УДК 519.8
Р.М. Небесний, І.В. Свистун, О.С. Голотенко, канд техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОРІЄНТОВАНИЙ АЦИКЛІЧНИЙ ГРАФ

R. Nebesnyy, I. Svistun, O. Golotenko, Ph. D.

ORIENTED ACYCLIC GRAPH

У математиці та інформатиці, орієнтований ациклічний граф (DAG), являє собою орієнтований граф без орієнтованих циклів. Тобто, він формується сукупністю вершин і орієнтованих ребер, кожне ребро з'єднує одну вершину з іншою, так що немає не можливо з деякої вершини V пройти деяку послідовність ребер і знов повернутися до V.

DAG можуть бути використані для моделювання багатьох різних видів інформації. Відношення досяжності в DAG утворює частковий порядок, а будь-яке кінцевий частковий порядок може бути представлений у вигляді DAG за допомогою відношення досяжності. Набір завдань, які повинні формувати послідовність, за умови, що деякі завдання повинні виконуватись раніше, ніж інші, можуть бути представлені у вигляді DAG з вершиною для кожного завдання і ребрами для кожного обмеження; алгоритми топологічного впорядкування можуть використовуватися для генерації валідної послідовності. Крім того, DAG може бути використаний як просторово-ефективне представлення набору послідовностей з підпослідовностями, які перекриваються. DAG також використовується для представлення системи подій або можливих подій і причинно-наслідкових зв'язків між ними. DAG також можуть бути використані для моделювання процесів, в яких потоки даних в рухаються через мережу процесорів, або станів сховища в системі керування версіями.

Відповідна концепція множини неорієнтованих графів називається лісом – неорієнтований граф без циклів. Вибір орієнтації для лісу виробляє особливий вид спрямованого ациклічного графа, що називається орієнтованим деревом. Крім того, кожен неорієнтований граф має ациклічну орієнтацію, розподілення напрямку для його ребер, що робить його орієнтованим ациклічним графом.

DAG має наступні математичні властивості: доступність; транзитивне замикання; транзитивне скорочення.

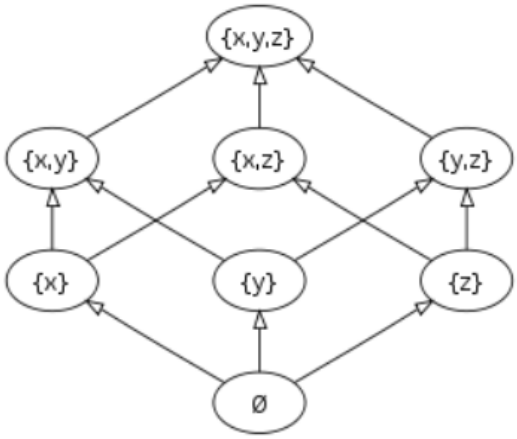

Рисунок 1 – Діаграма Гассе, яка представляє відношення часткового порядку серед множини підмножин елементів дерева

Кожен орієнтований ациклічний граф породжує частковий порядок ⊆ для його вершин, де u ⊆ v, коли існує орієнтований шлях з u в v в DAG. Тим не менше, багато різних DAG можуть призвести до цього ж відношення досяжності співвідношенням. Наприклад, DAG з двома ребрами a → b і b → c має те ж відношення досяжності, що й

граф з трьома ребрами a → b, b → c, a → c. Нехай G це DAG, його транзитивне скорочення це граф з найменшою кількістю ребер, що представляє те ж відношення досяжності, що і G, і його транзитивне замикання це граф з більшістю ребер, який представляє те ж відношення досяжності.

Транзитивне скорочення і транзитивне замикання однозначно визначені для DAG; на відміну від цього, для орієнтованого графа, що не є ациклічним, не може бути більше, ніж одного мінімального підграфа з тим же відношенням досяжності.

Транзитивне замикання G має ребро u → v для зв'язаної кожної пари u ≤ v різних елементів в відношенні досяжності G, і, отже, може розглядатися як орієнтоване представлення відношення досяжності ⊆ в термінах теорії графів: кожна частково впорядкована множина можуть бути перетворена в DAG в цьому випадку. Якщо DAG G являє собою часткове відношення ⊆, то транзитивне скорочення G є підграфом G з ребром u → v для кожної пари часткового порядку ⊆; транзитивне скорочення корисне в візуалізації часткового порядку, тому що вони мають менше ребер, ніж інші графи, що представляють той самий порядок, і тому спрощують креслення графа. Діаграма Гассе, зображена на рисунку 1 часткового порядку являє собою креслення транзитивного скорочення, в якому орієнтація кожного ребра показана шляхом розміщення вихідної вершини ребра на нижчу, ніж кінцева вершина ребра, позицію.

Отже, тип застосування спрямованих ациклічних графів виникає в стислому поданні безлічі послідовностей у вигляді шляхів в графі. Наприклад, орієнтований ациклічний граф слова являє собою структуру даних в інформатиці, утворену орієнтованим ациклічним графом з одним джерелом і з ребрами, поміченими літерами або символами; шлях від джерела до приймача в цьому графіку являє собою набір рядків, таких як англійські слова. Орієнтований ациклічний граф слова економить простір порівняно з префіксним деревом, дозволяючи шляхам розходитися і сходитися таким чином, що набір слів з тими ж ймовірними суфіксами може бути представлений в одному вузлі дерева.

Та ж ідея використання DAG для представлення сімейства шляхів, використана в бінарній діаграмі рішень, структури даних, які базуються на DAG використовуються для представлення двійкових функцій. У бінарній діаграмі рішень кожна вершин, яка не є приймачем, позначена ім'ям двійкової змінної, а кожен приймач і кожне ребро позначене 0 або 1. Значення функції для будь-якої підстановки змінної є значенням приймача, знайденим по шляху від однієї вершини джерела до кожної вершини не приймача по вихідному ребру, що має міткою значення змінної в початковій вершині. Так само, як спрямовані ациклічні графи слів можна розглядати як стислий вигляд префіксних дерев, бінарні діаграми рішень можна розглядати як стислі форми дерев рішень, які економлять простір, дозволяючи шляхам з'єднуватись, коли вони погоджуються з результатами всіх інших рішень.

Література.

1. Tisseur F. Parallizing The devide and conquer algorithm for the symmetric tridiagonal eigenvalue problem on distributed memory architechtures / F. Tisseur, J. Dongarra // SIAM J. SCI. COMPUT, 1998. – vol. 20. – C. 2223-2236.

2. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide / [Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra та ін.]. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 440 с.