УДК 517.443

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], канд. техн. наук
[1] *Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича*
[2] *Тернопільський державний економічний університет*

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ – ФУР'Є – ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Лежандра методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено сім'ю поліпараметричних невласних інтегралів від тригонометричних функцій в поєднанні з спеціальними функціями Бесселя та спеціальними приєднаними функціями Лежандра.

Постановка задачі

У сучасній довідниковій математичній літературі знаходимо формули обчислення невласних інтегралів за спектральними елементами одного диференціального оператора (Фур'є, Бесселя, Лежандра тощо) [1,2]. У зв'язку з широким впровадженням в технологічні процеси композиційних матеріалів виникає гостра потреба в обчисленні невласних інтегралів за спектральними елементами гібридних диференціальних операторів. Один із методів обчислення таких інтегралів ми пропонуємо метод гібридних інтегральних перетворень [3]. В даній роботі обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Фур'є – Лежандра.

Основна частина

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_{22}^{+} = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є і Лежандра

$$\left(B_\alpha - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$
$$\left(\Lambda_\mu - q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r),\ r \in (R_2, \infty).$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \qquad \lim_{r\to\infty}\left(r^\gamma u_3(r)\right) = 0 \tag{2}$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0,\quad j,k = 1,2. \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальний оператор Бесселя $B_\alpha = r^2\dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\dfrac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2$ [4] і диференціальний оператор Лежандра [5] $\Lambda\mu = \dfrac{d^2}{dr^2} + cthr\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{4} - \mu^2\left(sh^2 r\right)^{-1};\ 2\alpha+1>0,\ \lambda\in(0,\infty),\ \mu\ge 0.$

Ми припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j > 0,\ \alpha_{jk}^m \ge 0,\ \beta_{jk}^m \ge 0,$ $\left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \ne 0,\ c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k,\ c_{1k}c_{2k} > 0,\ j,k = 1,2.$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_\alpha - q)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та $K_{q,\alpha}(\lambda r)$ [4], для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_\mu - q^2\right)v = 0$ – приєднані модифіковані функції Лежандра 1-го $P_{-1/2+q}^{\mu}(chr)$ роду та 2-го роду $L_{-1/2+q}^{\mu}(chr)$ [5], а для диференціального рівняння Фур'є $\left(\dfrac{d^2}{dr^2} - q^2\right)v = 0$ – функції $chqr$ та $shqr$ [6] (якщо аргумент r міняється на сегменті).

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [6,7]:

$$u_1(r) = A_1 I_{q_1,\alpha}(\lambda r) + B_1 K_{q_1,\alpha}(\lambda r) + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1} d\rho,$$
$$u_2(r) = A_2 chq_2 r + B_2 shq_2 r + \int_{R1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) d\rho, \qquad (4)$$
$$u_3(r) = B_3 L_{-1/2+q_3}^{\mu}(chr) + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3(\rho) sh\rho d\rho,$$

$E_j(r,\rho)$ - функції Коші:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0} = 0,$$
$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0} = -[\varphi_j(\rho)]^{-1} \qquad (5)$$
$$\varphi_1(r) = r^{2\alpha+1},\ \varphi_2(r) = 1\ \ \varphi_3(R) = shr.$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції:

$$E_1(r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{q_1,\alpha}(\lambda R_0, \lambda R_1)}\begin{cases}\Psi_{q_1,\alpha;11}^{0*}(\lambda R_0, \lambda r)\Psi_{q_1,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1, \lambda\rho),\ R_0 < r < \rho < R_1,\\ \Psi_{q_1,\alpha;11}^{0*}(\lambda R_0, \lambda\rho)\Psi_{q_1,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1, \lambda r),\ R_0 < \rho < r < R_1;\end{cases} \qquad (6)$$

