

# ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 621.383.8:621.396.96

П.Євтух, докт. техн. наук; Б.Орбчук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

## ВЕКТОРНА МОДЕЛЬ ОБ'ЄКТА ВИМІРЮВАННЯ В ЗАДАЧІ РЕКОНСТРУКЦІЇ ПОЛЯ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ В ОБЕРНЕНІЙ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

*Показано, що завдяки застосуванню векторної моделі об'єкта вимірювання стає можливим побудувати функцію зв'язку між кінцевою похибкою вимірювань і роздільною здатністю у задачі реконструкції поля за експериментальними даними. Отримана функція дає змогу раціональним чином побудувати модель вимірювальної процедури.*

У задачі реконструкції поля за експериментальними даними, наприклад, теплового, світлового і т.д., використовують вимірювальну процедуру, побудовану на базі відомого розв'язку задачі Лапласа методом Фур'є як оберненої задачі математичної фізики (оберненої задачі Діріхле [1]). Існуючі методи метрологічного аналізу такої задачі задають вимоги до похибок вхідних даних, виходячи із умов реконструкції поля з необхідною точністю [2]. Однак похибка вимірювання параметра поля – не єдиний критерій ефективності вимірювальної процедури. Не менш важливий – просторова роздільна здатність, яка визначає просторову реалізацію вимірювального параметра, а відтак – спосіб розташування первинних вимірювальних перетворювачів (ПВП) у досліджуваному полі, їх кількість, спосіб сканування поля. Нехтування роздільною здатністю може призвести у реконструйованому полі до пропуску локальних ділянок із аномальними значеннями вимірюваного параметра, що в ряді випадків знецінює отримані результати, незважаючи на їх високу точність.

Однак метрологічний аналіз процедури отримання експериментальних даних при одночасному забезпеченні високої точності і необхідної роздільної здатності суттєво ускладнюється. У літературі недостатньо висвітлений метод кількісного оцінювання похибки вимірювання параметрів поля із одночасним кількісним оцінюванням роздільної здатності, не приводяться заходи для досягнення необхідного співвідношення між ними. Існуючі результати досліджень у цьому напрямку мають дискусійний характер [3]. У багатьох випадках ці труднощі метрологічного аналізу обминають, розглядаючи точність і роздільну здатність незалежно, не пов'язаними між собою, що призводить до спотвореної інтерпретації вимірювального експерименту.

У даній статті приводиться метод кількісного оцінювання похибки вимірювання параметрів поля із одночасним кількісним оцінюванням роздільної здатності вимірювального експерименту. Поданий метод базується на використанні векторної моделі об'єкта вимірювання.

Відомо, що у строгій математичній постановці задача реконструкції поля на площині або у просторі за даними вимірювального експерименту у окремих точках поля (у тому числі і обернена задача Діріхле) – некоректна. Однак методи розв'язування таких задач існують [1]. У даній статті математичні особливості таких розв'язків не розглядаються, а подається лише метрологічний аналіз вимірювального експерименту, який має забезпечити вхідними даними цей розв'язок.

Класичний розв’язок задачі Діріхле методом Фур’є подається у вигляді нескінченно вимірної системи рівнянь відносно коефіцієнтів Фур’є-розкладу шуканої функції поля  $f(\varphi)$ , яка реконструюється за вимірними значеннями параметра поля  $u(\rho, \varphi_i)$ , отриманими на колі радіуса  $\rho$  при кутах сканування  $\varphi_i$  [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n (\alpha_n \cos n\varphi_i + \beta_n \sin n\varphi_i) = u(\rho, \varphi_i), \tag{1}$$

де  $i = 1, \dots, N$ ;

$\sigma = \rho/a$ , або  $\sigma = a/\rho$  - відповідно для внутрішньої або зовнішньої задачі Діріхле;

$\alpha$  - радіус кола, на якому задані початкові умови задачі;

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$  і  $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$  - коефіцієнти Фур’є-розкладу шуканої функції;

$n = 0, 1, \dots, N$  - номери гармонік розкладу шуканої функції.

