$$

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r).\tag{13}$$

Математичним обґрунтуванням правил (12), (13) є твердження.

Теорема (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = \Big[\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sqrt{shr} + \\ +\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)r^{\alpha_2+1/2} + \theta(r-R_3)\cdot 1\Big]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на $[R_0,+\infty)$*, то для будь-якого* $r \in I_3^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)\int_{R_0}^{+\infty} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta.$$

Доведення проводиться методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) [4].

Застосування запровадженого формулами (12), (13) ГІП базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$.

Теорема (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = \left\{B_{\alpha_1}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)]; g_4''(r)\right\}$$

неперервна на множині I_3^+ *і справджуються крайові умови*

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)g_1(r)\Bigg|_{r=R_0} = g_0,\ \lim_{r\to+\infty}\left[V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dg_4(r)}{dr} - g_4(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\right] = 0$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k,\ j=1,2,\ k=\overline{1,3},$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$*, визначеного формулою (1):*

$$H_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}\left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)g_0 - \\ -\sum_{j=1}^4\gamma_j^2\tilde{g}_j(\beta) + \sum_{j=1}^3 d_j\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^j - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^j\right), \qquad (14)$$

де $Z_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu),k+1}(\beta) = \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)V_{\nu,(\alpha),k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\Bigg|_{r=R_k}$, $\quad j=1,2,\ k=\overline{1,3},\ d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}$,

$$d_2 = a_2^2\sigma_2 shR_2 c_{12}^{-1},\ d_3 = a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}c_{13}^{-1}.$$

Доведення проводиться методом інтегрування два рази частинами під знаком інтегралів з наступним використанням базової тотожності (10), властивостей вектор-функцій $g(r)$ та $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)$ і структури $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$.

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_1^2-a_1^2\mathrm{B}_{\alpha_1}\right)u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_3^2-a_3^2\mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}\right)u_3(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_4^2-a_4^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_4(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \\ f_4(t,r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \\ u_4(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \\ g_4(r) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Інтегральний оператор $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}$, згідно з правилом (12), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}[\cdots] = \Bigg[\int_{R_0}^{R_1} \ldots V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shrdr$$

$$\int_{R_2}^{R_3} \ldots V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr \quad \int_{R_3}^{+\infty} \ldots V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_4 dr \Bigg]. \tag{16}$$

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2;\chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_1^2 = 0$, $\gamma_j^2 = \chi_1^2 - \chi_j^2 \geq 0$, $j = \overline{2,4}$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (16) до задачі (15). Внаслідок тотожності (14) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt}+\beta^2+\chi_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \qquad \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \tag{17}$$

Тут прийняті позначення:

$$\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{u}_1(t,\beta)+\tilde{u}_2(t,\beta)+\tilde{u}_3(t,\beta)+\tilde{u}_4(t,\beta),$$

$$\tilde{g}(\beta) = \tilde{g}_1(\beta)+\tilde{g}_2(\beta)+\tilde{g}_3(\beta)+\tilde{g}_4(\beta),$$

$$\tilde{f}(t,\beta) = \tilde{f}_1(t,\beta)+\tilde{f}_2(t,\beta)+\tilde{f}_3(t,\beta)+\tilde{f}_4(t,\beta),$$

$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) - a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta) g_0(t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{3} d_j\left(\mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^j(t) - \mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^j(t)\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язок задачі Коші (17) є функція [6]

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} + \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau. \tag{18}$$

Визначимо: 1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta) V_{\nu,(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j,k = \overline{1,4};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{jm}_{\nu,(\alpha);k2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\cdot d_{m-1}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)t}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)Z^{(\mu),m}_{\nu,(\alpha);k2}(\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,$$

$$j=\overline{1,4},\quad k=1,2,\quad m=\overline{2,4};$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\frac{a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}}{\alpha^0_{11}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)t}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,4}.$$

Оператор $\mathrm{H}^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$, згідно з правилом (13), як обернений до (16) зобразимо у вигляді операторної матриці стовпця:

$$\mathrm{H}^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[\cdots]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{19}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (19), за правилом множення матриць, до матриці-елементу $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ однозначно визначена формулою (18). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t,r)=\int\limits_0^t\int\limits_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2 sh\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_3}^{+\infty}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j4}(t-\tau,r,\rho)[f_4(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_4(\rho)]\sigma_4 d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{m=2}^{4}\int\limits_0^t\left[R^{jm}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{21}(\tau)-R^{jm}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{11}(\tau)\right]d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau,\quad j=\overline{1,4}. \tag{20}$$