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2 r)\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2\rho),\ R_1 < r < \rho < R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2 r),\ R_2 < \rho < r < R_2;\end{cases} \qquad (7)$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{1}{Z_{-1/2+q_3;12}^{\mu,22}(chR_2)}\begin{cases}L_{-1/2+q_3}^{\mu}(ch\rho)F_{-1/2+q_3;12}^{\mu,2}(chR_2, chr),\ R_2 < r < \rho < \infty,\\ L_{-1/2+q_3}^{\mu}(chr)F_{-1/2+q_3;12}^{\mu,2}(chR_2, ch\rho),\ R_2 < \rho < r < \infty;\end{cases} \qquad (8)$$

У рівностях (6)-(8) беруть участь функції:

$$\Delta_{q_1,\alpha;j1}(\lambda R_0, \lambda R_1) = U_{q_1,\alpha;11}^{01}(\lambda R_0)U_{q_1,\alpha;j1}^{12}(\lambda R_1) - U_{q_1,\alpha;11}^{02}(\lambda R_0)U_{q_1,\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1),\ \ j = 1,2,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1, q_2R_2) = V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2) - V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2), \quad j,k = 1,2,$$

$$V_{jm}^{k1}(qR) = \alpha_{jm}^k q shqR + \beta_{jm}^k chqR \equiv \left(\alpha_{jm}^k \frac{d}{dr} + \beta_{jm}^k\right) chqr\Big|_{r=R},$$

$$V_{jm}^{k2}(qR) = \alpha_{jm}^k q chqR + \beta_{jm}^k shqR \equiv \left(\alpha_{jm}^k \frac{d}{dr} + \beta_{jm}^k\right) shqr\Big|_{r=R},$$

$$\Phi_{jk}^m(qR_m, qr) = V_{jk}^{m2}(qR_m) chqr - V_{jk}^{m1}(qR_m) shqr.$$

Всі інші функції загальноприйняті [3,8].

Крайові умови (2) і умови спряження (3) для визначення величин A_j, $(j = 1,2)$ та B_k, $(k = \overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\begin{gathered} U_{q_1,\alpha;11}^{01}(\lambda R_0)A_1 + U_{q_1,\alpha;11}^{02}(\lambda R_0)B_1 = g_0, \\ U_{q_1,\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1)A_1 + U_{q_1,\alpha;j1}^{12}(\lambda R_2)B_1 - V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2 - V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2 = \omega_{11}\delta_{j1} + (\omega_{21} + G_{12})\delta_{j2}, \\ V_{j1}^{21}(q_2R_2)A_2 - V_{j1}^{22}(q_2R_2)B_2 - Z_{-1/2+q_3;j2}^{\mu,22}(chR_2)B_3 = \omega_{12}\delta_{j1} + (\omega_{22} + G_{23})\delta_{j2}, \quad j = 1,2. \end{gathered} \tag{9}$$

У системі (9) беруть участь функції:

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{\Psi_{q_1,\alpha;11}^{0*}(\lambda R_0, \lambda\rho)}{\Delta_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)} g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1} d\rho + c_{21} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho,$$

$$G_{23} = -c_{12} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho + \frac{c_{22}}{shR_2} \int_{R_2}^{\infty} \frac{L_{-1/2+q_3}^{\mu}(ch\rho)}{Z_{-1/2+q_3;12}^{\mu,22}(chR_2)} g_3(\rho) sh\rho d\rho,$$

і символ Кронекера δ_{jk}.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha,j}(q) = \Delta_{q_1,\alpha;21}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1, q_2R_2) - \Delta_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1, q_2R_2),$$

$$B_{\mu,j}(q) = Z_{-1/2+q_3;22}^{\mu,22}(chR_2)\Delta_{j1}(q_2R_1, q_2R_2) - Z_{-1/2+q_3;12}^{\mu,22}(chR_2)\Delta_{j2}(q_2R_1, q_2R_2),$$

$$\Theta_{\alpha,1}(r,q) = \Delta_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1, q_2r) - \Delta_{q_1,\alpha;21}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2r),$$

$$\Theta_{\mu,2}(r,q) = Z_{-1/2+q_3;12}^{\mu,22}(chR_2)\Phi_{21}^2(q_2R_2, q_2r) - Z_{-1/2+q_3;22}^{\mu,22}(chR_2)\Phi_{11}^2(q_2R_2, q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (9)

