МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 519.217.1

О.Коринківська; М.Приймак, докт.техн.наук; М.Савчук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВИТОК МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНО ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ І ЗАВАД

Наведено приклади стохастично періодичних сигналів та систем, проведено огляд основних класів випадкових процесів, які можуть бути використані як їх моделі. Це періодичні та періодично корельовані процеси; періодичні білі шуми, які є однією із головних причин виникнення стохастичної періодичності в рамках лінійного випадкового процесу; дискретні періодичні шуми; марківські періодичні процеси і ланцюги; умовно періодичні процеси із змінним періодом. Вказано на переваги та недоліки перелічених моделей, існуючі методи їх статистичного аналізу, прогнозу, імітаційного моделювання. Для деяких процесів, зокрема, умовно періодичних процесів, наголошено на перспективних напрямках їх дослідження аналітичними та статистичними методами.

Серед періодичних сигналів оточуючого нас світу чільне місце займають стохастично періодичні (іноді говорять ритмічні, циклічні) сигнали (явища, поля, системи). Під цим розуміється, що сигнали мають стохастичний (тобто зумовлений випадковістю) характер, але при цьому їх певні ймовірнісні характеристики повторюються, змінюються періодично. Приклади стохастично періодичних сигналів можна навести як із повсякденного життя, так із багатьох областей науки і техніки.

Стохастично періодично із періодом $T = 24$ год. змінюється температура навколишнього середовища, освітленість, причому для цих метеофакторів, крім добової періодичності, має місце також сезонна (річна) періодичність.

Для більшості систем масового обслуговування стохастично періодичними є їх вхідні потоки заявок (вимог, викликів). Це, зокрема, виклики на АТС, швидку допомогу, інформаційні потоки в інтернет-мережах, потоки автомобільного транспорту, інтенсивність злетів і посадок літаків в аеропортах. Стохастично періодичними є навантаження енергосистем, частота в електромережах, графіки газо-, водоспоживання.

До стохастичних належать багато шумоподібних сигналів. В електро- і радіостанціях – це дробовий шум електронних приладів в ненасиченому режимі, коли середній струм змінюється періодично; магнітні шуми феромагнетиків при їх циклічному перемагнічуванні; переполяризація діелектриків. В акустиці – віброакустичні шуми багатьох машин, механізмів; шуми кавітації гребних гвинтів кораблів і підводних човнів; акустичні шумові сигнали, що виникають при циклічних навантаженнях конструкційних матеріалів.

Ритмічно пульсує випромінювання зірок, всередині яких відбуваються циклічні ядерні реакції. Стохастична періодичність спостерігається також і для сонячної активності, яку характеризують числами Вольфа – інтегральними показниками числа сонячних плям. Дослідження показали, що для сонячної активності її період $T = 11.125$ років за Шустером ($T = 10.6$ років за Юлом). Рух місяця викликає циклічні коливання рівня моря, морські приплив і відливи.

Приклади стохастично періодичних сигналів можна навести із біомедицини. Найперше, це електрокардіограми та спірограми. На стан людини впливає безліч космічних ритмічних сигналів, найсильніший з який – це ритм обертання Землі навколо своєї осі, а також ритм обертання Місяця навколо Землі. В стохастично періодичному режимі функціонують багато біологічних систем, класичним прикладом яких є система „хижак-жертва”, а також ряд стохастичних систем марківського типу, до яких можна віднести згадувані вище енергосистеми, їх навантаження.

Маючи справу із стохастично періодичними сигналами, виникає багато найрізноманітніших задач вивчення їх аналітичними методами, дослідження методами математичної статистики, зокрема оцінка їх параметрів, періодичних ймовірнісних характеристик, фільтрація, розрахунок прогнозних значень, вирішення багаточисельних оптимізаційних задач.

Практика для подібного роду випадків показує, що задовільні результати досліджень реальних сигналів, а в нашому випадку – стохастично періодичних, можливі лише при умові попереднього вдалого вибору чи вдосконалення їх моделі, а у випадку відсутності такої – побудови нової моделі. Основна причина такого твердження в тому, що модель є тим фундаментом, базою, на основі якої розробляються методи, будуються алгоритми і створюється відповідне програмне забезпечення обробки сигналів. Тому ефективність методів і достовірність отримуваних при цьому результатів безпосередньо залежить від того, наскільки адекватною є модель, наскільки вона точно описує досліджуваний сигнал, відповідає йому.

Наголосимо, що побудова чи вдосконалення моделей сигналів є досить складною задачею, оскільки для її вирішення дослідник повинен з одного боку, володіти глибокими професійними знаннями, з іншого – мати глибоку математичну підготовку. В цьому зв’язку побудову моделей відносять до найважливіших задач статистики випадкових процесів.

Можна стверджувати, що на сьогодні вже існує досить широкий клас випадкових процесів, полів, які в тій чи іншій мірі враховують стохастичну періодичність відповідних сигналів і можуть бути використані як їх моделі. Більше того, на основі таких моделей розроблено ряд методів та алгоритмів їх обробки. Однак такого роду результати розпорошені в багатьох журнальних статтях, матеріалах конференцій, що утруднює їх ефективне використання. Відсутня також чітка картина основних напрямків, тенденцій подальшого розвитку теорії і прикладних аспектів стохастично періодичних сигналів.

Мета роботи – систематизувати основні моделі та методи обробки стохастично періодичних сигналів, вказати на їх переваги і недоліки, прикладні області їх застосування, а також проаналізувати перспективні напрямки вивчення нових класів процесів – умовно періодичних випадкових процесів.

На перших порах спроби вивчення стохастично періодичних сигналів зводилися до застосування при цьому так званого методу ”приведення реальних нестаціонарних процесів до стаціонарних”. Суть його полягає в тому, що для опису сигналів, які не є стаціонарними, використовують певні модифікації стаціонарних процесів. Наприклад, у випадку, коли стаціонарність сигналу може бути обґрунтована на відносно невеликих часових інтервалах, вважають, що його моделлю є кусково (локально) стаціонарний процес. Саме такий підхід використано в [1] при обґрунтуванні моделі енергонавантажень, коли весь інтервал спостереження $[a,b]$ розбивається на такі відрізки $(a_i,a_{i+1}]$, $i=\overline{1,n}$, $a_1=a$, $a_{n+1}=b$, що навантаження на кожному із них описується з допомогою стаціонарного процесу $\xi_i(t)$, з математичним сподіванням $\mathrm{M}\xi_i(t)=m_i$ і дисперсією $D\xi_i(t)=d_i$. Однак використання цього підходу на практиці викликає певні труднощі. Одна з них полягає в проблемі визначення довжин інтервалів стаціонарності $(a_i,a_{i+1}]$. Відкритим також залишається питання слушності оцінок параметрів процесів $\xi_i(t)$, якщо інтервали малі.