Невідомими у співвідношенні (1) є  $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$  і  $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ .

Метрологічне трактування розв’язку задачі Діріхле передбачає, що по колу радіуса  $\rho$  можливо здійснити лише обмежену кількість вимірювань у  $N$  точках, для яких справедлива кінцево-вимірна система рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n (\alpha_n \cos n\varphi_1 + \beta_n \sin n\varphi_1) &= u(\rho, \varphi_1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n (\alpha_n \cos n\varphi_2 + \beta_n \sin n\varphi_2) &= u(\rho, \varphi_2) \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n (\alpha_n \cos n\varphi_{2N-1} + \beta_n \sin n\varphi_{2N-1}) &= u(\rho, \varphi_{2N-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

Вимірні значення параметра поля  $u(\rho, \varphi_i)$  у правій частині виразу (2) можна подати у традиційних поняттях теорії сигналів [5] як впорядковану за законом сканування поля числову послідовність. Надалі цю впорядковану емпіричну множину можна трактувати як вектор  $\vec{u}(\rho, \varphi_i)$  у просторі оцінок значень вимірюваної величини. Ліва частина виразу (2) трактується відповідно як впорядкована послідовність значень коефіцієнтів Фур’є-розкладу  $C_n$  шуканої функції, що дає підставу подати її у вигляді вектора шуканих невідомих  $\vec{X}_n$  у просторі інформативних ознак вимірюваної величини, якими є її гармонічні складові. Суть виміральної процедури полягає у переході від простору інформативних ознак до простору інформативних оцінок, а такий перехід можна здійснити шляхом застосування оператора  $M$ . Оскільки вирази (1) і (2) є лінійними залежностями, то і оператор  $M$  має бути лінійним, і його можна подати у вигляді матриці  $[M]$ . Кожен рядок цієї матриці – це функціонал, що виділяє всі необхідні гармонічні складові шуканої функції для одного із кутів сканування поля  $\varphi_i$ . Кількість рядків такої матриці визначає кількість точок сканування. Кількість стовпчиків – це кількість гармонічних складових, які можна виділити за один цикл сканування.

Отже, поставлена задача у метрологічній постановці моделюється розв’язком матричного рівняння:

$$[\vec{X}][M] = [\vec{U}], \tag{3}$$

де  $[X] = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$  - вектор об'єкта вимірювання,  $[U] = \begin{bmatrix} u(\rho, \varphi_1) \\ u(\rho, \varphi_2) \\ \vdots \\ u(\rho, \varphi_{2N-1}) \end{bmatrix}$  - вектор

сканування,

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \dots & \sigma^N \cos N\varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 & \dots & \sigma^N \sin N\varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \dots & \sigma^N \cos N\varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 & \dots & \sigma^N \sin N\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma \cos \varphi_{2N-1} & \dots & \sigma^N \cos N\varphi_{2N-1} & \sigma \sin \varphi_{2N-1} & \dots & \sigma^N \sin N\varphi_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Вже сам вигляд моделі (3) дає змогу прогнозувати властивості шуканого розв'язку. Зважаючи на те, що цей розв'язок у вирішальній мірі залежить від матриці (4), елементи цієї матриці доцільно подати ще й у комплексній формі, виходячи із комплексного представлення виразу (1) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{N+1} C_n \sigma^n e^{jn\varphi_i} = u(\rho, \varphi_i), \quad (5)$$