Тут $\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

Задача статики. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_3^+ = \{(r,z) : r \in I_3^+, z \in (0,+\infty)\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1(r,z)}{\partial z^2} - \chi_1^2 u_1(r,z) + a_1^2 \mathrm{B}_{\alpha_1}[u_1(r,z)] = -f_1(r,z), \quad r \in (R_0, R_1) \\
&\frac{\partial^2 u_2(r,z)}{\partial z^2} - \chi_2^2 u_2(r,z) + a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2(r,z)] = -f_2(r,z), \quad r \in (R_1, R_2) \\
&\frac{\partial^2 u_3(r,z)}{\partial z^2} - \chi_3^2 u_3(r,z) + a_3^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}[u_3(r,z)] = -f_3(r,z), \quad r \in (R_2, R_3) \\
&\frac{\partial^2 u_4(r,z)}{\partial z^2} - \chi_4^2 u_4(r,z) + a_4^2 \frac{\partial^2 u_4(r,z)}{\partial r^2} = -f_4(r,z), \quad r \in (R_3, +\infty)
\end{aligned} \tag{21}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1(r,z)\Big|_{r=R_0} = g_0(z), \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{\partial^m u_4(r,z)}{\partial r^m} = 0, \; m = 0,1, \tag{22}$$

$$\left(-h_1 \frac{\partial}{\partial z} + h_2\right) u_j(r,z)\Big|_{z=0} = g_j(r), \; h_j \geq 0, \; h_1 + h_2 \neq 0, \; \lim_{r\to+\infty} \frac{\partial u_j(r,z)}{\partial z} = 0, \tag{23}$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(r,z) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(r,z)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k(z), \; j = 1,2, \; k = \overline{1,3}, \tag{24}$$

<u>Розв'язання.</u> Запишемо систему (21) і крайові умови (23) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \chi_1^2 + a_1^2 \mathrm{B}_{\alpha_1}\right) u_1(r,z) \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \chi_2^2 + a_2^2 \Lambda_{(\mu)}\right) u_2(r,z) \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \chi_3^2 + a_3^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}\right) u_3(r,z) \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \chi_4^2 + a_4^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_4(r,z)
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(r,z) \\ f_2(r,z) \\ f_3(r,z) \\ f_4(r,z) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\left(-h_1 \frac{\partial}{\partial z} + h_2\right) \begin{bmatrix} u_1(r,z) \\ u_2(r,z) \\ u_3(r,z) \\ u_4(r,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{z=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \\ g_4(r) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_1(r,z) \\ u_2(r,z) \\ u_3(r,z) \\ u_4(r,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{z=+\infty} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2; \chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_1^2 = 0$, $\gamma_j^2 = \chi_1^2 - \chi_j^2 \geq 0, \quad j = \overline{2,4}$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (16) до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (14) отримуємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - q^2\right)\widetilde{u}(\beta, z) = -\widetilde{F}(\beta, z), \qquad q^2 = \beta^2 + \chi_1^2. \tag{27}$$

Тут бере участь функція

$$\widetilde{F}(\beta, z) = \widetilde{f}(\beta, z) + a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0, \beta) g_0(z) -$$
$$- \sum_{j=1}^{3} d_j \left(\mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^j(z) - \mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^j(z)\right).$$

При цьому повинні справджуватися крайові умови

$$\left(-h_1 \frac{d}{dz} + h_2\right)\widetilde{u}(\beta, z)\Bigg|_{z=0} = \widetilde{g}(\beta), \ \ \frac{d\widetilde{u}(\beta, z)}{dz}\Bigg|_{z=+\infty} = 0. \tag{28}$$

Розв’язком крайової задачі (27)-(28) є функція

$$\widetilde{u}(\beta, z) = \widetilde{W}(\beta, z)\widetilde{g}(\beta) + \int_0^{+\infty} \widetilde{E}(\beta, z, \xi)\widetilde{F}(\beta, \xi)d\xi. \tag{29}$$

У рівності (29) присутня функція Гріна

$$\widetilde{W}(\beta, z) = e^{-q(\beta)z}(h_1 q + h_2)^{-1},$$

породжена крайовою умовою (28) в точці $z = 0$, і фундаментальна функція крайової задачі (27), (28)

$$\widetilde{E}(\beta, z, \xi) = \frac{1}{2q}\left(e^{-q(\beta)|z-\xi|} + e^{-q(\beta)(z+\xi)} - \frac{2h_2}{h_1 q + h_2} e^{-q(\beta)(z+\xi)}\right),$$

породжена неоднорідністю рівняння (27).

