УДК 517.91; 532.2

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; Н. Скакальська[2]
[1]*Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича*
[2]*Кременецький ОГПІ ім. Тараса Шевченка*

УЗАГАЛЬНЕНІ ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) 1-ГО РОДУ – ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Побудовано узагальнені гібридні інтегральні перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва) 1-го роду – Лежандра 2-го роду із спектральним параметром на сегменті [0,R_2] з однією точкою спряження r=R_1<R_2 методом дельта-подібної послідовності в припущенні, що спектральний параметр бере участь і в умовах спряження, і в крайовій умові.

Постановка завдання. Широкий клас задач математичної фізики неоднорідних структур приводить до диференціальних рівнянь стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності та пружності. Їх розв’язання вимагає не тільки модифікації існуючого математичного апарату, а й створення нових методів. Зокрема, виникла необхідність у побудові таких інтегральних перетворень, які давали б можливість алгебраїзувати лінійні диференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами.

Аналіз досліджень і публікацій. Гібридні інтегральні перетворення типу (Конторовича-Лєбєдєва) 1-го роду – Лежандра 2-го роду запроваджено в роботі [1]. Вони використовуються для одержання інтегрального зображення розв’язку відповідних сингулярних задач математичної фізики неоднорідного середовища в припущенні, що межі (спряження і крайові) жорсткі по відношенню до відбиття хвиль. Але в задачах гідродинаміки, теплопровідності, дифузійних процесах межа області є, як правило, м’якою по відношенню до відбиття хвиль. Математично це означає, що в умовах спряження і крайових умовах присутня перша похідна по часовій змінній в задачах квазістатики і друга похідна по часовій змінній в задачах динаміки. Це приводить до появи в умовах спряження і крайовій умові спектрального параметра.

Методика, запропонована в роботі [1], дозволяє узагальнити результати на випадок наявності в крайовій умові і умові спряження спектрального параметра.

Постановка задачі. Побудуємо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_1 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2); 0 < R_1 < R_2 < \infty\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathrm{M}_{\alpha,(\mu)} = a_1^2 \Theta(r)\Theta(R_1 - r)B_\alpha + a_2^2 \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\Lambda_{(\mu)}.$$

Тут $\Theta(x)$ – одинична функція Хевісайда, $a_j^2 > 0, (\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$,

$$B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2; \alpha \ge -\tfrac{1}{2}, \lambda \in (0;\infty),$$

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr}\right), \tag{1}$$

B_α - диференціальний оператор Бесселя з виродженням при старшій похідній [1], $\Lambda_{(\mu)}$- узагальнений диференціальний оператор Лежандра 2-го порядку [2].

Оскільки особливою точкою ГДО $\mathrm{M}_{\alpha,(\mu)}$ є одна точка r=0, то спектр його неперервний, а спектральна вектор-функція - дійсна функція аргументу r та спектрального параметра $\beta \in (0;\infty)$.

Означення: Областю визначення ГДО $\mathrm{M}_{\alpha,(\mu)}$ назвемо множину вектор-функцій $\{g(r)\}=\{g(r)=\{g_1(r);g_2(r)\}\}$, які задовольняють умови:

1) вектор-функція $f(r)=\mathrm{M}_{\alpha,(\mu)}[g(r)]\equiv\{B_\alpha[g_1(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\}$ неперервна на кожній компактній множині $I_1^*\subset I_1$;

2) компоненти $g_j(r)$ вектор-функції $g(r)$ в точці спряження пов'язані співвідношеннями:

$$\left.\left\{\left[\tilde{\alpha}_{j1}^1\frac{\partial}{\partial r}+\tilde{\beta}_{j1}^1\right]g_1(r)-\left[\tilde{\alpha}_{j2}^1\frac{\partial}{\partial r}+\tilde{\beta}_{j2}^1\right]g_2(r)\right\}\right|_{r=R_1}=0,\ j=1{,}2\ ; \tag{2}$$

3) справджуються крайові умови

$$\lim_{r\to 0}\frac{d}{dr}\left[r^\alpha g_1(r)\right]=0,\left.\left(\tilde{\alpha}_{22}^2 \,{}^{d}\!/_{dr}+\tilde{\beta}_{22}^2\right)g_2(r)\right|_{r=R_2}=0(g_{20}=const)\,. \tag{3}$$

Числові коефіцієнти, які беруть участь у рівностях (2), (3) задовольняють умови:

$$\tilde{\alpha}_{jm}^k=\alpha_{jm}^k-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\delta_{jm}^k,\tilde{\beta}_{jm}^k=\beta_{jm}^k-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\gamma_{jm}^k,\ ,\ \left|\tilde{\alpha}_{22}^2\right|+\left|\tilde{\beta}_{22}^2\right|\neq 0,\ j=1{,}2,$$

де $\beta\in(0,\infty)$ - спектральний параметр, а $\gamma^2\geq 0$.