Моделі стохастично періодичних сигналів. До перших моделей, які хоч в певній мірі дозволяють враховувати стохастичну періодичність, можна віднести адитивну і мультиплікативну моделі. Адитивна модель має вигляд

$$\xi(t) = f(t) + \xi_1(t),\ t \in (a,b), \tag{1}$$

де $f(t)$ – тренд, що являє собою періодичну функцію, $\xi_1(t)$ – стаціонарний процес. В технічних застосуваннях модель (1) використовується при описі сигналів на фоні завад. В [2] цю модель було використано для опису та аналізу графіків енергонавантажень.

Крім (1), для врахування стохастичної періодичності коливань пульсуючого характеру іноді використовують мультиплікативну модель

$$\xi(t) = f(t) \cdot \xi_1(t), \tag{2}$$

де $f(t)$ і $\xi_1(t)$ мають той же зміст, що і в (1).

Обмежене використання (1) і (2) полягає в тому, що (1) враховує періодичність лише першої моментної функції процесу – його математичного сподівання. В (2) виявляються функціонально зв'язаними математичне сподівання і дисперсія, що, як правило, не відповідає дійсності.

Можна вважати, що першою моделлю, яка на строгому математичному рівні дає можливість враховувати стохастичну періодичність сигналів, є клас періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП), введений О.І Коронкевичем [3]. Ці процеси визначаються наступним чином.

Означення 1. Випадковий процес $\left\{\xi(t),\ M|\xi(t)|^2 < \infty,\ t \in (-\infty,\infty)\right\}$ називається періодично корельованим, якщо його математичне сподівання і кореляційна функція є періодичними, тобто

$$M\xi(t) = M\xi(t+T),$$

$$R(t_1,t_2) = M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overline{\overset{\circ}{\xi}(t_2)}\right\} = R(t_1+T, t_2+T),$$

де $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - M\xi(t)$ – центрований процес, $T > 0$ – період кореляції.

Як наслідок, дисперсія ПКВП також є періодичною з тим же періодом T:

$$D\xi(t) = R(t,t) = R(t+T, t+T) = D\xi(t+T).$$

Певний інтерес, особливо в прикладних дослідженнях, мають взаємно періодично корельовані випадкові процеси.

Означення 2. Періодично корельовані випадкові процеси $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ з одним і тим же періодом кореляції T називаються взаємно періодично корельованими, якщо їх взаємна кореляційна функція є періодичною за сукупністю аргументів, тобто

$$R_{\xi_1\xi_2}(t_1,t_2) = M\,\overset{o}{\xi}(t_1)\overline{\overset{o}{\xi}(t_2)} = R_{\xi_1\xi_2}(t_1+T, t_2+T),\quad t_1,t_2 \in (-\infty,\infty).$$

При $t_1 = t_2 = t$ взаємна кореляційна функція теж є періодичною:

$$R_{\xi_1\xi_2}(t) = R_{\xi_1\xi_2}(t+T),\quad t \in (-\infty,\infty).$$

Для більш глибокого дослідження стохастично періодичних сигналів з врахуванням періодичності їх ймовірнісних характеристик в рамках функції розподілу можуть бути використані періодичні випадкові процеси (ПВП) [4,5].

Означення 3. Випадковий процес $\xi(t), t \in (-\infty,\infty)$, називається періодичним (іноді говорять періодичним за Слуцьким), якщо для будь-якого цілого $n \geq 1$, будь-яких

$t_1,...,t_n,x_1,...,x_n$, що належать $(-\infty,\infty)$, його багатовимірна функція розподілу є періодичною за сукупністю аргументів (за всіма аргументах одночасно), тобто

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1,...,\xi(t_n) < x_n\} = F(x_1,...,x_n;t_1+T,...,t_n+T).$$

Крім стохастично періодичних сигналів, в багатьох галузях науки і техніки, особливо в електро- та радіотехніці, акустиці, доводиться мати справу із шумами (шумовими сигналами), для яких теж має місце стохастична періодичність. Якщо стаціонарні шуми вивчені достатньо глибоко, то дослідження стохастично періодичних шумових сигналів в рамках перших двох моментних функцій вперше було започатковане в [6,7], при цьому був введений новий клас випадкових процесів – процесів з незалежними періодичними приростами в широкому розумінні, а на його основі – клас періодичних білих шумів в широкому розумінні.

Означення 4. Стохастично неперервний з незалежними приростами процес $\eta(\tau)$ називається *процесом **з незалежними періодичними в широкому розумінні (слабо періодичними) приростами,*** якщо існує таке число $T > 0$, що математичне сподівання і дисперсія його приростів задовольняють наступним умовам:

$$Md\eta(\tau) =: d\chi_1(\tau) \overset{м.в.}{=} d\chi_1(\tau+T),$$

$$M[d\eta(\tau)]^2 =: d\chi_2(\tau) \overset{м.в.}{=} d\chi_2(\tau+T),$$

де $=:$ – рівне за означенням, *м.в.* – майже всюди.

Означення 5. Періодичним білим шумом в широкому розумінні називається узагальнена похідна від процесу з незалежними слабо періодичними приростами.

Використовуючи поняття випадкового процесу з незалежними слабо періодичними приростами та відповідно періодичного білого шуму в широкому розумінні, появилася реальна можливість дослідження взаємозв’язку між періодично корельованими і лінійними випадковими процесами. Щоб розглянути це питання більш детально, нагадаємо [8], що випадковий процес $\xi(t)$ називається лінійним, якщо він має зображення у вигляді стохастичного інтегралу

$$\xi(t) = \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(\tau,t)d\eta(\tau),\ t \in (-\infty,\infty), \tag{3}$$

де при кожному фіксованому t невипадкова функція (ядро) $\varphi(\tau,t) \in L2(-\infty,\infty)$, $\eta(\tau)$ – випадковий процес з незалежними приростами (породжуючий процес), який може бути однорідним або неоднорідним.