а відтак і матриці  $[M]$  у вигляді:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma e^{-j\omega_1\varphi_1} & \sigma^2 e^{-j\omega_2\varphi_2} & \dots & \sigma^N e^{-j\omega_N\varphi_{2N-1}} \\ 1 & \sigma e^{-j\omega_1\varphi_2} & \sigma^2 e^{-j\omega_2\varphi_2} & \dots & \sigma^N e^{-j\omega_N\varphi_{2N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma e^{-j\omega_N\varphi_{2N-1}} & \sigma^2 e^{-j\omega_N\varphi_{2N-1}} & \dots & \sigma^N e^{-j\omega_N\varphi_{2N-1}} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матриця  $[M]$  моделі повністю визначає параметри сканування поля і точність результатів процедури вимірювання в цілому. Ідеальна фільтрація гармонічних складових шуканої функції можлива лише при діагональній матриці  $[M]$ . Однак у даному випадку ця матриця не діагональна, а за своєю структурою вона у варіанті, поданому виразом (6), подібна до відомої, погано обумовленої матриці Гільберта [5]. У вимірювальному експерименті це практично означає, що при близьких значеннях кутів сканування рядки матриці стають лінійно залежними між собою, матриця стає переозначеною, а розв'язок рівняння (3) – стає неможливим. Для того, щоб уникнути такої небажаної ситуації, потрібно раціональним чином вибрати параметри процедури сканування, а такий вибір вдається здійснити, пов'язавши похибку розв'язку системи (3) із числом обумовленості матриці  $[M]$ . Такий зв'язок можна подати наступною формулою [6]:

$$\delta \|X\| = \sqrt{\delta \|M\| + \delta \|u\|}, \quad (7)$$

де  $\delta \|X\|$  - відносна похибка норми вектора вихідних даних системи (3);

$\nu$  - число обумовленості матриці  $[M]$ ;

$\delta\|M\|$  та  $\delta\|\vec{u}\|$  - відповідно відносні похибки норми матриці  $[M]$  та вектора сканування  $\vec{u}$ .

Вимірювальний експеримент доцільно аналізувати для випадку  $[\delta\|\vec{u}\|] \ll \delta\|M\|$ , оскільки  $\delta\|\vec{u}\|$  - контрольована за своїм верхнім значенням і визначається лише похибками ПВП, а  $\delta\|M\|$  - багатопараметрична функція, яка може істотно змінюватись у процесі вимірювань. Формула (7) при такому обмеженні набуває вигляду:

$$\delta\|\vec{X}\| = \nu\delta\|M\| \quad (8)$$

і показує, що число обумовленості фактично масштабує у більшу сторону значення похибок, зумовлених впливом матриці. Процедуру сканування поля слід виконувати при умові, що число обумовленості матриці  $[M]$  близьке до одиниці. Застосовуючи формулу (8), можна визначити шляхи досягнення такої умови, дослідивши вплив на розв'язок рівняння (3) процедури нарощування порядку матриці  $[M]$  у варіанті поданому виразом (4). Формула для вектора шуканих невідомих  $\vec{u}$  теж має відповідати цій формі матриці. Виразимо їх через коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  згідно із рівнянням (1).

Якщо вимірювання виконується лише в одній точці сканування, то розв'язок рівняння (3) з урахуванням формули (3) набуде вигляду  $\alpha_0 = u(\rho, \varphi_i)$ . Такий розв'язок фактично не дає ніякого уявлення про закономірність розподілу параметра поля. Однак з метрологічної точки зору він найточніший, оскільки його похибка не перевищує похибок вхідних даних, отриманих експериментально.

При вимірюваннях у двох точках ( тобто при двох значеннях кута сканування поля) рівняння (3) набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\rho, \varphi_1) \\ u(\rho, \varphi_2) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Прямокутна матриця у лівій частині останнього виразу не дає змоги отримати розв'язок для невідомих  $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ . У даному випадку можна отримати лише псевдорозв'язок, що, однак, не має збіжності.

При вимірюваннях у трьох точках (при трьох значеннях кута сканування поля) система (3) набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_3 & \sigma \sin \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\rho, \varphi_1) \\ u(\rho, \varphi_2) \\ u(\rho, \varphi_3) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

У даному випадку вже можна виділити першу гармонічну складову шуканої функції.