Випишемо числові матриці

$$A_{j1,k}=\begin{bmatrix}\alpha_{1j}^k & \beta_{1j}^k\\ \alpha_{2j}^k & \beta_{2j}^k\end{bmatrix},\ A_{j2,k}=\begin{bmatrix}\delta_{1j}^k & \gamma_{1j}^k\\ \delta_{2j}^k & \gamma_{2j}^k\end{bmatrix},\ k=1.$$

Визначимо числа $c_{j1,k}=-\det A_{j1,k}$, $c_{j2,k}=-\det A_{j2,k}$, $j=1,2,\ k=1$

$$c_{11,12}^{12,k}=\alpha_{11}^k\gamma_{21}^k-\alpha_{21}^k\gamma_{11}^k,\ c_{11,12}^{21,k}=\beta_{11}^k\delta_{21}^k-\beta_{21}^k\delta_{11}^k\ ,$$

$$c_{21,22}^{12,k}=\alpha_{12}^k\gamma_{22}^k-\alpha_{22}^k\gamma_{12}^k,\ c_{21,22}^{21,k}=\beta_{12}^k\delta_{22}^k-\beta_{22}^k\delta_{12}^k\,.$$

Будемо вимагати виконання співвідношень

$$c_{11,1}\cdot c_{21,1}>0;\ c_{j2,1}=0;\ j=1,2;\ c_{11,12}^{12,1}=c_{11,12}^{21,1};\ \ c_{21,22}^{12,1}=c_{21,22}^{21,1}\,.$$

Компоненти $V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)$ спектральної вектор-функції

$$V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)=\left\{V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta);V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\right\}$$

ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$ повинні бути розв'язком відповідної сингулярної спектральної задачі Штурма-Ліувілля: на множині I_1 побудувати обмежений розв'язок сепаратної системи

$$\left(B_\alpha+b_1^2\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)\ =0,\mathrm{r}\in\left(0,\mathrm{R}_1\right)$$

$$\left(\Lambda_{(\alpha)\mu}+b_2^2\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\ =0,\mathrm{r}\in\left(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\right) \tag{4}$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^\alpha V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)\right]=0,\left.\left(\tilde{\alpha}_{22}^2 \,{}^{d}\!/_{dr}+\tilde{\beta}_{22}^2\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\right|_{r=R_2}=0 \tag{5}$$

та умовами спряження

$$\left.\left\{\left[\tilde{\alpha}_{j1}^1\frac{\partial}{\partial r}+\tilde{\beta}_{j1}^1\right]V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)-\left[\tilde{\alpha}_{j2}^1\frac{\partial}{\partial r}+\tilde{\beta}_{j2}^1\right]V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\right\}\right|_{r=R_1}=0,\ j=1{,}2\,. \tag{6}$$

У рівностях системи (4) $b_j^2 = \overline{a}_j^2\left(\beta^2 + k_j^2\right), k_j^2 \geq 0, \beta \in (0, \infty)$.

Оскільки для першого рівняння системи (4) фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $C_\alpha(\lambda r, b_1)$ та $D_\alpha(\lambda r, b_1)$ [2], а для другого рівняння системи (4) — узагальнені приєднані функції Лежандра $A^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr)$ [3], то розв'язок крайової задачі (4)-(6) шукаємо за правилами [4]

$$V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) = A_1 C_\alpha(\lambda r, b_1) + B_1 D_\alpha(\lambda r, b_1)$$

$$V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) = A_2 A^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr) + B_2 B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr). \tag{7}$$