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,\mu}(q) &\equiv Z_{-1/2+q_3;12}^{\mu,22}(chR_2)A_{\alpha,2}(q) - Z_{-1/2+q_3;22}^{\mu,22}(chR_2)A_{\alpha,1}(q) = \\ &= \Delta_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)B_{\mu,2}(q) - \Delta_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)B_{\mu,1}(q) \neq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Визначимо: 1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{\alpha,\mu;11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Big[B_{\mu,1}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha;21}(\lambda R_1,\lambda r)-B_{\mu,2}(q)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda r)\Big],$$

$$W_{\alpha,\mu;12}(r,q)=-\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Theta_{\mu,2}(r,q), \tag{11}$$

$$W^{\mu}_{\nu,(\alpha);13}(r,q)=-\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}L^{\mu}_{-1/2+q_3}(chr);$$

2) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H_{\alpha,\mu;11}(r,\rho,q)=-\lambda^{2\alpha}\begin{cases}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)W_{\alpha,\mu;11}(\rho,q), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)W_{\alpha,\mu;11}(r,q), & R_0<\rho<r<R_1,\end{cases},$$

$$H_{\alpha,\mu;12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)\Theta_{\mu,2}(\rho,q),$$

$$H_{\alpha,\mu;13}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}c_{22}q_2}{shR_2\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda r)L^{\mu}_{-1/2+q_3}(ch\rho),$$

$$H_{\alpha,\mu;21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)\Theta_{\mu,2}(r,q),$$

$$H_{\alpha,\mu;22}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_2\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha,1}(r,q)\Theta_{\mu,2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Theta_{\alpha,1}(\rho,q)\Theta_{\mu,2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}, \tag{12}$$

$$H_{\alpha,\mu;23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{shR_2}\frac{1}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Theta_{\alpha,1}(r,q)L^{\mu}_{-1/2+q_3}(ch\rho),$$

$$H_{\alpha,\mu;31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}q_2}{R_1^{2\alpha+1}\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha;11}(\lambda R_0,\lambda\rho)L^{\mu}_{-1/2+q_3}(chr),$$

$$H_{\alpha,\mu;32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\Theta_{\alpha,1}(\rho,q)L^{\mu}_{-1/2+q_3}(chr),$$

$$H_{\alpha,\mu;33}(r,\rho,q)=\frac{B_{\mu}(q_3)}{\Delta_{\alpha,\mu}(q)}\begin{cases}L^{\mu}_{-1/2+q_3}(ch\rho)[A_{\alpha,1}(q)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;22}(chR_2,chr)-\\ L^{\mu}_{-1/2+q_3}(chr)[A_{\alpha,1}(q)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;22}(chR_2,ch\rho)-\end{cases}$$

$$-A_{\alpha,2}(q)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;12}(chR_2,chr)],\ R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A_{\alpha,2}(q)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;12}(chR_2,ch\rho)],\ R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (9), підстановки обчислених значень A_j та B_k у рівності (4) одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$
\begin{gathered}
u_j(r) = W_{\alpha,\mu;1j}(r,q)g_0 + \int_{R_0}^{R_1} H_{\alpha,\mu;j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho + \\
+ \int_{R_1}^{R_2} H_{\alpha,\mu;j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho + \int_{R_2}^{\infty} H_{\alpha,\mu;j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)sh\rho d\rho, \quad j=\overline{1,3}
\end{gathered} \tag{13}
$$

Побудуємо розв'язок даної крайової задачі методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_{22}^{+} гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$
M_{\alpha,\mu} = \Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)B_\alpha + \Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)\frac{d^2}{dr^2} + \Theta(r-R_2)\Lambda_\mu, \tag{14}
$$

$\Theta(x)$ – одинична функція Хевісайда.