Очевидно, що такий розгляд із застосуванням процедури нарощування порядку матриці можна продовжити. Однак отримані результати вже дають підставу для певних висновків.

Для того, щоб мати розв'язок, необхідно вимірювати поле у непарному числі точок. При нарощуванні порядку матриці  $[M]$  отримувані розв'язки відрізнятимуться від розв'язків, отриманих при матрицях менших порядків, що свідчить про наявність систематичної похибки у отримуваному результаті навіть у тих випадках, коли у

вхідних даних її нема. Ще одна особливість полягає у тому, що при збільшенні порядку матриці різницю між кутами сканування  $\varphi_i$  і  $\varphi_{i+1}$  слід підтримувати якомога більшою (при заданій роздільній здатності), інакше рядки матриці стануть лінійно залежними, а сама матриця стане погано обумовленою. При збільшенні точок сканування різниця між вимірюваними значеннями стає меншою, і в результаті матриця  $[M]$  обов'язково стане погано обумовленою, що замість сподіваного підвищення точності визначення шуканої функції призведе до істотного зниження цієї точності.

У практичному вимірювальному експерименті ПВП доводиться розташовувати у досліджуваному полі на колах із різним радіусом  $\rho$ . У цьому випадку будуть появлятися коефіцієнти матриці не за рахунок збільшення кількості кутів сканування  $\varphi$ , а зміни величини  $\sigma$ . При цьому утворюється фактично нова матриця, яку і слід надалі використовувати для аналізу точності вимірювальної процедури при новому параметрі  $\sigma$ . Однак принциповий аспект аналізу для нової матриці залишається незмінним.

Отримані висновки доцільно продемонструвати на конкретному прикладі.

Необхідно оцінити похибку та роздільну здатність реконструкції поля за результатами вимірювання параметра поля, отриманими в точках кола з  $\sigma = 1,5$  (зовнішня задача Діріхле), при кутах сканування  $0^0, 30^0, 60^0, 90^0$ . Розглядається випадок, при якому похибки вимірювання визначаються похибками задання коефіцієнтів матриці  $\delta\|M\| = 1\%, 2\%, 5\%, 10\%, 30\%$ .

Стосовно даного прикладу поданий матеріал можна застосувати наступним чином.

При скануванні поля у чотирьох точках матриця  $[M]$  для заданих кутів  $0^0, 30^0, 60^0, 90^0$  приймає наступний вигляд:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 & \sigma^2 \cos 2\varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 & \sigma^2 \cos 2\varphi_2 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_3 & \sigma \sin \varphi_3 & \sigma^2 \cos 2\varphi_3 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_4 & \sigma \sin \varphi_4 & \sigma^2 \cos 2\varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,50 & 0 & 2,25 \\ 1 & 1,30 & 0,75 & 1,125 \\ 1 & 0,75 & 1,3 & -1,125 \\ 1 & 0 & 3,5 & -2,25 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Вектор об'єкта вимірювання має вигляд:  $\vec{X}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ .

Вигляд матриці, поданої виразом (11), вимагає врахувати наступне. Розв'язок матричного рівняння значно спрощується у випадку квадратної матриці. Однак порядок квадратної матриці може бути як парним, так і непарним. Непарний порядок матриці не призводить до ускладнень при розв'язку задачі, а при парному порядку тратиться суміжний коефіцієнт у розкладі функції джерела поля у ряд Фур'є, тобто відбувається певна втрата фазової інформації. Однак у даному випадку, коли розв'язується вимірювальна задача пов'язана лише з оцінюванням похибки, то в межах допустимої похибки можлива втрата цієї інформації (така втрата призводить до "похибки від похибки"). Таке міркування дає те, що і при парному порядку матриці, при якому кількість точок сканування поля дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів, - непотрібно застосовувати псевдорозв'язок. Досвід показує, що псевдорозв'язок часто призводить до поганої обумовленості при розв'язуванні матричної системи рівнянь, тому що використовувана у псевдорозв'язку нормальна матриця може вироджуватись.