Лінійний випадковий процес (3) має чітку фізичну інтерпретацію: його можна трактувати як відгук нестаціонарної (стаціонарної, якщо $\varphi(\tau,t) = \varphi(t-\tau)$) лінійної системи на дію білого шуму – узагальненої похідної від породжуючого процесу $\eta(\tau)$, що суттєво використовується в задачах обгрунтування моделей сигналів імпульсного характеру (тобто сигналів типу дробового ефекту). Всестороннє дослідження лінійних процесів здійснив Б.Г.Марченко. Важливо, що в згадуваній вже роботі [8] ним була записана багатовимірна характеристична функція цих процесів, що суттєво сприяло глибокому вивченню лінійних процесів аналітичними методами та результативному їх використанню в багаточисельних прикладних дослідженнях (гідро-, віброакустиці, енергетиці, медицині).

Основні результати щодо взаємозв’язку лінійних та періодично корельованих випадкових процесів вперше були отримані в [6,7]. Наведемо їх у вигляді відповідних теорем.

Теорема 1. Якщо для лінійного випадкового процесу

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)d\eta(\tau),\ t\in(-\infty,\infty), \tag{4}$$

його ядро $\varphi(t-\tau)=\varphi(s)\in L_2(-\infty,\infty)$, а породжуючий процес $\eta(\tau)$є процесом з незалежними слабо періодичними приростами з періодом T, то лінійний процес буде періодично корельованим.

Результат теореми 1 добре інтерпретується з прикладної, інженерної точки зору. Для цього процес (4) запишемо у вигляді

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)\eta'(\tau)d\tau,\ t\in(-\infty,\infty), \tag{4a}$$

де $\eta'(\tau)$ – узагальнена похідна від процесу з незалежними слабо періодичними приростами і, згідно з наведеним вище означенням 5, являє собою періодичний білий шум в широкому розумінні. В цьому випадку можна говорити, що коли на лінійну стаціонарну систему, імпульсна реакція якої $\varphi(t-\tau)=\varphi(s)\in L_2(-\infty,\infty)$, поступає періодичний білий шум в широкому розумінні, то на виході такої системи спостерігається періодично корельований процес.

Щодо теореми 1 справедливе також зворотне твердження [7].

Теорема 2. Якщо лінійній процес

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)d\eta(\tau),\ t\in(-\infty,\infty) \tag{4}$$

є одночасно і періодично корельованим з періодом T, причому ядро процесу $\varphi(s)\in L_2(-\infty,\infty)$, то в цьому випадку породжуючий процес $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними слабо періодичними приростами з цим же періодом T.

Аналізуючи результати теорем 1 і 2, можна говорити, що в рамках лінійного випадкового процесу (4) причиною його періодичної корельованості є періодичний білий шум в широкому розумінні, який поступає на вхід лінійної стаціонарної системи. Виявляється, що в рамках лінійного процесу можна виділити ще одну причину виникнення періодичної корельованості процесів. Має місце

Теорема 3. Лінійний випадковий процес

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\eta(\tau),\ t\in(-\infty,\infty) \tag{3}$$

породжуючий процес якого $\eta(\tau)$ є однорідним, але при цьому ядро є періодичним за сукупністю аргументів, тобто $\varphi(\tau,t)=\varphi(\tau+T,t+T)$, то лінійний процес (3) буде періодично корельованим з цим же періодом T.

Вперше цей результат був опублікований в [9], пізніше в [7], де також був сформульований зворотний до теореми 3 результат.

Очевидно, що причиною появи стохастичної періодичності лінійного процесу також може бути дія обох факторів одночасно – періодичного білого шуму та відповідних властивостей системи, на вхід якої він поступає. В цьому зв’язку має місце отримана в [7]

Теорема 4. Якщо для лінійного випадкового процесу

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t)d\eta(\tau),\ t\in(-\infty,\infty) \tag{3}$$

його ядро є періодичним за сукупністю аргументів з періодом T: $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T)$, одночасно породжуючий процес $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними слабо періодичними приростами теж з періодом T, то при цих умовах лінійний процес (3) буде періодично корельованим випадковим процесом з періодом T.

Значним кроком в подальшому вивченні моделей стохастично періодичних сигналів стала робота [10], де вперше були дані означення випадкового процесу з незалежними періодичними приростами (у вузькому розумінні) і періодичного білого шуму (теж у вузькому розумінні). З появою періодичних білих шумів розпочався плідний період у напрямку всестороннього вивчення взаємозв'язку лінійних та періодичних випадкових процесів, побудові моделей стохастично періодичних сигналів імпульсного характеру у вигляді лінійного періодичного процесу, дослідження нелінійних перетворень періодичних білих шумів. Крім цього робота [10] стала поштовхом до визначення поняття періодичних шумових полів [11] та лінійних періодичних полів, а також згенерувала появу дискретних періодичних шумів, розробку методів їх імітаційного моделювання, дослідження послідовностей ковзного середнього та авторегресії при дії періодичного білого шуму. Повернемось до розглянутих в [10] процесу з незалежними періодичними приростами та періодичного білого шуму.

Означення 6. Випадковий процес з незалежними приростами $\{\eta(t),\ t \in (-\infty, \infty)\}$ будемо називати ***процесом з незалежними періодичними приростами*** з періодом T, якщо функція розподілу приросту $\Delta_h \eta(t) = \eta(t + h) - \eta(t)$ (диференціалу $d\eta(t)$) є періодичною функцією по t з періодом T:

$$F_{\Delta_h}(x;t) = P\{\Delta_h \eta(t) < x\} = P\{\Delta_h \eta(t + T) < x\} = F_{\Delta_h}(x;t + T).$$

Означення 7. Періодичним білим шумом (у вузькому розумінні) називається узагальнена похідна від процесу з незалежними періодичними приростами.

Грунтуючись на тому, що частинними випадками процесу з незалежними приростами є вінерський і пуассонівський процеси, відповідні класи процесів, але з врахуванням їх періодичності наведені в [12].

Означення 8. Вінерівський процес $w(t)$, прирости якого є періодичними, називається вінерівським процесом з незалежними періодичними приростами.

Означення 9. Пуассонівський процес $\pi(t)$, прирости якого є періодичними, називається пуассонівським процесом з незалежними періодичними приростами.

Означення 8а. ***Вінерівським (нормальним) періодичним білим шумом*** називається узагальнена похідна від вінерівського процесу з періодичними приростами.