ГДО $M_{\alpha,\mu}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r=\infty$. Тому його спектр дійсний і неперервний: $\beta \in (0,\infty)$. Спектральному параметру β відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$
V_{\alpha,\mu}(r,\beta) = \sum_{i=1}^{2}\Theta(r-R_{i-1})\Theta(R_i-r)V_{\alpha,\mu;i}(r,\beta) + \Theta(r-R_2)V_{\alpha,\mu;3}(r,\beta)
$$

компоненти $V_{\alpha,\mu;i}$ якої обчислюються за правилами:

$$
\begin{gathered}
V_{\alpha,\mu;1}(r,\beta) = c_{21}b_2(\beta)q_\mu(\beta)\left[\chi_{\alpha;11}^{01}(\lambda R_0,b_1)D_\alpha(\lambda r,b_1) - \chi_{\alpha;11}^{02}(\lambda R_0,b_1)C_\alpha(\lambda r,b_1)\right] \equiv \\
\equiv c_{21}b_2(\beta)q_\mu(\beta)\Psi_{\alpha;11}^{0}(\lambda R_0,\lambda,r,b_1),
\end{gathered}
$$

$$
V_{\alpha,\mu;2}(r,\beta) = q_\mu(\beta)\left[\delta_{\alpha;11}(\beta)\varphi_{22}^{1}(b_2R_1,b_2r) - \delta_{\alpha;21}(\beta)\varphi_{12}^{1}(b_2R_1,b_2r)\right], \tag{15}
$$

$$
V_{\alpha,\mu;3}(r,\beta) = a_{\alpha,2}(\beta)f_{-1/2+ib_3;12}^{\mu,2}(chR_2,chr) - a_{\alpha,1}(\beta)f_{-1/2+ib_3;22}^{\mu,2}(chR_2,chr).
$$

У рівностях (15) беруть участь функції:

$$
\varphi_{j2}^{1}(b_2R_1,b_2r) = v_{j2}^{12}(b_2R_1)\cos b_2r - v_{j2}^{11}(b_2R_1)\sin b_2r,
$$

$$
f_{-1/2+ib_3;j2}^{\mu,2}(chR_2,chr) = Y_{-1/2+ib_3;j2}^{\mu,21}(chR_2)B_{-1/2+ib_3}^{\mu}(chr) - Y_{-1/2+ib_3;j2}^{\mu,22}(chR_2)A_{-1/2+ib_3}^{\mu}(chr),
$$

$$
q_\mu(\beta) = \frac{2}{\pi^2}\frac{c_{22}}{shR_2}ch\pi b_3\left|\Gamma(1/2+\mu+ib_3)\right|^2 \equiv \frac{c_{22}}{shR_2}S_\mu(b_3),
$$

$$
\delta_{kj}(\beta) = v_{k2}^{11}(b_2R_1)v_{j1}^{22}(b_2R_2) - v_{k2}^{12}(b_2R_1)v_{j1}^{21}(b_2R_2), \quad j,k=1,2;
$$

$$
\delta_{\alpha,j1}(\beta) = \chi_{\alpha,11}^{01}(\lambda R_0,b_1(\beta))\chi_{\alpha,j1}^{12}(\lambda R_1,b_1(\beta)) - \chi_{\alpha,11}^{02}(\lambda R_0,b_1(\beta))\chi_{\alpha,j1}^{11}(\lambda R_1,b_1),
$$

$$
a_{\alpha,j}(\beta) = \delta_{\alpha,21}(\beta)\delta_{1j}(\beta) - \delta_{\alpha,11}(\beta)\delta_{2j}(\beta), \quad b_j(\beta) = \left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2}, \quad k_j^2 \ge 0
$$

Інші функції та величини загальноприйняті [3,8].

