УДК 519.218

Н. Стадник, С. Лупенко, д-р. техн. наук, проф., К. Чізова Ннамене
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

КЛАСИ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ЦИКЛІЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ НИМИ

N. Stadnyk, S. Lupenko, Dr., Prof., Ch. Chizoba Nnamene

CLASSES OF EQUIVALENCE OF CYCLIC RANDOM PROCESSES AND THE RELATIONSHIP BETWEEN THEM

Нехай маємо клас $\mathbf{\Theta}$ усіх можливих циклічних відносно ймовірнісних атрибутів випадкових процесів дискретного або континуального аргументів [1]. Задамо різні типи відношень еквівалентності на класі $\mathbf{\Theta}$ циклічних випадкових процесів. Зокрема, введемо відношення еквівалентності $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$, що грунтується на понятті ізоморфізму [2] циклічних випадкових процесів відносно порядку та значень, та породжує розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_1} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}, \beta \in \mathbf{B}\right\}$ класу $\mathbf{\Theta}$ на підкласи еквівалентності. Також розглянемо відношення еквівалентності $\varphi_2 \subset \mathbf{\Theta}^2$, що грунтується на понятті ізоморфізму циклічних випадкових процесів відносно порядку та їх ймовірнісних атрибутів циклічності, та породжує розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}, \upsilon \in \mathbf{Y}\right\}$ класу $\mathbf{\Theta}$ на підкласи еквівалентності. Окрім цих двох типів відношень еквівалентності на класі $\mathbf{\Theta}$ задамо відношення еквівалентності $\varphi_3 \subset \mathbf{\Theta}^2$, яке має місце між строго ритмічно пов’язаними циклічними випадковими процесами із $\mathbf{\Theta}$, та, яке породжує розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_3} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\gamma}^{\varphi_3}, \gamma \in \mathbf{\Gamma}\right\}$ класу $\mathbf{\Theta}$ на підкласи строго ритмічно пов’язаних циклічних випадкових процесів. Встановимо основні залежності між розглянутими вище відношеннями еквівалентності $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$, $\varphi_2 \subset \mathbf{\Theta}^2$ та $\varphi_3 \subset \mathbf{\Theta}^2$, а також між породжуваними ними розбиттями $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_1} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}, \beta \in \mathbf{B}\right\}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}, \upsilon \in \mathbf{Y}\right\}$ та $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_3} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\gamma}^{\varphi_3}, \gamma \in \mathbf{\Gamma}\right\}$ класу $\mathbf{\Theta}$ усіх можливих циклічних відносно множини ймовірнісних характеристик випадкових процесів.

Оскільки із ізоморфізму циклічних випадкових процесів відносно порядку та значень із необхідністю слідує їх ізоморфізм відносно порядку та ймовірнісних атрибутів циклічності, то із відношення еквівалентності $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$ із необхідністю слідує відношення еквівалентності $\varphi_2 \subset \mathbf{\Theta}^2$ ($\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$), а саме, має місце така залежність між цими відношеннями:

$$\varphi_1 \subset \varphi_2 \subset \mathbf{\Theta}^2 . \tag{1}$$

Тобто відношення $\varphi_2 \subset \mathbf{\Theta}^2$ як підмножина декартового квадрату множини $\mathbf{\Theta}$ циклічних відносно ймовірнісних атрибутів випадкових процесів включає відношення $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$. Із співвідношення (1) безпосередньо випливає, що розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_1} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}, \beta \in \mathbf{B}\right\}$ класу $\mathbf{\Theta}$ циклічних випадкових процесів є більш дрібнішим, ніж його розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}, \upsilon \in \mathbf{Y}\right\}$. А саме, оскільки кожний υ-елемент $\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}$ розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}, \upsilon \in \mathbf{Y}\right\}$ є множиною ізоморфних відносно порядку та ймовірнісних атрибутів циклічності циклічних випадкових процесів, то задавши відношення еквівалентності $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$ безпосередньо на ньому ($\varphi_1 \subset \left(\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}\right)^2$), отримаємо розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}}^{\varphi_1} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\upsilon,\mu}^{\varphi_1}, \mu \in \mathbf{M}\right\}$ цього υ-елемента $\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}$. Кожен μ-елемент $\mathbf{\Theta}_{\upsilon,\mu}^{\varphi_1}$ розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}}^{\varphi_1} = \left\{\mathbf{\Theta}_{\upsilon,\mu}^{\varphi_1}, \mu \in \mathbf{M}\right\}$ є класом еквівалентності, а саме, класом ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів із υ-елемента $\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}$. Розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}, \upsilon \in \mathbf{Y}\}$ класу $\mathbf{\Theta}$, що породжене відношенням еквівалентності $\varphi_2 \subset \mathbf{\Theta}^2$, можна подати через елементи більш дрібнішого розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_1} = \{\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}, \beta \in \mathbf{B}\}$, породженого відношенням $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$, а саме так: $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \left\{ \bigcup_{\mu \in \mathbf{M}} \mathbf{\Theta}_{\upsilon,\mu}^{\varphi_1}, \upsilon \in \mathbf{Y} \right\}$.