Означення 9а. ***Пуассонівським періодичним білим шумом*** називається узагальнена похідна від пуассонівського процесу з періодичними приростами.

Як зазначалося, поняття періодичного білого шуму дало можливість всесторонньо дослідити зв'язок періодичних і лінійних випадкових процесів [12,13,14]. Деякі результати цих досліджень подамо у вигляді відповідних теорем, які близькі за змістом до наведених вище, але тут замість певних означень (понять) в широкому розумінні використовуються відповідні поняття у вузькому (строгому) розумінні.

Теорема 5. Якщо для лінійного випадкового процесу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\tau),\ t \in (-\infty, \infty) \tag{4}$$

його ядро $\varphi(t - \tau) = \varphi(s) \in L_2(-\infty, \infty)$, а породжуючий процес $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними періодичними приростами, то лінійний випадковий процес (4) буде періодичним (за Слуцьким), тобто періодичною буде його багатовимірна функція розподілу або, що еквівалентно, періодичним буде логарифм його багатовимірної характеристичної функції.

Використавши форму запису процесу (4) у вигляді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\eta'(\tau)d\tau, \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{4a}$$

де $\eta'(\tau)$ – узагальнена похідна від процесу з незалежними періодичними приростами, результат теореми 5 можна інтерпретувати наступним чином. Якщо на лінійну стаціонарну систему поступає періодичний білий шум, то на виході такої системи випадковий процес буде періодичним.

Близькою до теореми 5, з точки зору кінцевого результату, є сформульована і доведена в [12]

Теорема 6. Якщо для лінійного випадкового процесу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t)d\eta(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{3}$$

його ядро є періодичним за сукупністю аргументів, тобто існує $T > 0$, що $\varphi(\tau,t) = \varphi(\tau+T, t+T)$, а породжуючий з незалежними приростами процес $\eta(\tau)$ – однорідний, то лінійний процес (3) буде періодичним.

Аналіз результатів теорем 5 і 6 (та близьких до них теорем 1 і 3) про взаємозв’язок лінійних і періодичних процесів показує, що в рамках лінійного випадкового процесу чітко виділяються дві основні причини, які породжують його періодичність. Перша причина – це періодичний білий шум, який поступає на лінійну стаціонарну систему, друга – коли система, на виході якої спостерігається процес, є нестаціонарною, однак її властивості, що описуються імпульсною перехідною функцією, змінюються періодично. Подібно до теореми 4, випадок одночасної дії двох факторів виникнення періодичності розглядався в [12], де сформульована і доведена

Теорема 7. Якщо для лінійного випадкового процесу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t)d\eta(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{3}$$

його породжуючий процес $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними періодичними приростами з періодом T, одночасно ядро є періодичним за сукупністю аргументів: $\varphi(\tau,t) = \varphi(\tau+T, t+T)$, то при цих умовах лінійний процес (3) буде періодичним.

Поряд з поняттями випадкового процесу з незалежними періодичними приростами і періодичного білого шуму в [11] введені поняття ***випадкового поля з незалежними періодичними приростами***, на його основі – ***періодичного шумового поля***, а також лінійного періодичного поля – як результат дії на однорідне поле періодичного шумового поля.

Результати теорем 1,2,3, як і подібних їм теорем 5,6,7, але у вузькому розумінні, успішно використовуються в задачах побудови моделей ряду стохастично періодичних сигналів імпульсного характеру. Технологія побудови проводиться за наступною схемою. Спочатку модель обґрунтовується у вигляді лінійного випадкового процесу. Зауважимо, що лінійний випадковий процес – модель конструктивна і на її основі вдається порівняно легко будувати моделі імпульсних сигналів типу дробового ефекту. На наступному етапі в моделі враховується його стохастична періодичність шляхом виділення конкретних причин, які її спричиняють. Саме такий підхід був використаний в [7] при обгрунтуванні у вигляді лінійного ПКВП моделі дробового ефекту, коли середній струм змінюється періодично, а також при обгрунтуванні моделі стохастично періодичних енергонавантажень [15], в [16] – моделі енергонавантажень, але вже у вигляді лінійного періодичного процесу. Подібним чином була обгрунтована модель магнітних шумів феромагнетиків при їх циклічному перемагнічуванні [12].

Використовуючи поняття періодичного шумового поля, в [17] вдалося обгрунтувати модель збурень магнітного поля Землі з врахуванням їх добової стохастичної періодичності.

Основні методи обробки періодичних та періодично корельованих процесів. Хоча періодично корельовані та періодичні випадкові процеси в загальному випадку належать до множини нестаціонарних, тим не менше для них розроблено ряд методів їх статистичного аналізу. Ключову роль при цьому відіграють так звані φ-серії – вкладені по відношенню до згаданих процесів стаціонарні послідовності [7,15,18]. Використовуючи властивості φ-серій, для ПКВП і ПВП розроблено ряд методів їх статистичного аналізу і прогнозу. Найперше – це оцінка періоду T. Пов'язано це з тим, що практично в усі статистики, що є оцінками тих чи інших ймовірнісних характеристик періодичних і періодично корельованих процесів, як параметр входить період T. В деяких випадках період відомий, наприклад, для енергонавантажень, газоспоживання, метеофакторів період $T = 24$ год. Але існує ціла низка реальних стохастично періодичних сигналів, період яких невідомий. Класичним прикладом тут можна вважати електрокардіограми, а також найрізноманітніші шумові сигнали ритмічного характеру в електро-, радіотехніці, акустиці, економіці. Саме в таких випадках виникає задача оцінки періоду, щоб потім її використати у відповідних статистиках замість точного значення періоду. Оцінка періоду для ПКВП вперше була побудована в [7,19], для періодичних процесів оцінка періоду розглядалася в [12]. Щодо методів статистичного аналізу, то оцінки періодичних математичного сподівння ПКВП, кореляційної функції, дисперсії розглядалися в ряді робіт Я.П.Драгана, зокрема в цитованій вже роботі [18]. Оцінки періодичних моментних функцій (порядку $n > 2$) для періодичних випадкових процесів розглянуті в [12,16]. В роботі [20] побудована оцінка взаємної кореляційної функції двох взаємно періодично корельованих випадкових процесів (на прикладі взаємно періодично корельованих енергонавантажень та температури повітря). Важливо також, що для періодичних випадкових процесів розроблено метод розрахунку їх прогнозних значень [12,21]. В [22] розглянуто питання гістограмного аналізу періодичних випадкових процесів.