Наявність спектральної функції $V_{\alpha,\mu}(r,\beta)$, спектральної щільності

$$
\Omega_{\alpha,\mu}(\beta) = \frac{\beta th\pi b_3}{S_\mu(b_3)}\left([\omega_{\alpha,\mu;1}(\beta)]^2 + (th\pi b_3)^2[\omega_{\alpha,\mu;2}(\beta)]^2\right)^{-1}
$$

і вагової функції

$$\sigma(r) = \Theta(r - R_0)\Theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha-1} + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\sigma_2 + \Theta(r - R_2)\sigma_3 shr,$$

дає можливість визначити пряме $H_{\alpha,\mu}$ і обернене $H^{-1}_{\alpha,\mu}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I^+_{22} ГДО $M_{\alpha,\mu}$:

$$H_{\alpha,\mu}\left[g(r)\right] = \int\limits_{R_0}^{\infty} g(r)V_{\alpha,\mu}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \widetilde{g}(\beta), \tag{16}$$

$$H^{-1}_{\alpha,\mu}\left[\widetilde{g}(\beta)\right] = \int\limits_{0}^{\infty} \widetilde{g}(\beta)V_{\alpha,\mu}(r,\beta)\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{17}$$

Тут прийняті позначення:

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{211}c_{22}}\frac{shR_1}{shR_2}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}},\ \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{shR_2},\ \sigma_3 = 1,$$

$$\omega_{\alpha,\mu;j}(\beta) = a_{\alpha,2}(\beta)Y^{\mu,2j}_{-1/2+ib_3;12}(chR_2) - a_{\alpha,1}(\beta)Y^{\mu,2j}_{-1/2+ib_3;22}(chR_2),\ \ j = 1,2.$$

Застосування запровадженого формулами (16)-(17) гібридного інтегрального перетворення базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{\alpha,\mu}$:

$$H_{\alpha,\mu}\left[M_{\alpha,\mu}[g(r)]\right] = -\beta^2\widetilde{g}(\beta) - \sigma_1 R_0^{2\alpha+1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_{\alpha,\mu;1}(R_0,\beta)g_0 - $$
$$-\sum_{i=1}^{3} k_i^2 \int\limits_{R_{i-1}}^{R_i} g_i(r)V_{\alpha,\mu;i}(r,\beta)\sigma_i\varphi_i(r)dr, \tag{18}$$

$$R_3 = \infty.\ \varphi_1 = r^{2\alpha-1},\ \varphi_2 = 1,\ \varphi_3 = shr,\ \ k_i^2 \ge 0,\ i = 1,2$$

Запишемо систему (1) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(B_\alpha - q_1^2\right)u_1(r) \\ \left(\dfrac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)u_2(r) \\ \left(\Lambda_\mu - q_3^2\right)u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

Інтегральний оператор $H_{\alpha,\mu}$ згідно правила (16) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\alpha,\mu}[...] = \left[\int\limits_{R_0}^{R_1} ...V_{\alpha,\mu;1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} ...V_{\alpha,\mu;2}(r,\beta)\sigma_2 dr \quad \int\limits_{R_2}^{\infty} ...V_{\alpha,\mu;1}(r,\beta)\sigma_3 shrdr\right] \tag{20}$$

Нехай $max\left\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\right\} = q_1^2$. Покладемо $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = q_1^2 - q_3^2 \ge 0$. Застосуємо операторну матрицю-рядок (20) до системи (19) за правилом множення матриць. Внаслідок тотожності (18) маємо алгебраїчне рівняння:

$$(\beta^2 + q_1^2)\widetilde{u}(\beta) = \widetilde{g}(\beta) - (\alpha^0_{11})^{-1}\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}V_{\alpha,\mu;1}(R_0,\beta)g_0.$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}(\beta)=\frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}+\frac{V_{\alpha,\mu;1}(R_0,\beta)}{-\alpha_{11}^0(\beta^2+q_1^2)}.\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}g_0. \tag{21}$$

