УДК 518.25
І.Босікова, канд.фіз.-мат.наук
Тернопільська академія народного господарства, Чортківський інститут підприємництва та бізнесу

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ

Розглянуто задачі параметричної оптимізації. Запропоновано новий підхід до розв'язання задач параметричного програмування з дробово-лінійною цільовою функцією, основу якого становить використання теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями.

Вступ

Математичне програмування становить теоретичну основу розв'язування задач, пов'язаних з вибором одного із можливих варіантів процесу, що досліджується. Зусилля потужних наукових колективів спрямовані на розробку ефективних методів розв'язування задач оптимізації. Серед відчизняних слід відзначити наукові школи, створені І.В.Сергієнком, Н.З.Шором, Ю.Г.Стояном.

При розв'язуванні практичних задач значна увага приділяється параметричному аналізу отриманих розв'язків. Велика кількість монографій присвячена параметричному аналізу та дослідженню стійкості розв'язків задач лінійного програмування. Серед них вагоме місце займають праці І.В.Сергієнка, Л.Н.Козерацької, Т.Т.Лєбєдєвої [1, 2]. Необхідність параметричного аналізу викликана, в першу чергу тим, що в більшості оптимізаційних задач відомі не точні значення вихідних даних, а лише проміжки їх зміни. Подібні дослідження проводяться за допомогою математичного апарату теорії параметричного програмування.

Параметричне програмування дістало широке практичне застосування в різних сферах науки, особливо в економічних дослідженнях та плануванні [3]. Воно отримало розвиток в працях як вітчизняних, так і зарубіжних вчених: О.О.Ємця, А.А.Роскладки [4], Н.Н.Вільямса [3], I.Adler, R.Monteiro [5], S.Chanas, D.Kuchta [6] та інших. В той же час задачі параметричної оптимізації потребують подальшого вивчення, що робить їх дослідження актуальним.

Під параметричною задачею лінійного програмування розуміють пошук екстремуму функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}\left(c_j^{/}+c_j^{//}\lambda\right)x_j \to \max \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{/}+a_{ij}^{//}\lambda\right)x_j = b_i^{/}+b_i^{//}\lambda \qquad \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Поширений метод [7] розв'язування задачі (1)-(3) полягає в тому, що параметру λ задають конкретне значення із проміжка його зміни та знаходять розв'язок отриманої задачі лінійного програмування. Визначають для яких λ отриманий розв'язок є оптимальним і виключають їх із розгляду. Задають нове значення λ. Обчислення продовжують до тих пір, доки не будуть розглянуті усі можливі значення параметра λ.

Грунтовне дослідження параметричних задач оптимізації, розширення можливостей методів параметричного програмування неможливе без використання нових підходів до їх розв'язування. У лінійному програмуванні на кожному кроці доводиться розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими коефіцієнтами. Цілком природно, що системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-

матрицями можуть бути застосовані для розв'язування параметричних оптимізаційних задач. Автором вперше було запропоновано [8] застосовувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями до розв'язування задач параметричного програмування виду (1)-(3).

Метою даної роботи є визначення умов розв'язуваності та розробка алгоритму розв'язування задачі параметричного програмування з дробово-лінійною цільовою функцією.

1. Постановка задачі та алгоритм її розв'язування

Розглянемо задачу параметричного програмування, цільова функція якої є відношенням лінійних многочленів:

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j^{'}\lambda + c_j^{''}\right)x_j(\lambda)}{\sum_{j=1}^{n}\left(d_j^{'}\lambda + d_j^{''}\right)x_j(\lambda)} \to \max \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{'}\lambda + a_{ij}^{''}\right)x_j(\lambda) = b_i^{'}\lambda + b_i^{''} \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5}$$

$$x_j(\lambda) \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{6}$$

Покладається, що λ і коефіцієнти лінійних форм беруться з поля дійсних чисел. Матриця системи обмежень – регулярна повного рангу. Якщо позначити

$$y_0(\lambda) = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left(d_j^{'}\lambda + d_j^{''}\right)x_j(\lambda)\right\}^{-1} \tag{7}$$

і ввести нові змінні

$$y_j(\lambda) = y_0(\lambda)x_j(\lambda) \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{8}$$

то задача (4)-(6) зводиться до задачі з лінійною цільовою функцією [7]. Записана у матричній формі вона має вигляд

$$F^* = C(\lambda)Y(\lambda) \to \max \tag{9}$$

$$A(\lambda)Y(\lambda) = L, \tag{10}$$

$$Y(\lambda) \ge 0 \tag{11}$$

Тут $A(\lambda)$ – регулярна матриця розмірності $(m+1)\times(n+1)$, елементами якої є лінійні функції від λ ($\lambda \in R$):

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) & -b_2(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) & -b_m(\lambda) \\ d_1(\lambda) & d_2(\lambda) & \dots & d_n(\lambda) & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$Y(\lambda)$ – вектор $\left(y_1(\lambda), y_2(\lambda), \dots, y_n(\lambda), y_0(\lambda)\right)^T$, L – вектор $(0, 0, \dots, 0, 1)^T$.