Визначимо функції:

$$X^{11}_{\alpha;j1}(R_1, b_1) = \left(\tilde{\alpha}^1_{j1} \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^1_{j1}\right) C_\alpha(\lambda r, b_1)\Big|_{r=R_1};$$

$$X^{12}_{\alpha;j1}(R_1, b_1) = \left(\tilde{\alpha}^1_{j1} \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^1_{j1}\right) D_\alpha(\lambda r, b_1)\Big|_{r=R_1};$$

$$\mathrm{Y}^{(\mu);m1}_{-1/2+ib_2;jk}(chR_1) = \left(\tilde{\alpha}^m_{jk} \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^m_{jk}\right) A^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr)\Big|_{r=R_1};$$

$$\mathrm{Y}^{(\mu);m2}_{-1/2+ib_2;jk}(chR_1) = \left(\tilde{\alpha}^m_{jk} \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^m_{jk}\right) B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr)\Big|_{r=R_1};\ j = 1,2. \tag{8}$$

Умови (5),(6) для визначення сталих A_j та B_j (j=1,2) дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$X^{11}_{\alpha;j1}(\lambda R_1, b_1) A_1 + X^{12}_{\alpha;j1}(\lambda R_1, b_1) B_1 - \mathrm{Y}^{(\mu);11}_{-1/2+ib_2;j2}(chR_1) \mathrm{A}_2 - \mathrm{Y}^{(\mu);12}_{-1/2+ib_2;j2}(chR_1) B_2 = 0;\ j = 1,2$$

$$\mathrm{Y}^{(\mu);21}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2) A_2 + \mathrm{Y}^{(\mu);22}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2) B_2 = 0. \tag{9}$$

Якщо покласти $A_2 = -A_0 \mathrm{Y}^{(\mu);22}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2)$; $B_2 = A_0 \mathrm{Y}^{(\mu);21}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2)$, то третє рівняння системи (10) тотожно задовольняється, а з перших двох рівнянь при $A_0 = c_{11,1}\left(\pi \lambda^{2\alpha} R_1^{2\alpha=1}\right)^{-1} sh\pi b_1(\beta)$ знаходимо:

$$\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_2;j2}(chR_1, chR_2) = Y^{(\mu);11}_{-1/2+ib_2;j2}(chR_1) Y^{(\mu);22}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2) - Y^{(\mu);12}_{-1/2+ib_2;j2}(chR_1) Y^{(\mu);21}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2),$$

$$A_1 = -\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta),\ B_1 = \omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta), \tag{10}$$

де $\omega^{(\beta)}_{\alpha,(\mu);j} = X^{1j}_{\alpha;11}(\lambda R_1, \overline{b}_1) \delta^{(\mu)}_{-1/2+i\overline{b}_2;22}(chR_1, chR_2) - X^{1j}_{\alpha;21}(\lambda R_1, \overline{b}_1) \delta^{(\mu)}_{-1/2+i\overline{b}_2;12}(chR_1, chR_2),\ j = 1,2$.

У результаті підстановки одержаних значень A_j, B_j в рівності (7) маємо:

$$V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) = \omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) D_\alpha(\lambda r, b_1) - \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) C_\alpha(\lambda r, b_1)$$

$$\begin{aligned} V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) &= c_{11,1}\left(\pi \lambda^{2\alpha} R_1^{2\alpha+1}\right)^{-1} sh\pi b_1(\beta) f^{(\mu);2}_{-1/2+ib_2;22}(chR_1, chr) \equiv \\ &\equiv c_{11}\left(\pi \lambda^{2\alpha} R_1^{2\alpha+1}\right)^{-1} sh\pi b_1\left[Y^{(\mu);21}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2) B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr) - Y^{(\mu);22}_{-1/2+ib_2;22}(chR_2) A^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(chr)\right] \equiv . \end{aligned} \tag{11}$$

Визначимо функції:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2};\quad \sigma_2 = \frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} \frac{R_1^{2\alpha+1}}{shR_1} \frac{1}{a_2^2};$$

$$V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta) = \Theta(r)\Theta(R_1 - r) V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r) V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta);$$

$$\sigma(r) = \Theta(r)\Theta(R_1 - r)\sigma_1(r) r^{2\alpha-1} + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\sigma_2 shr\,; \qquad (12)$$

$$\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) = \pi\beta\lambda^{2\alpha}\left(sh\pi b_1\right)^{-1}\left(\left[\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)\right]^2\right)^{-1}.$$

Твердження справджується.