Моделі стохастично періодичних дискретних сигналів. В прикладних дослідженнях, особливо в задачах обробки сигналів з використанням ЕОМ, переважно мають справу з дискретними сигналами. Серед них важливе місце займають стохастично періодичні дискретні сигнали (послідовності). Для їх вивчення теж необхідні відповідні моделі. На даний час вже існує ціла низка випадкових послідовностей, які цю періодичність певним чином враховують. Найперше, це періодично корельовані [23] та періодичні послідовності [5].

Означення 10. Послідовність випадкових величин

$$\left\{\cdots\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots\right\}=\left\{\xi_i, i\in Z\right\},$$

де $Z=\left\{\cdots-1,0,1,\cdots\right\}$ – множина цілих чисел, називається ***періодично корельованою***, якщо періодичними з деяким періодом L є її математичне сподівання та кореляційна функція, тобто

$$\left\{M\xi_i = M\xi_{i+L},\, R(i,k)=M\,\overset{\circ}{\xi}_i\,\overset{\circ}{\xi}_k = R(i+L,k+L)\right\}.$$

Означення 11. Послідовність випадкових величин $\left\{\xi_i, i\in Z\right\}$ ***називається періодичною,*** якщо для будь-якого цілого n та будь-яких цілих $k_1,\cdots,k_n$ багатовимірна функція розподілу є періодичною за сукупністю аргументів (за всіма аргументами одночасно), тобто існує ціле $L>1$, що

$$F\left(x_1,\cdots,x_n;k_1,\cdots,k_n\right)=P\left\{\xi_{k_1}<x_1,\cdots,\xi_{k_n}<x_n\right\}=F\left(x_1,\cdots,x_n;k_1+L,\cdots,k_n+L\right).$$

Значних успіхів при дослідженні дискретних стохастично періодичних сигналів, зокрема шумових сигналів, було досягнуто на основі поняття дискретного періодичного білого шуму, який вперше був розглянутий в [24].

Означення 12. Дискретний білий шум

$$\{\eta_j,\ j \in Z\}, \tag{5}$$

що являє собою послідовність незалежних випадкових величин, називається ***дискретним періодичним білим шумом***, якщо існує таке ціле число $L > 0$, що його функція розподілу є періодичною з періодом L, тобто

$$F(x; j) = P\{\eta_j < x\} = F(x; j + L).$$

Вивченню дискретних періодичних білих шумів присвячено ряд робіт, зокрема в [12,25] досліджено властивості послідовностей ковзного середнього та авторегресії при дії періодичного білого шуму, в [12] проведена їх класифікація, а саме виділені класи періодичних білих шумів з конкретними розподілами. Як приклад, наведемо поняття лише двох таких шумів, спочатку приклад періодичного шуму з неперервним розподілом його значень [24], пізніше – з дискретним [26].

Нормальний (гауссів) періодичний шум. Білий шум (5) будемо називати нормальним періодичним білим шумом, якщо для густини розподілу кожного із його елементів η_j

$$f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left\{-(x - m_j)^2 \Big/ 2\sigma_j^2\right\}, x \in (-\infty, \infty),$$

параметри m_j і σ_j, $j \in Z$, є періодичними з одним і тим же періодом L, тобто $m_j = m_{j+L}$, $\sigma_j = \sigma_{j+L}$.

Пуассонівський періодичний шум. Білий шум (5) є пуассонівським періодичним білим шумом, якщо для його розподілу $P\{\eta_j = k\} = \left(\lambda_j^k \big/ k!\right) e^{-\lambda_j}$ параметр λ_j є періодичним, тобто існує ціле $L > 1$, що $p_j = p_{j+L}$, $j \in Z$.

Крім наведених вище дискретних періодичних білих шумів мають місце періодичні білі шуми з іншими розподілами. Їх класифікацію, проведену в [12], подамо у вигляді таблиці.

Таблиця 1 - Дискретні періодичні білі шуми (п.б.ш.)

Білі шуми з дискретними розподілами	Білі шуми з неперервними розподілами	
Бернуллі п.б.ш.	рівномірний п.б.ш.	χ^2 п.б.ш.
біноміальний п.б.ш.	трикутний п.б.ш.	χ п.б.ш.
Геометричний п.б.ш.	показниковий п.б.ш.	Стьюдента п.б.ш.
Пуассона п.б.ш.	нормальний п.б.ш.	F п.б.ш.
Логарифмічний п.б.ш.	гама п.б.ш.	логістичний п.б.ш.

Щодо методів обробки періодично корельованих послідовностей, то подібно до періодично корельованих процесів, в ряді робіт Я.П.Драгана, а також в [15,16] для них теж побудовані і досліджені оцінки їх періодичних ймовірнісних характеристик: математичного сподівання, дисперсії і кореляційної функції. Оцінки періодичних вищих моментних функцій для періодичних послідовностей розглянуті в [12,16]. В [12,24,26] та інших роботах розроблені методи імітаційного моделювання періодичних білих шумів та періодичних послідовностей ковзного середнього. В [12] також запропоновано концепцію імітаційного моделювання реальної обстановки ритмічності, що є ключовим моментом при розробці моделюючих комплексів та тренажерів для диспетчерів АСУ об'єктами, які функціонують в режимі стохастичної періодичності.

Моделі стохастично періодичних систем марківського типу. Як відомо, для багатьох стохастичних систем (наприклад аеропортів, енергосистем), сигналів, якщо їх розглядати в процесі еволюції, характерна марковість. На описовому рівні це означає, що "майбутнє" системи не залежить від "минулого", якщо фіксоване "теперішнє". Моделями такого роду сигналів, систем є марківські процеси. В прикладних застосуваннях значна увага приділяється конкретним класам цих процесів. Це, насамперед, однорідні марківські процеси, стрибкоподібні процеси, процеси з незалежними приростами, розгалужені процеси. Разом з тим із практики відомо, що для багатьох реальних стохастичних систем, крім марковості, принциповою особливістю їх функціонування є стохастична періодичність (ритмічність). Саме така особливість, тобто ритмічність, має місце в роботі автоматичних телефонних станцій, транспортних систем, енергосистем, багатьох інших систем масового обслуговування, одним із періодів ритмічності яких є доба, тобто $T = 24$ години. Для всебічного вивчення згаданих систем необхідно використовувати моделі, які б, крім марковості, враховували також згадану ритмічність. Відповідний клас марківських процесів був введений в [27], а ланцюгів Маркова – в [28]. Щоб дати їх означення, спочатку наведемо деякі позначення, які зручно використовувати при розгляді марківських процесів, та нагадаємо поняття марківського процесу.