Для спрощення викладок для матриці (11) вибираємо С-норму:

$$\|M\|_C = \max_j \sum_i |m_{ij}| = 6,75. \quad (12)$$

Число обумовленості знаходимо за виразом  $\nu = \|M\| \cdot \|M\|^{-1}$ , а для отримання його чисельного значення знаходимо обернену матрицю  $[M]^{-1}$ .

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,86 & -3,91 & -1,36 & 1,86 \\ 0,33 & -1,57 & 3,39 & -2,15 \\ -2,15 & 3,39 & -1,57 & 0,33 \\ -0,80 & 1,65 & -1,65 & 0,60 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

норма якої, порахована згідно із виразом (12), дорівнює:  $\|M\|_C = 10,52$ . Використавши отримані дані, розраховуємо число обумовленості;  $\nu = 6,75 \cdot 10,52 = 71,22$ .

В даному випадку число обумовленості велике, що свідчить про високу чутливість вимірювальної процедури до похибок вхідних даних (до похибок ПВП). У зв'язку з цим похибки у визначенні коефіцієнтів розкладу шуканої функції максимум у 71 раз перевищують похибки ПВП.

Результуюча похибка  $\delta\|\bar{X}\|$  буде формуватись внаслідок масштабування у бік збільшення похибки  $\delta\|M\|$ , згідно із виразом (8), у  $\nu$  раз. Оскільки чисельно результат  $\delta\|M\| \cdot \nu$  може змінюватись на кілька порядків, то для його зручнішого відображення доцільно застосувати значення  $\Delta_a$  як логарифмічну функцію від значення  $\delta\|M\| \cdot \nu$  у вигляді, запропонованому у праці [3]:

$$\Delta_a = \log_2^{-1} \left( 1 + \frac{1}{\nu \cdot \delta\|M\|} \right). \quad (14)$$

Таке представлення дає певні переваги з точки зору узгодження пропускну здатності вимірювальних каналів системи із продуктивністю ЕОМ та результуючою точністю результатів вимірювання.

Роздільну здатність процедури вимірювання можна подати очевидним співвідношенням:

$$\Delta_p = 1/I, \quad (15)$$

де  $I$  – порядок матриці.

Застосування співвідношень (14) і (15) до матриці  $[M]$  дає наступні значення для  $\Delta_a$  і  $\Delta_p$ :  $\Delta_a = 0,78$  і  $\Delta_p = 0,25$ , які дають точку на кривій функції зв'язку  $\Delta_a = \sigma(\Delta_p)$  при фіксованому значенні  $\nu$  (див. рис. 1, крива 1, яка відповідає значенню  $\delta\|M\| = 1\%$ ). Подальші точки цієї залежності отримуємо шляхом зниження порядку матриці  $[M]$ .

При скануванні досліджуваного поля у трьох точках матриця  $[M]$  для кутів сканування  $\varphi_1 = 0^0$ ,  $\varphi_2 = 30^0$ ,  $\varphi_3 = 60^0$  приймає вигляд:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 & \sigma \sin \varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 & \sigma \sin \varphi_2 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_3 & \sigma \sin \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0 \\ 1 & 1,3 & 0,75 \\ 1 & 0,75 & 1,293 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