Теорема (про інтегральне зображення):

якщо вектор-функція

$$f(r) = \left[r^{\alpha-1/2}\Theta(r)\Theta(R_1 - r) + \sqrt{shr}\,\Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0, R_2)$, то для будь-якого $r \in I_1$ справджується інтегральне зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)\int_0^{R_2} g(\rho)V_{\alpha,(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta\,. \qquad (13)$$

Доведення. Скористаємося методом дельта-подібної послідовності. За дельта-подібну послідовність візьмемо ядро Коші: фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для системи рівнянь параболічного типу, породженої ГДО $\mathrm{M}_{\alpha,(\mu)}$.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого в області $D = \{(t,r): t \in (0,\infty), r \in I_1 = (0,R_1)\cup(R_1,R_2); 0 < R_1 < R_2 < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного типу [6]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_\alpha[u_1] = 0, r \in (0, R_1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2] = 0, r \in (R_1, R_{21}) \qquad (14)$$

за початковими умовами

$$u_1\big|_{t=0} = g_1(r), r \in (0, R_1); \quad u_2\big|_{t=0} = g_2(r), r \in (R_1, R_2), \qquad (15)$$

крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^\alpha u_1\right] = 0, \quad \left[\left(\alpha_{22}^2 + \delta_{22}^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^2 + \gamma_{22}^2\frac{\partial}{\partial t}\right]u_2\Bigg|_{r=R_2} = 0 \qquad (16)$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^1 + \delta_{j1}^1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1 + \gamma_{j1}^1\frac{\partial}{\partial t}\right]u_1(t,r) - \left[\left(\alpha_{j2}^1 + \delta_{j2}^1\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1 + \gamma_{j2}^1\frac{\partial}{\partial t}\right]u_2(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_1} = \qquad (17)$$

$$= 0,\ j = 1,2.$$

Припустимо, шукана вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом щодо t [5]. У зображенні за Лапласом задачі (14)-(17) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_1 розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}&\left(B_{\nu_1,\alpha} - \lambda^2\right)u_1^*(p,r) = -\overline{g}_1(r), r \in (0, R_1)\\&\left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = -\overline{g}_2(r), r \in (R_1, R_2)\end{aligned} \qquad (18)$$

за крайовими умовами

$$\left.\left(\bar{\alpha}_{22}^{2}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{22}^{2}\right)u_{2}^{*}\right|_{r=R_{2}}=\omega_{2} \quad , \quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{\alpha}u_{1}^{*}\right]=0 \tag{19}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^{1}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j1}^{1}\right)u_{1}^{*}(r)-\left(\bar{\alpha}_{j2}^{1}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j2}^{1}\right)u_{2}^{*}(r)\right]\right|_{r=R_{1}}=\omega_{j1}-\omega_{j2}, j=1,2. \tag{20}$$

Тут прийняті позначення:

$$\bar{\alpha}_{jm}^{k}=\alpha_{jm}^{k}+p\delta_{jm}^{k}, \bar{\beta}_{jm}^{k}=\beta_{jm}^{k}+p\gamma_{jm}^{k} \; c_{j1}^{*}(p)=\bar{\alpha}_{2j}^{1}\bar{\beta}_{1j}^{1}-\bar{\alpha}_{1j}^{1}\bar{\beta}_{2j}^{1}=c_{j1,1}$$

$$\bar{g}_{1}(r)=a_{1}^{-2}r^{-2}g_{1}(r), \bar{g}_{2}(r)=a_{2}^{-2}g_{2}(r), q_{j}=a_{j}^{-1}\left(p+\gamma_{j}^{2}\right)^{1/2}, \ \mathrm{Re}\, q_{j}>0;$$

$$B_{\nu_{1},\alpha}=d^{2}/dr^{2}+\frac{(2\alpha+1)}{r}d/dr+\frac{\nu_{1}^{2}-\alpha^{2}}{r^{2}}, \nu_{1}\equiv q_{1}, \nu_{2}=-1/2+q_{2}; u^{*}(p,r)=\int_{0}^{\infty}u(t,r)e^{-pt}dt.$$

$$\omega_{jm}=\delta_{jm}^{1}g_{m}'(R_{m})+\gamma_{jm}^{1}g_{m}(R_{m}), m=1,2, j=1,2$$

$$\omega_{2}=\delta_{22}^{2}g_{2}'(R_{2})+\gamma_{22}^{2}g_{2}(R_{2}).$$

В подальшому вважатимемо, що $\omega_{j1}=0, \omega_{j2}=0, \omega_{2}=0$, в протилежному випадку покладемо $g_{1}(r)=\varphi_{1}(r)+a_{1}r, g_{2}(r)=\varphi_{2}(r)+a_{2}r+b_{2}$ і і виберемо a_{1}, a_{2}, b_{2} так, щоб умови задовольнялися. Це завжди можливо зробити.

