УДК 517.946

В.Матієга[1], канд. техн. наук; М.Шелестовська[2], канд. техн. наук

[1]Чернівецький факультет Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”

[2]Тернопільська академія народного господарства

ПОТУЖНІСТЬ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОРТОТРОПНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ПАРАШУТНОМУ ТІЛІ

В рамках кореляційної теорії побудовано основні ймовірнісні характеристики нестаціонарної задачі теплопровідності для ортотропного суцільного парашутного тіла на базі детермінованого розв’язку відповідної нестаціонарної задачі теплопровідності.

Постановка проблеми та її аналіз. Детермінований розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності для ортотропного суцільного парашутного тіла побудовано в роботі [1].

Математично це приводить до побудови обмеженого в області

$$D = \{(t,r,\varphi,\mu) : t \in (0,\infty), r \in (0,R), \varphi \in [0,2\pi), \mu \in (0,\mu_0); R < \infty\}$$

розв’язку рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \left[a_r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) T + \frac{a_\mu^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial \mu} \right] + \frac{a_\varphi^2}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] = f(t,r,\varphi,\mu) \quad (1)$$

за нульовою початковою умовою, умовою періодичності щодо кутової змінної φ

$$T(t,r,\varphi+2\pi,\mu) = T(t,r,\varphi,\mu), \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}(\sqrt{r}\,T) = 0, \; \left.\left(h_1 \frac{\partial T}{\partial r} + h_2 T\right)\right|_{r=R} = g_1(t,\varphi,\mu) \quad (3)$$

та крайовою умовою на конічній поверхні

$$\left. T(t, r, \varphi, \mu) \right|_{\mu=\mu_0} = g_2(t, r, \varphi), \quad (4)$$

$a_r^2, a_\mu^2, a_\varphi^2$ - коефіцієнти температуропровідності у відповідних напрямках;

$h_j \geq 0, j = 1,2$; $h_1 + h_2 \neq 0$; $\mu = \cos\Theta$, $\mu_0 = \cos\Theta_0$.

Детермінований розв’язок задачі (1)-(4) дифузії тепла, побудований методом фундаментальних функцій, має структуру [1]:

$$T(t,r,\varphi,\mu) = \int_0^t \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\mu_0}^1 E(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,\mu,\eta) \times$$

$$\times f(\tau,\rho,\alpha,\eta)\rho^2 d\eta\, d\alpha\, d\rho\, d\tau + \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{\mu_0}^1 W_r(t-\tau,r,\varphi-\alpha,\mu,\eta) \times \quad (5)$$

$$\times g_1(\tau,\alpha,\eta) d\eta\, d\alpha\, d\tau + \int_0^t \int_0^R \int_0^{2\pi} W_\Theta(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,\mu) g_2(\tau,\rho,\alpha) d\alpha\, d\rho\, d\tau \,.$$

У формулі (4) беруть участь фундаментальна функція крайової задачі

$$E(t,r,\rho,\varphi,\mu,\eta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m,s=0}^{\infty}\varepsilon_m \mathrm{E}_{ms}(t,r,\rho)\frac{P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu)P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\eta)}{\| P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu)\|^2}\cos m\varphi ,$$

породжена неоднорідністю рівняння (1), радіальна функція Гріна

$$W_r(t,r,\varphi,\mu,\eta)=\frac{a_r^2 R^2}{2\pi\ h_1}\sum_{m,s=0}^{\infty}\varepsilon_m \mathrm{E}_{ms}(t,r,R)\frac{P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu)P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\eta)}{\| P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu)\|^2}\cos m\varphi ,$$

породжена тепловим режимом на радіальній поверхні $r=R$, і трансверсальна функція Гріна

$$W_\Theta(t,r,\rho,\varphi,\mu)=\frac{1-\mu_0^2}{2\pi}a_\mu^2\sum_{m,s=0}^{\infty}\varepsilon_m \mathrm{E}_{ms}(t,r,\rho)\frac{P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu)}{\| P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu)\|^2}\frac{\partial}{\partial\mu}P_{\nu_{ms}}^{-\beta_m}(\mu_0)\cos m\varphi ,$$