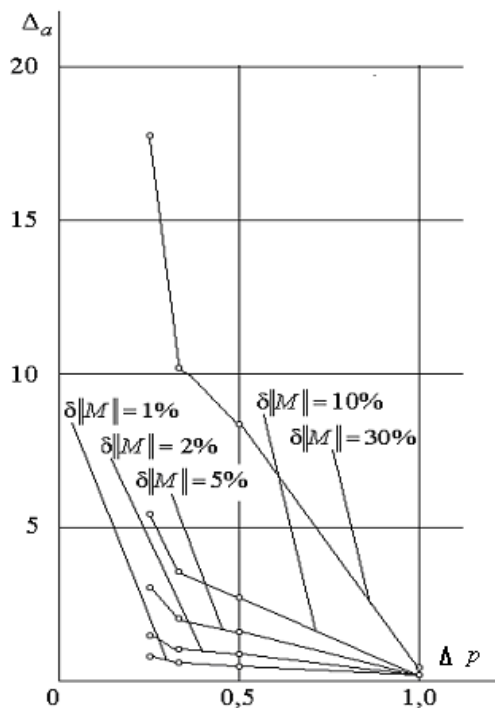


Рис. 1. Функція зв'язку між похідною вимірювання та роздільною здатністю

Таким чином, зниження порядку матриці призвело до покращення обумовленості матриці (число обумовленості зменшилось від 71 до 47 порівняно із скануванням поля у чотирьох точках) і, очевидно, зменшилась результуюча похибка. Однак це досягається за рахунок зниження результуючої здатності процедури вимірювання ( $\Delta_p$  зростає від 0,25 до 0,33).

При подальшому зниженні порядку матриці поле сканується у двох точках, і матриця  $[M]$  для  $\varphi_1 = 0^0$  і  $\varphi_2 = 30^0$  має вигляд:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \cos \varphi_1 \\ 1 & \sigma \cos \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \\ 1 & 1,3 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Вектор шуканих коефіцієнтів для цього випадку має вигляд  $\vec{X}(\alpha_0, \alpha_1)$ , а норма матриці (18) дорівнює  $\|M\|_C = 2,8$ . Обернена матриця відповідно має вигляд:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} -64,6 & 7,46 \\ 4,97 & -4,97 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

норма якої дорівнює  $\|M\|_C^{-1} = 12,4$ .

Число обумовленості для цього випадку сканування:  $\nu = \|M\| \cdot \|M\|^{-1} = 34,8$ .

Як і у попередніх випадках сканування, похибка теж знижується, однак це зниження досягається при подальшому погіршенні роздільної здатності: при  $\delta\|M\| = 1\%$  і  $\nu = 34,8$   $\Delta_a = 0,51$  і  $\Delta_p = 0,5$ . Отримані значення дають ще одну точку на кривій функції зв'язку  $\Delta_a = \sigma(\Delta_p)$  (рис. 1).

Вектор коефіцієнтів розкладу шуканої функції  $f(u)$  в ряд Фур'є має вигляд:  $\vec{X}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ .

Норма матриці (16) дорівнює:  $\|M\| = 3,55$ .

Для знаходження числа обумовленості для цього випадку сканування знаходимо обернену матрицю:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 3,73 & -6,46 & 3,73 \\ -1,82 & 4,30 & -2,48 \\ -1,82 & 2,40 & -0,66 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Норма оберненої матриці (17) дорівнює  $\|M\|_C^{-1} = 13,26$ .

Число обумовленості для цього випадку сканування дорівнює:  $\nu = 47$ .

Для значень  $\delta\|M\| = 1\%$  і  $\nu = 47$  знаходимо значення  $\Delta_a$  і  $\Delta_p$ :  $\Delta_a = 0,61$ ,  $\Delta_p = 0,33$ . Отримані значення дають ще одну точку на кривій функції зв'язку  $\Delta_a = \sigma(\Delta_p)$  (рис. 1).

Кінцева точка на кривій функції зв'язку  $\Delta_a = \sigma(\Delta_p)$  отримується для випадку сканування поля лише в одній точці  $\varphi_1 = 0^0$ . Це зовсім не інформативний випадок з точки зору роздільної здатності процедури вимірювання. Шукана функція в цьому випадку усереднюється настільки, що про її просторове розподілення нічого не можна взнати. Однак в даному випадку число обумовленості дорівнює одиниці, тобто похибки вхідних даних не збільшуються, а результат вимірювання найточніший. Величини  $\Delta_a = 0,15$  і  $\Delta_p = 1,0$  дають останню точку на кривій функції зв'язку для значення похибки  $\delta\|M\| = 1\%$ .