Розв'язок задачі (4)-(6) пропонується шукати за алгоритмом:

1. Зводять задачу (4)-(6) до задачі параметричного програмування (9)-(11).
2. Знаходять розв'язок системи обмежень (10), як системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями.

3. Визначають множину значень параметра λ, для яких отриманий розв'язок задовільняє умову невід'ємності (11).
4. На кожному інтервалі зміни параметра λ досліджують цільову функцію (9) на екстремум і знаходять її найбільше значення.
5. Обчислюють оптимальний план вихідної задачі за співвідношенням (7).

Зупинимося детальніше на другому кроці запропонованого алгоритму.

2. Знаходження розв'язку системи обмежень (10)

Розглянемо загальну схему розв'язування системи обмежень (10). Для цього подамо матрицю $A(\lambda)$ у вигляді матричного многочлена

$$A(\lambda) = A_1\lambda + A_0 .$$

Розв'язок системи (10) будемо шукати у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами:

$$Y(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{m+1} \lambda^j X_j}{\sum_{j=0}^{m+1} \lambda^j z_j}, \tag{13}$$

де X_j $\left(j = \overline{0, m+1}\right)$ – вектори порядку n+1, z_j $\left(j = \overline{0, m+1}\right)$ – скалярні величини. Тоді система (10) приймає вигляд:

$$(\lambda A_1 + A_0)\left(\lambda^{m+1} X_{m+1} + \lambda^m X_m + \lambda^{m-1} X_{m-1} + \ldots + \lambda^2 X_2 + \lambda X_1 + X_0\right) =$$

$$= L\left(\lambda^{m+1} z_{m+1} + \lambda^m z_m + \lambda^{m-1} z_{m-1} + \ldots + \lambda^2 z_2 + \lambda z_1 + z_0\right).$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів її можна звести до системи з числовими коефіцієнтами, яка містить (n+1)(m+3) рівнянь з (n+1)(m+2) невідомими y_{ij} і (m+2) невідомими z_j:

$$\begin{cases} A_1 X_{m+1} = 0; \\ A_1 X_m + A_0 X_{m+1} - L z_{m+1} = 0; \\ A_1 X_{m-1} + A_0 X_m - L z_m = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 X_s + A_0 X_{s+1} - L z_{s+1} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 X_0 + A_0 X_1 - L z_1 = 0; \\ A_0 X_0 - L z_0 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Системи з прямокутними матрицями можна розв'язувати також шляхом зведення їх до систем з квадратними матрицями відповідних розмірностей. Наприклад, відомо [9], що нормальний розв'язок $Y_0(\lambda)$ недовизначеної системи (10) отримується із розв'язку системи

$$AA^T Y = L \tag{15}$$

з квадратною невиродженою матрицею AA^T порядку m+1 шляхом перетворення:

$$X_0 = A^T Y . \tag{16}$$

Якщо матриця $A(\lambda)$ – нормована і λ приймає значення з проміжка (0;1), то розв’язок системи (15) можна шукати у вигляді ряду [10]:

$$Y(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}\lambda^{k}. \tag{17}$$

Тут $y^{(k)}$ $(k \geq 0)$ – вектор порядку m, компоненти якого знаходять за формулою [10]:

$$D_0 y_j^{(k)} = -\sum_{i=1}^{\min(k,q)} D_i x^{(k-1)} + \begin{cases} b^{(k)}, & 0 \leq k \leq q\,; \\ 0, & q < k \end{cases}, \quad \left(j=\overline{1,m}\right),$$

де q – степінь матриці $D = AA^T$.

Твердження. Ряд (17), у вигляді якого шукають розв’язок системи $AA^T Y = B$, де $AA^T = D = D_0\lambda^2 + D_1\lambda + D_2$ і $B = B_0\lambda + B_1$, збігається при

$$\lambda \in \left(-\left\|D_0^{-1}D_1\right\|^{-1}, \left\|D_0^{-1}D_1\right\|^{-1}\right).$$

Доведення. Розглянемо коефіцієнти ряду (17):

$$y^{(0)} = D_0^{-1}B_0\,,$$

$$y^{(1)} = D_0^{-1}\left[-D_1 y^{(0)} + B_1\right],$$

$$y^{(2)} = D_0^{-1}\left[-D_1 y^{(1)} - D_2 y^{(0)}\right],$$

$$y^{(3)} = D_0^{-1}\left[-D_1 y^{(2)} - D_2 y^{(1)}\right],$$

$$. \qquad . \quad . \quad . \quad .$$

Вводимо позначення:

$$U = -D_0^{-1}D_1,\ \ V = -D_0^{-1}D_2,\ \ W = D_0^{-1}B_0,\ \ G = D_0^{-1}B_1.$$

Тоді коефіцієнти $y^{(k)}$ можна записати у вигляді

$$y^{(0)} = W\,,$$

$$y^{(1)} = Uy^{(0)} + G = UW + G\,,$$

$$y^{(2)} = Uy^{(1)} + Vy^{(0)} = U^2W + UG + VW\,,$$

$$y^{(3)} = Uy^{(2)} + Vy^{(1)} = U^3W + U^2G + UVW + VUW + VG\,,$$

$$. \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Розглянемо степеневі ряди:

$$W\lambda + UW\lambda^2 + U^2W\lambda^3 + U^3W\lambda^4 + \ldots$$

$$G\lambda^2 + UG\lambda^3 + U^2G\lambda^4 + U^3G\lambda^4 + \ldots$$

$$VW\lambda^3 + UVW\lambda^4 + U^2VW\lambda^4 + U^3VW\lambda^4 + \ldots$$

$$. \qquad . \quad . \quad . \quad .$$

Кожен із цих рядів за ознакою Даламбера [11] збігається, якщо

$$\left\|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\| = \|U\|\,|\lambda| < 1.$$

За властивостями степеневих рядів ряд (4.16) збігається в крайньому випадку на інтервалі $\left(-\|U\|^{-1},\|U\|^{-1}\right)$. Що і потрібно було довести.

Отже, вибір методу розв'язування системи обмежень (10) залежить від заповнення системи, а значить від вихідних даних задачі (4)-(6).

Висновки

Предметом розгляду даної роботи є задачі параметричної оптимізації. Запропонований новий підхід до розв'язування задач параметричного програмування з дробово-лінійною цільовою функцією, основу якого становить використання теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями.

Використання теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями до розв'язування параметричних задач, в першу чергу, дозволяє уникати необхідність перебору можливих значень параметра λ, що значно зменшує об'єм обчислень. Крім того, на сьогодні системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями вивчені достатньо добре. Для них побудовані обчислювальні схеми – аналоги неунітарних перетворень алгоритмів лінійної алгебри [12], схеми виконання обчислень в багатомодульній системі лишків [13], одержано спосіб зведення до систем з числовими коефіцієнтами [14]. Отже, запропонований підхід до пошуку розв'язків задач параметричного програмування з дробово-лінійною цільовою функцією дозволяє конструювати ефективні числові алгоритми їх розв'язування та проводити апріорний аналіз розв'язків.

Проведені дослідження показують, що вибір методу розв'язування системи обмежень, як системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицею, залежить від початкових даних задачі. Розроблений алгоритм дозволяє розв'язувати задачі параметричного програмування, як з лінійною залежністю від параметра так і ті, в яких залежність від параметра не є лінійною.

The subject of consideration of given work are problems of a parameter optimization. The new approach to problem solving of parametric programming with linear-fractional object function is offered, which is grounded on the use of the theory of systems of linear algebraic equations with l-matrixes.

Usage of the theory of systems of linear algebraic equations with l-matrixes to the solving of parametric problems, first of all, allows to avoid necessity of exhaustive search of possible value of parameter λ, that considerably reduces quantity of calculuss.

Besides, today systems of linear algebraic equations with l-matrixes are studied well enough. Therefore offered approach to a search of mutually solutions of problems of parametric programming allows to construct effective numeric algorithms of their solution and to analyse the solutions preliminary.

Conducted researches demonstrate, that the designed algorithm allows to solve problems of parametric programming, as with linear dependence from parameter and those, in which dependency of parameter is not linear.

Література

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости // Доклады АН СССР. – 1989. – 307, № 3. – С. 527-531.
2. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К.: Наукова думка, 1995. – 453 с.
3. Вильямс Н.М. Параметрическое программирование в экономике. – М.: Статистика, 1976. – 270 с.
4. Емец О.А., Раскладка А.А. Алгоритмическое решение двух параметрических задач оптимизации на множестве сочетаний с повторениями // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – №6. – С. 160-165.
5. Adler I., Monteiro R. A geometric view of parametric linear programming. // Algorithmica. – 1992. – №8. – P. 161-176.
6. Chanas S., Kuchta D. An algorithm for solving bicriterial linear programming problems with parametrical coefficients in the objective functions // Annals of Operations Research. – 1998. – Vol. 81. – P. 63-72.
7. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.

8. Босікова І.І. Розв'язування задач параметричного програмування з застосуванням систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ- матрицями: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова, 1999. – С. 56-60.
9. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 300 с.
10. Cabay S., Demzy B. Systems of linear equations with dense univariate polynomial coefficients. - Journal of the association for computing machinery. July 1987. v. 34. № 3. p. 646-660.
11. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. - М.: Наука, 1969.- С.640.
12. Недашковский Н.А. Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями: Автореф. дис. канд-та физ.-мат. наук/ КГУ. – К., 1980. – 20 с.
13. Недашковский Н.А. О решении систем алгебраических уравнений с полиномиально-численным заполнением // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №6. – С. 173-183.
14. Недашковский Н.А. О решении систем алгебраических уравнений с λ-матрицами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, №3. – С. 439-443.

Одержано 10.09.2004 р.