Розв'язок крайової задачі (18)-(20) побудуємо методом функцій Коші [4].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння $\left(B_{\nu,\alpha}-q^{2}\right)u=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{\nu,\alpha}(qr)$ та $K_{\nu,\alpha}(qr)$ [1], а для рівняння $\left(\Lambda_{(\mu)}-q^{2}\right)u=0$ — узагальнені функції Лежандра $P_{-1/2+q}^{(\mu)}(chr)$ та $Z_{-1/2+q}^{(\mu)}(chr)$ [3,6].

За відомою фундаментальною системою розв'язків розв'язок крайової задачі (18)-(20) відшукуємо за правилами [4].

$$u_{1}^{*}(p,r)=A_{1}I_{\nu_{1},\alpha}(\lambda r)+\int_{0}^{R_{1}}E_{1}^{*}(p,r,\rho)\bar{g}_{1}(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho;$$

$$u_{2}^{*}(p,r)=A_{2}P_{\nu_{2}}^{(\mu)}(chr)+B_{2}Z_{\nu_{2}}^{(\mu)}(chr)+\int_{R_{1}}^{R_{2}}E_{2}^{*}(p,r,\rho)\bar{g}_{2}(\rho)sh\rho d\rho. \tag{21}$$

У рівностях (21) беруть участь функції Коші [4]:

$$E_{1}^{*}=\frac{\lambda^{2\alpha}}{U_{\nu_{1},\alpha;11}^{11}(\lambda R_{1})}\begin{cases}I_{\nu_{1};\alpha}(\lambda r)\Psi_{\nu_{1};\alpha}^{1*}(\lambda R_{1},\lambda\rho), 0<r<\rho<R_{1}\\ I_{\nu_{1};\alpha}(\lambda\rho)\Psi_{\nu_{1};\alpha}^{1*}(\lambda R_{1},\lambda r), 0<\rho<r<R_{1}\end{cases};$$

$$E_{2}^{*}=\frac{B_{(\mu)}(q_{2})}{\Delta_{\nu_{2};12}^{(\mu)}(chR_{1},chR_{2})}\begin{cases}F_{\nu_{2};12}^{(\mu);1}(chR_{1},chr)F_{\nu_{2};22}^{(\mu);2}(chR_{2},ch\rho), R_{1}<r<\rho<R_{2}\\ F_{\nu_{2};12}^{(\mu);1}(chR_{1},ch\rho)F_{\nu_{2};22}^{(\mu);2}(chR_{2},chr), R_{1}<\rho<r<R_{2}\end{cases}. \tag{22}$$

У формулах (22), (23) прийняті позначення:

$$\Psi_{\nu_{1},\alpha;11}^{1*}(\lambda R_{1},\lambda x)=U_{\nu_{1},\alpha;11}^{11}(\lambda R_{1})K_{\nu_{1},\alpha}(\lambda x)-U_{\nu_{1},\alpha;11}^{12}(\lambda R_{1})I_{\nu_{1},\alpha}(\lambda x);$$

$$U_{\nu,\alpha;j1}^{11}(\lambda R_1)=\left(\overline{\alpha}_{j1}^1 \, {}^{d}\!/_{dr}+\overline{\beta}_{j1}^1\right)I_{\nu_1,\alpha}(\lambda r)\Big|_{r=R_1}\equiv\left(\overline{\alpha}_1^1\frac{\nu_1-\alpha}{R_1}+\overline{\beta}_{j1}^1\right)I_{\nu_1,\alpha}(\lambda R_1)+\overline{\alpha}_{j1}^1\lambda^2R_1I_{1\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_1);$$

$$U_{\nu,\alpha;j1}^{12}(\lambda R_1)=\left(\overline{\alpha}_{j1}^1 \, {}^{d}\!/_{dr}+\overline{\beta}_{j1}^1\right)K_{\nu_1,\alpha}(\lambda r)\Big|_{r=R_1}\equiv\left(\overline{\alpha}_1^1\frac{\nu_1-\alpha}{R_1}+\overline{\beta}_{j1}^1\right)K_{\nu_1,\alpha}(\lambda R_1)+\overline{\alpha}_{j1}^1\lambda^2R_1K_{1\nu+1,\alpha+1}(\lambda R_1);$$