Оскільки будь-який клас еквівалентності $\mathbf{\Theta}_{\upsilon,\mu}^{\varphi_1}$ у розбитті $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}}^{\varphi_1} = \{\mathbf{\Theta}_{\upsilon,\mu}^{\varphi_1}, \mu \in \mathbf{M}\}$ класу $\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}$ однозначно задається, маркується параметром $\mu \in \mathbf{M}$, а будь-який клас еквівалентності $\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}$ у розбитті $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_2} = \{\mathbf{\Theta}_{\upsilon}^{\varphi_2}, \upsilon \in \mathbf{Y}\}$ ідентфікується параметром $\upsilon \in \mathbf{Y}$, а для ідентифікації будь-якого класу $\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}$ у розбитті $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_1} = \{\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}, \beta \in \mathbf{B}\}$ необхідно задати параметр $\beta \in \mathbf{B}$, то цей параметр можна задати парою (υ, μ), яка є елементом декартового добутку $\mathbf{Y} \times \mathbf{M}$ індексних множин $\mathbf{Y}$ та $\mathbf{M}$. Тобто, індексна множина $\mathbf{B}$ пов'язана із індексними множинами $\mathbf{Y}$ та $\mathbf{M}$ через їх декартовий добуток, а саме, $\mathbf{B} = \mathbf{Y} \times \mathbf{M}$.

Відношення $\varphi_1 \subset \mathbf{\Theta}^2$ та $\varphi_3 \subset \mathbf{\Theta}^2$ як підмножини декартового степеня множини $\mathbf{\Theta}$, не мають спільних елементів:

$$\varphi_1 \bigcap \varphi_3 = \varnothing . \tag{2}$$

Тобто, із (2) слідує, що якщо будь-які два циклічні випадкові процеси із $\mathbf{\Theta}$ є ізоморфними відносно порядку та значень (належать деякому класу еквівалентності $\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}$), то вони із необхідністю не є строго ритмічно пов'язаними (мають різні функції ритму і одночасно не належать жодному із класів еквівлентності $\mathbf{\Theta}_{\gamma}^{\varphi_3}$). З іншої сторони, якщо будь-які два циклічні випадкові процеси із $\mathbf{\Theta}$ є строго ритмічно пов'язаними (мають рівні функції ритму і належать деякому класу еквівлентності $\mathbf{\Theta}_{\gamma}^{\varphi_3}$ із $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_3}$), то вони із необхідністю не є ізоморфними відносно порядку та значень і одночасно не належать жодному класу еквівалентності $\mathbf{\Theta}_{\beta}^{\varphi_1}$ із $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}^{\varphi_1}$.

Виходячи із наведеного вище, видно, що будь-який елемент (циклічний випадковий процес) із $\mathbf{\Theta}$ може бути однозначно ідетнифікованим, шляхом його мічення параметрами β та γ, а саме, парою (β, γ) із декартового добутку $\mathbf{B} \times \mathbf{\Gamma}$ індексних множин $\mathbf{B}$ та $\mathbf{\Gamma}$. Тобто, параметри β та γ, фактично, задають певну умовну систему координат, із допомогою якої можна ідентифікувати будь-який циклічний випадковий процес із $\mathbf{\Theta}$.

Наведені вище співвідношення лежать в основі структуризації класу циклічних випадкових процесів, що полягає у виявленні різних видів його розбиття на класи еквівалентності, встановлення їх властивостей та аналітичних залежностей між цими відношеннями еквівалентності та елементами розбиттів, що дає можливість розробки методів їх статистичного опрацювання із низькою обчислювальною складністю в портативних цифрових системах із обмеженими обчислювальними ресурсами.

Література

1. Лупенко С.А. Наукова монографія «Теоретичні основи моделювання та опрацювання циклічних сигналів в інформаційних системах» С.А. Лупенко. – Львів: Вид-во «Магнолія – 2006», 2016, – 344 с.
2. Steve Awodey. Category Theory/ Steve Awodey//Oxford science publications. Clarendon press. – Oxford New York 2006. – P.256. ISBN 0-19-856861-4. 978-0-19-856861-2.