В основі поняття марківського процесу лежить ідея про процеси "без наслідків". Уявимо систему (частину), яка може знаходитися в різних станах. Можливі стани системи утворюють деяку множину X, яку називають фазовим простором. Нехай система еволюціонує в часі. Її стан в момент часу t позначимо через x_t. Якщо $x_t \in B$, $B \subset X$, то говорять, що система в момент t знаходиться в множині B. Припустимо, що еволюція системи має стохастичний характер, тобто стан системи в момент часу t, взагалі кажучи, не визначається однозначно через стан системи в попередні моменти часу s, де $s < t$, а є випадковим і описується ймовірнісним законом. Позначимо через $P(s, x; t, B)$ ймовірність події $x_t \in B$ при умові, що $x_s = x,\ s < t$. Ймовірнісну міру $P(s, x; t, B)$ називають ймовірністю переходу (іноді перехідною функцією; перехідною ймовірністю; умовною ймовірністю переходу) розглядуваної системи.

Під *системою без наслідків* розуміють систему, для якої ймовірність попадання в момент часу t в множину B при повністю відомому рухові системи до моменту часу $s\ (s < t)$, як і раніше, дорівнює $P(s, x; t, B)$ і, таким чином, залежить тільки від стану системи в останній відомий момент часу. Іншими словами, стан деякої системи в теперішній момент часу s визначає ймовірність майбутнього розвитку процесу при $t > s$, а додаткова інформація про минулу поведінку процесу в моменти $t < s$ не впливає на цю ймовірність, не змінює її, або, як кажуть, не має жодного впливу, тобто залишається без наслідків.

Властивість, яка характеризує поведінку стохастичних систем без наслідків, називають *властивістю відсутності наслідків або марківською властивістю*, а ймовірнісну міру $P(s, x; t, B)$ в цьому зв'язку ще називають марківською перехідною функцією (ймовірністю).

Якщо існує така функція $p(s, x; t, y)$, що

$$P(s, x; t, B) = \int_B p(s, x; t, y)\,dy$$

для всіх s, x, t, B, $s < t$, причому інтегрування відбувається за деякою фіксованою мірою, наприклад, мірою Лебега, то функцію $p(s, x; t, y)$ називають *густиною ймовірності переходу,* або *марківською перехідною густиною.*

Випадковий процес $\{\xi(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ називається *марківським*, якщо для двох довільних моментів часу t_0 і t_1, $t_0 < t_1$, умовний розподіл $\xi(t_1)$ при умові, що задані всі значення $\xi(t)$ при $t \le t_0$ залежить тільки від $\xi(t_0)$.

У випадку, коли фазовий простір X скінченною або зліченою множиною, марківський процес називається *ланцюгом Маркова*.

Якщо для перехідної ймовірності $P(s, x; t, B)$ множина $B = (-\infty, y)$, то функція

$$F(s, x; t, y) = P(s, x; t, B)$$

називається перехідною густиною розподілу. При умові, що функція $F(s, x; t, y)$ диференційована по y, похідну

$$\frac{\partial}{\partial y} F(s, x; t, y) = p(s, x; t, y)$$

називають густиною перехідної функції розподілу (або густиною ймовірності переходу, марківською перехідною густиною).

Дамо тепер означення марківського періодичного процесу [27].

Означення 13. Марківський процес $\{\xi(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ називається **марківським *періодичним процесом***, якщо періодичною за сукупністю часових змінних є його умовна ймовірність переходу, тобто існує таке число T, що

$$P(s, x; t, B) = P(s + T, x; t + T, B).$$

Очевидно, для марківського періодичного процесу його перехідна функція розподілу також буде періодичною, тобто

$$F(s, x; t, y) = F(s + T, x; t + T, y),$$

а у випадку існування густини ймовірності переходу маємо

$$p(s, x; t, y) = p(s + T, x; t + T, y).$$

Щоб навести означення періодичного ланцюга Маркова, будемо вважати, що послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n = 0,1,2,...\}$ описує стани функціонуючої стохастичної системи в моменти часу $n = 0,1,2,...$. Стани приймають значення із “дискретного” фазового простору, який співпадає з множиною натуральних чисел $X = (0,1,2,...)$, тобто ξ_n – цілочисельні величини.

Послідовність $\{\xi_n, n = 0,1,2,...\}$ називається ланцюгом Маркова, якщо для всіх $n \ge 1$ умовна ймовірність

$$P\{\xi_n = j | \xi_0 = k, ..., \xi_{n-2} = l, \xi_{n-1} = i\} = P\{\xi_n = j | \xi_{n-1} = i\} \stackrel{df}{=} p_{i,j}(n). \tag{6}$$

Числа i, j, k, l належать фазовому просторові X, тобто є невід’ємними і цілими.

Подібно як для марківського процесу, умовну ймовірність $p_{i,j}(n)$ в (6) ще називають ймовірністю переходу або перехідною ймовірністю на n-му кроці. Щоб записати ймовірність переходу за декілька кроків, будем вважати, що m і n – два моменти часу, $m < n$. В цьому випадку ймовірність переходу ланцюга Маркова із стану $\xi_m = i$ в стан $\xi_n = j$ дорівнює

$$p_{i,j}(m,n) = \sum_{k,\dots l \in X} p_{i,k}(m+1)\cdots p_{l,j}(n). \tag{7}$$

При $m = n-1$ ймовірність

$$p_{i,j}(n-1,n) = p_{i,j}(n).$$

Зауважимо, що умовні ймовірності $p_{i,j}(m,n)$ ще позначають через $p(m,i;n,j)$, яке аналогічне позначенню, що використовується при розгляді умовних ймовірностей марківських процесів, і часто є більш зручним.

Наведемо тепер означення періодичних ланцюгів Маркова, які вперше були розглянуті в [28].

Означення 14. **Ланцюг Маркова** $\{\xi_n,\, n = 0,1,2,...\}$ **називається періодичним,** якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле $L > 0$, що

$$p_{i,j}(n) = p_{i,j}(n+L), \tag{8}$$

де i, j – стани, $i, j \in X$, $X = \{0,1,2,\ldots\}$ – простір станів (фазовий простір).