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (19), за правилом множення матриць, до матриці-елементу $[\widetilde{u}(\beta, z)]$, де функція $\widetilde{u}(\beta, z)$ визначена формулою (29). Після низки елементарних перетворень отримуємо єдиний розв’язок еліптичної задачі (21) – (24):

$$u_j(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \widetilde{u}(\beta, z) V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta = \int_{R_0}^{R_1} W_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu),z}(r, \rho, z) g_1(\rho)\sigma_1 \rho^{2\alpha_1 - 1}d\rho +$$
$$+ \int_{R_1}^{R_2} W_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu),z}(r, \rho, z) g_2(\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho + \int_{R_2}^{R_3} W_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu),z}(r, \rho, z) g_3(\rho)\sigma_3 \rho^{2\alpha_2 + 1}d\rho +$$
$$+ \int_{R_3}^{+\infty} W_{\nu,(\alpha);j4}^{(\mu),z}(r, \rho, z) g_4(\rho)\sigma_4 d\rho + \int_0^{+\infty} W_{\nu,(\alpha);1j}^{(\mu),r}(r, z, \xi) g_0(\xi)d\xi + \tag{30}$$
$$+ \sum_{k=1}^{3}\int_0^{+\infty}\left[R_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu);k+1,j}(r, z, \xi)\omega_{21}^k(\xi) - R_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu);k+1,j}(r, z, \xi)\omega_{11}^k(\xi)\right]d\xi +$$
$$+ \int_0^{+\infty}\left[\int_{R_0}^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu)}(r, \rho, z, \xi) f_1(\rho, \xi)\sigma_1 \rho^{2\alpha_1 - 1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu)}(r, \rho, z, \xi) f_2(\rho, \xi)\sigma_2 sh\rho d\rho +\right.$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,z,\xi) f_3(\rho,\xi)\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho + \int_{R_3}^{+\infty} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j4}(r,\rho,z,\xi) f_4(\rho,\xi)\sigma_4 d\rho \Bigg] d\xi,\ j=\overline{1,4}.$$

Тут беруть участь головні розв'язки даної еліптичної задачі: 1) породжені крайовою умовою на лінії $z=0$ функції Гріна

$$W^{(\mu);z}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\widetilde{W}(\beta,z)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\quad j,k=\overline{1,4};$$

2) породжені крайовою умовою на лінії $r=R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu);r}_{\nu,(\alpha);1j}(r,z,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\widetilde{E}(\beta,z,\xi)\frac{a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}}{\alpha_{11}^0}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\quad j,k=\overline{1,4};$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu);k+1,j}_{\nu,(\alpha);m2}(r,z,\xi) = \frac{2}{\pi}d_k\int_0^{+\infty}\widetilde{E}(\beta,z,\xi)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)Z^{(\mu),k+1}_{\nu,(\alpha);m2}(\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ m=1,2,\ j=\overline{1,4},\ k=\overline{1,3};$$

4) породжені неоднорідністю системи рівнянь (21) функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,z,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\widetilde{E}(\beta,z,\xi)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\quad j,k=\overline{1,4}.$$

Висновок. Вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r);u_4(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (20), описує в точній аналітичній формі тепловий процес в даному середовищі, а вектор-функція $u(r,z)=\{u_1(r,z);u_2(r,z);u_3(r,z);u_4(r,z)\}$, де $u_j(r,z)$ визначені формулою (30), описує в точній аналітичній формі стаціонарний процес в даному середовищі. Алгоритмічний характер формул (20), (30) дозволяє використовувати одержані розв'язки як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

By the method of fundamental functions the exact analytical decision of algorithmic character of task of charismatic and static is built for a piece-homogeneous four-composite environment.

Література

1. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С.93-106.
2. Проценко В.С., Соловьев А.И. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред // Прикладная механика. – 1982. – Т. XIII, №1. – С.62-67.
3. Ленюк М.П., Янчишин М.Л. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича - Лєбєдєва) - Лежандра. – Львів, 2002. – 76 с. – (Препринт/ НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім..Я.С. Підстригала; 01.02)
4. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.
5. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

Одержано 17.09.2005 р.