УДК 517.9
Джигринюк О. – ст. гр. ЕТ-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Габрусєв Г. В.

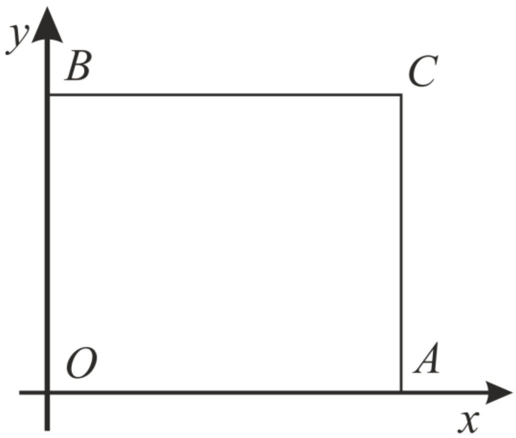
Dzhyhryniuk O.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

APPLICATION OF THE FURIER METHOD IN THE PROBLEMS OF ELECTRICAL ENGINEERING

Supervisor: Habrusiev H. V.

Ключові слова: диференціальні рівняння, частинні похідні, метод Фур'є.
Keywords: heat conduction, differential equations, partial derivative, Furier method.

Розглянемо задачу відшукання розподілу потенціалу електричного поля $U(x,y)$ всередині прямокутника $OACB$, у якого вздовж сторони OB потенціал дорівнює U_0, а три інші сторони заземленні. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.



Оскільки електричні заряди всередині прямокутника відсутні, то задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

при таких крайових умовах:

$$U(0,y)=U_0,\ U(a,y)=0, \qquad (2)$$

$$U(x,0)=0,\ U(x,b)=0. \qquad (3)$$

Для розв'язання поставленої задачі математичної фізики скористаємось методом Фур'є. Його суть полягає у побудові загального розв'язку задачі за допомогою суперпозиції частинних розв'язків, що мають вигляд добутку множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Отже шукатимемо розв'язок рівняння (1) у вигляді $U(x,y)=X(x)Y(y)$. Після підстановки в рівняння та відокремлення змінних, матимемо

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda,$$

або

$$X''(x)-\lambda X(x)=0, \qquad (4)$$

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0. \qquad (5)$$

Враховуючи умови (2), матимемо

$$Y(0)=0,\ Y(b)=0 \qquad (6)$$

Співвідношення (5) – (6) є найпростішою задачею Штурма-Ліувілля, розв'язок якої при $\lambda > 0$ матиме вигляд

$$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}y + B\sin\sqrt{\lambda}y.$$

Із умови (6) одержимо власні значення

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots$$

Їм відповідатимуть власні функції

$$Y_n(y) = B_n \sin\frac{n\pi}{b}y.$$

Розв'язком рівняння (4) буде

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}.$$

Тоді частинний розв'язок поставленої задачі матиме вигляд

$$U_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y).$$

Загальний розв'язок побудуємо у вигляді ряду

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + \tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y. \quad (7)$$

Знайдемо значення коефіцієнтів розкладу (7). Для цього вимагатимемо виконання крайових умов (2)

$$U(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n + \tilde{B}_n\right)\sin\frac{n\pi}{b}y = U_0, \quad (8)$$

$$U(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n e^{\frac{n\pi}{b}a} + \tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi}{b}a}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y = 0. \quad (9)$$

Врахувавши (8), обчислимо суму $\tilde{A}_n + \tilde{B}_n$, як коефіцієнт Фур'є за формулою

$$\tilde{A}_n + \tilde{B}_n = \frac{2}{b}\int_0^b U_0 \sin\frac{n\pi}{b}y\,dy = \frac{2U_0}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0, n = 2k, k = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{4U_0}{n\pi}, n = 2k+1, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

У першому випадку, коли n – парне, із співвідношення (9), матимемо $\tilde{A}_n = \tilde{B}_n = 0$. Якщо ж n – непарне, аналогічно отримуємо

$$\tilde{A}_n = -\tilde{B}_n e^{-\frac{2n\pi}{b}a}, \; \tilde{B}_n = \frac{4U_0 e^{\frac{n\pi}{b}a}}{n\pi\left(e^{\frac{n\pi}{b}a} - e^{-\frac{n\pi}{b}a}\right)}.$$

Підставивши одержані вирази в (6) остаточно матимемо

$$U(x, y) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{\pi(2k+1)(a-x)}{b}}{(2k+1)sh\frac{\pi(2k+1)a}{b}}\sin\frac{(2k+1)\pi}{b}y.$$

Література

1. Марущак П. Моделювання експлуатаційного термоциклування ролика МБЛЗ на малогабаритному автоматизованому стенді / Марущак П., Габрусєв Г., Баран Д., Біщак Р., Готович Ю. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 17. — № 2. — С.24-29.
2. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.