Інші криві на рис. 1 отримані аналогічно при значеннях похибок  $\delta\|M\| = 2\%$ ,  $5\%$ ,  $10\%$  і  $30\%$ .

Із рис. 1 очевидно, що при заданому значенні похибки вхідних даних збільшення точності визначення коефіцієнтів розкладу функції розподілу поля призводить до зниження просторової здатності вимірювальної процедури. І навпаки, при спробі підвищення роздільної здатності шляхом збільшення кількості шуканих коефіцієнтів в розкладі функції джерела поля здійснюється багатократне підсилення завжди існуючих похибок вхідних даних за рахунок погано обумовленої матриці  $[M]$  у моделі вимірювальної процедури. Звідси висновок – спроба збільшити точність вимірювання таким, на перший погляд, очевидним способом, як збільшення кількості ПВП у досліджуваному полі дає підвищення роздільної здатності вимірювання, але одночасно призводить до збільшення кінцевої похибки вимірювання.

Отримані криві функції зв'язку між  $\Delta_a$  і  $\Delta_p$  дають змогу управляти точністю вимірювального експерименту шляхом вибору такої матриці  $[M]$ , щоб при заданій роздільній здатності результуюча похибка не перевищувала допустимого значення.

Як видно із рис. 1, при збільшенні похибок вхідних даних криві функції зв'язку  $\Delta_a = \sigma(\Delta_p)$  все більше віддаляються від осей координат. Найбільш віддалена крива відповідає похибці  $\delta\|M\| = 30\%$ , і вона визначає найгірші характеристики метрологічного експерименту. При невисоких вимогах до точності ця крива може бути вибрана за криву нормування. Вище кривої нормування результати вимірювання вважаються неприйнятними з метрологічної точки зору. Виходячи із конкретних вимог до точності вимірювання, інша крива на рис. 1 може бути вибрана як крива граничної похибки, тобто вона може теж бути використана для нормування вимірювальної процедури за точністю для цих конкретних умов.

### Висновок

Векторна модель об'єкта вимірювання при експериментальному визначенні параметрів джерела поля в оберненій задачі Діріхле дає змогу побудувати функцію зв'язку між кінцевою похибкою вимірювання та роздільною здатністю вимірювального експерименту.

Отримана функція зв'язку дає змогу керувати одночасно точністю і роздільною здатністю вимірювального експерименту шляхом раціонального вибору матриці  $[M]$  моделі вимірювальної процедури, що на практиці означає раціональний вибір кількості ПВП у досліджуваному полі, їх точності і способу розташування у досліджуваному полі.

*Owing to the estimation object vector model using it is shown that it is possible to build the connection function between the estimation error and resolving ability in the experimental data field reconstruction problem. The obtained function gives the possibility to build the estimation procedure model in rational way.*



### **Література**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972. -454 с.
2. Удовиченко Е.Т. Метрологическое обеспечение измерительных информационных систем. –М.: Издательство стандартов, 1991. -192 с.
3. Беленький Я.Е. Измерение параметров пространственных полей. –Киев: Наукова думка, 1985. -288 с.
4. Араманович И.Г., Левин В.И.. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1969. -288 с.
5. Фрэнкс Л. Теория сигналов. - М.: Сов. радио, 1974. -344 с.
6. Євтух П.С. Оцінювання точності вимірювань параметрів поля забруднень природних водних середовищ при екологічних дослідженнях //Вісник Тернопільського державного технічного університету. -№1, 2000. –С 102 – 107.

*Одержано 22.10.2003 р.*