УДК 517.9
Марищак М. – ст. гр. МА-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ФУР'Є

Науковий керівник: к.т.н. Габрусєва І. Ю.

Maryshchak M.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION PROBLEM BY FOURIER METHOD

Supervisor: Habrusieva I. Yu.

Ключові слова: диференціальні рівняння, частинні похідні, метод Фур'є.
Keywords: differential equations, partial derivative, Fourier method.

Розглянемо задачу визначення стаціонарного розподілу температури всередині твердого тіла, яке має форму обмеженого циліндра радіуса a та висотою l, якщо до нижньої його основи підведено сталий тепловий потік q, а бічна поверхня та верхня основа підтримуються при постійній нульовій температурі.

Виберемо циліндричну систему координат так, щоб нижня основа лежала на площині $Or\varphi$, а вісь z співпадала з віссю циліндра. Тоді задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0, \tag{1}$$

при таких крайових умовах:

$$-k\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=q\,, \tag{2}$$

$$U\big|_{r=a}=0, \tag{3}$$

$$U\big|_{z=l}=0. \tag{4}$$

Через осьову симетрію поставленої задачі шуканий розподіл температури не залежить від φ, тоді $U=U(r,z)$. Застосуємо метод Фур'є і будемо шукати розв'язок задачі у вигляді

$$U(r,z)=R(r)Z(z).$$

Підставивши останнє співвідношення в (1) та відокремивши змінні матимемо

$$\frac{rR''+R'}{rR}=-\frac{Z''}{z}=-\lambda\,,$$

або

$$rR''+R'+\lambda rR=0, \tag{5}$$

$$Z''-\lambda Z=0. \tag{6}$$

Рівняння (5) є рівнянням Бесселя. Справді, зробивши заміну $\zeta=\sqrt{\lambda}r$, дістанемо рівняння

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta}+R=0,$$

Розв'язок якого матиме вигляд

$$R(\zeta)=AJ_0(\zeta)+BN_0(\zeta),$$

де $J_0(\zeta)$ та $N_0(\zeta)$ – функції Бесселя нульового порядку. Оскільки ми шукаємо скінченний розв'язок, то покладемо $B=0$. Отже $R(\zeta)=AJ_0(\zeta)$ або $R(r)=AJ_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$. Використавши умову (3) матимемо $J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)=0$. Позначивши через μ_n нулі функції $J_0(x)$, отримаємо власні значення

$$\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2,\ n=1,2,...$$

та відповідні їм власні функції

$$R_n(r)=A_nJ_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right).$$

Частинні розв'язки рівняння (6) матимуть вигляд

$$Z_n(z)=B_n ch\left(\frac{\mu_n z}{a}\right)+C_n sh\left(\frac{\mu_n z}{a}\right).$$

Тоді загальний розв'язок поставленої задачі математичної фізики будемо шукати у вигляді

$$U(r,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n ch\left(\frac{\mu_n z}{a}\right)+\tilde{B}_n sh\left(\frac{\mu_n z}{a}\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right).$$

Для визначення невідомих $\tilde{A}_n$ та $\tilde{B}_n$ скористаємось поки не використаними крайовими умовами. Із (2) матимемо

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{B}_n\frac{\mu_n}{a}J_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right)=-\frac{q}{k}.$$

Звідки, зробивши заміну $\frac{r}{a}=\rho$ матимемо:

$$\tilde{B}_n\frac{\mu_n}{a}=-\frac{q}{kN_n^2}\int_0^1\rho J_0(\mu_n\rho)d\rho,\ \text{де}\ N_n^2=\int_0^1\rho J_0^2(\mu_n\rho)d\rho=\frac{1}{2}J_1^2(\mu_n).$$

Отже $\tilde{B}_n\frac{\mu_n}{a}=\frac{-2q}{kJ_1^2(\mu_n)}\int_0^1\rho J_0(\mu_n\rho)d\rho=\frac{-2q}{k\mu_nJ_1(\mu_n)}$, звідки $\tilde{B}_n=\frac{-2aq}{k\mu_n^2J_1(\mu_n)}$.

Аналогічно із (4) отримуємо $\tilde{A}_n=-\tilde{B}_n th\frac{\mu_n l}{a}$.

Отже, остаточно $U(r,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sh\frac{\mu_n(l-z)}{a}}{k\mu_n^2J_1(\mu_n)ch\frac{\mu_n l}{a}}J_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right)$.

Література

3. Марущак П. Моделювання експлуатаційного термоциклування ролика МБЛЗ на малогабаритному автоматизованому стенді / Марущак П., Габрусєв Г., Баран Д., Біщак Р., Готович Ю. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 17. — № 2. — С.24-29.
4. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.