$$\Delta_{\nu_2;12}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)=Z_{\nu_2;j2}^{(\mu);11}(chR_1)Z_{\nu_2;22}^{(\mu);22}(chR_2)-Z_{\nu_2;j2}^{(\mu);12}(chR_1)Z_{\nu_2;22}^{(\mu);21}(chR_2);$$

$$F_{\nu_2;1k}^{(\mu);m}(chR_m,chx)=Z_{\nu_2;jk}^{(\mu);m1}(chR_m)L_{\nu_2}^{(\mu)}(chx)-Z_{\nu_2;jk}^{(\mu);m2}(chR_m)P_{\nu_2}^{(\mu)}(chx);$$

$$Z_{\nu_2;jk}^{(\mu);m1}(chR_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^1 \, {}^{d}\!/_{dr}+\overline{\beta}_{jk}^1\right)P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m};$$

$$Z_{\nu_2;jk}^{(\mu);m2}(chR_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^1 \, {}^{d}\!/_{dr}+\overline{\beta}_{jk}^1\right)L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m};$$

$$B_{(\mu)}(q_2)=\tfrac{1}{2}\pi 2^{\mu_1-\mu_2}\frac{\Gamma\left(\tfrac12+q_2-\nu^+\right)\Gamma\left(\tfrac12+q_2-\nu^-\right)}{\Gamma\left(\tfrac12+q_2+\nu^+\right)\Gamma\left(\tfrac12+q_2+\nu^+\right)},\nu^{\pm}=\tfrac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2).$$

Умови (20), (19) для визначення сталих A_1, A_2 та B_2 дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}&A_1U_{\nu_1,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1)-A_2Z_{\nu_2;12}^{(\mu);11}(chR_1)-B_2Z_{\nu_2;12}^{(\mu);12}(chR_1)=0;\\&A_1U_{\nu_1,\alpha;21}^{11}(\lambda R_1)-A_2Z_{\nu_2;22}^{(\mu);11}(chR_1)-B_2Z_{\nu_2;22}^{(\mu);12}(chR_1)=G_{12}^*;\\&A_2Z_{\nu_2;12}^{(\mu);21}(chR_2)+B_2Z_{\nu_2;22}^{(\mu);22}(chR_2)=0.\end{aligned}\tag{23}$$

У системі (23) бере участь функція

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\nu_1,\alpha}(\lambda\rho)}{U_{\nu_1,\alpha;11}^{11}(\lambda R_1)}\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho-\frac{c_{21}^*(p)}{shR_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F_{\nu_2;22}^{(\mu);2}(chR_2,ch\rho)}{\Delta_{\nu_2;12}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)}\overline{g}_2(\rho)sh\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (18)–(20): для $p=\sigma+i\tau$ з $\operatorname{Re}p=\sigma\ge\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа та $Imp=\tau\in(-\infty;+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (23), відмінний від нуля:

$$\Delta_{\alpha,\alpha\mu)}^*(p)\equiv U_{\nu_1,\alpha;21}^{11}(\lambda R_1)\Delta_{\nu_2;12}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)-U_{\nu_1,\alpha;11}^{11}(\lambda_1R_1)\Delta_{\nu_2;22}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\ne 0.\tag{24}$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (23) функції впливу:

$$\mathrm{H}_{\alpha,(\mu);11}^*(p,r,\rho)=\frac{\lambda_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\alpha,(\mu)}^*(p)}\begin{cases}I_{\nu_1,\alpha}(\lambda r)[\Delta_{\nu_2,12}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\Psi_{\nu_1,\alpha;21}^{1*}(\lambda R_1,\lambda\rho)-\\ I_{\nu_1,\alpha}(\lambda\rho)[\Delta_{\nu_2,12}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\Psi_{\nu_1;21}^{1*}(\lambda R_1,\lambda r)-\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&-\Delta_{\nu_2;22}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\Psi_{\nu_2,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1,\lambda_1\rho)],0<r<\rho<R_1\\&-\Delta_{\nu_2;22}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\Psi_{\nu_2,\alpha;11}^{1*}(\lambda R_1,\lambda_1 r)],0<\rho<r<R_1\end{aligned};$$

.