Позначимо через $\Pi(n)$ матрицю ймовірностей переходів:

$$\Pi(n) = \left|p_{i,j}(n)\right|,\; i, j \in X .$$

Враховуючи (8), очевидно, що для періодичного ланцюга Маркова його матриця переходів буде періодичною, тобто

$$\Pi(n) = \Pi(n+L),\; n = 0,1,\cdots .$$

Приймаючи до уваги також (7), легко бачити, що для періодичного ланцюга Маркова ймовірності переходів за декілька кроків теж є періодичними (за сукупністю аргументів), тобто для $m < n$

$$p_{i,j}(m,n) = p_{i,j}(m+L,\, n+L).$$

Відповідно для матриць переходів за декілька кроків

$$\Pi(m,n) = \left|p_{i,j}(m,n)\right| = \Pi(m+L, n+L),\; m < n,\; n = 1,2,\cdots .$$

Припускається, що періодичні марківські процеси та періодичні ланцюги Маркова можуть бути успішно використані при дослідженні стохастично періодичних об’єктів марківського типу, зокрема, для опису, аналізу і прогнозу енергонавантажень, режимів газоспоживання тощо, незважаючи на те, що цілу низку важливих результатів з цих питань отримано на основі періодичних та лінійних періодичних процесів. В цьому контексті варто наголосити, що ряд важливих задач, пов’язаних із періодичними процесами та ланцюгами Маркова, ще чекають свого вирішення, і в першу чергу – це оцінка періоду, а також оцінка їх матриць переходів.

Моделі стохастично періодичних сигналів із змінним періодом. Одночасно із наявними результатами з розробки моделей та методів статистичного аналізу стохастично періодичних сигналів спеціалісти зустрічаються з необхідністю дослідження сигналів, які можна назвати стохастично періодичними лише умовно, з врахуванням певних особливостей. Одна із таких особливостей полягає в тому, що ***період***, через який повторюються ті чи інші ймовірнісні характеристики таких сигналів (наприклад, моментні функції), в свою чергу ***теж змінюється, тобто є деякою функцією часу*** (чи іншого аргументу). Яскравим прикладом тут може бути електрокардіограма пацієнта, отримана відразу ж після фізичного навантаження і яка розглядається протягом деякого проміжку часу, коли пульс приходить в "норму". Подібною до кардіограми буде поведінка спірограми, теж отриманої після дії навантаження чи іншого збудника психофізичного стану людини. Приклади аналогічних сигналів можна також навести із багатьох технічних систем.

Виникає природне запитання, як досліджувати стохастично періодичні сигнали, явища, процеси із змінним періодом? З метою опису та розробки методів статистичного аналізу такого роду сигналів в роботі [29] вперше введено новий клас випадкових процесів – це клас періодичних випадкових процесів із змінним періодом. Перед тим, як навести його означення, дамо спочатку поняття періодичної функції із змінним періодом.

Означення 15. Функція $f(t), t \in (-\infty, \infty)$ називається ***періодичною із змінним періодом,*** якщо значення функції повторюється через деякий період, який, в свою чергу, теж є функцією, тобто

$$f(t) = f(t + T(t)), \tag{8}$$

де $T(t)$ – змінний період, і є неперервною функцією часу.

Якщо в (8) $T(t) = T = const$, отримуємо класичне означення періодичної функції.

Приклад графіка періоду $T(t)$ наведено на рис. 1. В точці t_1 період функції $f(t)$ рівний $T(t_1)$, тобто значення функції в точках t_1 і $t_1 + T(t_1)$ повторюються: $f(t_1) = f(t_1 + T(t_1))$. В точці t_2 періодом є число $T(t_2)$. Із наведеного рисунка видно, що в точках t_1 і t_2 періоди функції $f(t)$ різні.

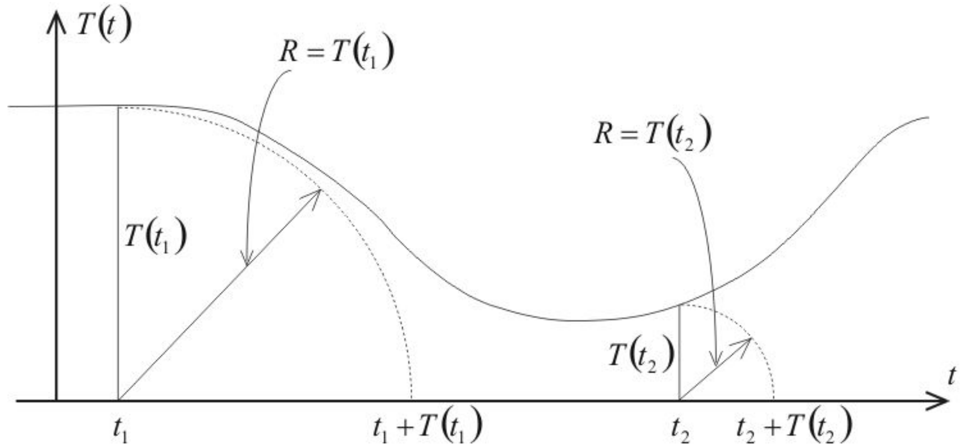

Рисунок 1 - Змінний період $T(t)$, його значення в фіксованих точках t_1 і t_2 та відповідні їм точки $t_1 + T(t_1)$, $t_2 + T(t_2)$, в яких значення функції повторюються.

Означення 16. Функція багатьох змінних $f(t_1,...,t_n)$ називається періодичною (за сукупністю аргументів) із змінним періодом $T(t)$, якщо виконується рівність:

$$f(t_1,\cdots,t_n) = f(t_1 + T(t_1),\cdots,t_n + T(t_n)).$$

Перейдемо тепер до означень періодичних випадкових процесів із змінним періодом.