породжена тепловим режимом на конічній поверхні:

$$\mathrm{E}_{ms}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a_r^2\beta_n^2 t}\,\frac{J_{\bar\nu_{ms},1/2}(\beta_n r)J_{\bar\nu_{ms},1/2}(\beta_n\rho)}{\| J_{\bar\nu_{ms},1/2}(\beta_n r)\|^2},$$

$\bar\nu_{mj}=(2a_r)^{-1}[4a_\mu^2\nu_{mj}(\nu_{mj}+1)+a_r^2]^{1/2}$, $\beta_m=a_\varphi a_\mu^{-1}m$, ν_{mj} - корені трансцендентного рівняння Лежандра першого роду $P_\nu^{-\beta_m}(\mu_0)=0$, які утворюють дискретний спектр, $J_{\nu,\alpha}(x)=J_\nu(x)x^{-\alpha}$, $J_\nu(x)$ - функція Бесселя 1-го роду порядка ν [2].

Основна частина. Припустимо, що дане суцільне парашутне тіло вільне від зовнішнього навантаження, має при $t\le 0$ всюди нульову температуру, а при $t>0$ піддається діянню неперервно розподілених випадкових теплових джерел і випадкового теплового режиму на поверхнях $r=R$ та $\mu=\mu_0$. Припустимо далі, що функції $f(t,r,\varphi,\mu)$, $g_1(t,\varphi,\mu)$ і $g_2(t,r,\varphi)$ можна зобразити у вигляді добутку $f(t,r,\varphi,\mu)=f_1(t)\Psi_1(r,\varphi,\mu)$, $g_1(t,\varphi,\mu)=f_2(t)\Psi_2(\varphi,\mu)$ і $g_2(t,r,\varphi)=f_3(t)\Psi_3(r,\varphi)$ або суми таких добутків, де $f_j(t)$ - стаціонарні в широкому розумінні випадкові функції своїх координат [3], а Ψ_j - детерміновані функції.

Якщо покласти

$$G_1(t,r,\varphi,\mu)=\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{\mu_0}^{1}E(t,r,\rho,\varphi-\alpha,\mu,\eta)\Psi_1(\rho,\alpha,\eta)\rho^2 d\eta\, d\alpha\, d\rho ,$$

$$G_2(t,r,\varphi,\mu)=\int_0^{2\pi}\int_{\mu_0}^{1}W_r(t,r,\varphi-\alpha,\mu,\eta)\Psi_2(\alpha,\eta)d\eta\, d\alpha , \qquad (6)$$

$$G_3(t,r,\varphi,\mu)=\int_0^R\int_0^{2\pi}W_\Theta(t,r,\rho,\varphi-\alpha,\mu)\Psi_3(\rho,\alpha)\,d\alpha\, d\rho ,$$

то рівність (4) набуває вигляду:

$$T(t,x)=\sum_{k=1}^{3}\int_0^t G_k(t-\tau,x)f_k(\tau)d\tau ,\ x=(r,\varphi,\mu). \qquad (7)$$

Оскільки $f_m(t)$ стаціонарні в широкому розумінні випадкові функції часу, то внаслідок лінійності задачі (1)-(4) можна вважати, що математичне сподівання

$$M[f_m(t)]=0 ,\ m=1,2,3 .$$

В силу рівностей (7) математичне сподівання

$$M[T(t,x)]=\sum_{k=1}^{3}\int_0^t G_k(t-\tau,x)M[f_k(\tau)]d\tau=0 .$$

Для кореляційної функції K_{TT} нестаціонарного стохастичного температурного поля одержуємо вираз [3]:

$$K_{TT}(t_1,t_2,x)=\sum_{i,m=1}^{3}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}G_i(t_1-\tau_1,x)G_m(t_2-\tau_2,x)K_{im}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\,, \tag{9}$$

$K_{im}(\tau_1,\tau_2)=K_{f_i f_m}(\tau_1,\tau_2)$ - кореляційна функція випадкових процесів $f_i(\tau)$ та $f_m(\tau)$.