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_{\alpha,(\mu);12}^*(p,r,\rho)=-\frac{c_{21}^*(p)}{shR_1}\frac{I_{\nu_1,\alpha}(\lambda_1r)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}^*(p)}F_{\nu_2;22}^{(\mu),2}(chR_2,ch\rho);\\&\mathrm{H}_{\alpha,(\mu);21}^*(p,r,\rho)=-\frac{c_{11}^*(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{I_{\nu_1,\alpha}(\lambda_1\rho)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}^*(p)}F_{\nu_2;22}^{(\mu),2}(chR_2,chr);\end{aligned}\tag{25}$$

$$\mathrm{H}^*_{\alpha(\mu);22}(p,r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta^*_{\alpha,(\mu)}(p)}\begin{cases}F^{(\mu);2}_{\nu_2;22}(chR_2,ch\rho)[U^{11}_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_1)F^{(\mu);1}_{\nu_2;12}(chR_1,chr)-\\ F^{(\mu);2}_{\nu_2;22}(chR_2,chr)[U^{11}_{\nu_1,\alpha;21}(\lambda R_1)F^{(\mu);1}_{\nu_2;12}(chR_1,ch\rho)-\end{cases}$$
$$-U^{11}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1)F^{(\mu);1}_{\nu_2;22}(chR_1,chr)],R_1<r<\rho<R_2$$
$$-U^{11}_{\nu_1,\alpha;11}(\lambda R_1)F^{(\mu);1}_{\nu_2;22}(chR_1,ch\rho)],R_1<\rho<r<R_2.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (23) і підстановки одержаних значень A_1, A_2, B_2 у формули (21) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (18)-(20):

$$u_j^*(p,r)=\int_0^{R_1}\mathrm{H}^*_{(\alpha);j1}(p,r,\rho)\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}^*_{(\alpha);j2}(p,r,\rho)\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho;\ j=1,2. \quad (26)$$

Внаслідок властивостей модифікованих функцій Бесселя [7] та узагальнених приєднаних функцій Лежандра [6] особливими точками функцій впливу $\mathrm{H}^*_{\alpha(\mu);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2, p=-\gamma_2^2$ та $p=\infty$. Оскільки $\gamma_1^2\ge 0,\gamma_2^2\ge 0$, то або $(\gamma_2^2-\gamma_1^2)\equiv k_1^2\ge 0$ або $(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\equiv k_2^2\ge 0$. Покладемо $q_j=ib_j(\beta)\equiv ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0, j=1,2$ (при $(\gamma_2^2-\gamma_1^2)>0$ $k_2^2=0$, а при $(\gamma_1^2-\gamma_2^2)>0$ $k_1^2=0$).

Припустимо, що $(\gamma_2^2-\gamma_1^2)\ge 0$. Тоді при $p=-(\beta^2+\gamma_2^2)$ ($q_1=ia_1^{-1}(\beta^2+\gamma_2^2-\gamma_1^2)^{1/2}$, $q_2=ia_2^{-1}\beta,\beta\in(0,\infty)$) внаслідок леми Жордана й теореми Коші [5] отримуємо формули обчислення оригіналу функцій впливу

$$\mathrm{H}_{\alpha,(\mu);jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_2^2)t}\,\mathrm{Im}\{\mathrm{H}^*_{\alpha,(\mu);jk}(-(\beta^2+\gamma_2^2),r,\rho)\}\beta d\beta;\ j,k=1,2. \quad (27)$$

На основі формул обходу для модифікованих функцій [6] маємо співвідношення

$$U^{11}_{\nu_1,\alpha;j1}(\lambda R_1)=\mathrm{X}^{11}_{\alpha;j1}(\lambda R_1,b_1)-i\mathrm{X}^{12}_{\alpha;j1}(\lambda R_1,b_1),\nu_1=ib_1,$$

$$\Delta^{(\mu)}_{\nu_2;j2}(chR_1,chR_2)=-z(b_2)\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_2;j2}(chR_1,chR_2),\ j=1,2,\nu_2^*=-1/2+ib_2$$

$$\Delta^*_{\alpha,(\mu)}(-(\beta^2+\gamma_2^2))=z[\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)-i\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)].$$