Означення 17. Процес $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$, називається ***періодичним випадковим процесом із змінним періодом***, якщо періодичною із змінним періодом $T(t)$ є його багатовимірна функція розподілу:

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) = F(x_1,\cdots,x_n;t_1 + T(t_1),\cdots,t_n + T(t_n)), t_i \in (-\infty, \infty), i = \overline{1,n}.$$

Враховуючи, що дослідження сигналів часто достатньо проводити в рамках спектрально-кореляційної теорії, тобто в рамках перших двох моментних функцій, наведемо відповідне

Означення 18. Процес $\xi(t)$ називається ***періодично корельованим випадковим процесом із змінним періодом***, якщо періодичними із змінним періодом $T(t)$ є його математичне сподівання і кореляційна функція, тобто

$$m(t) = m(t + T(t)), \quad R(t_1, t_2) = R(t_1 + T(t_1), t_2 + T(t_2)).$$

Наявність класів випадкових процесів із змінним періодом є основою для вирішення багатьох задач, пов'язаних із розробкою найрізноманітніших методів їх дослідження, статистичного аналізу. До таких задач найперше необхідно віднести задачу побудови інтерполяційної кривої як оцінки змінного періоду; задачу вибору кроку дискретизації неперервних реалізацій із врахуванням змінного періоду; оцінку періодичних ймовірнісних характеристик процесів із змінним періодом; виділення параметрів, ймовірнісних характеристик, які можуть бути використані як діагностичні ознаки при вирішенні відповідних задач, пов'язаних з дослідженням процесів із змінним періодом, особливо в перехідному режимі, в тих чи інших галузях, наприклад, медицині, віброакустиці тощо.

Висновки. Проведений огляд літературних джерел показав, що на даний час існує порівняно велика кількість випадкових процесів і послідовностей, які можуть бути використані як моделі стохастично періодичних сигналів, систем. Крім наведених означень та коротких характеристик самих процесів, вказано на методи їх статистичної обробки, імітаційного моделювання тощо. Особливу увагу звернено на порівняно нові класи моделей – це марківські періодичні процеси і ланцюги, а також умовно періодичні процеси із змінним періодом. Для цих процесів сформульовано ряд аналітичних і статистичних задач, вирішення яких має науковий характер та, безумовно, сприятиме результативності досліджень конкретних сигналів, систем.

Examples of stochastically periodical signals and systems are given. Principal classes of random processes which can be used as their models are reviewed. These are periodical and periodically correlated processes; periodical white noises as one of the main reasons of production of accidental periodicity within the limits of linear random process; discrete periodical noises; Markov's periodical processes and chaines; conditionally periodical processes with variable period. The advantages and disadvantages of listed models, present methods of their statistical analysis, forecast, simulation are pointed out here the perspective trends of research of some processes in particular condition periodic process by analytical statistical methods, are mentioned.

Література

1. Денисенко Н.А., Хоффман И., Ишенков Е.Н. Упрощенная стохастическая модель электричиских нагрузок в системах электроснабжения // Изв. вузов. Электромеханика. – 1987. - №8. – С. 104-108.
2. Фокин Ю.А., Пономаренко И.С., Павликов В.С. Экспериментальные исследования вероятностных статистических характеристик нагрузок в электроснабжающей системе // Электричество. – 1983. - №2. – С. 9-15.
3. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. – 44, №8. – С. 175-183.
4. Слуцкий Е.Е. Избранные труды. – М.: Наука, 1960. – 292 с.
5. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 367 с.
6. Драган Я.П., Приймак Н.В. Линейные периодически коррелированые случайные процессы. – Львов, 1986. – 30 с. – (Препр. / АН УССР. Физико-механический ин-т, №120).
7. Приймак Н.В. Оценка периода корреляции и ее использование при исследовании стохастически периодических радиотехнических сигналов: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.12.01 / М.: МЭИ, 1987. – 18 с.
8. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложение в радиотехнике. – К.: Наукова думка, 1973. – 191 с.
9. Марченко Б.Г., Приймак Н.В. Линейные случайные процессы с периодическим ядром // Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов. Тезисы докладов всесоюзной научно-технической конференции. Киев, Изд-во Киев. ин-та гражд. авиации, 1985. – С. 12.
10. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами

і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
11. Приймак М.В. Періодичні шумові поля та задачі моделювання й аналізу стохастично періодичних електроенергетичних явищ // Технічна електродинаміка. – 1998. – №2. –С. 12-14.
12. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис…докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.
13. Martchenko B. Concerning on a theorem for periodic in Slutsky sense linear random processes. International Congress of Matematicans-98 Abstracts of Short Communications and Posters Contents, Berlin. – 1988. – 260 p.
14. Приймак М.В. Дослідження взаємозв'язку лінійних і періодичних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля. – 1999. – №2(8). – С. 139-142.
15. Баранов Г.Л., Марченко Б.Г., Приймак Н.В. Построение модели и анализ стохастически периодических нагрузок энергосистем // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1991. – Т.37, №2. – С. 12-21.
16. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Ін-ту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.
17. Маєвський О.В., Приймак М.В., Щербак Л.М. Обгрунтування моделі та статистичний аналіз збурень магнітного поля Землі з врахуванням їх добової стохастичної періодичності // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 4. – С. 106-113.
18. Драган Я.П. Свойства отсчетов периодически коррелированных случайніх процессов // Отбор и передача информации. – К.: Наукова думка. – 1972. – Віп. 33. – С. 9-12.
19. Гузий В.И., Приймак Н.В. Исследование возможности измерения периода корреляции периодически коррелированного случайного процесса по одной наблюдаемой реализации // Вестник Киев. политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. - 1984. - Вып. 8. - С. 31-33.
20. Полищук С.В., Приймак Н.В. Исследование корреляционной взаимосвязи нагрузок энергосистем и стохастически периодических метеофакторов // Техническая электродинамика. – 1991. – №1. – С. 98-103.
21. Приймак М.В. Побудова прогнозних графіків енергонавантажень на основі періодичного лінійного випадкового процесу // Технічна електродинаміка. – 2000. – №3. – С. 50-52.
22. Маєвський О.В., Приймак М.В., Щербак Л.М. Гістограмний аналіз періодичних випадкових процесів і його використання в прикладних дослідженнях // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах – Технологічний університет Поділля (м. Хмельницький) – 2003. – №2(22). – С. 26-31.
23. Гладышев Е.Г. О периодически коррелированных случайных последовательностях // Докл. АН СССР. – 1961. – 137, №5. – С. 2236-2239.
24. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки. Електроенергетика. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – С. 15-19.
25. Приймак М.В. Послідовності ковзного середнього при дії періодичного білого шуму // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 1999. – Том 4, число 2. – С. 11-15.
26. Приймак М.В. Дискретні періодичні шуми з дискретними розподілами //Вимірювальна техніка та метрологія. – Львівська політехніка. – 1999. – №55. – С. 167-169.
27. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.
28. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.
29. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №2. – С. 143-152.

Одержано 07.09.2005 р.