Інтегральний оператор $H_{\alpha,\mu}^{-1}$ згідно правила (17) як обернений до (20) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\alpha,\mu}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\int\limits_0^\infty ...V_{\alpha,\mu;1}(r,\beta)\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta\\ \int\limits_0^\infty ...V_{\alpha,\mu;2}(r,\beta)\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta\\ \int\limits_0^\infty ...V_{\alpha,\mu;3}(r,\beta)\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Застосувавши до матриці-елементу $[\tilde{u}(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (21), операторну матрицю-стовпець (22) за правилом множення матриць, одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\begin{aligned}u_j(r)&=\int\limits_0^\infty\frac{V_{\alpha,\mu;1}(R_0,\beta)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta^2+q_1^2)}V_{\alpha,\mu;j}(r,\beta)\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}g_0+\\&+\sum_{i=1}^3\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\left(\int\limits_0^\infty V_{\alpha,\mu;j}(r,\beta)V_{\alpha,\mu;i}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}\right)g_i(\rho)\sigma_i\varphi_i(\rho)d\rho;\ j=\overline{1,3}.\end{aligned} \tag{23}$$

Порівнюючи розв'язки (13) і (23) в силу єдності, отримуємо формули обчислення невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{\alpha,\mu}$:

$$\int\limits_0^\infty V_{\alpha,\mu;i}(r,\beta)V_{\alpha,\mu;j}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta}{\beta^2+q_1^2}=\frac{1}{\sigma_i}H_{\alpha,\mu;ij}(r,\rho,q);\ i,j=\overline{1,3} \tag{24}$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{V_{\alpha,\mu;1}(R_0,\beta)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta^2+q_1^2)}V_{\alpha,\mu;j}(r,\beta)\Omega_{\alpha,\mu}(\beta)d\beta=\frac{1}{\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}}W_{\alpha,\mu;1j}(r,q),\ j=\overline{1,3}, \tag{25}$$

У рівностях (24)-(25) Функції Гріна $W_{\alpha,\mu;1j}(r,q)$ визначені формулами (11), а функції впливу $H_{\alpha,\mu;ij}(r,\rho,q)$ - формулами (12), де $q=(q_1,q_2,q_3)$. Оскільки вони не залежать від нерівностей $\left(q_1^2-q_j^2\right)\geq 0$, то можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q^2>0$.

Підсумком викладеного вище є твердження.

Теорема: Якщо вектор-функція $g(r)$ належить області визначення оператора $M_{\alpha,\mu}$, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3) і має місце умова (10) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (24), (25) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів від власних елементів ГДО $M_{\alpha,\mu}$, визначеного рівністю (14).

Зауваження 1: Праві та ліві частини рівностей (24),(25) неперервно залежать від даних і параметрів крайової задачі (1)-(3), що дозволяє виділити із загальних структур безпосередньо будь-який частковий випадок (в межах даної моделі).

Зауваження 2: Результати даної роботи поширюються на випадок неоднорідності умов спряження.

Зауваження 3: При $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q^2 > 0$ ми звужуємо сім'ю поліпараметричних невласних інтегралів.

Висновки

Результати даної роботи можуть бути використані для обчислення невласних інтегралів, які виникають при виході на стаціонарний режим композитних елементів конструкцій, які працюють під дією стрибкоподібного навантаження.

Comparing the solutions, built on the polar axis with two coupling points for the separate system of Bessel, Fourier and Legendre differential equations by the Cauchy function method and the method of the hybrid integral transformation, the family of polyparametric non-personal integrals from the general and special Bessel functions and specially joint Legendre functions was calculated.

Література

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Наука,1971.– 1108 с.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев И.О. Интегралы и ряды. Специальные функции.– М.: Наука, 1983.–798 с.
3. Ленюк М.П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том IV.– Чернівці: Прут, 2003.–312 с.
4. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва.– Чернівці: Прут, 2002.– 280 с.
5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гибридные интегральные преобразования Лежандра.– Львов, 1989 – 60 с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т прикладных проблем механики и математики; 89.0).
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 328с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення. Наука, 1965. – 328 с.
8. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва) 1-го роду – Лежандра 2-го роду – Ганкеля 2-го роду//вісник Тернопільського державного університету. – Тернопіль: ТДТУ, 2004. – Т.9, №4. – с. 158-167.

Одержано 24.06.2005 р.