Виконавши в формулі (27) зазначені операції, одержуємо, що

$$\mathrm{H}_{\alpha,(\mu);jk}(t,r)=\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)V_{\alpha,(\mu);k}(\rho,\beta)\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2;\ j,k=1,2. \quad (28)$$

Перейшовши в формулі (27) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі (14)-(17):

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)\left[\int_0^{R_1}g_1(\rho)V_{\alpha,(\mu),1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho+\right.$$
$$\left.+\int_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V_{\alpha,(\mu),2}(\rho,\beta)\sigma_2 sh\rho d\rho\right]d\beta;\ j=1,2. \quad (29)$$

Звідси внаслідок початкових умов (15) отримуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,(\mu),1}(r,\beta)\int_0^{R_1}g_1(\rho)V_{\alpha,(\mu),1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta;r\in(0,R_1) \quad (30)$$

$$g_2(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,(\mu),2}(r,\beta)\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{\alpha,(\mu),2}(\rho,\beta)\sigma_2\rho^{2\alpha-1}d\rho\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta; r\in(R_1,R_2)=0. \quad (31)$$

Оскільки рівності (30), (31) - еквівалентні рівності (13), то доведення теореми завершено.

Інтегральне зображення (13) визначає пряме $H_{\alpha,(\mu)}$ і обернене $H^{-1}_{\alpha,(\mu)}$ узагальнене гібридне інтегральне перетворення типу (Конторовича–Лєбєдєва) 1-го роду – Лежандра 2-го роду:

$$H_{\alpha,(\mu)}[g(r)]=\int_0^{R_2} g(r)V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta); \quad (32)$$

$$H^{-1}_{\alpha,(\mu)}[\tilde{g}(\beta)]=\tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta\equiv g(r). \quad (33)$$

Теорема (про основну тотожність). Якщо вектор-функція g(r) належить області визначення ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$, то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$:

$$H_{\alpha,(\mu)}[M_{\alpha,(\mu)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)+a_2^2\sigma_2 shR_2(\tilde{\alpha}_{22}^2)^{-1}V_{\alpha,(\mu);2}(R_2,\beta)\left(\tilde{\alpha}_{22}^2\frac{dg_2}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^2 g_2\right)\Bigg|_{r=R_2}-$$
$$-k_1^2\int_0^{R_1} g_1(r)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr-k_2^2\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\sigma_2 shrdr. \quad (34)$$

Доведення: Тотожність (34) одержується, якщо два рази проінтегрувати частинами під знаком інтегралів й скористатися властивостями вектор-функцій $g(r), V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)$ структурою σ_1, σ_2 та базовою тотожністю

$$\left(\frac{dg_1}{dr}V_{\alpha,(\mu);1}-g_1\, {}^{d}\!/\!_{dr}V_{\alpha,(\mu);1}\right)\Bigg|_{r=R_1}=\left(\frac{dg_2}{dr}V_{\alpha,(\mu);2}-g_2\, {}^{d}\!/\!_{dr}V_{\alpha,(\mu);2}\right)\Bigg|_{r=R_1}\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}},$$

яка одержується безпосередньо з умов спряження.

Зауваження: Якщо вектор-функція g(r) кусково-однорідна на множині I_1, то в рівностях (13), (32), (33) потрібно g(r) замінити на $2^{-1}(g(r-0)+g(r+0))$.

Висновки. Наявність тотожності (34) дозволяє будувати алгебру ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$, що розширює клас сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур, точний розв'я

зок яких подається в аналітичній формі алгоритмічного характеру.

By method like delta sequence on segment [0,R$_2$] with one point of collision the integral transformation of Kontorovich-Lebedev-I – Legandr-II with spectral parameter under the collision edged conditions are introduced.

Література

1. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя,Лежандра). Ч.І.– Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.
2. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Київ, 1996. – 64с. – (Препринт /НАН України. Ін-т математики; 96.16).
3. Конет І.М., Ленюк М.П., Нікітіна О.М. Деякі узагальнення інтегральних перетворень типу Мелера-Фока. –Київ, 1998.–56с.– (Препринт /НАН України. Ін-т математики; 98.6).
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 486 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 715 с.
6. Вирченко Н.А., Федотова И.А.Обобщенные функции Лежандра и их применения.- Киев, 1998.-158 с.

7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.:наука,1971. – 1108 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1972. –735 с.

Одержано 24.06.2005 р.