<u>Зауваження</u>: Якщо температурні поля, породжені випадковими процесами f_i та f_m незалежні, то для $i\neq m=1,2,3$ кореляційні функції $K_{im}=0$ і в рівності (9) залишаються тільки три доданки (при $i=m=1,2,3$).

При $t_1=t_2=t$ маємо потужність нестаціонарного стохастичного температурного поля в ортотропному суцільному парашутному тілі:

$$D_T(t,x)=\sum_{i,m=1}^{3}\int_0^{t}\int_0^{t}G_i(t-\tau_1,x)G_m(t-\tau_2,x)K_{im}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\,. \tag{10}$$

Проаналізуємо найбільш вживані в практиці кореляційні функції [4]:

а) $K_{im}(\tau_1,\tau_2)=\delta(\tau_1-\tau_2)$, б) $K_{im}(\tau_1,\tau_2)=e^{-\chi|\tau_1-\tau_2|}$, $\chi>0$.

Якщо $K_{im}(\tau_1,\tau_2)=\delta(\tau_1-\tau_2)$, то згідно з формулою (9) кореляційна функція нестаціонарного температурного поля

$$K_{TT}(t_1,t_2,x)=\sum_{i,m=1}^{3}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}G_i(t_1-\tau_1,x)G_m(t_2-\tau_2,x)\delta(\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\sum_{i,m=1}^{3}\int_0^{t}G_i(t_1-\tau,x)G_m(t_2-\tau,x)d\tau,\quad t=\min(t_1,t_2)\,.$$

Звідси одержуємо вираз для потужності даного поля:

$$D_T(t,x)=\sum_{i,m=1}^{3}\int_0^{t}G_i(t-\tau,x)G_m(t-\tau,x)d\tau\equiv\int_0^{t}H(t-\tau,x)d\tau=\int_0^{t}H(\tau,x)d\tau \tag{11}$$

Якщо $K_{im}(\tau_1,\tau_2)=\exp[-\chi\,|\,\tau_1-\tau_2\,|]$, де $\chi=const>0$, то

$$K_{TT}(t_1,t_2,x)=B(t_1,t_2,x)+2\chi\int_0^{t}B(t_1-\tau,t_2-\tau,x)d\tau\,,$$

$$B(t_1,t_2,x)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}H(t_1-s_1,x)H(t_2-s_2,x)e^{-\chi(s_1+s_2)}ds_1 ds_2\,.$$

При $t_1=t_2\equiv t$ маємо потужність даного нестаціонарного температурного поля

$$D_T(t,x)=\sum_{i,m=1}^{3}\{H_i(t,x)H_m(t,x)+2\chi\int_0^{t}H_i(t-\tau,x)H_m(t-\tau,x)d\tau\}\equiv$$

$$\equiv B(t,x)+2\chi\int_0^{t}B(\tau,x)d\tau\,. \tag{12}$$

Зауважимо, що в сумах (10)-(12) кількість доданків може бути зменшена до одного за рахунок вибору детермінованих функцій $\Psi_j,(j=\overline{1,3})$.

Висновок

Побудовані ймовірнісні характеристики нестаціонарного стохастичного температурного поля в даному ортотропному парашутному суцільному тілі з точки зору кореляційної теорії є достатніми для інженерних розрахунків.

The main probable characteristics of the non-stationary heat-conductivity task for the orthotropic smooth parachute body basing on the determined solution of the corresponding non-stationary heat-conductivity task, was built within the correlation theory.

Література

1. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
2. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
4. Паркус. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 251 с.

Одержано 22.04.2004 р.