

УДК: 539.3

Г.В. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук, доц., І.Ю. Габрусєва, канд. техн. наук,  
Т.Б. Пиндус

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## ОЦІНКА МІЦНОСТІ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ ТОВСТОЇ ПЛИТИ

Н. Habrusiev, Ph.D., Assoc. Prof., I. Habrusieva, Ph.D., T. Pyndus

### STRENGTH ESTIMATION OF THE PRELIMINARY STRESSED THICK PLATE

Визначення контактних напружень і деформацій при взаємодії жорстких штампів з пружною плитою є важливим завданням при проектуванні деталей машин та елементів споруд. Зокрема, при оцінці міцності залізобетонних перекриттів, монолітних фундаментних плит у будівництві, дорожнього покриття тощо. Щоб мінімізувати похибку розрахунків, необхідно враховувати максимальну кількість чинників, що впливають на контактну взаємодію. Початкові деформації, від яких безпосередньо залежать контактні напруження та переміщення, є одним із ключових факторів.

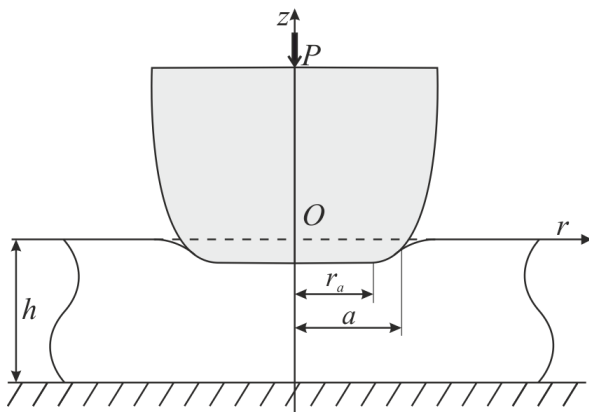


Рис. 1. Схема контактної взаємодії параболічного штампа та шару.

Розглянемо жорсткий штамп утворений обертянням вітки параболи із параметром  $R$  та відрізка прямої, яка перпендикулярна до осі параболи і проходить через її вершину, навколо спільної осі, що паралельна до осі параболи. Штамп поступально без обертання та тертя втискується постійною силою  $P$  у попередньо напружений шар товщиною  $h$ , закріплений на жорсткій основі.

Виберемо циліндричну систему координат  $(O, r, \theta, z)$  так, щоб координатна площина  $(r, O, \theta)$  збігалася з верхньою граничною

площиною шару, а вісь  $Oz$  – з віссю симетрії штампа (рис. 1).

Вважатимемо відомим радіус ділянки контакту  $a$ . Виходячи із формулювання задачі, можна описати функцію, обертянням графіка якої навколо осі  $Oz$  утворено штамп

$$W(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_a; \\ \frac{1}{2R}(r - r_a)^2, & r_a < r. \end{cases}$$

Граничні умови поставленої задачі мають вигляд

$$Q_{3r}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad (1)$$

$$Q_{33}(r, 0) = 0, \quad a \leq r; \quad (2)$$

$$u_3(r, 0) = \omega(r), \quad 0 \leq r \leq a; \quad (3)$$

$$u_r(r, -h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad (4)$$

$$u_3(r, -h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5)$$

Функція  $\omega(r)$  описує переміщення точок верхньої граничної площини пружного шару на ділянці його контакту з жорстким штампом.

Будемо вважати залишкові напруження, наявні у шарі, однорідними. Тому для розв'язання поставленої задачі можна скористатись апаратом лінеаризованої теорії

пружності [1]. В математичному плані задача зводиться до розв'язання парних інтегральних рівнянь. За допомогою розробленої методики [2] шукані функції розподілу контактних напружень та вертикальних переміщень точок граничної площини плити можна записати у вигляді:

$$Q_{33}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right)}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n}, \quad u_3(r, 0) = -\frac{k_1 P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n},$$

де  $\lambda_n, n = \overline{1, N}$  – додатні корені функції Бесселя  $J_0(\lambda_n) = 0$ ,  $a_n^*$  – знайдені коефіцієнти,  $K_n$  та  $\Psi_n(\alpha)$  – відомі функції, а  $\Delta(\alpha)$  та  $k_1$  залежать від форми пружного потенціалу, наявного у плиті [2].

На рис. 2 та 3 наведено графіки функцій  $\sigma^* = Q_{33}(r, 0)/P$  та  $u^* = u_3(r, 0)/P$ . У якості числового прикладу розглянуто випадок наявності у плиті пружного потенціалу гармонічного типу [1] при  $h=1, a=1$ . Крива 1 відповідає  $r_a=0$  (в основі штампа відсутня плоска ділянка), крива 2 –  $r_a=0.2$ , а крива 3 –  $r_a=0.5$ .

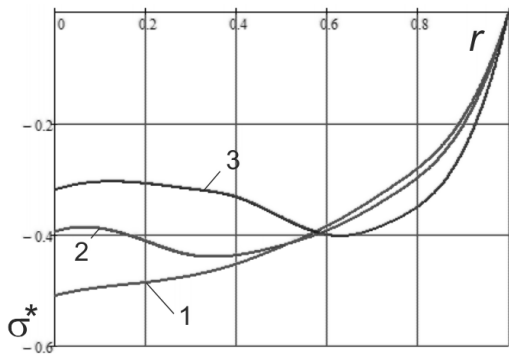


Рис. 2. Контактні напруження

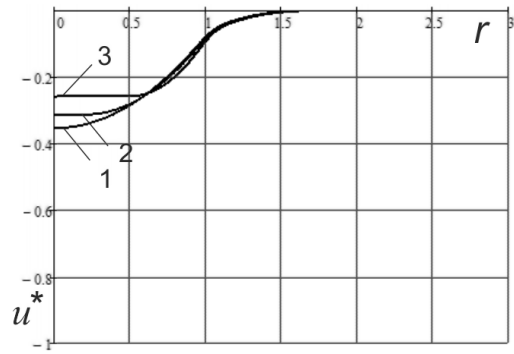


Рис. 3. Вертикальні переміщення

**Висновки.** Із проведеного числового експерименту випливає, що форма штампа суттєво впливає на величину та характер розподілу контактних напружень. Зокрема, у параболічних штампів без плоскої ділянки в основі екстремальні значення контактних напружень виникають у центрі області контакту. Поява плоскої ділянки спричиняє зсув точок екстремуму до краю ділянки контакту та зменшує їх абсолютну величину. Якщо  $r_a = 0.2a$  (рис. 1), то абсолютна величина контактних напружень зменшується приблизно на 10%, якщо  $r_a = 0.5a$  – на 12%. Вертикальні переміщення при цьому зменшуються на 9% та 11% відповідно. Одержані в роботі результати можуть використовуватися при розробці методик зменшення контактних напружень або вертикальних переміщень при проектуванні різного роду конструкцій.

### Література

1. Гузь О. М. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навч. посібник / Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. – К: Вища школа, 1995. – 304 с.
2. Габрусев Г. В. Тиск параболічного штампа на попередньо напружений шар / Г. В. Габрусев, І. Ю. Габрусєва, Т. Б. Пиндус // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – 2019. – Випуск 68 – С. 13 – 18.